

Funções de Matrizes

Hamilton Prado Bueno

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática

A

*Eliana Farias Bueno.
Inesquecível esposa,
eterna amiga.*

Introdução

Dada uma matriz quadrada A , funções $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ podem gerar matrizes, conhecidas como **funções de matrizes**, denotadas por $f(A)$. Esse é o caso, por exemplo, das matrizes A^k , A^{-1} , $\sin A$ e o fluxo e^{At} . (Note que a denominação *função de matriz* é imprecisa: como não se estuda como $f(A)$ varia com a matriz A , não estamos lidando com uma função, mas sim com o valor assumido por f na matriz A !)

Em cursos de Álgebra Linear, usualmente restringe-se a apresentação de funções de matrizes ao caso em que f é um polinômio ou, se a matriz A for simétrica e $A = P^{-1}DP$, com D diagonal, define-se $f(A)$ por $P^{-1}f(D)P$, em que $f(D)$ é obtida ao se avaliar f em cada uma das entradas diagonais de D .

Devido a sua enorme importância no estudo de equações diferenciais, e^{At} é usualmente definida por meio da expansão em série de potências, o que exige o conceito de convergência uniforme e, conseqüentemente, torna a exposição acessível apenas para alunos mais avançados. Além disso, a obtenção do fluxo e^{At} é apenas feita em casos muito simples (em geral, quando a matriz A está na Forma Canônica de Jordan) e o estudante fica com a impressão que e^{At} é uma solução “teórica” para o sistema $x' = Ax$. O fato que e^{At} é um polinômio (com coeficientes dependendo de t) na matriz A não é enfatizado.

Nossa exposição de funções de matrizes pode ser sintetizada como uma generalização da versão em dimensão finita do cálculo funcional de Dunford-Schwarz [10] e já era conhecida por Gantmacher [11]. Ela é simples e tem conseqüências notáveis: $f(A)$ é sempre um polinômio na matriz A (com coeficientes dependendo da função f), que pode ser facilmente obtido se são conhecidos os autovalores com multiplicidade de A . Essa abordagem, uma técnica corriqueira na Álgebra Linear Numérica, tem sido esquecida nos textos de Álgebra Linear. Livros bem reputados (veja [13], [14], [15], [24]) ou mesmo tratados mais avançados (veja [3] ou [17]) nem mesmo a mencionam. Com esse texto queremos contribuir para uma reavaliação do cálculo funcional na Álgebra Linear básica. Abordagens mais abrangentes desse tema podem ser vistas em [4] e, principalmente, em [12].

A leitura desse texto pressupõe alguns conhecimentos simples de propriedades dos números complexos (manipulação de números complexos, fórmula de Euler e

o teorema fundamental da Álgebra - alguns tópicos um pouco mais avançados são abordados em um exercício) e um curso introdutório de Álgebra Linear, no qual sejam abordadas as noções de espaço vetorial, aplicação linear e suas representações matriciais e somas diretas. Até mesmo a demonstração do Teorema de Cayley-Hamilton consta do texto. Fazemos também uso de algumas noções básicas da Análise Matemática: norma e convergência uniforme (apenas na apresentação da definição tradicional do fluxo e^{At}).

Belo Horizonte, 31 de janeiro de 2015.

Hamilton Prado Bueno

Sumário

1	Polinômios de matrizes	1
1.1	O polinômio mínimo	2
1.2	O teorema de Cayley-Hamilton	3
1.3	Decomposição de operadores	5
1.4	Um homomorfismo de álgebras	6
1.5	Exercícios	7
2	O Cálculo Funcional	11
2.1	O Polinômio Interpolador	11
2.2	Funções de Matrizes	14
2.3	Estendendo o Homomorfismo de Álgebras	17
2.4	Aplicações do Cálculo Funcional	18
2.4.1	O Fluxo	19
2.4.2	Funções Trigonométricas	22
2.4.3	Logaritmo	22
2.4.4	Raiz Quadrada	22
2.4.5	A Inversa	23
2.5	Exercícios	23
3	O teorema espectral	29
3.1	Imagem do Espectro	29
3.2	O Teorema Espectral	30
3.3	Exercícios	37
4	Sistemas de Equações Diferenciais Lineares	39
4.1	Exercícios	46

Capítulo 1

Polinômios de matrizes

Denotaremos por V um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$. Para simplificarmos a nossa exposição, $\mathbb{K}$ será o corpo dos complexos $\mathbb{C}$ ou o corpo dos reais $\mathbb{R}$.

Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Escolhendo uma base $\mathcal{B}$ para V , obtemos a matriz $T_{\mathcal{B}}$, representação de T na base $\mathcal{B}$.

Exemplo 1.1 Seja $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação que roda em torno da origem por um ângulo $0 < \theta < 2\pi$ um ponto do $\mathbb{R}^2$, no sentido anti-horário. É claro que o único ponto fixo por R é a origem.

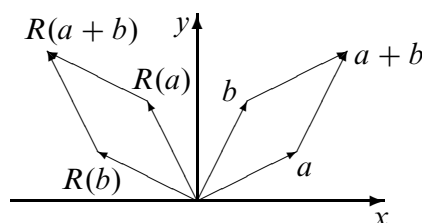


Figura 1.1: A linearidade de R é geometricamente clara.

Escolhendo a base canônica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$, com $e_1 = (1 \ 0)^t$ (estamos denotando assim a transposta) e $e_2 = (0 \ 1)^t$, encontramos $R_{\mathcal{E}}$: se $Re_1 = P$, o ponto P tem coordenadas $(\cos \theta \ \sin \theta)^t$, de acordo com a própria definição das funções seno e cosseno. Do mesmo modo, se $Re_2 = Q$, as coordenadas de Q são

$$(\cos(\theta + \pi/2) \ \sin(\theta + \pi/2))^t = (-\sin \theta \ \cos \theta)^t.$$

Logo, a representação de R na base $\mathcal{E}$ é

$$A = R_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad \triangleleft$$

Denotaremos $q \in \mathbb{K}[\zeta]$ para indicar um polinômio $q(\zeta) = a_k \zeta^k + a_{k-1} \zeta^{k-1} + \dots + a_1 \zeta + a_0$ com coeficientes no corpo $\mathbb{K}$ e grau k , arbitrário. Dado o operador $T : V \rightarrow V$, claramente faz sentido calcular

$$q(T) := a_k T^k + a_{k-1} T^{k-1} + \dots + a_1 T + a_0 I.$$

(Denotamos por I a aplicação identidade $I : V \rightarrow V$). Note que $q(T)$ é uma aplicação linear de V em V , que é representada por uma matriz $n \times n$ ao se escolher uma base de V .

1.1 O polinômio mínimo

Lembramos que um polinômio é **mônico** se o coeficiente de seu termo de maior grau for igual a 1.

Definição 1.2 O polinômio mínimo $m \in \mathbb{K}[\zeta]$ de uma aplicação $T : V \rightarrow V$ é o polinômio mônico de menor grau tal que $m(T) = 0$.

Lema 1.3 Todo operador linear $T : V \rightarrow V$, definido em um espaço V de dimensão n , possui um único polinômio mínimo. Se $p(T) = 0$ para um polinômio $p \in \mathbb{K}[\zeta]$ e m for o polinômio mínimo de T , então p é um múltiplo de m .

Demonstração: O espaço $\mathcal{L}(V)$ de todas as aplicações lineares $T : V \rightarrow V$ é um espaço vetorial de dimensão n^2 . (Esse espaço é isomorfo ao espaço $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$). Assim, as $n^2 + 1$ aplicações lineares $I, T, T^2, \dots, T^{n^2}$ são, necessariamente, linearmente dependentes. Quer dizer, existem escalares $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n^2} \in \mathbb{K}$, nem todos nulos, tais que

$$\alpha_0 I + \alpha_1 T + \dots + \alpha_{n^2} T^{n^2} = 0.$$

Definindo $p(\zeta) = \alpha_0 + \alpha_1 \zeta + \dots + \alpha_{n^2} \zeta^{n^2}$, temos $0 \neq p$ e $p(T) = 0$. Dividindo pelo coeficiente do termo de maior grau, obtemos um polinômio mônico p . Associando a cada polinômio mônico que anula T o seu grau, o Princípio da Boa Ordenação garante a existência polinômio mínimo m .

Denotando por $\mathcal{I}$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes em $\mathbb{K}[\zeta]$ que anulam T , claramente a soma de dois polinômios em $\mathcal{I}$, bem como a multiplicação de um polinômio em $\mathcal{I}$ por qualquer polinômio em $\mathbb{K}[\zeta]$ resulta em um polinômio em $\mathcal{I}$. (Quer dizer, $\mathcal{I}$ é um ideal.) A divisão euclidiana de p por m nos dá $p = qm + r$. Como $r = p - qm$ pertence a $\mathcal{I}$ e o grau de m é mínimo, concluímos que $r = 0$. Em particular, temos a unicidade de m : se m_1, m_2 fossem dois polinômios mínimos de T , então $m = m_1 - m_2$ seria um polinômio de grau menor do que o de m_1 e m_2 e $m(T) = 0$. $\square$

1.2 O teorema de Cayley-Hamilton

Recordamos a definição do polinômio característico:

Definição 1.4 *Seja $A = T_{\mathcal{B}}$. O polinômio característico da matriz A é o polinômio*

$$p(\zeta) = \det(\zeta I - A).$$

É fácil verificar que $p \in \mathbb{K}[\zeta]$ é um polinômio mônico de grau n . Se $\mathcal{C}$ for outra base de V e a matriz $B = T_{\mathcal{C}}$ a representação de T na base $\mathcal{C}$, então $A = P^{-1}BP$, sendo $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$. Temos que

$$\begin{aligned} \det(\zeta I - A) &= \det(P^{-1}(\zeta I - B)P) \\ &= \det P^{-1} \det(\zeta I - B) \det P = \det(\zeta I - B) \det(P^{-1}P) \\ &= \det(\zeta I - B), \end{aligned}$$

mostrando que qualquer representação de T numa base de V possui o mesmo polinômio característico. Em consequência, podemos definir:

Definição 1.5 *O polinômio característico da aplicação linear $T : V \rightarrow V$ é o polinômio característico de qualquer uma de suas representações matriciais.*

Observação 1.6 O polinômio característico é especialmente importante por causa de suas raízes. Por isso, também é comum chamar $\det(T - \zeta I) = (-1)^n \det(\zeta I - T)$ de polinômio característico de T . $\triangleleft$

Dado o operador $T : V \rightarrow V$ definido no espaço de dimensão finita V , relembramos:

Definição 1.7 *Seja $p \in \mathbb{K}[\zeta]$ o polinômio característico da aplicação linear T . As raízes $\lambda \in \mathbb{K}$ de $p(\zeta)$ são chamadas **autovalores** de T , enquanto as soluções $v \neq 0$ de $Tv = \lambda v$ são chamados **autovetores** de T (associados a λ). O conjunto de todos os autovalores de T é chamado **espectro** de T e denotado por $\sigma(T)$.*

Exemplo 1.8 Consideremos o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$T(\chi_1, \chi_2) = (-\chi_2, \chi_1).$$

Ao representar T na base canônica $\{e_1, e_2\}$ do $\mathbb{R}^2$, obtemos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cujos polinômio característico é $p(\zeta) = \zeta^2 + 1$, que não possui raízes reais. Portanto, T não possui autovalores. Mas a matriz A pode ser considerada como uma matriz

com entradas complexas; nesse caso, o polinômio característico $p(\zeta) = \zeta^2 + 1$ pode ser fatorado como $p(\zeta) = (\zeta - i)(\zeta + i)$ e T possui dois “autovalores complexos” distintos. Isso mostra que a análise do espectro de um operador $T : V \rightarrow V$ depende muito do corpo $\mathbb{K}$ sobre o qual V é espaço vetorial. $\triangleleft$

O procedimento utilizado no exemplo anterior pode ser generalizado: dada uma matriz quadrada A , representação de $T : V \rightarrow V$, podemos considerar que suas entradas são números complexos. Essa interpretação, aparentemente inócua, nos permite aplicar o Teorema Fundamental da Álgebra à matriz A , que garante que A possui um “autovalor complexo”.*

Teorema 1.9 (Cayley-Hamilton)

Seja $p \in \mathbb{K}[\zeta]$ o polinômio característico de $T : V \rightarrow V$, em que V é um espaço de dimensão finita. Então $p(T) = 0$.†

Demonstração: Faremos indução sobre $n = \dim V$. Se $n = 1$, T é representado pela matriz $A = (\lambda)$, cujo polinômio característico é $p(\zeta) = \zeta - \lambda$. Então $p(A) = A - \lambda I = (\lambda - \lambda) = (0)$.

Suponhamos que o resultado seja válido para qualquer espaço de dimensão $n - 1$ e consideremos $T : V \rightarrow V$, com $\dim V = n$. Se a matriz $n \times n$ A for uma representação matricial de T , considerando A como uma matriz com entradas complexas, existe uma raiz $\lambda \in \mathbb{C}$ do polinômio característico p de A . Seja $0 \neq v_1 \in \mathbb{C}^n$ tal que $Av_1 = \lambda v_1$. Considere então uma base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V , cujo primeiro elemento é v_1 . Nessa base, a matriz A é representada por uma matriz B com a forma

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

em que B_1 denota uma matriz quadrada $(n-1) \times (n-1)$ e $*$ representa $n-1$ entradas sobre as quais não temos controle. Consideremos o polinômio característico de B :

$$p(\zeta) = \det(\zeta I - A) = (\zeta - \lambda) \det(\zeta I - B_1) = (\zeta - \lambda)p_1(\zeta),$$

em que $p_1(\zeta)$ é o polinômio característico de B_1 . Assim (veja o Exercício 3),

$$p(B) = (B - \lambda I)p_1(B).$$

Para obtermos $p_1(B)$, decorre de (1.1) que B^k tem a forma (veja o Exercício 4)

$$\begin{pmatrix} \lambda^k & * \\ 0 & B_1^k \end{pmatrix}$$

* Ao considerarmos a matriz A que representa T como uma matriz com entradas complexas, evitamos abordar a *complexificação* de um operador linear.

