

0

Forma Canônica de Jordan

Neste apêndice apresentamos uma demonstração direta (isto é, sem utilizar o Teorema Espectral 3.3 ou o Teorema da Decomposição Primária) da existência e “unicidade” da forma canônica de Jordan de uma matriz complexa.

Definição 4.15 *Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_j$ os autovalores distintos de uma matriz J , $n \times n$. A matriz J está na **forma canônica de Jordan** se*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{pmatrix}, \quad \text{em que } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

O bloco J_i é um **bloco de Jordan** associado ao autovalor λ_i . A cada autovalor λ_i está associado ao menos um bloco J_i , que pode ser uma matriz 1×1 .

Note que o polinômio característico da matriz J é da forma

$$p(\zeta) = (\zeta - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\zeta - \lambda_j)^{r_j}.$$

Assim, o número de vezes que o autovalor λ_i aparece na diagonal de J é justamente a sua multiplicidade como raiz do polinômio característico.

Seja $T : X \rightarrow X$ um operador no espaço X , com $\dim X = n$. Suponhamos que T possa ser representado por uma matriz J na forma canônica de Jordan. Isso significa que existe uma base $\mathcal{B}$ de X tal que $J = T_{\mathcal{B}}$, chamada *base de Jordan*.

Consideremos um dos blocos de Jordan J_i e $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ a base do espaço invariante associado a esse bloco (veja o Exercício ?? do Capítulo ??).

Se $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_j\}$, então

$$T(v_1) = \lambda v_1 \quad \text{e} \quad T(v_k) = v_{k-1} + \lambda v_k, \quad \text{para } k \in \{2, \dots, j\}.$$

Essa é uma *cadeia de Jordan de comprimento j* . No caso de um bloco 1×1 , temos uma cadeia de comprimento 1 associado ao autovetor responsável por aquele bloco.

O método de Fillipov fornece uma das provas mais diretas da existência de uma base na qual um operador assume a forma canônica de Jordan. Faremos essa demonstração adaptando e complementando aquela apresentada em Strang [24].

No enunciado do teorema estamos assumindo que X seja um espaço complexo. Basta, entretanto, que o polinômio característico p de $T : X \rightarrow X$ tenha todas as suas raízes no corpo $\mathbb{K}$.

Teorema 4.16 (Jordan)

Seja $T : X \rightarrow X$ um operador no espaço complexo X de dimensão n . Então, existe uma base de X na qual T é representada por uma matriz na forma canônica de Jordan. Essa representação é única, a menos de ordenamento dos blocos de Jordan.

Demonstração: Começamos mostrando a existência de uma base na qual o operador T é representado por uma matriz na forma canônica de Jordan.

Para isso, faremos indução em $n = \dim X$, partindo do fato que, se $\dim X = 1$, então $T_{\mathcal{B}}$ está na forma canônica de Jordan para qualquer base $\mathcal{B}$ de X e que essa representação é única. Suponhamos então o resultado válido para qualquer operador definido num espaço Z de dimensão menor do que ou igual a $n - 1$, *incluindo também a unicidade* (a menos de ordenamento dos blocos) *dessa representação*.

Fixemos então um autovalor λ de T e consideremos o operador não invertível $S = T - \lambda$. (O fato de S não ser invertível é fundamental para o processo indutivo, como veremos na sequência.)

Como $\ker S \neq \{0\}$, temos que $\dim \ker S \geq 1$. Se $\dim \ker S = n$, temos que $T = \lambda$ está na forma de Jordan. Caso contrário, definindo $U = \operatorname{im} S$, temos que $1 \leq \dim U < n - 1$. Como $S(U) \subset U$ (justifique!) podemos aplicar a nossa hipótese de indução ao operador $S|_U : U \rightarrow U$. Portanto, existe uma base $\mathcal{B}_1$ de U tal que, nessa base, $S|_U$ está na forma canônica de Jordan.

