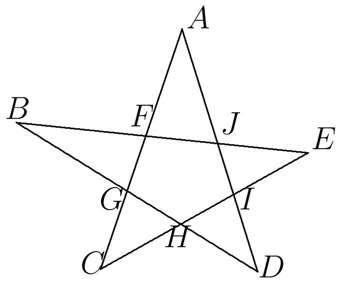
OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA
Resolução Nível II

1. **c.** Observemos que, se multiplicamos a igualdade $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 10$ por ab, obtemos a identidade $a + b = 10ab$ e assim temos que $ab = 1$. Por outro lado temos

$$10^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 2 + b^2.$$

Portanto $a^2 + b^2 = 10^2 - 2 = 98$.



2. **c.** Usando o fato que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o, sabemos que

$$\begin{aligned} \measuredangle HCG &= (180 - \measuredangle CHG) - \measuredangle HGC. \\ &= \measuredangle GHI - \measuredangle FGB \\ &= 130^o - \measuredangle FGB \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\measuredangle FGB = (180 - \measuredangle GFB) - \measuredangle GBF = \measuredangle GFJ - 20^o = 100^o - 20^o = 80^o.$$

Portanto $\measuredangle HCG + 130^o - 80^o = 50^o$.

3. **d.**

$$\begin{aligned} \frac{a}{ab - b^2} - \frac{b}{a^2 - ab} &= \frac{a}{b(a-b)} - \frac{b}{a(a-b)} = \frac{a^2 - b^2}{ab(a-b)} \\ &= \frac{(a+b)(a-b)}{ab(a-b)} = \frac{(a+b)}{ab} = \frac{a}{ab} + \frac{b}{ab} \\ &= \frac{1}{b} + \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

4. **b.** Dado que $75 = 7 \times 10 + 5$ temos que 75 dias é equivalente a 10 semanas e 5 dias. Assim é claro que em 75 dias não pode conter 12 segundas-feiras. Mas 10 semanas têm 10 segundas e ainda sobraram 5 dias; um deles pode ser uma segunda-feira. Assim, um período de 75 dias terá no máximo 11 segundas feiras.

5. **b.** Solução 1:

$$\begin{aligned}
\sqrt{12,3^2-1,23-1,22} &= \sqrt{\left(\frac{123}{10}\right)^2-\frac{123}{100}-\frac{122}{100}}=\sqrt{\frac{123^2}{100}-\frac{123}{100}-\frac{122}{100}}\\
&= \frac{\sqrt{(123^2-123-122)}}{10}=\frac{\sqrt{123(123-1)-122}}{10}\\
&= \frac{\sqrt{123(122)-122}}{10}=\frac{\sqrt{122(123-1)}}{10}\\
&= \frac{\sqrt{122(122)}}{10}=\frac{\sqrt{122^2}}{10}=\frac{122}{10}=12,2
\end{aligned}$$

Solução 2:

$$\begin{aligned}
\sqrt{12,3^2-1,23-1,22} &= \sqrt{12,3^2-2\times 1,23+0,01}\\
&= \sqrt{12,3^2-2\times 12,3\times 0,1+0,1^2}\\
&= \sqrt{(12,3-0,1)^2}=12,2
\end{aligned}$$

6. **a.** Resolvendo o produto notável temos que

$$3b^4=\left(\sqrt{a}+\frac{b^2}{2}\right)^2=a+b^2\sqrt{a}+\frac{b^4}{4},$$

assim

$$a+b^2\sqrt{a}=3b^4-\frac{b^4}{4}=\frac{11b^4}{4}.$$

Portanto

$$\frac{5b^4}{a+b^2\sqrt{a}}=\frac{5b^4}{\frac{11b^4}{4}}=\frac{20}{11}$$

7. **a.** A contagem pode ser feita da seguinte forma:

- Do 1 ao 9 temos 9 algarismos,
- do 10 ao 99 temos 90 números de 2 algarismos, isto é 180 algarismos,
- do 100 ao 999 temos 900 números de 3 algarismos logo 2700 algarismos,
- do 1000 ao 1999 temos 1000 números de 4 algarismos portanto 4000 algarismos e
- do 2000 ao 2007 temos 8 números de 4 algarismos, assim temos 32 algarismos a mais.