† Note que 0 simboliza o operador identicamente nulo.

e, portanto,

$$p_1(B) = \begin{pmatrix} p_1(\lambda) & * \\ 0 & p_1(B_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(\lambda) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de acordo com nossa hipótese de indução.

Assim, (os tamanhos das matrizes I são diferentes em cada expressão)

$$p(B) = (B - \lambda I)p_1(B) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & (B_1 - \lambda I) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(\lambda) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

completando a demonstração. $\square$

Observação 1.10 Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$. Dada uma aplicação linear $T : V \rightarrow V$, sejam p seu polinômio característico e m seu polinômio mínimo. Combinando o teorema de Cayley-Hamilton 1.9 com o Lema 1.3, vemos que p é um múltiplo de m . Posteriormente mostraremos que p possui exatamente os mesmos fatores irredutíveis de m (veja a Observação 3.5). Além disso, T é diagonalizável se, e somente se, $m(\zeta)$ for um produto de fatores lineares distintos (veja o Corolário 3.8). $\triangleleft$

1.3 Decomposição de operadores

Seja V um espaço vetorial. Suponhamos que

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_\ell, \quad (1.2)$$

isto é, que cada ponto $x \in V$ tenha uma única representação

$$x = x_1 + \cdots + x_\ell, \quad x_j \in W_j, \quad j = 1, \dots, \ell.$$

Para $j = 1, \dots, \ell$, definimos as **projeções canônicas**

$$\begin{aligned} \pi_j : V &\rightarrow W_j \subset V \\ x &\mapsto x_j. \end{aligned}$$

Claramente vale

$$\pi_j \pi_i = \delta_{ji} \pi_j, \quad (1.3)$$

em que $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$, e $\delta_{ii} = 1$, com $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$. Além disso,

$$\sum_{j=1}^{\ell} \pi_j = I. \quad (1.4)$$

Reciprocamente, se os operadores lineares $\pi_1, \dots, \pi_\ell$ satisfazem (1.3) e (1.4), definindo $W_j = \pi_j(V)$, temos que (1.2) se verifica e que π_j são as projeções canônicas dessa decomposição.

Definição 1.11 Suponhamos que

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_\ell$$

e que $T : V \rightarrow V$ satisfaça $T(W_j) \subset W_j$ para $j = 1, \dots, \ell$. Dizemos então que os subespaços W_j são **invariantes** pelo operador linear $T \in L(V, V)$. Definimos então os **blocos** T_j de T por $T_j = T|_{W_j} : W_j \rightarrow W_j$.

Proposição 1.12 Suponhamos que $T \in L(V, V)$ e $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_\ell$, com projeções correspondentes π_j , $j = 1, \dots, \ell$. Então $T(W_j) \subset W_j$ se, e somente se,

$$T\pi_j = \pi_j T.$$

Demonstração: Suponhamos que $T(W_j) \subset W_j$. Tome $x \in V$ arbitrário. Então $\pi_j x \in W_j$ e, conseqüentemente, $T\pi_j x \in W_j$. Logo $\pi_i T\pi_j x = \delta_{ij} T\pi_j x$ para todo $j = 1, \dots, \ell$. Somando todos esses termos e utilizando (1.4), obtemos

$$T\pi_i x = \sum_{j=1}^{\ell} \delta_{ij} T\pi_j x = \sum_{j=1}^{\ell} \pi_i T\pi_j x = \pi_i T \left(\sum_{j=1}^{\ell} \pi_j x \right) = \pi_i T x.$$

Reciprocamente, se T comuta com todo π_j , para todo $x \in W_j$ vale

$$Tx = T\pi_j x = \pi_j Tx \in W_j,$$

mostrando que $T(W_j) \subset W_j$. □

1.4 Um homomorfismo de álgebras

Definição 1.13 Uma **álgebra** $\mathcal{A}$ sobre o corpo $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ que possui, adicionalmente, uma multiplicação satisfazendo as seguintes propriedades, para todos $u, v, w \in \mathcal{A}$ e $\kappa \in \mathbb{K}$:

- (i) $(uv)w = u(vw)$ (associatividade);
- (ii) $u(v + w) = uv + uw$ (distributividade);
- (iii) $\kappa(uv) = (\kappa u)v = u(\kappa v)$.

Se existir um elemento $e \in \mathcal{A}$ tal que $eu = ue = u$ para todo $u \in \mathcal{A}$, a álgebra $\mathcal{A}$ possui uma **unidade**. Se $uv = vu$ para todos $u, v \in \mathcal{A}$, temos uma álgebra **comutativa**.

Exemplo 1.14 O espaço vetorial $\mathbb{K}[\zeta]$ de todos os polinômios com coeficientes em $\mathbb{K}$ é uma álgebra comutativa com unidade. O espaço vetorial $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é uma álgebra (não-comutativa) com unidade. O espaço $\mathcal{L}(V, V)$ é uma álgebra. Escolhida uma base de V , essa álgebra pode ser identificada com $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Fixado $T \in L(V, V)$, seja $\mathbb{K}[T]$ o conjunto de todos os operadores lineares obtidos ao se avaliar o polinômio $p \in \mathbb{K}[\zeta]$ em $T \in L(V, V)$:

$$T \mapsto p(T) \in L(V, V).$$

É fácil verificar que $\mathbb{K}[T]$ é uma subálgebra de $\mathcal{L}(V, V)$. ◁

Consideremos agora as álgebras $\mathbb{K}[\zeta]$ e $\mathbb{K}[T]$, definidas no exemplo anterior. A aplicação

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{K}[\zeta] &\rightarrow \mathbb{K}[T] \\ p &\mapsto p(T) \end{aligned}$$

é uma aplicação **linear** que satisfaz, adicionalmente,

$$\phi(pq) = pq(T) = p(T)q(T) = \phi(p)\phi(q).$$

(A segunda igualdade, de verificação imediata, já foi utilizada na prova do Lema 1.3). A aplicação ϕ é um **homomorfismo de álgebras**.

O núcleo de ϕ é o conjunto de múltiplos do polinômio mínimo m de T . A divisão euclidiana do polinômio p por m mostra que $\mathbb{K}[T]$ é constituída de polinômios em T com grau menor do que o do polinômio mínimo. (Estamos considerando que o grau do polinômio identicamente nulo é $-\infty$). Por definição, o homomorfismo ϕ é sobrejetivo.

1.5 Exercícios

Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$.

1. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Mostre que o polinômio característico de T é um polinômio mônico de grau n com coeficientes em $\mathbb{K}$.
2. Sejam A uma matriz real $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ um “autovalor” de A . Mostre a existência de um vetor $v \in \mathbb{C}^n$ tal que $Av = \lambda v$.
3. Sejam $p, q \in \mathbb{K}[\zeta]$ polinômios e $T : V \rightarrow V$ uma aplicação linear. Mostre que $(pq)(T) = p(T)q(T)$.

4. Seja A uma matriz diagonal em blocos:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_\ell \end{pmatrix},$$

em que as (sub)matrizes $A_i, i = 1, \dots, \ell$ são quadradas.

Mostre que

$$A^k = \begin{pmatrix} A_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_\ell^k \end{pmatrix}.$$

5. Suponha que o polinômio $p(\zeta)$ seja da forma $(\zeta - \lambda)^d q(\zeta)$, com $q(\lambda) \neq 0$ e $d \in \{2, 3, \dots\}$. Mostre que $p'(\lambda) = \dots = p^{(d-1)}(\lambda) = 0$, mas $p^{(d)}(\lambda) \neq 0$. Dizemos então que a raiz λ de $p(\zeta)$ tem **multiplicidade algébrica** d .
6. Sejam $T : V \rightarrow V$ uma aplicação linear, m o polinômio mínimo de T , A e B duas representações matriciais de T . Mostre que os polinômios mínimos de A e B são iguais a m .
7. Sejam $T : V \rightarrow V$ um operador linear e p um polinômio com coeficientes em $\mathbb{K}$. Mostre que se λ é um autovalor de T , então $p(\lambda)$ é um autovalor de $p(T)$.
8. Sejam $T : V \rightarrow V$ um operador linear e $p \in \mathbb{K}[\zeta]$. Mostre que, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e μ é um autovalor de $p(T)$, então existe um autovalor λ de T tal que $\mu = p(\lambda)$. Dê um exemplo mostrando que esse resultado não é válido se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
9. Compare a demonstração do Teorema de Cayley-Hamilton aqui apresentada com aquela em [7].
10. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Se $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_\ell$ e T satisfaz $T(W_i) \subset W_i$, mostre que T pode ser representada por uma **matriz diagonal em blocos**

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_\ell \end{pmatrix},$$

em que a A_i é uma (sub)matriz $j_i \times j_i$, sendo $j_i = \dim W_i$.

Reciprocamente, se a matriz diagonal em blocos A é a representação de um operador linear $T : V \rightarrow V$, mostre que existem espaços $W_i \subset V$ tais que $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_\ell$ e $T(W_i) \subset W_i$.

11. Sejam $T : V \rightarrow V$ um operador linear e $W \subset V$ um subespaço invariante. Mostre que os polinômios característico p_W e mínimo m_W de $T|_W : W \rightarrow W$ dividem os polinômios característico p e mínimo m de T .
Se $V = W_1 \oplus W_2$, com W_1, W_2 invariantes por T , e se r e s forem os polinômios mínimos de $T|_{W_1}$ e $T|_{W_2}$, respectivamente, mostre que o polinômio mínimo de T é $\text{mmc}(r, s)$, o mínimo múltiplo comum dos polinômios r e s .
12. Uma aplicação linear $T : V \rightarrow V$ é **diagonalizável** se pode ser representada por uma matriz **diagonal**, isto é, por uma matriz diagonal em blocos cujos blocos diagonais são todas submatrizes 1×1 . Mostre que um operador $T : V \rightarrow V$ é diagonalizável se, e somente se, V possui uma base formada por autovetores de T .
13. Sejam $p, q \in \mathbb{K}[\zeta]$ polinômios com coeficientes em $\mathbb{K}$ e $T : V \rightarrow V$ uma aplicação linear. Mostre que $(pq)(T) = p(T)q(T)$.
14. ????

Capítulo 2

O Cálculo Funcional

Neste capítulo apresentaremos, para o caso de dimensão finita, a versão generalizada do cálculo funcional de Dunford e Schwartz [10], de modo a podermos dar sentido para $f(T)$, no caso em que $T : V \rightarrow V$ é um operador linear no espaço de dimensão finita V e $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função suave o suficiente. Esse tipo de aplicação linear $f(T)$ é usualmente chamado de *função de matriz*. (Note, contudo, que essa denominação não é precisa: como não se estuda como f varia com T , não estamos lidando com uma função, mas sim com a aplicação linear $f(T)$, isto é, o valor assumido por f em T !)

2.1 O Polinômio Interpolador

Definição 2.1 Uma função $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (ou $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) é *euclidiana* com relação ao polinômio p se:

- (i) todas as raízes de p pertencem a U (respectivamente, a I);
- (ii) se ζ_0 for uma raiz de p com multiplicidade k , então f tem derivadas até a ordem k em ζ_0 .

Note que, se U for um aberto e f analítica em U (veja o Exercício 2 para a definição e propriedades de uma função analítica), a condição (ii) verifica-se imediatamente.

A terminologia utilizada na definição dada é motivada pelo seguinte resultado, válido tanto para funções definidas em $I \subset \mathbb{R}$ como em $U \subset \mathbb{C}$. Convencionaremos que o grau do polinômio identicamente nulo é $-\infty$.

Proposição 2.2 Seja f euclidiana com relação ao polinômio p . Então existem uma função q , contínua em cada uma das raízes do polinômio p , e um polinômio r tais que $f = qp + r$, $\text{gr } r < \text{gr } p$.

Demonstração: Seja r um polinômio arbitrário. Consideremos a função q definida (nos pontos do domínio de f que não são raízes de p) por

$$q = \frac{f - r}{p}.$$

Queremos mostrar que podemos escolher r com grau menor do que o de p , de modo que q possua extensão contínua em cada uma das raízes de p . Notamos que q é tão suave quanto f em cada ponto ζ que não é uma raiz de p .

Seja ζ_0 uma raiz de multiplicidade k do polinômio p , isto é,

$$p(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^k s(\zeta),$$

sendo s um polinômio tal que $s(\zeta_0) \neq 0$. Queremos achar r de modo que o quociente

$$\frac{f(\zeta) - r(\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^k}$$

possua extensão contínua em ζ_0 . De acordo com a regra de L'Hospital, isso acontece se

$$f(\zeta_0) = r(\zeta_0), \quad f'(\zeta_0) = r'(\zeta_0), \quad \dots, \quad f^{(k-1)}(\zeta_0) = r^{(k-1)}(\zeta_0) \quad (2.1)$$

e existir

$$f^k(\zeta_0).$$

Basta, portanto, mostrar que existe um polinômio r com grau menor do que o de p , satisfazendo relações como (2.1) em cada raiz ζ_0 do polinômio p , o que será feito no resultado a seguir. $\square$

Para mostrarmos a existência do polinômio r , denotaremos $f^{(0)} = f$.

Lema 2.3 *Sejam dados os valores*

$$\begin{array}{cccc} f(\zeta_1) & f'(\zeta_1) & \dots & f^{(\gamma_1-1)}(\zeta_1) \\ \vdots & \vdots & & \\ f(\zeta_j) & f'(\zeta_j) & \dots & f^{(\gamma_j-1)}(\zeta_j) \end{array}$$

em que $\zeta_1, \dots, \zeta_j$ são distintos. Seja $n = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_j \in \mathbb{N}$. Então, existe um único polinômio r , de grau menor do que ou igual a $n - 1$, satisfazendo

$$r^{(k_i)}(\zeta_i) = f^{(k_i)}(\zeta_i)$$

para todo $i = 1, \dots, j$ e $k_i = 0, \dots, \gamma_i - 1$.

