OLIMPÍADA MINEIRA DE MATEMÁTICA - Resolução Nível 3

1. **d.** $\left(\sqrt{a}+\dfrac{b^2}{2}\right)^2 = 3b^4$ Resolvendo o produto notável do lado esquerdo:

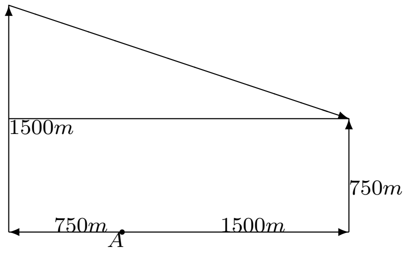
   $a + b^2\sqrt{a} + \dfrac{b^4}{4} = 3b^4 \quad \rightarrow \quad a + b^2\sqrt{a} = 3b^4 - \dfrac{b^4}{4} \quad \rightarrow \quad a + b^2\sqrt{a} = \dfrac{11b^4}{4}$

   Substituindo esse valor em $\dfrac{5b^4}{a+b^2\sqrt{a}}$ temos:

   $\dfrac{5b^4}{\dfrac{11b^4}{4}} = 5b^4 \cdot \dfrac{4}{11b^4} = \dfrac{20}{11}$

2. **a.** Sendo x o preço de cada livro e sabendo que o comerciante comprou m livros ao custo total de n reais. Podemos escrever: mx=n.
   Os dois primeiros livros vendeu pela metade do preço então, o valor de venda desses dois livros foi:
   $$\frac{x}{2}+\frac{x}{2}=x$$
   O restante dos livros obteve um lucro de 6 reais, portanto, o valor de venda do restante dos livros foi:
   $$\overbrace{(x+6)+(x+6)+...+(x+6)}^{m-2} = (m-2)(x+6)$$
   O lucro de 47 reais será obtido subtraindo da venda total dos livros o preço de custo isto é:
   $$x+(m-2)(x+6)-n = 47 \rightarrow \text{Como mx=n temos:}$$
   $$x+mx+6m-2x-12-mx = 47$$
   $$6m = 47+12+x$$
   $$m = \frac{59+x}{6}$$
   Para $x=1$ temos que $m=10$.

3. **c.**Sabendo que 1,5Km equivale a 1500m temos:



A figura nos mostra um triângulo retângulo onde a hipotenusa é o que deve ser calculado e os catetos equivalem a 750 e 2250. Pelo teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 750^2 + 2250^2$$

Isso equivale a dizer que a a distancia que joão ficou da casa do colega d é maior que 2250m isso é, maior que 2,25Km.

4. **c.** Como x é um número de dois algarismos, logo $10 \leq x \leq 99$. Além disso x é múltiplo de 3, logo $12 \leq x \leq 99$.

   Dividindo a desigualdade por 3, temos:

$$4 \leq \frac{x}{3} \leq 33.$$

   Agora entre os número entre 4 e 33 devemos determinar qual tem maior soma de seus algaritmos De fato, deve ter 9, logo só temos duas possibilidades 19 ou 29, e por inspeção verifica-se que este número deve ser 29. Logo $x = 3.29 = 87$.

5. **a.** Iniciando com o número 4, forma-se uma progresão aritmética com três números positivos:

$$4 \quad 4+R \quad 4+2R$$

   Ao somarmos 2 ao segundo termo e 20 ao terceiro termo temos:

$$4 \quad 6+R \quad 24+2R$$

   A questão disse que essa progressão é geométrica portanto, sua razão (q) será dada por:

$$q = \frac{6+R}{4} = \frac{24+2R}{6+R}$$
$$(6+R)^2 = 4(24+2R)$$
$$36 + 12R + R^2 = 96 + 8R$$
$$R^2 + 4R - 60 = 0 \;\rightarrow\; r' = 6 \text{ e } r'' = -10$$

   Como a primeira progressão tem que ser de termos positivos concluimos que r=6. Então, q será:

$$q = \frac{6+R}{4} = \frac{6+6}{4} = 3.$$

6. **a.** Analisando as alternativas:

   (a) $\underline{Falsa:}$ Foram vendidos 2 produtos azuis, 17 rosas, 3 verdes, sendo um total de 22 produtos. Portanto, foram vendidos no máximo 22 sapatos das cores azul, rosa ou verde.