Agora vamos completar a base $\mathcal{B}_1$ até uma base de X , mantendo S na forma canônica de Jordan. Para isso, consideremos inicialmente $U \cap \ker S$. Se $k = \dim \ker S \cap U$, então $k \geq 1$. Cada vetor em $\ker S \cap U \subset \mathcal{B}_1$ é um autovetor correspondente ao autovalor 0, de modo que existem exatamente k cadeias de Jordan em U associadas ao autovalor 0. Consideremos uma dessas cadeias e sua base:

$$u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i_{\max}},$$

em que u_i um autovetor associado ao autovalor 0 e $u_{i_{\max}}$ o último vetor dessa cadeia. Como $u_{i_{\max}} \in U$, existe $v_i \in X$ tal que $Sv_i = u_{i_{\max}} = 0v_i + u_{i_{\max}}$, de modo que as cadeias relativas ao autovalor 0 em $\ker S \cap U$ estão aumentando seu comprimento quando acrescentamos o vetor v_i à base $\mathcal{B}_1$.

O conjunto $\mathcal{B}_2 = \{v_1, \dots, v_k\}$ assim obtido é linearmente independente, pois sua imagem por S é o conjunto linearmente independente $\{u_{1_{\max}}, \dots, u_{k_{\max}}\}$. Como $Sv_i = 0v_i + u_{i_{\max}}$, as cadeias relativas ao autovalor 0 em $\ker S \cap U$ aumentaram seu comprimento. Em outras palavras, a inclusão dos vetores v_i na base $\mathcal{B}_1$ após cada elemento $u_{i_{\max}}$ mantém a representação de S na forma de Jordan.

Denotamos $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Afirmamos que $U \cap V = \{0\}$. De fato, se

$$\sum_{u_i \in \mathcal{B}_1} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^k \beta_i v_i = 0,$$

aplicando S a essa igualdade, obtemos apenas vetores que estão na base $\mathcal{B}_1$, pois $Sv_i = u_{i_{\max}}$. Isso implica, em particular, que $\beta_i = 0$ para $i \in \{1, \dots, k\}$, provando o afirmado.

Se tivermos $X = U \oplus V$, temos uma base na qual S assume sua forma de Jordan. Mas pode ser que existam vetores em $\ker S$ que não estão em U . Se esse for o caso e $\{u_1, \dots, u_k\}$ forem os vetores de $\mathcal{B}_1$ que estão em $\ker S$, podemos completar esse conjunto com vetores $w_1, \dots, w_j$ até obter uma base de $\ker S$. Sejam $W = \langle w_1, \dots, w_j \rangle$ o subespaço gerado por tais vetores e $\mathcal{B}_3 = \{w_1, \dots, w_j\}$ uma base de W , se $W \neq \{0\}$. Claramente $(U \oplus V) \cap W = \{0\}$. Uma vez que, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos $\dim U + \dim V + \dim W = n$, podemos concluir que $X = U \oplus V \oplus W$. A inclusão dos vetores v_i na base $\mathcal{B}_1$ após cada elemento $u_{i_{\max}}$ e a inclusão dos vetores de $\mathcal{B}_3$ após a inclusão dos vetores de $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ mantém a representação de S na forma de Jordan, pois os vetores de $\mathcal{B}_3$ são representados por blocos 1×1 associados ao autovalor 0. (O Exemplo 5.9 mostra que podemos ter $W \neq \{0\}$.)

Como $S_{\mathcal{B}} = [T - \lambda]_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}} - \lambda$, também temos que $T_{\mathcal{B}} = S_{\mathcal{B}} + \lambda$ é uma matriz na forma de Jordan.

Agora consideremos a “unicidade” da forma de Jordan de S . Já decomposemos o espaço X como $X = U \oplus V \oplus W$, em que $\dim V \geq 1$. Por indução, admitimos a unicidade da forma de Jordan em espaços de dimensão até $n - 1$. Em particular, temos a unicidade da forma de Jordan em $U \oplus W$ e podemos assumir que $W = \{0\}$.