Exemplo 2.4 Antes de passarmos ao caso geral, vejamos em um exemplo a demonstração do Lema 2.3. Suponhamos conhecidos os valores $f(\zeta_0)$, $f(\zeta_1)$ e $f'(\zeta_1)$. Queremos encontrar um polinômio r de grau 2 tal que $r(\zeta_0) = f(\zeta_0)$, $r(\zeta_1) = f(\zeta_1)$ e $r'(\zeta_1) = f'(\zeta_1)$. Seja $r(\zeta) = \lambda\zeta^2 + \mu\zeta + \nu$. Então os coeficientes de r devem satisfazer o sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} \zeta_0^2 & \zeta_0 & 1 \\ \zeta_1^2 & \zeta_1 & 1 \\ 2\zeta_1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\zeta_0) \\ f(\zeta_1) \\ f'(\zeta_1) \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Se os valores $f(\zeta_0)$, $f(\zeta_1)$ e $f'(\zeta_1)$ forem nulos, basta tomar $r \equiv 0$. (A unicidade de r , nesse caso, é consequência do argumento apresentado a seguir.)

Suponhamos que o sistema (2.2) não possua solução ou que essa não seja única. Então, o sistema homogêneo associado possui uma solução não trivial $(\lambda_0 \ \mu_0 \ \nu_0)^t$. Consideremos o polinômio não nulo

$$t(\zeta) = \lambda_0\zeta^2 + \mu_0\zeta + \nu_0.$$

É claro que $t(\zeta)$ tem raízes ζ_0 e ζ_1 , a segunda com multiplicidade 2 (já que ζ_1 é raiz da derivada de t). Mas isso implica que $t(\zeta)$ é um múltiplo de $(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_1)^2$ e tem grau maior do que ou igual a 3, o que é um absurdo. Logo (2.2) tem solução única para quaisquer valores $f(\zeta_0)$, $f(\zeta_1)$ e $f'(\zeta_1)$. $\triangleleft$

Demonstração: O polinômio r procurado satisfaz a um sistema linear que pode ser escrito matricialmente como

$$Bz = b,$$

sendo z o vetor que tem como coordenadas os coeficientes procurados de r , b um vetor cujas n coordenadas são os valores conhecidos de f e B a matriz $n \times n$ do sistema linear assim formado.

Se B não possuir inversa, o sistema $Bz = 0$ tem solução não trivial

$$z_0 = (\lambda_0 \ \dots \ \lambda_{n-1})^t.$$

Consideremos, então, o polinômio na incógnita ζ

$$t(\zeta) = \lambda_0 + \lambda_1\zeta + \dots + \lambda_{n-1}\zeta^{n-1},$$

que é um polinômio de grau menor do que ou igual a $n - 1$. Como z_0 satisfaz o sistema homogêneo associado, temos que $t(\zeta)$ deve ser um múltiplo de

$$(\zeta - \zeta_1)^{\gamma_1} \dots (\zeta - \zeta_j)^{\gamma_j},$$

o que é um absurdo, pois o último polinômio tem grau n . Assim, B possui inversa e o sistema $Bz = b$ solução única, qualquer que seja o vetor b . $\square$

O polinômio r é chamado de *polinômio interpolador* de Hermite.

Apresentamos agora uma consequência da Proposição 2.2 que está ausente de nossos cursos básicos de uma variável complexa:* a álgebra $\mathcal{H}$ de todas as funções analíticas $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é euclidiana com relação a todo polinômio p . Mais geralmente, temos

Proposição 2.5 *Na divisão euclidiana*

$$f = qp + r \quad (\text{gr } r < \text{gr } p)$$

da função analítica $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ pelo polinômio p cujas raízes estão em U , o quociente q é analítico.

Demonstração: De acordo com a demonstração da Proposição 2.2, a função

$$q = \frac{f - r}{p}$$

é analítica, pois o numerador e o denominador se anulam exatamente nos mesmos pontos e os zeros do numerador possuem multiplicidade maior do que ou igual à dos zeros do denominador. Assim, q possui uma expansão em série de potências em cada ponto de U . $\square$

Esse resultado possui extensão para funções $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ e polinômios cujas raízes estão todas em I : $q \in C^\infty$ decorre da regra de L'Hospital.

2.2 Funções de Matrizes

Algumas vezes escreveremos $f(\zeta)$ para distinguir a função $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (ou $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) da aplicação linear $f(T)$.

Sejam $T : V \rightarrow V$ um operador definido no espaço de dimensão finita V e m o polinômio mínimo de T .

Suponhamos que f seja euclidiana com relação ao polinômio m . Então

$$f(\zeta) = q(\zeta)m(\zeta) + r(\zeta),$$

com $\text{gr } r < \text{gr } m$. Uma vez que $m(T) = 0$, é natural definir

$$f(T) = r(T).$$

*Veja o Exercício 2 para aplicações da Proposição 2.5.

Definição 2.6 Seja $m(\zeta) = (\zeta - \zeta_1)^{\gamma_1} \cdots (\zeta - \zeta_j)^{\gamma_j}$ o polinômio mínimo do operador T . Se estiverem definidos os valores

$$\begin{array}{ccccccc} f(\zeta_1) & f'(\zeta_1) & \cdots & f^{(\gamma_1-1)}(\zeta_1) & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ f(\zeta_j) & f'(\zeta_j) & \cdots & f^{(\gamma_j-1)}(\zeta_j), & & & \end{array}$$

dizemos que f é **euclidiana com respeito a T** e definimos

$$f(T) = r(T),$$

sendo r o polinômio interpolador dado pelo Lema 2.3.

A Definição 2.6 tem uma consequência importante, que salientamos desde já: o operador $f(T)$ sempre comuta com o operador T !

Observação 2.7 Se compararmos a definição anterior com a definição de uma função euclidiana f com respeito a m , vemos que as exigências sobre f são menos restritivas. Qual a razão dessa diferença?

A resposta é simples: ao considerarmos abstratamente a divisão

$$f(\zeta) = q(\zeta)m(\zeta) + r(\zeta), \quad (2.3)$$

precisamos impor condições em f que possibilitem definir uma função q que dê um sentido àquela divisão. Se essas exigências forem satisfeitas, podemos então concluir que r é dado pelo polinômio interpolador, que está definido sob condições menos exigentes.

Por outro lado, ao considerarmos $f(T)$, supondo possível a substituição de ζ por T em (2.3), obtemos $f(T) = q(T)m(T) + r(T)$, teremos $f(T) = r(T)$, independente da definição de $q(T)$. Assim, apenas o valor do polinômio r em T é importante.

A substituição de ζ por T em (2.3) é aceita implicitamente em muitos textos. Mas uma dificuldade incontornável antepõe-se a ela em situações gerais: $q(T)$ tem que estar previamente definido para que a substituição faça sentido! $\triangleleft$

Entretanto, a Definição 2.6 nem sempre é fácil de aplicar: muitas vezes precisamos partir de um polinômio p que anula T para obter o polinômio mínimo m . Seria proveitoso se pudéssemos utilizar p ao invés de m na definição do operador $f(T)$. E isso pode ser feito. Podemos utilizar múltiplos de m enquanto a suavidade de f permitir. Ao mostrarmos esse resultado manteremos a notação $f = qm + r$ (sendo r o polinômio interpolador definido antes) para simbolizar que $f(T)$ foi definido como $r(T)$. Suponhamos que p seja outro polinômio que anula a matriz

T e r_1 o polinômio interpolador gerado por p . Então teríamos $f = q_1 p + r_1$ (isto é, $f(T)$ seria definido como $r_1(T)$). Mas o Lema 2.3 garante que

$$r_1(\zeta) = q_2(\zeta)m(\zeta) + r(\zeta). \quad (2.4)$$

De fato, para toda raiz ζ_0 de multiplicidade γ de $m(\zeta)$, notamos que

$$r_1^{(i)}(\zeta_0) = f^{(i)}(\zeta_0) = r^{(i)}(\zeta_0), \quad \text{para } i = 0, \dots, \gamma - 1.$$

Uma vez que todos os termos da equação (2.4) são polinômios, a substituição de ζ por T faz sentido, de acordo com a Seção 1.4. Assim,

$$r_1(T) = r(T),$$

o que autoriza a utilização de qualquer múltiplo $s(\zeta)$ do polinômio mínimo $m(\zeta)$ do operador T ao invés de $m(\zeta)$ na Definição 2.6.

Observação 2.8 Note que, na argumentação anterior, não verificamos que $r_1 = r$, mas apenas que $r_1(T) = r(T)$! $\triangleleft$

Exemplo 2.9 Consideremos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

cujo polinômio característico é $p(\zeta) = (\zeta - 4)(\zeta - 1)^2$.

O polinômio mínimo de A é $m(\zeta) = (\zeta - 1)(\zeta - 4)$, como se verifica facilmente. Se quisermos calcular A^{1000} , definimos a função $f(\zeta) = \zeta^{1000}$ e consideramos o polinômio $r(\zeta) = \lambda\zeta + \mu$ satisfazendo $r(4) = f(4) = 4^{1000}$ e $r(1) = f(1) = 1$. Definindo $\gamma = 4^{1000}$, então $r(\zeta) = \frac{\gamma-1}{3}\zeta + \frac{4-\gamma}{3}$. Assim,

$$A^{1000} = r(A) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma+2}{3} & \frac{\gamma-1}{3} & \frac{\gamma-1}{3} \\ \frac{\gamma-1}{3} & \frac{\gamma+2}{3} & \frac{\gamma-1}{3} \\ \frac{\gamma-1}{3} & \frac{\gamma-1}{3} & \frac{\gamma+2}{3} \end{pmatrix}.$$

Notamos que, uma vez que $f(\zeta) = \zeta^{1000}$ é um polinômio, poderíamos ter feito a divisão euclidiana $f(\zeta) = q(\zeta)m(\zeta) + r(\zeta)$ (obtendo assim r), donde se segue que $A^{1000} = r(A)$. (Os cálculos nesse exemplo podem ser simplificados: veja o Exercício 3.) $\triangleleft$

Exemplo 2.10 Consideremos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Queremos calcular $\cos A$.

Os polinômios característico e mínimo de A são $p(\zeta) = \zeta^3$ e $m(\zeta) = \zeta^2$. Utilizando p , obtemos o polinômio interpolador $r_p(\zeta) = \lambda\zeta^2 + \mu\zeta + \nu$, em que $\lambda = -1/2$, $\mu = 0$ e $\nu = 1$ (pois $\nu = r(0) = \cos 0 = 1$, $\mu = r'(0) = -\sin 0 = 0$ e $2\lambda = r''(0) = -\cos 0 = -1$). Utilizando m , obtemos o polinômio interpolador $r_m(\zeta) = \alpha\zeta + \beta$, em que $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. Assim, $r_p \neq r_m$. Contudo,

$$r_p(A) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r_m(A)$$

e $\cos A = r_p(A) = r_m(A) = I$. ◁

2.3 Estendendo o Homomorfismo de Álgebras

Sejam $T : V \rightarrow V$ uma aplicação linear definida no espaço V de dimensão n e m o seu polinômio mínimo. Suponhamos que f e g sejam euclidianas com relação a T . Nosso objetivo nesta seção é mostrar que, em $(fg)(\zeta)$ é válida a substituição de ζ por T : $(fg)(T) = f(T)g(T)$.

Assim, suponhamos que $m(\zeta) = (\zeta - \zeta_1)^{\gamma_1} \cdots (\zeta - \zeta_j)^{\gamma_j}$ seja o polinômio mínimo de T .

Como vimos na Seção 1.4, existe um homomorfismo natural ϕ entre $\mathbb{K}[\zeta]$, a álgebra de polinômios com coeficientes em $\mathbb{K}$ e $\mathbb{K}[T]$, a álgebra de operadores lineares obtida ao se avaliar cada polinômio $p \in \mathbb{K}[\zeta]$ em T .

Denotamos por $\mathcal{F}$ a álgebra de todas as funções euclidianas com respeito a T . É claro que $\mathbb{K}[\zeta]$ é uma subálgebra de $\mathcal{F}$.

Definimos, então, $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{K}[T]$ por $\Phi(f) = f(T)$, sendo $f(T)$ dado pela Definição 2.6. Claramente Φ é uma aplicação linear. Vamos verificar que $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$. Se $f = q_1m + r_f$ e $g = q_2m + r_g$ denotam as divisões euclidianas de f e g por m , claramente $\Phi(f)\Phi(g) = r_f(T)r_g(T) = (r_fr_g)(T)$. Por outro lado, seja $fg = q_3m + r_{fg}$ a divisão euclidiana de fg por m . Como vimos antes da Definição 2.6, vale a divisão de polinômios $r_fr_g = q_4m + r_{fg}$, o que implica $\Phi(fg) = r_{fg}(T) = (r_fr_g)(T) = \Phi(f)\Phi(g)$. Isso mostra que Φ é um homomorfismo de álgebras, que estende o homomorfismo ϕ .

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{K}[\zeta] & \phi \\ & \swarrow & \searrow \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{K}[T] \end{array}$$

O núcleo de Φ é constituído pelas funções $f \in \mathcal{F}$ que possuem resto nulo quando divididas por m , isto é, pelas funções f tais que

$$f(\zeta_1) = 0, \dots, f^{(\gamma_1-1)}(\zeta_1) = 0, \dots, f(\zeta_j) = 0, \dots, f^{(\gamma_j-1)}(\zeta_j) = 0.$$

(A leitura do restante desta seção é opcional.)