Segue-se que em total o número possui

$$9+180+2700+4000+32=6921$$

algarismos.

8. **a.** Por terem lados paralelos, todos os triângulos são semelhantes com lados em proporção $1 : 2 : 2$ onde o lado menor é a base. Assim o 1º triângulo tem lados de comprimento 1, 2 e 2, o 2º triângulo tem lados de comprimento 2, 4 e 4 etc. Seguindo o mesmo padrão teremos que o 20º triângulo tem base de comprimento 20 e lados outro dois lados de comprimento 40. A altura h de dito triângulo pode ser calculada usando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado pela altura, pela metade da base e por um outro lado. Assim $h = \sqrt{40^2 - 10^2} = 10\sqrt{15}$, e portanto a área de dito triângulo é $\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10\sqrt{15} = 100\sqrt{15}$.

9. **b.** Dado que

$$\begin{aligned}
3^2 \cdot 2^{2007} \cdot 5^{2004} &= 3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^{2004} \cdot 5^{2004} \\
&= 3^2 \cdot 2^3 \cdot (2 \cdot 5)^{2004} \\
&= 72 \cdot 10^{2004} \\
&= 72 \cdot 10^{2004} \\
&= 72\overbrace{00000 \cdots 0}^{2004}
\end{aligned}$$

Assim a soma dos algarismos desse número é $7 + 2 + \overbrace{0 + 0 + \cdots + 0}^{2004} = 9$.

10. **a.** Analisando as alternativas:

   (a) <u>*Falsa* :</u> Do gráfico da direita, vemos que foram vendidos 2 produtos azuis, 17 rosas e 3 verdes, sendo um total de 22 produtos das cores azul, rosa ou verde. Mesmo que todos os produtos vendidos com estas cores fossem sapatos, seriam no máximo 22 sapatos, nunca 23.

   (b) <u>*Verdadeira* :</u> Do gráfico da esquerda vemos que foram vendidos 67 produtos brancos. Mesmo que todos fossem chinelos, teríamos ainda 13 chinelos de cor diferente da branca, pois do gráfico da direita vemos que foram vendidos 80 chinelos. Logo foram vendidos 13 ou mais chinelos de cor diferente da branca.

   (c) <u>*Verdadeira* :</u> Do gráfico da direita vemos que foram vendidos 67 produtos brancos, 2 azuis e 3 verdes, num total de 72 produtos dessas três cores. Mesmo que todos esses produtos fossem chinelos, teríamos ainda 8 chinelos das cores rosa ou preta, já que, do gráfico da esquerda, sabemos que foram vendidos 80 chinelos. Logo foram vendidos 8 ou mais chinelos das cores rosa ou preta.

   (d) <u>*Verdadeira* :</u> Vemos que foram vendidos 23 produtos pretos (gráfico da direita) e 32 sapatos (gráfico da esquerda). Mesmo que todos os produtos pretos vendidos fossem sapatos, ainda haveria 9 sapatos de cor diferente da preta. Logo foram vendidos 9 ou mais sapatos de cor diferente da preta.

11. **b.** Como os número procurados são palíndromes, então eles podem ser escritos da forma $abba$ onde a e b representam dígitos. Sabemos que um número é divisível por 9 se a soma dos algarismos é divisível por 9, assim a e b cumprem que $a + b + b + a = 2(a + b)$ é divisível por 9, Como a e b são dígitos, então ou $a + b$ é menor do que 18, logo $a + b = 9$, ou $a + b = 18$. No caso $a + b = 9$ temos as possibilidades $1 + 8$, $2 + 7$, $3 + 6$, $4 + 5$, $5 + 4$, $6 + 3$, $7 + 2$, $8 + 1$ e $9 + 0$, e no caso $a + b = 18$ só temos a possibilidade $9 + 9$.