Como cadeias distintas de Jordan decompõem $U \oplus V$ em subespaços distintos (aos quais a hipótese de indução aplica-se), podemos assumir que $U \cap V$ seja gerado por uma única cadeia de Jordan associada ao autovalor 0 de S . Mas então existe $v \in V$ tal que $Sv = u_{\max}$, o elemento máximo da única cadeia de Jordan em $U = \text{im } S$ e, nesse caso, a forma de Jordan de S (e, portanto, de T) é única. A unicidade (a menos de ordenamento dos blocos) da forma canônica de T decorre então. $\square$

Corolário 4.17 *Seja X um espaço de dimensão finita. Um operador linear $T : X \rightarrow X$ é diagonalizável se, e somente se, o seu polinômio mínimo for produto de fatores lineares distintos.*

Demonstração: Decorre imediatamente da forma de Jordan de T , uma vez que o polinômio mínimo $(\zeta - \lambda)^\gamma$ de um bloco de Jordan corresponde ao comprimento da cadeia de Jordan que lhe é associada. $\square$

Corolário 4.18 (Teorema Espectral)

Sejam X um espaço vetorial complexo de dimensão n e $T : X \rightarrow X$ um operador linear com polinômio característico

$$p(\zeta) = (\zeta - \lambda_1)^{\gamma_1} \cdots (\zeta - \lambda_j)^{\gamma_j},$$

em que os autovalores λ_i , $i = 1, \dots, j$ são distintos.

Então existem subespaços $W_1, \dots, W_j$ invariantes por T tais que

$$X = W_1 \oplus \cdots \oplus W_j.$$

Além disso, $\dim W_i = \gamma_i$, o polinômio mínimos m_i de $T|_{W_i}$ é $m_i(\zeta) = (\zeta - \lambda_i)^{\rho_i}$ e $W_i = \ker(T - \lambda_i)^{\rho_i}$, em que $1 \leq \rho_i \leq \gamma_i$ é o comprimento do maior bloco de Jordan associado ao autovalor λ_i .

Demonstração: Basta definir W_i como o espaço gerado pelos vetores de todas as cadeias de Jordan correspondentes ao autovalor λ_i na forma canônica de Jordan.

É claro que o polinômio mínimo de $T|_{W_i}$ é justamente o comprimento ρ_i da maior cadeia de Jordan presente em W_i . Assim, todo elemento de W_i pertence a $\ker(T - \lambda_i)^{\rho_i}$. A recíproca é obtida ao se representar T numa base na qual T assume uma forma de Jordan. $\square$

Esse resultado nos indica como obter diretamente os subespaços W_i : vale

$$\ker(T - \lambda_i) \subsetneq \cdots \subsetneq \ker(T - \lambda_i)^{\rho_i} = \ker(T - \lambda_i)^{\rho_i+1} = \cdots = \ker(T - \lambda_i)^{\gamma_i}. \quad (4.7)$$

(Justifique as inclusões estritas; as igualdades são consequências de $(\zeta - \lambda_i)^{\rho_i}$ e $(\zeta - \lambda_i)^{\gamma_i}$ serem, respectivamente, os polinômios mínimo e característico de $T|_{W_i}$.)

O índice ρ_i do autovalor λ_i é encontrado quando essa sequência de subespaços estabiliza-se. Ou, alternativamente, $\ker(T - \lambda_i)^{\rho_i}$ é o primeiro subespaço da sequência que tem dimensão γ_i . Os elementos de $\ker(T - \lambda_i)^{\rho_i}$ são os *autove-ttores generalizados* associados a λ_i .

Exemplos de cálculos de uma base $\mathcal{B}$ na qual uma matriz assume sua forma de Jordan são apresentados na Seção ??.

Uma consequência imediata da forma canônica de Jordan é a existência de uma decomposição $T = D + N$, com D diagonalizável, N nilpotente e $ND = DN$. Mostraremos agora a unicidade dessa decomposição, seguindo [?].

Teorema 4.19 *Seja $T : X \rightarrow X$ um operador no espaço complexo de dimensão finita X . Existe uma única decomposição $T = D + N$, com D diagonalizável, N nilpotente e $DN = ND$.*