Observação 2.11 (Os resultados aqui descritos são mais avançados e requerem conhecimentos da topologia do $\mathbb{K}^n$.) É possível introduzir uma topologia em $\mathbb{K}[\zeta]$, na qual o homomorfismo ϕ é contínuo. Para isso, seja $K \subset \mathbb{K}$ um conjunto compacto que contenha $\sigma(T)$ em seu interior. Definimos $k = \max\{\gamma_1 - 1, \dots, \gamma_j - 1\}$ e a norma

$$\|p\|_{C^k(K)} = \max_{\zeta \in K} \{|p(\zeta)|, \dots, |p^{(k)}(\zeta)|\}.$$

É de verificação imediata que a convergência nessa norma implica convergência na seminorma

$$\|p\|_{\mathbb{K}[\zeta]} = \max\{|p(\zeta_1)|, \dots, |p^{(\gamma_1-1)}(\zeta_1)|, \dots, |p(\zeta_j)|, \dots, |p^{(\gamma_j-1)}(\zeta_j)|\}.$$

Se considerarmos $\mathbb{K}[T]$ com a topologia de $\mathbb{K}^{n^2}$, o homomorfismo ϕ é contínuo. De fato, sejam p e q polinômios quaisquer. O polinômio (em T) $p(T) - q(T)$ tem coeficientes que dependem apenas dos valores assumidos pelos polinômios p e q (e, conforme o caso, pelas suas derivadas até a ordem k) no espectro $\sigma(T) = \{\zeta_1, \dots, \zeta_j\}$ do operador T , de acordo com a Definição 2.6. Segue-se imediatamente daí que $p(T)$ estará perto de $q(T)$, se p e q estiverem suficientemente próximos na norma $\|\cdot\|_{C^k(K)}$.

Entretanto, para garantir a continuidade de Φ precisamos restringir a álgebra $\mathcal{F}$. Fazemos isso definindo $\mathcal{F}^k$, a álgebra de todas as funções f definidas e de classe C^k em todos os pontos do interior do compacto K . Claramente $\mathcal{F}^k \subset \mathcal{F}$. Consideramos em $\mathcal{F}^k$ a mesma norma introduzida em $\mathbb{K}[\zeta]$. É claro que $\mathbb{K}[\zeta]$ também é uma subálgebra de $\mathcal{F}^k$.

O argumento que prova a continuidade de ϕ continua válido. Assim, $\Phi_{\mathcal{F}^k} = \Phi|_{\mathcal{F}^k}$ é contínuo.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{K}[\zeta] & \xrightarrow{\phi} \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathcal{F}^k & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{F}^k}} & \mathbb{K}[T] \end{array}$$

A continuidade de $\Phi_{\mathcal{F}^k}$ é importante na Álgebra Linear Numérica. $\triangleleft$

2.4 Aplicações do Cálculo Funcional

Uma grande variedade de aplicações do Cálculo Funcional é apresentada em [12]. Aqui listaremos apenas algumas aplicações simples, dando especial atenção ao fluxo $e^{A\tau}$ e suas principais propriedades.

2.4.1 O Fluxo

Começamos com a definição usual do fluxo $e^{A\tau}$. Essa depende da noção de convergência uniforme e da noção de norma de uma matriz quadrada. Essa primeira definição pode ser omitida.

Partimos da função exponencial $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, cuja representação em série de potências

$$\exp(\zeta \vartheta) = e^{\zeta \vartheta} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n \vartheta^n}{n!},$$

converge uniformemente em conjuntos compactos. Se $\|A\|$ denotar a norma usual no espaço $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ das transformações lineares $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, afirmamos que

$$I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n \vartheta^n}{n!}$$

define um operador linear. De fato, a norma em $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ tem a propriedade

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$$

seguinte-se daí que $\|A^i\| \leq \|A\|^i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim, para $k \in \mathbb{N}$, decorre que

$$\left\| I + \sum_{n=1}^k \frac{A^n \vartheta^n}{n!} \right\| \leq 1 + \sum_{n=1}^k \frac{\|A\|^n |\vartheta|^n}{n!}. \quad (2.5)$$

Para cada valor de ϑ fixo, a série à direita converge. Como o espaço $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ é completo, o M -teste de Weierstrass implica que

$$\exp(A\vartheta) = e^{A\vartheta} := I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n \vartheta^n}{n!}$$

é um operador linear. Tomando $\vartheta = \tau \in \mathbb{R}$, definimos o *fluxo* $e^{A\tau}$ da matriz A . Também notamos que (2.5) mostra que a convergência é uniforme, se τ pertencer a um conjunto compacto. Logo, diferenciação termo a termo produz sua derivada e

$$\frac{d}{d\tau} e^{A\tau} = e^{A\tau} A.$$

Além disso, quando $\tau = 0$, temos

$$e^{A\tau} \Big|_{\tau=0} = e^0 = I.$$

Essas são as propriedades principais do fluxo $e^{A\tau}$. Em particular, vemos que $e^{A\tau}$ é uma solução fundamental do sistema matricial $X' = AV$, $X(0) = I$.

Essa definição do fluxo $e^{A\tau}$ torna difícil o seu cálculo explícito: usualmente é necessário obter a forma canônica de Jordan $J = P^{-1}AP$ da matriz A , então $e^{J\tau}$ e, finalmente, $e^{A\tau} = Pe^{J\tau}P^{-1}$. O cálculo funcional torna possível obter $e^{A\tau}$ facilmente.

Apresentamos agora uma forma alternativa de introduzir o fluxo, sem apelar para sua definição por meio de séries de potências. Seja A uma matriz quadrada. Consideremos a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (dependente do parâmetro real τ) definida por $f(\zeta) = e^{\zeta\tau}$. Ela define a função de matriz $e^{A\tau}$.

Exemplo 2.12 Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Queremos calcular $e^{A\tau}$. O polinômio característico de A (e também o seu polinômio mínimo) é

$$p(\zeta) = (\zeta - 1)(\zeta + i)(\zeta - i).$$

(Estamos considerando A como uma matriz no corpo $\mathbb{C}$. Como mostraremos a seguir, a utilização de raízes complexas é vantajosa.)

Para obtermos $e^{A\tau}$, definimos a função $f(\zeta) = e^{\zeta\tau}$. Basta, então, encontrar um polinômio, de grau no máximo igual a 2, tal que $r(1) = f(1) = e^\tau$, $r(i) = f(i) = \cos \tau + i \sin \tau$ e $r(-i) = f(-i) = \cos \tau - i \sin \tau$. Substituindo essas relações no polinômio $r(\zeta) = \lambda\zeta^2 + \mu\zeta + \nu$, achamos $\lambda = (e^\tau/2) - (\cos \tau + \sin \tau)/2$, $\mu = \sin \tau$ e $\nu = (e^\tau/2) + (\cos \tau - \sin \tau)/2$. Assim,

$$e^{A\tau} = \left[\frac{e^\tau}{2} - \frac{\cos \tau + \sin \tau}{2} \right] A^2 + (\sin \tau)A + \left[\frac{e^\tau}{2} + \frac{\cos \tau - \sin \tau}{2} \right] I,$$

que é, para cada $\tau \in \mathbb{R}$, uma matriz real (como não poderia deixar de ser), embora tenhamos considerado a matriz A como uma matriz complexa.

Se notarmos que a matriz A é uma matriz em blocos, a obtenção de $e^{A\tau}$ pode ser ligeiramente simplificada. Veja o Exercício 3. $\triangleleft$

Observação 2.13 Pode-se provar que $f(A)$ é uma matriz real, sempre que A for uma matriz real. A prova simples será omitida: veja [12], Remark 1.9, p. 7. $\triangleleft$

Exemplo 2.14 Seja

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 21 & -32 & -7 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de A é

$$p(\zeta) = (\zeta - 1)\zeta^2.$$

Para calcularmos $e^{A\tau}$, obtemos os coeficientes de $r(\zeta) = \lambda\zeta^2 + \mu\zeta + \nu$ de modo que sejam satisfeitas as relações $r(1) = e^{1\tau} = e^\tau$, $r(0) = e^{0\tau} = 1$ e $r'(0) = \tau e^{0\tau} = \tau$. Assim, $\nu = 1$, $\mu = \tau$ e $\lambda = e^\tau - \tau - 1$. Concluimos que

$$e^{A\tau} = (e^\tau - \tau - 1)A^2 + \tau A + 1I. \quad \triangleleft$$

Para obtermos algumas propriedades do fluxo, definimos:

Definição 2.15 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado não degenerado (isto é, I não se reduz a um ponto). Uma aplicação contínua $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada de **caminho**. O caminho x é diferenciável, se existir o **vetor velocidade***

$$x'(\tau) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{x(\tau + \Delta) - x(\tau)}{\Delta} \in \mathbb{K}^n.$$

(Se τ for um ponto de fronteira, o limite é o respectivo limite lateral. Também chamamos o vetor velocidade de **derivada** de $x(\tau)$).

Em outras palavras, se $x(\tau) = (\chi_1(\tau), \dots, \chi_n(\tau)) \in \mathbb{R}^n$, então

$$x'(t) = (\chi'_1(t), \dots, \chi'_n(t)).$$

Identificando $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ com $\mathbb{K}^{mn}$, a mesma noção faz sentido para caminhos que tomam valores no espaço $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Assim, se $A(\tau)$ denotar um caminho em $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, sua derivada é obtida ao se derivar cada uma das entradas de $A(\tau)$.

Também podemos considerar funções $\psi : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{K}^n$ (ou $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$) e definir a derivada $\psi'(\zeta)$ de maneira análoga.

Deduzimos imediatamente as seguintes propriedades do fluxo $e^{A\tau}$:

$$(i) \quad e^{A\tau} \Big|_{\tau=0} = I;$$

$$(ii) \quad \frac{d}{d\tau} e^{A\tau} = e^{A\tau} A.$$

Da fato, a função de matriz $e^{A\tau}$ pode ser considerada oriunda da função $g(\zeta, \tau) = e^{\zeta\tau}$. Se fizermos $\tau = 0$ nessa função, obtemos $g(\zeta, 0) = e^0$, de onde segue-se (i). Uma vez que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} g(\zeta, \tau) = e^{\zeta\tau} \zeta = g(\zeta, \tau) \zeta,$$

o homomorfismo de álgebras da Seção 2.3 garante (ii).

Observação 2.16 Embora a função $f(\zeta) = e^\zeta$ satisfaça a equação

$$e^{\zeta+\omega} = e^\zeta e^\omega,$$

não podemos deduzir que $e^{A+B} = e^A e^B$, uma vez que a substituição simultânea das variáveis ζ por A e ω por B não é permitida pelo cálculo funcional. Contudo, se A e B comutarem, o simples conhecimento de que $e^{A\tau}$ é um polinômio em A nos permite concluir que $e^{A\tau} B = B e^{A\tau}$, que é uma parte importante da demonstração de que $e^{(A+B)\tau} = e^{A\tau} e^{B\tau}$ se, e somente se, $AB = BA$ (veja o Exercício 16). $\triangleleft$

2.4.2 Funções Trigonométricas

O estudo da subseção anterior permanece válido para o caso da exponencial $e^{iA\tau}$ (ou seja, para a função $g(\zeta, i\tau)$, com $\tau \in \mathbb{R}$, a qual gera as funções trigonométricas $\sin At$ e $\cos At$. Essas funções também são fáceis de obter por meio do cálculo funcional.

As mesmas observações também se aplicam a outras funções trigonométricas.

2.4.3 Logaritmo

Dada uma matriz quadrada A , com $\det A \neq 0$, o cálculo funcional permite a obtenção da matriz $B = \log A$. Apenas temos que escolher um ramo da função $f(\zeta) = \log \zeta$ que contenha o espectro $\sigma(A)$ e, então, obter $B = \log A$ por meio do polinômio interpolador. Claro, a matriz B depende do ramo escolhido, mas a relação $e^B = A$ segue-se sempre de $e^{\log \zeta} = \zeta$.

Se todos os autovalores da matriz real A forem positivos, podemos então considerar a função real $f(\chi) = \ln \chi$ (logaritmo neperiano) e aplicar a mesma técnica. No caso em que A é simétrica, a matriz $B = \ln A$, assim obtida, é a única solução real da equação $e^B = A$ (veja [6]).

2.4.4 Raiz Quadrada

Suponhamos que todos os autovalores da matriz real A sejam reais e não negativos. Adicionalmente, se 0 for um autovalor de A , supomos que ele seja uma raiz simples do polinômio mínimo m de A .[†] Nesse caso, podemos utilizar a função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\chi) = \sqrt{\chi}$ para definir $\sqrt{A}$. Aqui, o cálculo funcional é utilizado em uma função que é apenas contínua no autovalor simples $\lambda = 0$ da matriz A .

Contudo, podemos definir $\sqrt{A}$ mesmo que A e seus autovalores sejam complexos e não nulos. Apenas precisamos escolher um ramo da função logaritmo $f(\zeta) = \log \zeta$ para o qual a raiz quadrada de todos os autovalores da matriz A esteja definida. Então aplicamos o cálculo funcional à função complexa $f(\zeta) = \sqrt{\zeta}$.

Observação 2.17 A definição de $\sqrt{A}$ não determina todas as soluções da equação $B^2 = A$. Se A for a matriz identidade 2×2 ,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

também são soluções de $B^2 = I$, além de $B = I$, a única solução que pode ser obtida por meio da função raiz quadrada real. (A matriz $-I$ pode ser obtida

[†]Essa hipótese pode ser relaxada, se A for uma matriz diagonal em blocos. Veja o Exercício 3.

utilizando a raiz quadrada complexa!) Além disso, se $A = I$, a equação $B^2 = A$ possui a família de soluções reais

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

que não vem da função $\sqrt{A}$. Veja, a esse respeito, [12]. ◁

A unicidade da raiz quadrada $\sqrt{A}$ pode ser garantida sob certas condições. Veja [6].

2.4.5 A Inversa

A maneira clássica de se obter a inversa por meio do polinômio característico p (ou mínimo) da matriz invertível A é a seguinte: se

$$p(\zeta) = \zeta^m + \lambda_{m-1}\zeta^{m-1} + \dots + \lambda_1\zeta + \lambda_0$$

temos

$$0 = A^m + \lambda_{m-1}A^{m-1} + \dots + \lambda_1A + \lambda_0I.$$

Multiplicando essa relação por A^{-1} , obtemos

$$\lambda_0A^{-1} = -[\lambda_1I + \dots + \lambda_mA^{m-1}].$$

Como A possui inversa, $\lambda_0 \neq 0$. Obtemos A^{-1} dividindo o lado direito da igualdade anterior por λ_0 .