12. **d.** Observemos que entre dois número consecutivos do relógio o Ângulo formado é de $\dfrac{360^o}{12} = 30^o$. Ás 8h30min o ponteiro das horas vai estar exatamete na metade do percurso entre o 8 e o 9, e o ponteiro dos minutos vai estar exatamente no número 6. Assim o ângulo entre os dois ponteiros será $30^o + 30^o + 15^o = 75^o$.

13. **c.** Sabemos que a área do quadrado é igual a 1. Como os três polígonos resultantes têm a mesma área, segue-se que a área de cada polígono é $\dfrac{1}{3}$. Denotemos por x o comprimento do segmento CE. Assim a área do trapézio $CEOF$ em função de x é

$$\text{Área}(CEOF) = \frac{(OF + EC)OF}{2} = \frac{(\frac{1}{2} + x) \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{(\frac{1}{2} + x)}{4},$$

logo $\dfrac{(\frac{1}{2} + x)}{4} = \dfrac{1}{3}$, e portanto $x = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{6}$. Concluímos que $DE = 1 - x = \dfrac{1}{6}$.

14. **a.** Primeiro observemos que c e d são dígitos distintos cujo produto cd termina em 1, assim $d = 21$, porque os números 31, 41, 51, 61 71 e 81 não podem ser fatorados como produto de dois números distintos menores que ou iguais a 9. Portanto temos as seguintes possibilidades: $c = 3$ e $d = 7$ ou $c = 7$ e $d = 3$.

No primeiro caso, substituindo no produto temos $\begin{array}{r}\mathbf{1\,b\,3\,7}\\ \times\ \ \mathbf{3}\\ \hline \mathbf{b\,3\,1\,1}\end{array}$, assim $3b + 1$, é um número terminado em 3 e menor do que 28 pelo fato que b é um dígito. Não pode ser 3 porque $b/geq1$ e não pode ser 23 porque 22 não é múltiplo de 3. Assim $3b + 1 = 13$ e portanto $b = 4$, que satisfaz a igualdade e o produto. Assim b=4, c=3 e d=7 é solução. Analisando a outra possibilidade, ela não gera solução já que $\begin{array}{r}\mathbf{1\,b\,7\,3}\\ \times\ \ \mathbf{7}\\ \hline \mathbf{b\,7\,1\,1}\end{array}$ implica que $7b + 5$ termina em 7, logo $7b$ termina em 2 e assim b teria que ser igual a 6, que não satisfaz o produto.

Portanto, b+c+d=4+3+7=14.

15. **d.** Como $\dfrac{1}{2007} = \dfrac{1}{9a} + \dfrac{1}{223b} = \dfrac{223b + 9a}{2007ab}$, multiplicando por $2007ab$ temos que $223b + 9a = ab$ e assim $ab - 223b - 9a = 0$. Somando 2007 dos dois lados temos

que

$$
\begin{aligned}
2007 &= ab - 223b - 9a + 2007 && (1)\\
&= b(a-223) - 9(a-223) && (2)\\
&= (a-223)(b-9). && (3)
\end{aligned}
$$

Portanto $a - 2003$ e $b - 9$ são divisores de 2007. Os divisores de 2007 são 1, 3, 9, 223, 669, 2007, assim há 6 possibilidades:

$$(a-223)(b-9) = 1 \cdot 2007 = 3 \cdot 669 = 9 \cdot 223 = 223 \cdot 9 = 669 \cdot 3 = 2007 \cdot 1.$$

Obtemos portanto as seguintes soluções para o par (a, b): $(224, 2016)$, $(226, 678)$, $(232, 232)$, $(446, 18)$, $(892, 12)$, $(2230, 10)$.