Questão 1: Veja solução da prova do Nível I

Questão 2:

Altura do triângulo equilátero de lado L : $h = \frac{\sqrt{3}}{2}L$

Raio do círculo inscrito: $R = \frac{L}{3}h$

Sejam O o vértice do primeiro triãngulo que encontra-se sobre o lado AC do segundo trinângulo e F, a intersecção do segmento DE com o lado do primeiro triângulo como na figura.

O triângulo $\triangle DOF$ é semelhante ao triângulo $\triangle ABC$ (caso AAA) e sua altura é igual a $h - 2R = h - 2\frac{h}{3} = \frac{h}{3}$.

Portanto, $DO = \frac{L}{3}$ e $AD = \frac{L}{2} - \frac{L}{3} = \frac{L}{6} = BE$

Logo a razão entre BE e EC é:

$$\frac{\frac{L}{6}}{L - \frac{L}{6}} = \frac{1}{5}$$

Questão 3:

Observe que a diagonal de um quadrado cujo lado mede 2 metros é igual a $2\sqrt{2}$ metros. O enunciado do problema nos diz que a lâmpada ilumina um círculo de raio $\sqrt{2}$ metros (e diâmetro igual a $2\sqrt{2}$).

Conclui-se assim que cada lâmpada ilumina completamente um quadrado de 2 metros de lado. (o quadrado inscrito na circunferência de raio $\sqrt{2}$ tem lado igual a 2).

Observamos que é possível cobrir um retângulo de dimensão 6×3 utilizando-se de 6 quadrados de lado igual a 2.

Basta dividir os lados maiores em 3 segmentos de 2 metros e formar 6 quadrados que se superpõem no interior do retângulo, conforme a figura:

Dessa forma, 6 lâmpadas são suficientes para iluminar totalmente a sala.

É possível iluminar a sala usando-se 5 lâmpadas?

Resposta: Não.

Há várias possibilidades para justificativa.

Uma delas é considerar os quatro vértices de um retângulo de dimensão 6×3.

Para iluminar os quator cantos da sala (vértices) necessitamos de quatro lãmpadas. E a maneira mais eficiente de fazê-lo é de modo que o vértice esteja sobre as circunferências.

Al'em disso, com as quatro lâmpadas usadas, os lados menores da sala são iluminados.

Resta uma região da sala que contém pontos sobre os dois lados maiores.

A distância entre esses pontos a igual a 3 que é maior do que o diâmetro das circunferências. Logo necessita-se de pelo menos duas lãmpadas para iluminar a parte restante.

Ou

Novamente, usando a figura, vemos que a maneira mais eficiente de cobrir os pontos dos lados maiores do retângulo é utilizando circunferêcias que passam nesse pontos.

Considerando um dos lados que medem 6 metros,por exemplo, o lado superior na figura, vemos que são necessários 3 lâmpadas para iluminá-lo completamente. Sobra então um retângulo de dimensões 6×1. É possível iluminá-lo com 2 lâmpadas?

Resposta: Não.

Se em uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ inscrevemos um retângulo com um lado igual a 1, então o outro lado mede $\sqrt{7}$, pelo Teorema de Pitágoras.

Portando, usando duas circunferências é possível cobrir um retângulo de dimensões

$1 \times 2\sqrt{7}$. Como $2\sqrt{7} < 6$, não é possível usar apenas duas lâmpadas para iluminar a região da sala.

Questão 4: Veja a solução da prova do Nível II

Questão 5:

$a_1 = 2$

$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$

Logo $a_{n+1} - 1 = a_n^2 - a_n = a_n[a_n - 1]$

Repetindo o argumento, para n obtemos: $a_{n+1} - 1 = a_n^2 - a_n = a_n[a_n - 1] = a_n a_{n-1}[a_{n-2} - 1]$ e assim por diante.

Provamos por indução que

$a_{n+1} - 1 = a_n a_{n-1}...[a_1 - 1] = a_n a_{n-1}...[2 - 1] = a_n a_{n-1}...a_2$

Portanto, dados dois índices m, n, diferentes, supondo que $m > n$ obtemos:

$a_m = a_{m-1}...a_n...a_2 + 1$

Assim sendo, se um número k é divisor comum a a_m e a_n, então k divide 1, ou seja, $k = 1$. O que equivale a dizer que a_m e a_n são primos entre sí.