Para uma matriz invertível arbitrária, esse procedimento não é vantajoso com relação ao cálculo da inversa por meio de Gauss-Jordan. Em geral, também o cálculo funcional não é vantajoso.

Mas, por exemplo, se a matriz invertível A for simétrica e possuir poucos autovalores, o cálculo funcional pode ser útil: veja [5].

2.5 Exercícios

1. Sejam $p, m \in \mathbb{K}[\zeta]$. Mostre que o resto r da divisão euclidiana $p = qm + r$ é justamente o polinômio interpolador. Assim, o polinômio interpolador fornece uma generalização natural da divisão euclidiana.
2. (Este exercício requer alguma familiaridade com funções de uma variável complexa.) Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que f é *analítica* em U , se ela possuir derivada em todos os pontos do aberto

U é holomorfa em U , se ela possuir desenvolvimento em série de potências (com raio de convergência positivo) em todos os pontos do aberto U .

Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analítica em U .

(a) Suponha que U seja convexo e $\gamma, \eta : [a, b] \rightarrow U$ duas curvas fechadas. Mostre que γ e η são homotópicas.

(b) Sejam $\gamma, \eta : [a, b] \rightarrow U$ duas curvas homotópicas e $q : U \rightarrow \mathbb{C}$ analítica. Mostre que

$$\int_{\gamma} q(\zeta) d\zeta = \int_{\eta} q(\zeta) d\zeta.$$

Em particular, se γ for homotópica a um ponto em U , então $\int_{\gamma} q(\zeta) d\zeta = 0$.

(c) Efetue a divisão euclidiana $f(\zeta) = q(\zeta)(\zeta - \zeta_0) + r(\zeta)$ e mostre a fórmula integral de Cauchy para conjuntos abertos convexos:

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = f(\zeta_0) W(f, \zeta_0),$$

em que $W(f, \zeta_0)$ denota o número de rotação e $\gamma(\tau) \neq \zeta_0$ para todo $t \in [a, b]$. Em particular, se γ for um círculo,

$$f(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - \zeta_0}.$$

(Essa é uma demonstração muito simples da fórmula integral de Cauchy para conjuntos convexos!)

(d) Conclua, por meio de argumentos clássicos (veja, por exemplo, o Teorema 1.2, p. 133, em [16]), que toda função analítica é holomorfa. (Isso chega a uma situação em que a versão geral do Teorema de Cauchy pode então ser deduzida, utilizando o argumento de Dixon, tal qual em [19] ou [16].)

(e) Se γ for como em (c), utilize a divisão euclidiana para demonstrar que

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - \zeta_0)^2} = f'(\zeta_0) W(\zeta_0, \gamma).$$

3. Seja f uma função euclidiana com relação à matriz $n \times n$ em blocos

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix}.$$

Então

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(A_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(A_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(A_k) \end{pmatrix}.$$

Observação: a Definição 2.6 pode ser generalizada, se existir uma decomposição de $T : V \rightarrow V$ em blocos invariantes. Por exemplo, consideremos a função $f(\zeta) = \sqrt{\zeta}$. De acordo com a Definição 2.6, só podemos calcular $f(A)$ se 0 for uma raiz simples do polinômio característico de A . Mas se A for uma matriz diagonalizável e considerando este exercício, podemos calcular $f(A)$ independente da multiplicidade de 0 como raiz do polinômio mínimo de A .

4. Sejam $p(\zeta) = (\zeta - \lambda)^n$ e f uma função euclidiana com relação a p . Obtenha explicitamente os coeficientes do polinômio interpolador r tal que $f = qp + r$, $\text{gr } r < \text{gr } p$.

5. Calcule $\sin A$ e e^A , para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Calcule $e^{A\tau}$, se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Mostre que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

não possui raiz quadrada. Isso contradiz os resultados da Seção 2.4.4?

8. Sejam $T : V \rightarrow V$ um operador linear e $q \in \mathbb{K}[\zeta]$. Mostre que, se λ for um autovalor de T , então $q(\lambda)$ é um autovalor de $q(T)$.
9. Sejam $T : V \rightarrow V$ um operador linear e $p \in \mathbb{K}[\zeta]$. Mostre que, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e μ for um autovalor de $p(T)$, então existe um autovalor λ de T tal que $\mu = p(\lambda)$. Dê um exemplo mostrando que esse resultado não é válido se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
10. Seja V um espaço vetorial *real* de dimensão *ímpar*. Mostre que todo operador $T : V \rightarrow V$ possui autovalor (real).

11. Sejam $A(\tau)$ e $B(\tau)$ dois caminhos diferenciáveis em $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})(\mathbb{K})$ definidos no mesmo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Mostre que

$$\frac{d}{d\tau}[A(\tau)B(\tau)] = \left[\frac{d}{d\tau}A(\tau) \right] B(\tau) + A(\tau) \left[\frac{d}{d\tau}B(\tau) \right].$$

12. Sejam $I \ni t \mapsto A(\tau) \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})(\mathbb{K})$ um caminho e f uma função suave, tal que f' seja euclidiana com relação a $A(\tau)$ para todo $\tau \in I$ (isso certamente acontece se $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ for analítica) e $f(A(\tau))$ a função de matriz resultante. Mostre:

- (a) $\frac{d}{d\tau}[A(\tau)]^k = A'(\tau)[A(\tau)]^{k-1} + AA'(\tau)[A(\tau)]^{k-2} + \dots + [A(\tau)]^{k-1}A'(\tau)$.
 (b) Se $A(\tau)$ e $A'(\tau)$ comutarem, então $\frac{d}{d\tau}f(A(\tau)) = f'(A(\tau))A'(\tau)$. Dê um exemplo mostrando que esse resultado não é válido se $A(\tau)$ e $A'(\tau)$ não comutarem.
 (c) $\frac{d}{d\tau}[\text{tr } f(A(\tau))] = \text{tr}[f'(A(\tau))A'(\tau)]$, mesmo se $A(\tau)$ e $A'(\tau)$ não comutarem.

13. Sejam $x_1, \dots, x_n: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ caminhos diferenciáveis. Se D denotar a função determinante, mostre que $D(x_1(\tau), \dots, x_n(\tau))$ é diferenciável e calcule sua derivada. Deduza que, se $\tau \mapsto A(\tau) \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})(\mathbb{K})$ for um caminho diferenciável tal que $A(0) = I$, então $\frac{d}{d\tau} \det A(\tau) \Big|_{\tau=0} = \text{tr } A'(0)$.
 14. Seja $\tau \mapsto A(\tau) \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})(\mathbb{R})$ um caminho diferenciável. Mostre que, para todo valor de τ tal que $A(\tau)$ é invertível, vale

$$\frac{[\det A(\tau)]'}{\det A(\tau)} = \text{tr}([A(\tau)]^{-1}A'(\tau)),$$

ou seja,

$$\frac{d}{d\tau} \ln \det A(\tau) = \text{tr}([A(\tau)]^{-1}A'(\tau)).$$

15. Dê um exemplo mostrando que $e^{A+B} \neq e^A e^B$ no caso de as matrizes A e B não comutarem.
 16. Mostre que $e^{(A+B)\tau} = e^{A\tau} e^{B\tau}$ se, e somente se, A e B comutarem.

Observação: Podemos ter $e^{A+B} = e^A e^B$, mesmo que as matrizes A e B não comutem. Por exemplo, considere

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3}\pi \\ 0 & 0 & -\pi \\ -\sqrt{3}\pi & \pi & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{3}\pi \\ 0 & 0 & -\pi \\ \sqrt{3}\pi & \pi & 0 \end{pmatrix}.$$

17. Seja P uma matriz invertível e r um polinômio. Mostre que $r(P)r(P^{-1}) = r(I) = I$.
18. Suponha definida $f(A)$. Mostre que
- (a) $f(A^t) = f(A)^t$;
 - (b) se $QA = AQ$, então Q comuta com $f(A)$.

Definição 2.18 Seja $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})(\mathbb{R})$. A matriz A é **positiva**, se $\alpha_{ij} > 0$ e **não negativa**, se $\alpha_{ij} \geq 0$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Um vetor $x = (\chi_1, \dots, \chi_n)$ é **positivo** (resp., **não negativo**) se $\chi_i > 0$ (resp., $\chi_i \geq 0$) para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Notamos $x \geq y$, se $\chi_i \geq \gamma_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

16. **(O Teorema de Perron)** Sejam $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})(\mathbb{R})$ uma matriz positiva e $\|\cdot\|$ uma norma no $\mathbb{R}^n$. Considere

$$K := \{x \geq 0 \mid \|x\| = 1\}$$

e defina $\mu = \sup_K \{\rho > 0 \mid Ax \geq \rho x\}$. Mostre:

- (a) o valor μ está bem definido e é positivo;
 - (b) se um vetor $z > 0$ satisfizer $Az \geq \mu z$, então z é um autovetor de A associado ao autovalor μ ;
 - (c) vale a desigualdade: $|Ax| \leq A|x|$, em que $|v|$ denota o vetor com coordenadas iguais ao valor absoluto das coordenadas de v ;
 - (d) o autovetor z é positivo e o valor μ é o maior autovalor de A ;
 - (e) o autovalor μ é simples. Assim, se $Aw = \mu w$, então w é, necessariamente, um múltiplo de z .
17. Seja $U \subset \mathbb{K}^n$ um subespaço. Suponha que exista um autovetor positivo $u \in U$. Mostre que U possui uma base formada apenas por vetores positivos.

Capítulo 3

O teorema espectral

Nesta seção mostraremos a utilidade do cálculo funcional na demonstração de resultados abstratos.

3.1 Imagem do Espectro

Nosso primeiro resultado esclarece a relação entre os autovalores de T e os autovalores de $f(T)$.

Teorema 3.1 (da Imagem do Espectro)

Seja f uma função euclidiana com relação ao operador $T : V \rightarrow V$, definido no espaço complexo V de dimensão n . Se v for um autovetor de T associado ao autovalor λ , então v é um autovetor de $f(T)$ associado ao autovalor $f(\lambda)$. Todo autovalor de $f(T)$ é da forma $f(\lambda)$, em que λ é um autovalor de T . Portanto, em símbolos, vale $f(\sigma(T)) = \sigma(f(T))$.

Demonstração: Como f é euclidiana com relação à T , $f(T) = r(T) = \alpha_k T^k + \dots + \alpha_1 T + \alpha_0 I$. Se $Tv = \lambda v$ com $v \neq 0$, então

$$f(T)v = r(T)v = (\alpha_k \lambda^k + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0)v = r(\lambda)v = f(\lambda)v.$$

Reciprocamente, suponhamos que μ seja um autovalor de $f(T) = r(T)$. Consideremos o polinômio $r(\zeta) - \mu$, que pode ser fatorado em $\mathbb{C}$ como

$$r(\zeta) - \mu = \alpha_k \prod_{i=1}^k (\zeta - \lambda_i).$$

Consequentemente,

$$r(T) - \mu I = \alpha_k \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i I).$$

Como o lado esquerdo dessa equação não possui inversa, ao menos um dos fatores $T - \lambda_i I$ não é invertível. Assim, λ_i é, ao mesmo tempo, um autovalor de T e uma raiz de $r(\zeta) - \mu$. Portanto,

$$f(\lambda_i) = r(\lambda_i) = \mu. \quad \square$$

Note que a primeira afirmação vale mesmo que V seja um espaço real. Mas não é isso o que acontece com a recíproca (veja o Exercício 9 do Capítulo 2).

3.2 O Teorema Espectral

Definição 3.2 Um operador $N : V \rightarrow V$ é **nilpotente** se existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $N^k = 0$.

Provaremos agora um dos resultados mais importantes da Álgebra Linear.

Teorema 3.3 (Espectral)

Sejam V um espaço vetorial complexo de dimensão n e $T : V \rightarrow V$ um operador com polinômio característico

$$p(\zeta) = (\zeta - \lambda_1)^{\gamma_1} \cdots (\zeta - \lambda_j)^{\gamma_j},$$

em que os autovalores λ_i são distintos, para $i = 1, \dots, j$.

Então existem subespaços $W_1, \dots, W_j$ invariantes por T (isto é, $T(W_i) \subset W_i$ para todo i) tais que

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_j.$$

Além disso, $\dim W_i = \gamma_i$ e os polinômios mínimos m_i e m de $T|_{W_i}$ e T são $m_i(\zeta) = (\zeta - \lambda_i)^{\rho_i}$ e $m(\zeta) = m_1(\zeta) \cdots m_j(\zeta) = (\zeta - \lambda_1)^{\rho_1} \cdots (\zeta - \lambda_j)^{\rho_j}$, respectivamente, em que $1 \leq \rho_i \leq \gamma_i$.

Também vale a decomposição $T = D + N$, com D diagonalizável, N nilpotente, sendo ambos polinômios em T (e, portanto, $DN = ND$).

Demonstração: Para cada λ_i consideramos um aberto $U_i \subset \mathbb{C}$ com $\lambda_i \in U_i$ e

$$U_i \cap U_k = \emptyset,$$

se $i \neq k$. Definimos $f_i(\zeta) = 1$, se $\zeta \in U_i$, e $f_i(\zeta) = 0$, se $\zeta \in U_k$, $k \neq i$. As funções $f_1, \dots, f_j$ são euclidianas com relação à p e as relações

$$f_i^2 = f_i, \quad f_i f_k = 0, \text{ se } i \neq k, \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^j f_i = 1$$

são válidas em $\bigcup_{i=1}^j U_i \supset \sigma(T)$. Denotando $f_i(T)$ por π_i , as relações

$$\pi_i^2 = \pi_i, \quad \pi_i \pi_k = 0, \text{ se } i \neq k, \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^j \pi_i = I, \quad (3.1)$$

continuam válidas (de acordo com a Seção 2.3), de modo que cada $\pi_i : V \rightarrow V$ é uma projeção. Denotando a imagem de $\pi_i(V)$ por $W_i \neq \{0\}$, obtemos

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_j.$$

Como π_i comuta com T , a Proposição 1.12 garante que $T(W_i) \subset W_i$.