(b) <u>*Verdadeira :*</u> Como foram vendidos 67 produtos brancos, e só chinelos, temos no máximo 67 chinelos brancos e portanto, 13 ou mais chinelos de cor diferente da branca.

(c) <u>*Verdadeira :*</u> Como foram vendidos 67 produtos brancos, 2 azuis e 3 verdes, temos um total de 72 produtos. Supondo que todos esses produtos sejam chinelos, concluimos que foram vendidos 8 ou mais chinelos das cores rosa ou preta.

(d) <u>*Verdadeira :*</u> Temos 23 produtos pretos e 32 sapatos, portanto, foram vendidos 9 ou mais sapatos de cor diferente da preta.

7. **a.** As coordenadas do vértice da parábola são :$x_v = \frac{-b}{2}$ assim $b = -2x_v$, logo

$$y_v = x_v^2 + bx_v + 1 = x_v^2 + (-2x_v) \cdot x_v + 1 = -x_v^2 = 1.$$

8. **c.** Fatorando:
$a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a+1)(a-1) = (a-1)a(a+1)$

$b^3 - b = b(b^2 - 1) = b(b+1)(b-1) = (b-1)a(b+1)$

Como são produto de três números consecutivos temos que os dois sempre serão divisíveis por 2 e 3. Portanto o menor valor para o máximo divisor comum será o 6.

9. **b.**

Como Joana está usando barbantes de mesmo comprimento A para construir o quadrado e o triângulo equilátero, obtemos que o comprimento do lado do quadrado é $\frac{A}{4}$ e o comprimento do lado do triãngulo equilátero é $\frac{A}{3}$.

Portanto a área do quadrado é igual a $A_q = \frac{A^2}{16}$, enquanto a área do triângulo equilátero é igual a $A_t = \frac{A^2\sqrt{3}}{36}$.

Para comparar as duas áreas, primeiramente escrevemos frações com denominador comum: $A_q = \frac{9A^2}{144}$ e $A_t = \frac{4\sqrt{3}A^2}{144}$

Basta, comparar 9 com $4\sqrt{3}$. Mas $1 < \sqrt{3} < 2$, donde conclui-se que

$4\sqrt{3} < 9$ isto é, a área do quadrado é maior do que a área do triângulo equilátero.

10. **d.** Seja x a medida dos catetos dos triângulos: $AB = BC = CD = DE = x$. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras, as respectivas hipotenusas valem $AC = x\sqrt{2} = CE$.

Na figura abaixo, vemos que o segmento CB' é mede x, pois é resultado da rotação do segmento BC em torno do vértice C. Portanto, o segmento $B'E$ mede $x\sqrt{2} - x$.

Seja K o ponto de interseção dos lados DE e $B'C'$.

É fácil ver que o triângulo $\triangle B'KE$ é semelhante ao triângulo $\triangle DEC$ (caso AAA). Como $\triangle DEC$ é isósceles, temos que $\triangle B'KE$ tamém é. Logo, $B'E = B'K$.

Portanto a área de $\triangle B'KE$ é igual a

$$\frac{(x\sqrt{2}-x)(x\sqrt{2}-x)}{2} = \frac{x^2(3-2\sqrt{2})}{2}.$$

11. **b.** A probabilidade de se obter j no dado viciado é P(j)=kj (proporcional a j). Como a soma das probabilidades é igual a 1, temos:

$$k \cdot 1 + k \cdot 2 + k \cdot 3 + ... + k \cdot 6 = 1$$

$$k(1+2+...+6) = 1$$

$$k = \frac{1}{21}$$

Se P(x,j) denota a probabilidade de se obter o número i com o dado viciado e j com com o dado normal, então:

$$P(i,j) = \frac{i}{21} \cdot \frac{1}{6}$$

A probabilidade de se obter a soma $i+j=K$ é igual a soma de todas as probabilidades dos pares P(i,j) tais que $i+j=K$. Assim basta enumerar os pares (i,j) e suas respectivas somas para obter a maior probabilidade.
Por exemplo:
Soma 2: $P(1,1) = \frac{1}{21} \cdot \frac{1}{6}$