Demonstração: (Roteiro) Claramente D e N comutam com T . Como $W_i = \ker(T - \lambda_i)^{d_i}$ é invariante por T , esse espaço também é invariante por D e N . Se T_i, D_i e N_i denotam as restrições $T|_{W_i}, D|_{W_i}$ e $N|_{W_i}$, respectivamente, então

$$(T_i - \lambda_i) - N_i = D_i - \lambda_i.$$

O lado esquerdo da igualdade é nilpotente (como soma de operadores nilpotentes que comutam), enquanto o lado direito é diagonalizável. Diagonalizando o lado direito da igualdade, o lado esquerdo continua sendo nilpotente. Mas isso implica que $D_i - \lambda_i = 0$ e, portanto, $T_i - \lambda_i = N_i$. Mas essa é justamente a decomposição oferecida pela forma canônica de Jordan. $\square$

Exemplo 4.20 Seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definido por

$$T(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) = (2\chi_1 - \chi_2 + \chi_4, 3\chi_2 - \chi_3, \chi_2 + \chi_3, -\chi_2 + 3\chi_4).$$

Vamos obter a forma canônica de Jordan de T , bem como uma base na qual T assume essa forma.

A representação de T na base canônica é

$$A = T_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de T é $p(\zeta) = (\zeta - 3)(\zeta - 2)^3$ (verifique!). Como todos os autovalores de T estão no corpo $\mathbb{R}$, podemos obter (um)a forma de Jordan de T .

Verificamos que

$$\begin{aligned} N_1 = \ker(A - 2) &= \{(\chi_1, \chi_2, \chi_2, \chi_2) \mid \chi_1, \chi_2 \in \mathbb{R}\} \\ N_2 = \ker(A - 2)^2 &= \{(\chi_1, \chi_3 + \chi_4, 2\chi_3, 2\chi_4) \mid \chi_1, \chi_3, \chi_4 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Como a dimensão de $\ker(A - 2)^2$ é igual à multiplicidade de 2 como raiz do polinômio característico $p(\zeta)$ de T , temos que o espaço W_2 do Teorema Espectral 3.3 (ou Corolário 5.4) é dado por $\ker(A - 2)^2$.

Vamos obter uma base de Jordan para W_2 . Para isso, notamos que existem três vetores em N_2 e que $\dim(N_2/N_1) = 1$. Isso quer dizer que teremos um bloco

2×2 e um bloco 1×1 associados ao autovalor 2. Claramente o vetor $w_2 = (0, 1, 0, 2) \in N_2$ e $w_2 \notin N_1$. Calculamos então $w_1 = (T - 2)w_2 = (1, 1, 1, 1)$. (A demonstração do Teorema de Jordan garante que $w_1 \in N_1$ e que w_1, w_2 são linearmente independentes; esses vetores produzem o bloco 2×2). Para obtermos uma base de N_1 , escolhemos o vetor $w_3 = (1, 0, 0, 0) \in N_1$, que claramente é linearmente independente com w_1 . (Mais uma vez, a demonstração do Teorema de Jordan garante que $\{w_1, w_2, w_3\}$ são linearmente independentes; o vetor w_3 produz o bloco 1×1 .)

Para o autovalor 3, a forma escalonada reduzida de

$$(A - 3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{é} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, o subespaço $W_3 = \ker(A - 3)$ é dado por

$$\{(\chi_4, 0, 0, \chi_4) \mid \chi_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Esse subespaço tem base $(1, 0, 0, 1) = w_4$ e produz um bloco 1×1 associado ao autovalor 3.

Temos assim a base $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, que é uma base de Jordan de T . Os vetores w_1, w_3 e w_4 são autovetores de T (os dois primeiros associados ao autovalor 2 do operador T).

Assim, representando T na base $\mathcal{B}$, obtemos uma forma de Jordan de T :

$$T_{\mathcal{B}} = J = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (3) \end{pmatrix}.$$

◁

Exemplo 4.21 Obtenha uma base $\mathcal{B}$ na qual a matriz A esteja na forma canônica de Jordan:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de A é $p(\zeta) = (\zeta - 2)^5(\zeta + 1)$, pois a matriz A é triangular inferior.

Se denotarmos por W_{-1} o autoespaço associado ao autovalor -1 , vemos que $\dim W_{-1} = 1$ e que uma base para esse subespaço é dado pelo vetor e_6 . (Você consegue justificar esse fato sem fazer qualquer conta?) Denotaremos por $w_1 := e_6$ o primeiro vetor da base procurada.