Independente das bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_j$ escolhidas para os espaços $W_1, \dots, W_j$, respectivamente, T pode ser representado por uma matriz A , diagonal em blocos com relação à base $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_j\}$ de $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_j$:

$$A = T_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_j \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que, para $i = 1, \dots, j$, o polinômio característico de A_i é

$$\det(\zeta I - A_i) = (\zeta - \lambda_i)^{\gamma_i},$$

o que implica $\dim W_i = \gamma_i$ e que o polinômio mínimo de $A_i = T|_{W_i}$ é $(\zeta - \lambda_i)^{\rho_i}$, para $1 \leq \rho_i \leq \gamma_i$ (de acordo com o Lema 1.3). Daí decorre imediatamente que o polinômio m tem a forma dada pelo teorema. (Veja o Exercício 11 do Capítulo 1. Compare com a Proposição 3.7.)

Nossa afirmação será provada se mostrarmos que o único autovalor de $T|_{W_i} = A_i$ é λ_i , pois conhecemos o polinômio característico de T .

Vamos considerar apenas $i = 1$, os casos restantes sendo análogos. Seja $\lambda \neq \lambda_1$ um autovalor arbitrário. Definimos as funções

$$g(\zeta) = \begin{cases} q_1(\zeta) = \zeta - \lambda, & \text{se } \zeta \in U_1, \\ q_k(\zeta) = 1, & \text{se } \zeta \in \bigcup_{k=2}^j U_k, \end{cases} \quad \text{e} \quad h(\zeta) = \begin{cases} 1/(\zeta - \lambda), & \text{se } \zeta \in U_1, \\ 1, & \text{se } \zeta \in \bigcup_{k=2}^j U_k. \end{cases}$$

Uma vez que $\lambda \notin U_1$, h está bem definida e vale

$$g(\zeta)h(\zeta) = 1.$$

Isso garante que $g(A)$ possui inversa.

Agora calculamos $g(A)$. Uma vez que

$$g(\zeta) = g(\zeta) \sum_{i=1}^j f_i(\zeta) = q_1(\zeta)f_1(\zeta) + q_2(\zeta)f_2(\zeta) + \dots + q_j(\zeta)f_j(\zeta),$$

decorre do homomorfismo de álgebras (Seção 2.3) que

$$g(A) = (A - \lambda I)\pi_1 + I\pi_2 + \dots + I\pi_j$$

e, portanto,

$$g(A) = \begin{pmatrix} A_1 - \lambda I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix}.$$

Como $g(A)$ tem inversa, $A_1 - \lambda I$ também possui inversa, o que garante que λ não é autovalor de A_1 e conclui a prova de nossa afirmação.

Consideramos agora o operador diagonalizável $D = \sum_{i=1}^j \lambda_i \pi_i$. (Em cada W_i temos $D_i := \lambda_i \pi_i = \lambda_i I$, em que I é o operador identidade em W_i , de acordo com (3.1). Isso implica que D é diagonalizável.)

Definimos $N = T - D$. A representação de N na base $\mathcal{B}$ é

$$N_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 - \lambda_1 I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 - \lambda_2 I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_j - \lambda_j I \end{pmatrix}.$$

Como o polinômio mínimo de $A_i = T|_{W_i}$ é $p_i(\zeta) = (\zeta - \lambda_i)^{\rho_i}$, tomando $k = \max\{\rho_1, \dots, \rho_j\}$ obtemos $(A_i - \lambda_i I)^k = 0$ para todo $i = 1, \dots, j$ e, portanto, $N^k = 0$.

Temos que $D = \sum_{i=1}^j \lambda_i \pi_i = \sum_{i=1}^j \lambda_i f_i(T)$ é uma soma de polinômios em T e, portanto, um polinômio em T . Mas isso implica que $N = A - D$ é polinômio em T , completando a prova. $\square$

Observação 3.4 Praticamente a mesma demonstração permanece válida no caso de um operador $T : V \rightarrow V$ em um espaço de dimensão infinita V , se existir um polinômio p tal que $p(T) = 0$. Nesse caso, se $(\zeta - \mu)$ for um fator de $p(\zeta)$ mas μ não for um autovalor de T , então a projeção associada a μ terá imagem $\{0\}$. $\triangleleft$

Observação 3.5 Se $\dim V = n$, a demonstração garante a validade do Teorema Espectral quando o operador $T : V \rightarrow V$ possui todos os seus n autovalores (contada a multiplicidade) no corpo $\mathbb{R}$ (veja o Exemplo 3.6).

Se esse não for o caso (isto é, se o polinômio característico de T possuir fatores irredutíveis de grau 2), o Teorema Espectral possui uma generalização (conhecida como Teorema da Decomposição Primária), que pode ser vista em [6]. $\triangleleft$

Exemplo 3.6 Seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definido por

$$T(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) = (2\chi_1 - \chi_2 + \chi_4, 3\chi_2 - \chi_3, \chi_2 + \chi_3, -\chi_2 + 3\chi_4).$$

O polinômio característico de T é $p(\zeta) = (\zeta - 3)(\zeta - 2)^3$ e verifica-se facilmente que $m(\zeta) = (\zeta - 3)(\zeta - 2)^2$ é o polinômio mínimo de T .

Exemplificaremos o Teorema 3.3 com respeito à base canônica do $\mathbb{R}^4$. Denotaremos por A a matriz que representa T nessa base.

A projeção π_1 (associada ao autovalor 3) é obtida ao se resolver o sistema*

$$r(\zeta) = \lambda\zeta^2 + \mu\zeta + \nu, \quad r(3) = 1, \quad r(2) = 0, \quad r'(2) = 0.$$

Assim, $\lambda = 1$, $\mu = -4$, $\nu = 4$ e

$$\pi_1 = A^2 - 4A + 4I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Do mesmo modo,

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos comprovar facilmente as relações (3.1).

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^4 &= \left\{ \begin{pmatrix} -2\chi_2 + \chi_3 + \chi_4 \\ 0 \\ 0 \\ -2\chi_2 + \chi_3 + \chi_4 \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} \chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3 - \chi_4 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ 2\chi_2 - \chi_3 \end{pmatrix} \right\} \\ &= W_1 \oplus W_2 \quad (\dim W_1 = 1, \dim W_2 = 3). \end{aligned}$$

*Para simplificar os cálculos, usamos o polinômio mínimo de T ao invés do polinômio característico.

A matriz D é definida por

$$D = 3\pi_1 + 2\pi_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

e a matriz nilpotente N por

$$N = A - D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil verificar que $N^2 = 0$ e $ND = DN$.

Se escolhermos, por exemplo, bases

$$\mathcal{B}_1 = \{w_1 = (1, 0, 0, 1)\}$$

e

$$\mathcal{B}_2 = \{w_2 = (1, 0, 0, 0), w_3 = (2, 1, 0, 2), w_4 = (-1, 0, 1, -1)\}$$

para os espaços W_1 e W_2 , respectivamente, então T é representado pela matriz diagonal em blocos

$$B = \begin{pmatrix} (3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2 & 0 & 0) \\ 0 & (0 & 3 & -1) \\ 0 & (0 & 1 & 1) \end{pmatrix}.$$

na base $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Como D é uma matriz diagonal nessa base, temos imediatamente

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$N = B - D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

também satisfaz $N^2 = 0$.

◁

De acordo com o Teorema Espectral, se o polinômio característico de um operador $T : V \rightarrow V$ definido no espaço complexo de dimensão finita V for

$$p(\zeta) = (\zeta - \lambda_1)^{\gamma_1} \cdots (\zeta - \lambda_j)^{\gamma_j},$$

então seu polinômio mínimo é

$$m(\zeta) = (\zeta - \lambda_1)^{\rho_1} \cdots (\zeta - \lambda_j)^{\rho_j},$$

em que $1 \leq \rho_i \leq \gamma_i$. O inteiro positivo ρ_i é o *índice* do autovalor λ_i .

Está implícita no Teorema 3.3 a seguinte caracterização dos espaços W_i :

Proposição 3.7 *Temos que $W_i = \ker(T - \lambda_i I)^{\rho_i}$. Os elementos de $\ker(T - \lambda_i I)^{\rho_i}$ são chamados autovetores generalizados associados a λ_i .*

Demonstração: De fato, se $w_i \in W_i$, então $(T - \lambda_i I)^{\rho_i} w_i = 0$, pois o polinômio mínimo de $T|_{W_i}$ é $(\zeta - \lambda_i)^{\rho_i}$. Assim,

$$W_i \subset \ker(T - \lambda_i I)^{\rho_i}.$$

Reciprocamente, tomemos $x \in V$ arbitrário e suponhamos que $(T - \lambda_i I)^{\rho_i} x = 0$. Escrevendo $x = \tilde{w} + w_i$, em que $\tilde{w} \in \tilde{W} := W_1 \oplus \cdots \oplus W_{i-1} \oplus W_{i+1} \oplus \cdots \oplus W_j$ e $w_i \in W_i$, segue-se daí que $(T - \lambda_i I)^{\rho_i} \tilde{w} = 0$, pelo que provamos antes. Se $\tilde{w} \neq 0$, chegamos a um absurdo, pois, em $W_1 \oplus \cdots \oplus W_{i-1} \oplus W_{i+1} \oplus \cdots \oplus W_j$, T tem como polinômio característico

$$\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^j (\zeta - \lambda_k)^{\gamma_k},$$

o qual não é divisível por $(\zeta - \lambda_i)^{\rho_i}$, contrariando a Observação 1.10. $\square$

O resultado anterior nos indica uma maneira alternativa de encontrar os espaços W_i : vale

$$\ker(T - \lambda_i I) \subsetneq \cdots \subsetneq \ker(T - \lambda_i I)^{\rho_i} = \ker(T - \lambda_i I)^{\rho_i+1} = \cdots = \ker(T - \lambda_i I)^{\gamma_i}. \quad (3.2)$$

(Para as inclusões estritas veja o Exercício 7; as igualdades são consequências de $(\zeta - \lambda_i)^{\rho_i}$ e $(\zeta - \lambda_i)^{\gamma_i}$ serem, respectivamente, os polinômios mínimos e característico de $T|_{W_i}$).

O índice ρ_i do autovalor λ_i é encontrado quando essa sequência de subespaços estabiliza-se. Ou, alternativamente, $\ker(T - \lambda_i I)^{\rho_i}$ é o primeiro subespaço da sequência que tem dimensão γ_i .

Corolário 3.8 *Seja V um espaço de dimensão finita. Um operador $T : V \rightarrow V$ é diagonalizável se, e somente se, o seu polinômio mínimo for produto de fatores lineares distintos.*

Demonstração: Suponhamos que T seja diagonalizável. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_j$ os autovalores distintos de T . Então V possui uma base formada por autovetores de T (veja [6]). Considere o polinômio

$$h(\zeta) = (\zeta - \lambda_1) \dots (\zeta - \lambda_j).$$

Se v for um autovetor de T associado ao autovalor λ_i , então $(T - \lambda_i I)v = 0$. Isso implica $h(T)v = 0$ para qualquer autovetor de T . Como o Teorema Espectral 3.3 implica que o polinômio mínimo e característico possuem os mesmos fatores irredutíveis, mostramos que h é o polinômio mínimo de T .

Reciprocamente, se $m(\zeta) = (\zeta - \lambda_1) \dots (\zeta - \lambda_j)$ for o polinômio mínimo de T , então o polinômio mínimo de $T|_{W_i}$ é $(\zeta - \lambda_i I)$. Isso quer dizer que $W_i = \ker(T - \lambda_i I)$. Assim, todo elemento de W_i é um autovetor de T . Tomando bases $\mathcal{B}_i$ de cada espaço W_i , temos que $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_\ell\}$ é uma base de V formada por autovetores de T , como queríamos demonstrar. $\square$

Proposição 3.9 *Sejam $S, T : V \rightarrow V$ dois operadores no espaço de dimensão finita V sobre $\mathbb{C}$. Suponhamos que $ST = TS$. Então existe uma base de V formada por autovetores generalizados tanto de S como de T .*

Demonstração: Seja $W_i = \ker(T - \lambda_i I)^{\rho_i}$. Sabemos que W_i é invariante por T . Vamos mostrar que também é invariante por S . De fato, se $w_i \in W_i$, então $Tw_i = \lambda_i w_i$. Mas então $STw_i = S(\lambda_i w_i) = \lambda_i(Sw_i)$. Como $TS = ST$, $STw_i = T(Sw_i)$, de modo que $T(Sw_i) = \lambda_i(Sw_i)$. Isso quer dizer que Sw_i é um autovetor de T associado a λ_i , ou seja $Sw_i \in W_i$. Aplicamos então o Teorema Espectral 3.3 ao operador $S : W_i \rightarrow W_i$ e obtemos uma base desse subespaço formada por autovetores generalizados de S . Como todos os elementos não nulos de W_i são autovetores generalizados de T , concluímos a prova ao repetir o procedimento para todo i . $\square$

Note que a demonstração anterior mostra que a Proposição 3.9 permanece válida para qualquer número de operadores que comutam. Mais precisamente,

Proposição 3.10 *Se $T_1, \dots, T_m : V \rightarrow V$ forem operadores no espaço de dimensão finita V sobre $\mathbb{C}$ e se $T_i T_j = T_j T_i$ para $i, j \in 1, \dots, m$, então existe uma base de V formada por autovetores generalizados de todos os operadores $T_1, \dots, T_m$.*

3.3 Exercícios

1. Seja $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})(\mathbb{K})$ diagonalizável. Mostre que A satisfaz o Teorema de Cayley-Hamilton.
2. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador definido no espaço de dimensão finita V . Suponha que $T^k = 0$ para algum inteiro k . Obtenha os autovalores de T .

3. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcule os autovalores de $\sin A$.

4. Encontre a decomposição dada pelo Teorema 3.3 para a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Seja A uma matriz tal que $A^k = 0$. Mostre que $B^k = 0$ para qualquer matriz B semelhante a A .
6. Seja N uma matriz $n \times n$, com $n \geq 2$. Seja N uma matriz nilpotente tal que $N^n = 0$, mas $N^{n-1} \neq 0$. Mostre que não existe uma matriz A tal que $A^2 = N$.
7. Seja $N : V \rightarrow V$ um operador nilpotente, com $N^k = 0$ e $N^{k-1} \neq 0$. Seja $v \in V$ tal que $N^k v = 0$ mas $N^{k-1} v \neq 0$. Mostre que os vetores $\{v, Nv, \dots, N^{k-1}v\}$ são linearmente independentes. Conclua as inclusões estritas na equação (3.2):

$$\ker(T - \lambda_i I) \subsetneq \dots \subsetneq \ker(T - \lambda_i I)^{d_i} = \ker(T - \lambda_i I)^{d_i+1} = \dots = \ker(T - \lambda_i I)^{s_i}.$$

Capítulo 4

Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

Neste capítulo mostraremos brevemente como o cálculo funcional pode ser aplicado no estudo de um sistema (linear) de equações diferenciais ordinárias. Não temos a pretensão de ser completo ou auto-suficiente: apenas apresentamos algumas definições básicas e expomos, utilizando o cálculo funcional, a demonstração de alguns resultados clássicos. (Uma exposição mais abrangente pode ser encontrada em [4].)

Resolver um sistema linear de equações diferenciais, com n equações (de primeira ordem) com coeficientes constantes, significa encontrar n funções continuamente diferenciáveis* $\chi_1, \dots, \chi_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaçam o sistema

$$\begin{aligned}\chi_1' &= \alpha_{11}\chi_1 + \dots + \alpha_{1n}\chi_n + \beta_1 \\ \chi_2' &= \alpha_{21}\chi_1 + \dots + \alpha_{2n}\chi_n + \beta_2 \\ \vdots &= \vdots \\ \chi_n' &= \alpha_{n1}\chi_1 + \dots + \alpha_{nn}\chi_n + \beta_n.\end{aligned}$$

Definindo a função $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $x(\tau) = (\chi_1(\tau) \dots \chi_n(\tau))^t$ e a matriz $A = (\alpha_{ij})$, verificamos que esse sistema pode ser escrito na forma

$$x' = Ax + b,$$

em que $x'(\tau)$ é o vetor obtido derivando-se cada uma das coordenadas do vetor $x(\tau)$ e $b = (\beta_1 \dots \beta_n)^t$.

Em consonância com a nomenclatura empregada no caso de sistemas lineares, se $b = 0$, o sistema é *homogêneo*; caso contrário, ele é chamado *não homogêneo*.

Vamos deter nossa atenção no sistema homogêneo

$$x' = Ax. \tag{4.1}$$

*Isto é, cujas derivadas são funções contínuas.

Se, ao procurarmos soluções de (4.1) exigirmos, *adicionalmente*, que a solução x satisfaça a *condição inicial*

$$x(\tau_0) = x_0, \quad (4.2)$$

em que x_0 é um vetor do $\mathbb{R}^n$, estamos lidando com um *problema de valor inicial*.

Seguindo [21], mostraremos inicialmente a *unicidade* de solução do problema de valor inicial (4.1)-(4.2). Denotamos por $\|\cdot\|$ a norma euclidiana do $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.1 *O problema de valor inicial (4.1)-(4.2) possui, no máximo, uma solução.*

Demonstração: Sejam $x = (\chi_1 \dots \chi_n)^t$ e $y = (\gamma_1 \dots \gamma_n)^t$ soluções do problema de valor inicial. Definimos $z = (\zeta_1 \dots \zeta_n)^t$ por $z(\tau) = x(\tau) - y(\tau)$ e

$$u(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} (|\chi_1(\sigma) - \gamma_1(\sigma)| + \dots + |\chi_n(\sigma) - \gamma_n(\sigma)|) d\sigma.$$

Como cada uma das parcelas da integral anterior é uma função contínua, o Teorema Fundamental do Cálculo garante que

$$u'(\tau) = |\chi_1(\tau) - \gamma_1(\tau)| + \dots + |\chi_n(\tau) - \gamma_n(\tau)|.$$

Mas $\chi_i(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \chi'_i(\sigma) d\sigma$ e $\gamma_i(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \gamma'_i(\sigma) d\sigma$. Logo,

$$|\chi_i(\tau) - \gamma_i(\tau)| = \left| \int_{\tau_0}^{\tau} (\chi'_i(\sigma) - \gamma'_i(\sigma)) d\sigma \right| \leq \int_{\tau_0}^{\tau} |\chi'_i(\sigma) - \gamma'_i(\sigma)| d\sigma, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Portanto,

$$u'(\tau) \leq \sum_{i=1}^n \int_{\tau_0}^{\tau} |\chi'_i(\sigma) - \gamma'_i(\sigma)| d\sigma. \quad (4.3)$$

Mas $\chi'_i(\sigma) = \langle \ell_i, x(\sigma) \rangle$, em que ℓ_i denota a i -ésima linha da matriz A . Assim, a desigualdade de Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky garante que

$$|\chi'_i(\sigma) - \gamma'_i(\sigma)| = |\langle \ell_i, x(\sigma) - y(\sigma) \rangle| \leq \|\ell_i\| \|x(\sigma) - y(\sigma)\| \leq \|\ell_i\| \|x(\sigma) - y(\sigma)\|_{\text{sum}},$$

em que $\|x(\sigma) - y(\sigma)\|_{\text{sum}} = \sum_{i=1}^n |\chi_i(\sigma) - \gamma_i(\sigma)|$. Portanto,

$$u'(\tau) \leq \sum_{i=1}^n \|\ell_i\| \int_{\tau_0}^{\tau} \|x(\sigma) - y(\sigma)\|_{\text{sum}} d\sigma \leq \rho u(\tau),$$

em que $\rho = \sum_{i=1}^n \|\ell_i\|$.

Multiplicando a desigualdade $u'(\tau) \leq \rho u(\tau)$ por $e^{\rho\tau}$, concluímos que

$$\frac{d}{d\tau}(e^{\rho\tau}u(\tau)) \leq 0.$$

Integrando essa desigualdade entre τ_0 e $\tau \in \mathbb{R}$, como $u(\tau_0) = 0$, vem que $u(\tau) \leq 0$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$. Daí decorre que $u \equiv 0$ e, portanto, $x = y$. $\square$

Definição 4.2 *Sejam $x_1, \dots, x_n$ soluções do sistema (4.1). Consideremos a matriz $X(\tau)$, cujas colunas são os vetores $x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)$. Definimos o **wronskiano** $W(x_1, \dots, x_n)(t)$ das soluções $x_1, \dots, x_n$ por*

$$W(x_1, \dots, x_n)(\tau) = \det X(\tau).$$

*Dizemos que as soluções $x_1, \dots, x_n$ são **linearmente independentes**, se*

$$W(x_1, \dots, x_n)(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

*Nesse caso, a matriz $X(\tau)$ é chamada **matriz fundamental** do sistema (4.1).*

*Caso contrário, isto é, se $W(x_1, \dots, x_n)(\tau_1) = 0$ para algum $\tau_1 \in \mathbb{R}$, as soluções são **linearmente dependentes**.*

Sabemos que os vetores $x_1(\tau_0), \dots, x_n(\tau_0) \in \mathbb{R}^n$ são linearmente independentes se, e somente se, $W(x_1, \dots, x_n)(\tau_0) \neq 0$. Assim, a independência linear das soluções $x_1, \dots, x_n$ de (4.1) equivale à independência linear dos vetores $x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$.

Enfatizamos que combinações lineares $\gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_j x_j$ de soluções $x_1, \dots, x_j$ de (4.1) também são soluções de (4.1).

Proposição 4.3 *Sejam $x_1, \dots, x_n$ soluções linearmente independentes de (4.1). Então elas constituem uma base do espaço de soluções, isto é, toda solução y de (4.1) é uma combinação linear $\gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_n x_n$.*

Essa Proposição justifica a denominação de *solução geral* para a expressão

$$\gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_n x_n,$$

se $\{x_1, \dots, x_n\}$ for uma base de soluções de (4.1).

Demonstração: Seja y uma solução de (4.1). Queremos mostrar que existem constantes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ tais que

$$y(\tau) = \gamma_1 x_1(\tau) + \gamma_2 x_2(\tau) + \dots + \gamma_n x_n(\tau), \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Consideremos $y(\tau_0)$. Em τ_0 , temos o sistema linear nas incógnitas $\gamma_1, \dots, \gamma_n$:

$$\gamma_1 x_1(\tau_0) + \gamma_2 x_2(\tau_0) + \dots + \gamma_n x_n(\tau_0) = y(\tau_0).$$

Como sabemos, se $W(\tau_0) \neq 0$, tal sistema tem solução única. Como as soluções $\gamma_1 x_1(\tau) + \dots + \gamma_n x_n(\tau)$ e $y(\tau)$ de (4.1) coincidem no ponto τ_0 , elas são idênticas em $\mathbb{R}$, como consequência do Teorema 4.1. $\square$

Observação 4.4 Seja $X(\tau)$ uma matriz fundamental de (4.1). Podemos escrever a solução geral desse sistema em termos matriciais: definindo o vetor $y = (\gamma_1 \dots \gamma_n)^t \in \mathbb{R}^n$, temos

$$x(\tau) = X(\tau)y.$$

Em particular, a resolução de um problema de valor inicial pode ser descrita de maneira bastante simples por meio da matriz fundamental: se $x(\tau_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, então devemos resolver

$$X(\tau_0)y = x_0,$$

donde obtemos $y = X^{-1}(\tau_0)x_0$ e, portanto,

$$x = X(\tau)[X^{-1}(\tau_0)x_0].$$

Salientamos, entretanto, que a obtenção direta de $y = (\gamma_1 \dots \gamma_n)^t$ quase sempre é preferível à obtenção de $X^{-1}(\tau_0)x_0$. $\triangleleft$

Notamos que vale a equação matricial

$$X' = AX, \tag{4.4}$$

(a derivada da matriz $X(\tau)$ é a derivação de cada uma de suas componentes), pois cada coluna de $X(\tau)$ é solução de $x' = Ax$. Considerado o isomorfismo entre $\mathbb{M}_{n \times n}$ e $\mathbb{R}^{n^2}$, o Teorema de Unicidade 4.1 é aplicável à equação matricial (4.4).

Em virtude da ligação entre os sistemas $X' = AV$ e $x' = Ax$, a matriz fundamental desse último sistema também é chamada *solução fundamental*.

Proposição 4.5 *Sejam $x_1, \dots, x_n$ soluções do sistema (4.1). Então*

- (i) *ou $W(x_1, \dots, x_n)(\tau) \equiv 0$ (e as soluções são linearmente dependentes);*
- (ii) *ou $W(x_1, \dots, x_n)(\tau) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (e as soluções são linearmente independentes).*

Demonstração: Suponhamos que $W(x_1, \dots, x_n)(\tau_1) = 0$ para $\tau_1 \in \mathbb{R}$. Então, existem constantes nem todas nulas $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, tais que $\gamma_1 x_1(\tau_1) + \dots + \gamma_n x_n(\tau_1) = 0$.

Defina $w(\tau) = \gamma_1 x_1(\tau) + \dots + \gamma_n x_n(\tau)$. Então $w(\tau)$ satisfaz (4.1) e $w(\tau_1) = 0$. Pelo Teorema 4.1, temos que $w(\tau) \equiv 0$. Isto mostra que $x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)$ são linearmente dependentes em todos os pontos de $\mathbb{R}$. $\square$

Definição 4.6 *Sejam $x_1, \dots, x_n$ soluções de (4.1) satisfazendo as condições iniciais $x_i(0) = e_i$, em que $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$. Então a matriz $X(\tau) = (x_1(\tau) \dots x_n(\tau))$ é chamada **fluxo** linear do sistema (4.1) e denotada por*

$$e^{A\tau} \quad \text{ou} \quad \exp(A\tau).$$

Se $e^{A\tau}$ for o fluxo do sistema $x' = Ax$, temos que $W(x_1, \dots, x_n)(0) \neq 0$. Tendo em vista a Proposição 4.5, vale $W(x_1, \dots, x_n)(\tau) \neq 0$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$, de modo que $e^{A\tau}$ é uma solução fundamental do sistema (4.1). Assim, uma maneira de encontrar n soluções linearmente independentes de $x' = Ax$ consiste em obter o fluxo $e^{A\tau}$. A existência do fluxo $e^{A\tau}$ está provada na Seção 2.4.

Como as colunas de $e^{A\tau}$ formam uma base do espaço de soluções de (4.1), podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 4.7 (Existência e Unicidade)

O problema de valor inicial (4.1)-(4.2) possui uma única solução para todo vetor $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Com o intuito de ilustrar a utilização do Teorema 4.1 na demonstração de resultados, vamos apresentar algumas propriedades do fluxo $e^{A\tau}$.

Proposição 4.8 *Sejam A, B matrizes reais $n \times n$. Se $AB = BA$, então $e^{A\tau}B = Be^{A\tau}$ e $e^{A\tau}e^{B\tau} = e^{(A+B)\tau}$ se, e somente se, $AB = BA$.*

Além disso, se v for um autovetor de A associado ao autovalor λ , então, para todo $\tau \in \mathbb{R}$, v é um autovetor de $e^{A\tau}$ associado ao autovalor $e^{\lambda\tau}$.

Demonstração: Que $e^{A\tau}$ comuta com B é uma consequência imediata do cálculo funcional, pois o fluxo $e^{A\tau}$ é um polinômio (com coeficientes dependendo de τ) na matriz A .

