# OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA
## 2006
### Nível III

| Nome: | |
|---|---|
| Endereço: | |
| Colégio: | Série: |
| Cidade: | Telefone: |

## Instruções:

- A duração da prova é de 3h.
- A prova tem 10 questões de múltipla escolha e três problemas.
- É proibido o uso de calculadoras.
- Para as questões de múltipla escolha use o gabarito, para os problemas, use uma página por problema e escreva nesta página seu nome, sua escola, o nível e o número da questão. Para os problemas, respostas sem justificativas não serão consideradas.
- Ao preencher as informações acima, use letra legível e deixe pelo menos um telefone de contato ou recado.
- Para garantir o sigilo da prova seu professor recolherá os enunciados.
- A interpretação dos enunciados faz parte das questões, portanto seu professor não poderá responder perguntas durante a prova.

Gabarito

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | a | a | a | a | a | a | a | a | a |
| b | b | b | b | b | b | b | b | b | b |
| c | c | c | c | c | c | c | c | c | c |
| d | d | d | d | d | d | d | d | d | d |

# OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA
## Nível III

1. Qual é a soma dos algarismos do resultado da seguinte operação $111...111 - 99...9$, onde o número 1 aparece 2006 vezes e o número 9 aparece 1003 vezes?

   (a) 2005

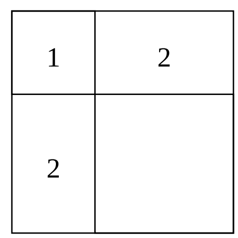
   (b) 2006

   (c) 2007

   (d) 2004

2. O retângulo da figura está dividido em quatro retângulos menores mediante duas linhas paralelas aos seus lados. Em três dos retângulos está escrito o perímetro correspondente. Qual o perímetro do quarto retângulo?

   $(a)$ 2 $(b)$ 3 $(c)$ 4 $(d)$ 5



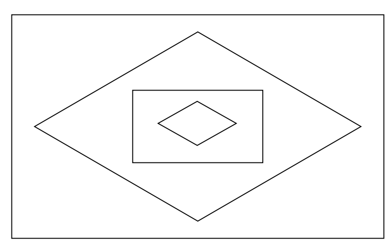

3. Luiz Carlos resolveu criar uma bandeira para a equipe de esporte da sua turma. Em uma cartolina branca ele desenhou a figura abaixo. Dispondo de 4 lápis das cores azul, verde, preto e vermelho, ele decidiu pintar a bandeira obedecendo a seguinte regra: o verde e o vermelho devem sempre ficar juntos. De quantas maneiras diferentes ele pode pintá-la usando todas as cores?

   (a) 12

   (b) 6

   (c) 24

   (d) 16



4. Se $a$ e $b$ são números tais que $a + b = 17$ e $a^3 + b^3 = 1241$ então $a^2 + b^2$ é igual:

   $(a)$ 73 $(b)$ 145 $(c)$ 112 $(d)$ 55

5. Considere uma função que tem a seguinte propriedade: $f(x + 1) + f(x - 1) = f(x)$ com $x$ inteiro. Se $f(2) = 1$, qual é o valor de $f(2006)$?

   $(a)$ $-1$ $(b)$ 0 $(c)$ 1 $(d)$ 2

6. Graziele promoveu uma festa e não soube quantos convidados compareceram, resolveu perguntar a três amigos que foram a festa, e eles fizeram as seguintes afirmações:

   (1) Júnior disse: Na festa vi pelo menos 146 pernas.

   (2) Jane disse: a festa teve o triplo de convidados do que a do ano passado.

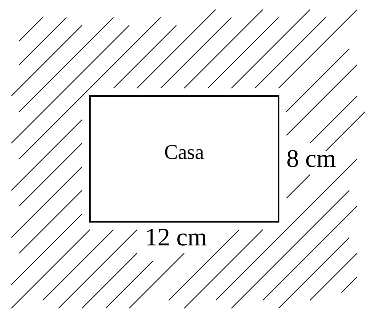
   (3) Charles disse: quando cheguei à festa as luzes diminuiram e, sem enxergar direito, para não ser mal educado, cumprimentei a todos, num total de 77 pessoas, algumas das quais cumprimentei duas vezes.

   Quantas pessoas foram à festa de Graziele?

   $(a)$ 75 $(b)$ 150 $(c)$ 72 $(d)$ 73

7. Marília amarrou seu cachorro num dos cantos de sua casa, que tem forma retangular, conforme figura abaixo.O comprimento da corda que prende o cachorro é de 20 metros. De acordo com as dimensões da casa expressas na figura e supondo o quintal grande o suficiente, determine qual a área que o cachorro tem para caminhar no quintal.

   (a) $300\pi$
   (b) $16(25\pi - 6)$
   (c) $352\pi$
   (d) $360\pi$




8. Sabendo que $n$ é um número natural e que a divisão de $n$ por 5 deixa resto 1; por 7 deixa resto 5 e por 9 também deixa resto 5, qual é o resto da divisão $(n+1)^2(n+2)$ por 315?

   $(a)$ 2 $(b)$ 5 $(c)$ 11 $(d)$ 25

9. Seja $Q$ o ponto de interseção de duas diagonais da face de um cubo de lado $2cm$. Se $R$ é um vértice na face oposta à face de $Q$, então quanto mede o segmento $RQ$?

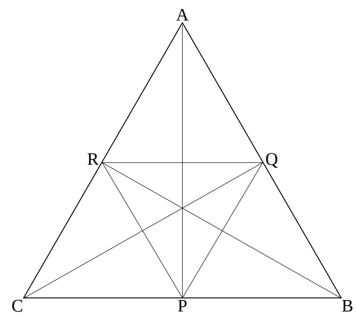
   (a) $3\sqrt{2}$
   (b) $\sqrt{6}$
   (c) $4\sqrt{6}$
   (d) $2\sqrt{2}$

10. Quantos são números naturais $n$, maiores que 0 e menores que 2006, tais que a expressão $\dfrac{n^3 - n}{6n - 6}$ é um número natural?

   (a) 668
   (b) 669
   (c) 1336
   (d) 1337

# Problemas

1. O triângulo $ABC$ é isósceles. $AP, BR$ e $CQ$ são as alturas do triângulo. Sabendo que $BC = 12$ cm e $AB = AC = 10$ cm.




   (a) Qual é o valor de $AP$?

   (b) Qual o valor de $BR$?

   (c) Qual a área do triângulo $RQP$?

2. Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência de números tal que a diferença dos termos sucessivos é uma progressão aritmética.

   (a) Mostre que 4, 6, 11, 19, 30, 44 é uma progressão aritmética de segunda ordem.

   (b) Ache o décimo termo da progressão acima.

   (c) Prove que o termo geral de uma progressão aritmética de segunda ordem se escreve $a_{n+1} = an^2 + bn + c$ onde $a$, $b$ e $c$ são constantes.

3. Em um jogo de duas pessoas, os jogadores tiram alternadamente 1, 2, 3, 4 ou 5 palitos de uma pilha que tem inicialmente 2006 palitos. Ganha o jogador que tirar o último palito da pilha. Quantos palitos o jogador que começa deve tirar na sua jogada inicial para assegurar sua vitória?