Versão Preliminar
Solução e Pauta de Correção
Nível II

1. Seja P o preço de cada caderno, e seja $N = 100 \times P$, assim N é inteiro. Logo temos que encontrar N tal que

$$\#679* = 72 \times N = 9 \times 8 \times N$$

Assim $\#679*$ é divisível por 8 e 9. Para que $\#679*$ seja divisível por 8, basta que o número formado pelos 3 últimos dígitos seja divisível por 8, logo dividindo $79*$ por 8 obtemos que $* = 2$. Agora para que $\#6792$ seja divisível por 9 precisamos que a soma de seus dígitos seja divisível por 9, isto é $\# + 24$ seja divisível por 9, logo $\# = 3$, portanto

$$\frac{367,92}{72} = 5,11$$

2. Primeira solução: Denotemos por l o comprimento do lado do triângulo equilátero. Usando o teorema de Pitagoras é conhezido que a altura do triangulo é $\frac{1}{2}\sqrt{3}l$. Se denotamos por E o ponto de interseção de AC com BD temos que o triângulo $\triangle ABE$ é um triângulo retângulo com ângulo reto em E e os os comprimentos dos lados são 1, $\frac{1}{2}l$ e $l - \frac{1}{2}\sqrt{3}l$. Assim pelo teorema de Pitagoras temos que

$$1 = \left(\frac{1}{2}l\right)^2 + \left(l - \frac{1}{2}\sqrt{3}l\right)^2 = (2-\sqrt{3})l^2,$$

Portanto $l = \sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Segunda solução: Dado que AC é perpendicular a DB, então $\measuredangle ACB = 30^o$. Usando o teorema dos cossenos no triângulo $\triangle ABC$ temos que

$$1 = AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cos 30^o = BC^2(2-\sqrt{3})$$

logo

$$BC = \sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

3. Observemos que se temos dois pedaços de barbante do mesmo tamanho 2^k, então estes dois barbantes podem ser trocados por um so de tamanho 2^{k+1}, obtendo um número de barbantes menor, assim para

usar a mínima quantidade de barbantes possíveis todos os barbantes tem comprimentos diferentes. O maior barbante menor do que 2007 é 1024, e 2007-1024=983. Assim precisamos cobrir ainda 983 cm. O maior barbante menor do que 983 é 512, e $983 - 512 = 471$. Seguindo este mesmo processo obtemos que

$$2007 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 4 + 2 + 1,$$

isto é 9 pedaços de barbante.

4. Se no ano 2006 plantou n^2, então no ano 2007 ele plantou $n^2 + 211$. Como a horta em 2007 também é quadrada temos que $n^2 + 211 = k^2$ e portanto $k^2 - n^2 = 211 = (k - n)(k + n)$. Como 211 é um número primo temos que $k - n = 1$ e $k + n = 211$, segue-se que $k + (k - 1) = 211$ e $k = 106$, portanto ele plantou $106^2 = 11236$ pés de alface

5. Observemos primeiro que 90 pontos não é suficiente para garantir ficar entre os 8 primeiro. Para isto, suponhamos um campeonato onde acontece a seguinte situação

   (a) Em nos jogos que aconteceram entre os primeiro 9, o local sempre ganhou

   (b) Os primeiros 9 ganharam sempre dos 11 últimos.

   Neste campeonato esquisito os primeiro 9 ficaram empatados em pontos com 90 pontos, assim a posição 9 é decidida por outro critério.