Consideremos agora o autoespaço W_2 associado ao autovalor 2 . Temos que $\dim W_2 = 5$ e que

$$A - 2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Se denotarmos $N_1 = \ker(A - 2)$, vemos que $\dim N_1 = 2$. (Você consegue perceber isso sem fazer qualquer conta? Lembre-se que o número de linhas nulas no escalonamento de $A - 2$ fornece os graus de liberdade nas soluções de $(A - 2)x = 0$, isto é, a dimensão desse espaço.)

Verificamos que

$$N_1 = \ker(A - 2) = \{(0, 0, -\chi_4, \chi_4, 3\chi_6, \chi_6) \mid \chi_4, \chi_6 \in \mathbb{R}\}$$

A dimensão do espaço N_1 nos dá o número de blocos de Jordan associados ao autovalor 2 . Assim, dois blocos de Jordan estão associados a esse autovalor. Como o espaço invariante W_2 associado ao autovalor 2 tem dimensão 5 , existem apenas duas possibilidades para a decomposição de Jordan desse subespaço: *ou* existe um bloco 2×2 e outro bloco 3×3 , *ou* existe um bloco 4×4 e um bloco 1×1 .

Um novo cálculo nos mostra que

$$N_2 = \ker(A - 2)^2 = \{(0, 0, -\chi_4 + 3\chi_5 - 9\chi_6, \chi_4, \chi_5, \chi_6) \mid \chi_4, \chi_5, \chi_6 \in \mathbb{R}\}.$$

Ora, isso indica que teremos um bloco 4×4 e um bloco 1×1 associados ao autovalor $\lambda = 2$. Em particular, $W_2 = N_4$.

Verificamos então que

$$\begin{aligned} \ker(A - 2)^3 &= \{(0, -3\chi_3 - 3\chi_4 + 9\chi_5 - 27\chi_6, 2\chi_3, 2\chi_4, 2\chi_5, 2\chi_6)\} \\ \ker(A - 2)^4 &= \{(-6\chi_2 - 9\chi_3 - 9\chi_4 + 27\chi_5 - 81\chi_6, 10\chi_2, 10\chi_3, 10\chi_4, 10\chi_5, 10\chi_6)\}. \end{aligned}$$

(Já era claro que deveríamos ter 5 graus de liberdade em $\ker(A - 2)^4$.)

Escolhemos então o vetor

$$w_5 = (1, 0, 0, 0, 0, -10/81) \in N_4 \setminus N_3.$$

Obtemos

$$w_4 = (A - 2)w_5 = (0, 1, -1, 0, 1, 10/27), \quad w_3 = (A - 2)w_4 = (0, 0, 0, 1, 0, -1/9)$$

e

$$w_2 = (A - 2)w_3 = (0, 0, 0, 0, 1, 1/3).$$

Note que w_2 é um autovetor de A , pois ele pertence a N_1 . Como N_1 tem dimensão 2, existe um outro autovetor nesse espaço, linearmente independente com w_2 . Podemos tomar $w_6 = (0, 0, 1, -1, 0, 0)$.

Tendo obtido os vetores $\{w_1, \dots, w_6\}$, a representação de A nessa base satisfaz

$$\begin{aligned} Aw_1 &= -w_1 & (\text{pois } (A+1)w_1 &= 0) \\ Aw_2 &= 2w_2 & (\text{pois } (A-2)w_2 &= 0) \\ Aw_3 &= w_2 + 2w_3 & (\text{pois } (A-2)w_3 &= w_2) \\ Aw_4 &= w_3 + 2w_4 & (\text{pois } (A-2)w_4 &= w_3) \\ Aw_5 &= w_4 + 2w_5 & (\text{pois } (A-2)w_5 &= w_4) \\ Aw_6 &= 2w_6. \end{aligned}$$

Assim, a representação de A nessa base é

$$J = \begin{pmatrix} (-1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (2) \end{pmatrix}.$$

◁

Exemplo 4.22 Seja

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

cujo polinômio característico é (obviamente) $p(\zeta) = (\zeta + 1)^5(\zeta + 4)$.