Soma 3: $P(1,2)+P(2,1)$
Soma 4: $P(1,3)+P(2,2)+P(3,1)$
Soma 5: $P(1,4)+P(2,3)+P(3,2)+P(4,1)$
Soma 6: $P(1,5)+P(2,4)+P(3,3)+P(4,2)+P(5,1)$
Soma 7: $P(1,6)+P(2,5)+P(3,4)+P(4,3)+P(5,2)+P(6,1)$
Ate o valor máximo da soma que é 12.
Por inspeção, vemos que a soma de maior probabilidade é 7.

12. **b.** O centro do circulo inscrito é o incentro (encontro das bissetrizes), mas como o triângulo é equilátero a bissetriz é também altura e mediana. Logo temos que o raio da circunferência equivale a $\frac{1}{3}$ da altura do triângulo. A altura será:

$$h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Portanto, } r = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

A área procurada é a área total do triângulo menos a área da circunferência dividida por 3. Pois as três áreas externa a circunferência e internas ao triângulo são iguais devido o triângulo ser equilátero.

$$A = \frac{A_{\triangle} - A_o}{3} = \left(\frac{b \cdot h}{2} - \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2 \right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{36}$$

13. **b.** Resolução:
1 ao 9 - temos 9 algarismo
10 ao 99 - temos 90 números de 2 algarismos logo 180 algarismos
100 ao 999 - temos 900 números de 3 algarismos logo 2700 algarismos
1000 ao 1999 - temos 1000 números de 4 algarismos logo 4000 algarismos
2000 ao 2007 - temos 8 números de 4 algarismos logo 32 algarismos
Total= 6921 algarismo.

14. **d.** x é múltiplo de 31416 logo, $x = K \cdot 31416$ onde K é um número inteiro positivo.

$$31414 < \sqrt{x} < 31420$$
$$(31414)^2 < K \cdot 31416 < (31420)^2$$
$$(31416 - 2)^2 < K \cdot 31416 < (31416 + 4)^2$$
$$\frac{(31416 - 2)^2}{31416} < K < \frac{(31416 + 4)^2}{31416}$$
$$\frac{31416^2 - 4(31416) + 4}{31416} < K < \frac{31416^2 + 8(31416) + 16}{31416}$$
$$31416 - 4 + \frac{4}{31416} < K < 31416 + 8 + \frac{16}{31416}$$
$$31412 + \frac{4}{31416} < K < 31424 + \frac{16}{31416}$$

Como $\frac{4}{31416}$ e $\frac{16}{31416}$ são números bem próximos de zero e k tem que ser um número inteiro temos que:

$$31413 \leq K \leq 31424$$

Então, existem 12 valores possíveis para K e portanto, 12 valores possíveis para x.

15. **a.** Chamamos de C o ponto de intersecção da reta paralela a OR passando por A com a reta que contém o segmento OB. Temos que o ângulo $A\hat{C}O = R\hat{O}B$ pois AC//OR e que os triângulos ABC e ORB possuem o ângulo $R\hat{B}O$ em comum portanto, temos que os triângulos ABC e ORB são semelhantes pois possuem dois

ângulos congruentes. O ângulo $A\hat{O}C = 60$ então,o triângulo ACO é equilátero com lado igual a 12. Pela semelhança entre os triângulos ABC e ORB temos:

$$\frac{AB}{OR} = \frac{CB}{OB} \rightarrow \frac{12}{OR} = \frac{18}{6} \rightarrow \frac{12}{OR} = 3$$

$$3OR = 12 \rightarrow OR = 4$$