

Demonstração do Teorema de Cayley-Hamilton
Guia de leitura

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Verifique que o polinômio característico de A é $p(t) = (1 - t)^2(3 - t)$;
2. Sem fazer qualquer conta (se possível) justifique que $(0 \ 1 \ 0)^t$ é um autovetor associado ao autovalor 1;
3. Mostre que $\mathcal{C} = \{v_1 = (0 \ 1 \ 0)^t, v_2 = (1 \ 1 \ 1)^t, v_3 = (1 \ 0 \ -1)^t\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$;
4. Verifique que a representação de A na base $\mathcal{C}$ é a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Calcule o polinômio característico $p_1(t) = (t - 3)(t - 1)$ da matriz

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Justifique: esse polinômio característico já era conhecido...

Na demonstração apresentada do Teorema de Cayley-Hamilton, a matriz B é denotada por

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}.$$

6. Verifique que $p_1(B_1) = 0$. (Na demonstração, esse fato decorre da hipótese de indução.)
7. Temos então que

$$p(B) = (t - 1)p_1(B).$$

- (a) Calcule $q(B)$, se $q(t) = (t - 1)$;
 - (b) Calcule $p_1(B)$;
8. Verifique que $p(B) = q(B)p_1(B) = 0$, em que 0 denota a matriz identicamente nula.