Se A comutar com B , então

$$\frac{d}{d\tau} (e^{A\tau}e^{B\tau}) = Ae^{A\tau}e^{B\tau} + e^{A\tau}Be^{B\tau} = Ae^{A\tau}e^{B\tau} + Be^{A\tau}e^{B\tau} = (A+B)e^{A\tau}e^{B\tau}.$$

Isso mostra que $e^{A\tau}e^{B\tau}$ é solução de $X' = (A+B)V$, $X(0) = I$. Como $e^{(A+B)\tau}$ é solução desse problema de valor inicial, o resultado decorre do Teorema 4.1.

Reciprocamente, derivando $e^{(A+B)\tau} = e^{A\tau}e^{B\tau}$, encontramos

$$(A+B)e^{(A+B)\tau} = Ae^{A\tau}e^{B\tau} + e^{A\tau}Be^{B\tau}.$$

Nova derivação produz

$$(A+B)^2e^{(A+B)\tau} = A^2e^{A\tau}e^{B\tau} + 2Ae^{A\tau}Be^{B\tau} + e^{A\tau}B^2e^{B\tau}.$$

Tomando $\tau = 0$, obtemos $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, de onde decorre o resultado.

Finalmente, a afirmação sobre o autovetor de A decorre imediatamente do Teorema da Imagem do Espectro 3.1. $\square$

Observação 4.9 Suponhamos que $A = C^{-1}BC$ para alguma matriz invertível C . Então, é claro que as matrizes A e B têm os mesmos autovalores com as mesmas multiplicidades. Isso quer dizer que o polinômio interpolador $p(\tau) = \alpha_{n-1}(\tau)\tau^{n-1} + \dots + \alpha_1(\tau)\tau + \alpha_0(\tau)$ que produz $e^{A\tau}$ também produz $e^{B\tau}$. Assim,

$$\begin{aligned} e^{A\tau} &= e^{(C^{-1}BC)\tau} = \alpha_{n-1}(\tau)C^{-1}B^{n-1}C + \dots + \alpha_1(\tau)C^{-1}BC + \alpha_0(\tau)I \\ &= C^{-1}[\alpha_{n-1}(\tau)B^{n-1} + \dots + \alpha_1(\tau)B + \alpha_0(\tau)I]C \\ &= C^{-1}e^{B\tau}C. \end{aligned}$$

◁

Proposição 4.10 *Suponhamos que a matriz $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ seja decomposta pela soma direta*

$$\mathbb{K}^n = W_1 \oplus \dots \oplus W_j$$

de subespaços invariantes por A . Então essa soma também decompõe $e^{A\tau}$.

Demonstração: Considere a projeção canônica $\pi_i: \mathbb{K}^n \rightarrow W_i$. Decorre da Proposição 1.12 (ou do Teorema 3.3) que $A\pi_i = \pi_i A$. Do Lema 4.8 decorre $\pi_i e^{A\tau} = e^{A\tau} \pi_i$. (Esse fato também decorre de $e^{A\tau}$ ser um polinômio em A .) Uma nova aplicação da Proposição 1.12 prova o afirmado. $\square$

Em outras palavras, o lema anterior garante que a decomposição primária (ou espectral) da matriz A também é uma decomposição do fluxo $e^{A\tau}$. Assim, se $\lambda_1, \dots, \lambda_j$ forem os autovalores distintos da matriz $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})(\mathbb{K})$ e $W_i = \ker(A - \lambda_i I)^{r_i}$ denotar o subespaço de autovetores generalizados associados ao autovalor λ_i , a decomposição

$$\mathbb{K}^n = W_1 \oplus \dots \oplus W_j$$

é tal que $A(W_i) \subset W_i$. O Lema 4.10 garante que

$$e^{A\tau} = e^{A_1\tau} \oplus \dots \oplus e^{A_j\tau},$$

em que $A_i = A|_{W_i}$.

Podemos calcular explicitamente a forma de $e^{A_i\tau}$. De fato, seja $p_i(\zeta) = (\zeta - \lambda_i)^{r_i}$. Como $p_i(A_i) = 0$, o cálculo funcional garante que $e^{A_i\tau} = r_i(A_i)$, em que

$$r_i(\zeta) = \alpha_{r_i-1}(\zeta - \lambda_i)^{r_i-1} + \dots + \alpha_1(\zeta - \lambda_i) + \alpha_0.$$

Resolvendo o sistema $r_i(\lambda_i) = e^{\lambda_i \tau}$, $r'_i(\lambda_i) = \tau e^{\lambda_i \tau}$, $\dots$, $r_i^{(\gamma_i-1)} = \zeta^{\gamma_i-1} e^{\lambda_i \tau}$, obtemos os coeficientes $\alpha_i = \alpha_i(t)$. É fácil verificar que esses coeficientes têm a forma $e^{\lambda_i \zeta} P(\zeta)$, em que $P_i(\zeta)$ é um polinômio na variável ζ , com grau menor ou igual a $\gamma_i - 1$. Uma vez que

$$r_i(A_i) = \alpha_{\gamma_i-1}(\zeta)(A_i - \lambda_i I)^{\gamma_i-1} + \dots + \alpha_1(\zeta)(A_i - \lambda_i I) + \alpha_0(\zeta)I.$$

e que uma base de soluções de $x' = A_i x$ é dada pelas colunas da matriz $e^{A_i \tau}$, vemos que essas soluções têm a forma

$$P_{\gamma_i}(\tau) e^{\lambda_i \tau},$$

em que os polinômios *vetoriais* $P_{\gamma_i}(\tau)$ têm grau $\gamma_i - 1$ e são obtidos ao se multiplicar $\lambda_i(\tau) = e^{\lambda_i \tau} P_i(\tau)$ pelas colunas de potências da matriz A , isto é, ao calcular explicitamente $r_i(A)$.

Consideremos agora o caso de uma matriz real A que possua “autovalores” complexos. Para cada par $\lambda, \bar{\lambda} = \alpha \pm i\beta$, a expansão $e^{\lambda \tau} = e^{\alpha \tau}(\cos \beta \tau \pm i \sin \beta \tau)$ gera um par de soluções reais $e^{\alpha \tau} \cos \beta \tau, e^{\alpha \tau} \sin \beta \tau$. Desse modo, as soluções associadas ao par de autovalores $\lambda, \bar{\lambda}$ são da forma

$$P_\lambda(\tau) e^{\alpha \tau} \cos \beta \tau, \quad P_\lambda(\tau) e^{\alpha \tau} \sin \beta \tau,$$

em que P_λ tem grau $d_\lambda - 1$.

Observação 4.11 Uma consequência do que acabamos de fazer é que todo o estudo do fluxo linear $e^{A\tau}$, incluindo a classificação de sistemas lineares por conjugação, pode ser feita sem a utilização da forma canônica de Jordan. $\triangleleft$

Definição 4.12 Dizemos que os sistemas

$$x' = Ax \quad \text{e} \quad x' = Bx$$

(ou os fluxos que lhes são associados) são **linearmente conjugados**, se existir uma matriz invertível C tal que

$$C(e^{A\tau} x) = e^{B\tau} Cx.$$

Teorema 4.13 A aplicação linear $h(x) = Cx$ é uma conjugação linear entre os sistemas

$$x' = Ax \quad \text{e} \quad x' = Bx$$

se, e somente se, C for invertível e $CA = BC$. Em particular, esses sistemas são linearmente conjugados se, e somente se, as matrizes A e B forem semelhantes.

Demonstração: Se $A = C^{-1}BC$, a Observação 4.9 mostra que $Ce^{A\tau}x = e^{B\tau}Cx$, ou seja, $h(x) = Cx$ é uma conjugação linear entre os sistemas $x' = Ax$ e $x' = Bx$. Reciprocamente, derivando a igualdade $Ce^{A\tau}x = e^{B\tau}Cx$ com relação a τ obtemos $CAe^{A\tau}x = Be^{B\tau}Cx$. Tomando $\tau = 0$, vem $C Ax = BCx$ para todo x , o que prova o afirmado. $\square$

Observação 4.14 Uma vez que a conjugação é uma relação de equivalência, o Teorema 4.13 mostra que as classes de equivalência das conjugações lineares são dadas pelas classes de semelhança das matrizes de seus sistemas de equações diferenciais ordinárias. Quer dizer, dois sistemas de equações diferenciais lineares são linearmente conjugados se, e somente se, as matrizes desses sistemas tiverem a mesma forma canônica de Jordan (a menos de ordenamento dos blocos, é claro).

4.1 Exercícios

1. Consideremos uma equação diferencial de ordem n

$$\gamma^{(n)}(\tau) = f(\tau, \gamma(\tau), \gamma'(\tau), \dots, \gamma^{(n-1)}(\tau)). \quad (4.5)$$

Definindo $\chi_1 = \gamma$, $\chi_2 = \gamma'$, ..., $\chi_n = \gamma^{(n-1)}$, verifique que uma solução de (4.5) é obtida ao se resolver o sistema

$$\begin{cases} \chi_1' &= \chi_2 \\ \chi_2' &= \chi_3 \\ \vdots &\vdots \\ \chi_n' &= f(\tau, \chi_1, \dots, \chi_{n-1}). \end{cases} \quad (4.6)$$

2. Considere a equação linear homogênea de ordem n :

$$\alpha_n \chi^{(n)}(\tau) + \dots + \alpha_1 \chi'(\tau) + \alpha_0 \chi(\tau) = 0.$$

Transforme essa equação em um sistema homogêneo de equações lineares de primeira ordem.

3. (Esse exercício necessita de conhecimentos sobre a derivada da aplicação determinante.) Mostre o *Teorema de Liouville*: se $x_1, \dots, x_n$ forem soluções de (4.1), então

$$W(\tau) = W(\tau_0) \exp \left(\int_{\tau_0}^{\tau} \text{tr}(A) d\sigma \right).$$

4. Sejam $\Psi(\tau)$ e $\Phi(\tau)$ duas soluções do sistema matricial (4.4), sendo $\Psi(\tau)$ uma matriz fundamental do sistema $x' = Ax$. Mostre que existe uma única matriz $C \in \mathbb{M}_{n \times n}$ tal que, para todo $\tau \in (\alpha, \beta)$, vale

$$\Phi(\tau) = \Psi(\tau)C.$$

Em particular, Φ também é uma matriz fundamental de $x' = Ax$ se, e somente se, C tem inversa.

5. **(Método de Variação dos Parâmetros)** Seja $X(\tau)$ uma matriz fundamental de $x' = Ax$. Dada a solução $\varphi(\tau)$ de $x' = Ax + B$, com $\varphi(\tau_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, mostre que

$$\varphi(\tau) = X(\tau) \left[X^{-1}(\tau_0)x_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} X^{-1}(\sigma)B(\sigma)d\sigma \right].$$

6. Para toda matriz $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, mostre que a aplicação

$$U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K}), \quad U(\tau) = e^{A\tau}$$

é um homomorfismo C^∞ do grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ sobre o grupo multiplicativo $GL(\mathbb{K})$, formado pelas matrizes em $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ que possuem inversa. Por homomorfismo queremos dizer que

$$U(\tau + \sigma) = U(\tau)U(\sigma), \quad \text{para todos } \sigma, \tau \in \mathbb{R}.$$

Referências Bibliográficas

- [1] H. Amann: Ordinary Differential Equations - an Introduction to Nonlinear Analysis, Walter de Gruyter, Berlin, 1990.
- [2] H. Anton and C. Rorres: Elementary Linear Algebra: Applications version, 6th. edition, Wiley, New York, 1991.
- [3] R. Bellman: Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York, 1960. (Republished in the series “Classics in Applied Mathematics”, vol. 12, SIAM, 1995).
- [4] H. Bueno: Equações Diferenciais Ordinárias - 1a. parte. Notas de aula. Departamento de Matemática da UFMG, 2001.
- [5] H. P. Bueno: *Functions of Matrices*, Cubo **5** (2003), no. 3, 31-54.
- [6] H. Bueno: Álgebra Linear: um segundo curso. SBM, Rio de Janeiro, 2006.
- [7] B. Chisala: A quick Cayley-Hamilton, Amer. Math. Monthly 105 (1998), no. 9, 842-844.
- [8] E. A. Coddington and N. Levinson: Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [9] H. S. M. Coxeter: Regular Polytopes, 3rd. Edition, Dover, New York, 1973.
- [10] N. Dunford and J. T. Schwarz: Linear operators I, Interscience, New York, 1968.
- [11] Gantmacher, F. R.: The Theory of Matrices, vol. 1 and 2, Chelsea Publishing Co., New York, 1959.
- [12] N.J. Higham: Function of Matrices - Theory and Applications, Siam, Philadelphia, 2008.
- [13] M. Hirsch and S. Smale: Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, New York, 1974.

- [14] K. Hoffman and R. Kunze: Linear Algebra, 2nd. edition, Prentice Hall, Englewoods Cliffs, 1971.
- [15] S. Lang: Linear Algebra, 3rd. Edition, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [16] S. Lang: Complex Analysis, 4th. Edition, Springer, New York, 1999.
- [17] P. D. Lax: Linear Algebra, Wiley-Interscience Publication, New York, 1997.
- [18] M. Reed and B. Simon: Methods of Modern Mathematical Physics, vol. I, Academic Press, New York, 1972.
- [19] W. Rudin: Real and Complex Analysis, 3rd. Edition, McGraw-Hill, New York, 1987.
- [20] R. J. Santos: Álgebra Linear e Aplicações, Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2004.
- [21] R. J. Santos: Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias, Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2005.
- [22] N. C. Saldanha and C. Tomei: *Spectra of Regular Polytopes*, Discrete & Computational Geometry **7** (1992), 403-414.
- [23] J. Sotomayor: Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [24] G. Strang: Linear Algebra and its Applications, 3rd. edition, Harcourt, Fort Worth, 1988.
- [25] C. Tomei: Novos Cursos de Álgebra Linear para Alunos de Engenharia e Ciências Básicas, XXII CNMAC, 1999.