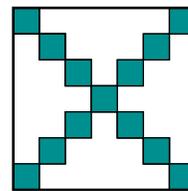


OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA

Nível III

1. Em um quadrado de lado 2005, os quadrados de lado 1 nas diagonais são coloridos (como na figura ao lado onde o quadrado tem lado 7). Qual a área da parte branca do quadrado de lado 2005?

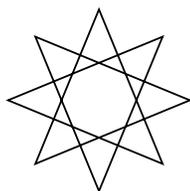


(a) 2004^2 (b) 2004×2003 (c) 2005^2 (d) 2005×2006

2. Quantos números entre 0 e 1000 são ímpares ou primos?

(a) 732 (b) 450 (c) 501 (d) 647

3. Qual o número de triângulos na figura abaixo?



(a) 24 (b) 28 (c) 32 (d) 40

4. Quando o professor Mário saiu da sala, deixou sua caixa de bombons e quando voltou tudo havia sido comido. Ele sabe que foi um dos alunos Helvécio, Elisa, Bernardo, Luciene ou Marcelo que comeu os bombons. Mário ouviu três declarações de cada um deles:

•Helvécio: (1) Eu não comi os bombons. (2) Nunca comi bombons na minha vida. (3) Luciene foi quem comeu.

•Elisa: (1) Não comi os bombons. (2) Na minha casa tem muito bombom que meu pai comprou. (3) Marcelo sabe quem comeu.

•Bernardo: (1) Não comi os bombons. (2) Eu não conhecia o Marcelo até entrar na escola. (3) Luciene pegou os bombons.

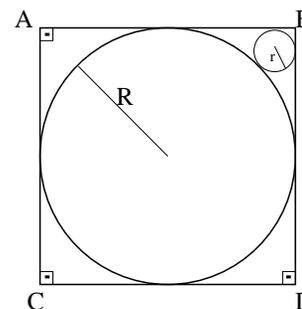
•Luciene: (1) Não sou culpada. (2) Marcelo pegou os bombons. (3) Helvécio mente quando diz que eu comi os bombons.

•Marcelo: (1) Não comi os bombons. (2) Elisa é culpada. (3) O Bernardo me conhece desde pequeno e sabe que eu não faria isso.

Sabendo que cada um dos estudantes fez duas afirmativas verdadeiras e uma falsa, quem comeu os bombons do professor Mário?

(a) Elisa (b) Bernardo (c) Luciene (d) Marcelo

5. Na figura ao lado, a circunferência maior está inscrita no quadrado e a circunferência menor tangencia o quadrado e a circunferência maior. Sabendo que $R = 1$, qual o valor do raio da circunferência menor?



(a) $3 + 2\sqrt{2}$ (b) $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$ (c) $\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$ (d) $3 - 2\sqrt{2}$

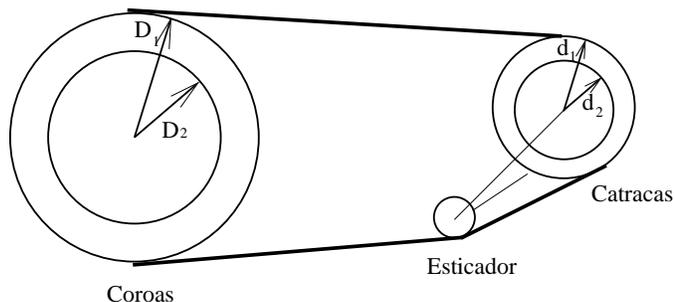
6. Números helvéticos são números positivos de 4 algarismos que possuem a seguinte propriedade:

- se o número $abcd$ é helvético, então $ab + cd = dc$, com $a \neq 0$.

O número 4538 por exemplo é um número helvético, pois: $45 + 38 = 83$. Quantos números helvéticos existem?

- (a) 17 (b) 35 (c) 28 (d) 45

7. O sistema de marchas de uma certa bicicleta consta de duas coroas, duas catracas e um esticador, cuja única função é manter a corrente sempre esticada. Os pedais estão localizados nas coroas e cada volta na catraca onde está a corrente resulta em uma volta na roda traseira. Cada marcha está definida pelo número de voltas que a catraca dá quando a coroa completa uma volta.



Quando Chico foi à loja, o vendedor disse que a bicicleta tinha quatro marchas, pois para cada uma das coroas havia duas possíveis catracas. Mas, Chico, ao medir os raios D_1 e D_2 das coroas e d_1 e d_2 das catracas, disse ao vendedor que aquela bicicleta tinha de fato três marchas. Sabendo que Chico estava certo e sendo $D_1 = 18 \text{ cm}$ e $D_2 = 15 \text{ cm}$, a única alternativa possível é (em cm):

- (a) $d_1 = 7$ e $d_2 = 5$ (b) $d_1 = 6$ e $d_2 = 5$ (c) $d_1 = 8$ e $d_2 = 6$ (d) $d_1 = 5$ e $d_2 = 4$

8. Qual o valor inteiro da expressão $\sqrt[3]{(2 + \sqrt{5})} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{5})}$?

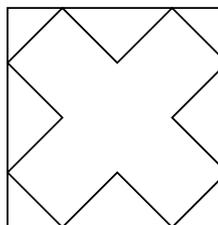
- (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) -2

9. Qual o maior valor possível de $x + y$, onde x e y são soluções inteiras da equação:

$$49x^2 - 36y^2 = 2005$$

- (a) 62 (b) -4 (c) 85 (d) -27

10. A figura ao lado é composta de um dodecágono (ou seja, um polígono de 12 lados) com todos os lados iguais inscrito num quadrado. Sabendo que o perímetro do dodecágono é 36 cm , qual é a área do quadrado?



- (a) 64 (b) 72 (c) 80 (d) 92

Problemas

1. (a) Quanto vale:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{100}\right)$$

(b) E qual é o valor de:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2005^2}\right)$$

2. A figura abaixo mostra a vista aérea de um shopping. Sabe-se que:

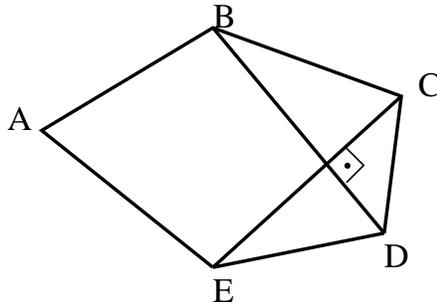
$$\overline{AB} = \overline{EA} = 130m$$

$$\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = 100m$$

$$\overline{BD} = 120m$$

$$EC \perp BD$$

Qual é a área desta construção?



3. Um objeto S move-se em uma circunferência, de 3 cm de raio, em torno de um ponto fixo T, no sentido anti-horário dando 3 voltas por hora. Um objeto M move-se em um circunferência de 1 cm de raio em torno de S, também no sentido anti-horário, dando 5 voltas por hora.

(a) Se S deu 30 voltas em torno de T, quantas voltas M deu em torno de T?

(b) E quantas voltas deu em torno de S?

(c) Há um momento em que os três objetos estão alinhados, com M entre T e S, a partir do qual decorridos 22 minutos, todos os objetos param. Neste instante, qual é a distância entre M e T? (Obs: $\text{sen}30^\circ = \frac{1}{2}$; $\text{sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$)