OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA 2007

Nível I 2ª Fase

Questões e soluções:

1. Seis amigos disputaram um torneio. Cada jogo foi entre dois times de três competidores cada um. Após cada jogo, os times foram modificados e, durante todo o torneio, nenhum time se repetiu. O torneio acabou depois que todos os confrontos possíveis foram jogados. Quantos jogos houve no torneio?

   Solução. Como pensaria um dos competidores? "Uma vez escolhidos meus companheiros, o time adversário está definido." Então, basta contar de quantas maneiras se pode escolher dois companheiros entre os cinco amigos. Numerando os amigos de 1 até 5, as possíveis escolhas são: 1 e 2; 1 e 3; 1 e 4; 1 e 5; 2 e 3; 2 e 4; 2 e 5; 3 e 4; 3 e 5; 4 e 5. Pode-se concluir portanto que houve dez jogos no torneio.

2. Nádia fez uma comparação para saber se ficaria mais barato assar pão em casa ou comprar na padaria. Comprando na padaria, ela gastaria $R\$\ 1,20$ por dia. Fazendo em casa, ela gastaria $R\$\ 3,85$ por semana em matéria prima (ovos, óleo, farinha, fermento, sal, leite...) e seu consumo de gás aumentaria de 3 botijões a cada 5 meses para 5 botijões a cada 4 meses. O preço de cada botijão é $R\$\ 30,00$. O que Nádia concluiu? (Considere todos os meses com 30 dias).

   Solução. Vamos ver quanto seria o gasto de Nádia por dia se ela fizesse o pão em casa. Em matéria prima, ela gastaria $R\$\ 3,85$ em 7 dias, ou seja, $R\$\ 3,85 \div 7 = R\$\ 0,55$ por dia. Seu consumo de gás aumentaria de 3 botijões ($R\$\ 90,00$) a cada 5 meses (150 dias) para 5 botijões ($R\$\ 150,00$) a cada 4 meses (120 dias). Em termos de reais por dia, o aumento seria de $90 \div 150 = R\$\ 0,60$ para $150 \div 120 = R\$\ 1,25$. Ou seja, Nádia gastaria com gás $R\$\ 0,65$ a mais por dia fazendo pão em casa. Somando os dois valores obtidos, o gasto de Nádia por dia seria $R\$\ 0,55 + R\$\ 0,65 = R\$\ 1,20$. O que significa que em termos de preço por dia, as opções são equivalentes.

3. Uma escola comprou 72 cadernos iguais. O recibo de venda mostrava o preço total de $R\$\ \#67,9*$, onde tanto o primeiro dígito ($\#$) como o último ($*$) estavam ilegíveis. Quanto custou cada caderno?

   Solução. Para descobrir que números são $\#$ e $*$, admitindo que todos os cadernos têm mesmo preço, o número $\#67,9*$ deve ser um múltiplo de 72. Podemos tirar a vírgula, se pensarmos que o preço é $\#679*$ centavos. Como os divisores de 72 são 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 e 72, estes números são, obrigatoriamente, divisores de $\#679*$. Em particular, $*$ deve ser par. Mas também deve ser múltiplo de 4. Como $\#679* = \#6700 + 9*$ e $\#6700$ já é múltiplo de 4, a divisão de $9*$ por 4 deixa resto zero. Por tentativa, podemos descobrir que só há duas possibilidades: 92 e 96. Também sabemos que $\#679*$ é múltiplo de 9, ou seja, que a soma $\# + 6 + 7 + 9 + *$ é multiplo de 9. Se tivermos $* = 2$, então a soma fica $\# + 6 + 7 + 9 + 2 = \# + 24$ e concluímos que $\# = 3$. Por outro lado, se tivermos $* = 6$, então a soma fica $\# + 6 + 7 + 9 + 6 = \# + 28$ e concluímos que $\# = 8$. Em resumo, o preço total dos 72 cadernos pode ser 36.792 centavos ou 86.796 centavos. Temos que testar e ver qual dos dois é divisível por 72. Fazendo a conta, vemos que 36.792 deixa resto zero e 86.796 não. Então o preço de cada caderno é $R\$\ 367,92 \div 72 = R\$\ 5,11$.

4. Nélson pode cortar pedaços de barbante de tamanho 1 cm, 2 cm, 4 cm, 8 cm e assim por diante, sempre duplicando o tamanho anterior, até atingir o comprimento de 1024 cm. Ele juntou vários pedaços para cobrir uma distância de 2007 cm. Quantos pedaços de barbante, no mínimo, ele usou?

   Solução. Os comprimentos possíveis são, em centímetros: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 e 1024. Nélson deve sempre usar o maior pedaço possível, portanto é natural que comece pelo maior, 1024 cm. Não pode usar outro de mesmo tamanho, pois $1024 + 1024$ é maior que 2007, então o segundo pedaço de barbante mede 512. A distância já coberta é $1024 + 512 = 1536$. O próximo pedaço não pode ser de 512, caso contrário a soma ultrapassaria 2007. Então deve ser de 256 e a distância já coberta é agora $1536 + 256 = 1792$. Repetindo o raciocínio, o próximo pedaço de barbante mede 128 e a distância já coberta é $1792 + 128 = 1920$. O próximo pedaço mede 64 e a distância já coberta é $1920 + 64 = 1984$. O próximo pedaço não pode medir 32, pois $1984 + 32 = 2016$, que ultrapassa 2007. O próximo pedaço mede portanto 16 e a distância já coberta é $1984 + 16 = 2000$. O próximo pedaço não pode medir 8, logo deve medir 4. E, finalmente, os dois últimos medem 2 e 1, totalizando 2007 cm. Conclusão: Nélson teve de usar no mínimo 9 pedaços de barbante.

5. Numa folha de papel em forma de triângulo equilátero de lado 12, são feitas três dobras, nas linhas pontilhadas, como mostram as ilustrações. As linhas de dobra são paralelas aos lados e dividem cada lado em comprimentos 5, 2 e 5. Depois de feitas as dobras, a região obtida pela superposição dos "cantos" do triângulo original ainda tem a forma de um triângulo equilátero. A área deste novo triângulo representa que fração da área de toda a folha?

   Solução. A primeira pergunta a ser feita é quanto mede o lado do triângulo equilátero em destaque nas duas últimas figuras. Olhando para a terceira figura, onde o triângulo central aparece pela primeira vez, sabendo que as linhas de dobra dividem o lado do triângulo original em medidas 5, 2 e 5, podemos concluir que a medida procurada é exatamente 3 (veja a linha horizontal da terceira figura: ela ficou dividida em 2, 3 e 2 e a parte correspondente à medida 3 é exatamente o lado do triângulo central). A próxima pergunta a ser respondida é quantos triângulos equiláteros de lado 3 cabem num triângulo equilátero de lado 12. É uma simples contagem que pode ser feita usando um desenho como o abaixo, onde o triângulo maior tem lado 12 e os menores têm lado 3.

   De modo que a resposta é: cabem 16 triângulos de lado 3 dentro do de lado 12. Logo a fração procurada é $\dfrac{1}{16}$.