Temos

$$\begin{aligned}\ker(A + 4) &= \{(-2\chi_6, 0, -\chi_6, \chi_6, -\chi_6, \chi_6) \mid \chi_6 \in \mathbb{R}\} \\ \ker(A+) &= \{(\chi_1, \chi_4, -2\chi_4, \chi_4, 0, 0) \mid \chi_1, \chi_4 \in \mathbb{R}\} \\ \ker(A+)^2 &= \{(\chi_1, \chi_2, -2\chi_4 - 2\chi_5, \chi_4, \chi_5, 0) \mid \chi_1, \chi_2, \chi_4, \chi_5 \in \mathbb{R}\} \\ \ker(A+)^3 &= \{(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5, 0) \mid \chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5 \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Escolhemos $w_1 = (-2, 0, -1, 1, -1, 1) \in \ker(A + 4)$. Esse é o primeiro vetor de uma base na qual A é representada por sua forma canônica de Jordan.

Como $\dim(\ker(A+)^3/\ker(A+)^2) = 1$, existe apenas um bloco 3×3 . Claramente, $w_4 = (0, 0, 1, 0, 0, 0) \in \ker(A+)^3 \setminus \ker(A+)^2$. Seja então $(A+)w_4 = w_3 = (-1, 1, 0, 0, 0, 0) \in \ker(A+)^2$ e $(A+)w_3 = w_2 = (1, 0, 0, 0, 0, 0) \in \ker(A+)$.

Como $\dim(\ker(A+)^2/\ker(A+)) = 2$, existe um vetor nesse espaço que é linearmente independente com w_3 . À primeira vista, poderíamos escolher o vetor $w = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$, pois ele está em $\ker(A+)^2$ e não está em $\ker(A+)$. Entretanto, em $\frac{\ker(A+)^2}{\ker(A+)}$, os vetores w_3 e w são linearmente dependentes: basta notar que a diferença entre eles é um vetor em $\ker(A+)$. Uma escolha correta para o vetor de $\frac{\ker(A+)^2}{\ker(A+)}$, linearmente independente com w_3 é $w_6 = (0, 0, -2, 0, 1, 0)$ (verifique). Então, $(A+)w_6 = w_5 = (1, 1, -2, 1, 0, 0) \in \ker(A+)$.

Notamos, em particular, que pode ser complicada a escolha de três vetores linearmente independentes em um espaço N_i/N_{i-1} . Em geral, isso pode ser obtido por simples inspeção: o vetor w_5 escolhido tem uma coordenada que não está presente no espaço $\ker(A+)$. Se essa inspeção não for suficiente, a melhor maneira é pensar como é construída a base do espaço N_i/N_{i-1} : partindo de uma base de N_{i-1} os elementos que completam a base de N_i formam a base desse espaço. Esse é o método computacional adequado quando a dimensão de N_i/N_{i-1} for grande.

◁

Agora passamos a mostrar um segundo método para obter uma base na qual uma matriz A assume sua forma de Jordan, que evita o cálculo de potências de $A - \lambda$. Esse método está diretamente relacionado com o tratamento da forma canônica de Jordan apresentado no Apêndice 5, mas independe de sua leitura.

Exemplo 4.23 (variação sobre o Exemplo 5.7) Seja

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

cujos polinômio característico é $q(\zeta) = \zeta^5(\zeta + 3)$. Note que a matriz B foi obtida da matriz A do Exemplo 5.7 ao tomarmos $B = A - 2$. (Neste método, é essencial procurarmos cadeias associados ao autovalor 0.)

Claramente $e_6 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^t$ é o (único) autovetor associado ao autovalor -3 . Ele nos fornece o primeiro vetor da base de Jordan: $u_1 = e_6$. (Se esse vetor não fosse evidente, resolveríamos o sistema $(B - 3)x = 0$.)

Sendo $b \in \mathbb{R}^6$ um vetor arbitrário, escalonando a matriz aumentada $(B \mid b)$ encontramos bases para $\ker B$ e $\operatorname{im} B$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \beta_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & \beta_6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \beta_5 - \beta_2 - \beta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & \beta_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_3 + \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 \end{array} \right).$$

Assim, uma base para $\ker B$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\chi_4 \\ \chi_4 \\ 3\chi_6 \\ \chi_6 \end{pmatrix} = \chi_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \chi_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

enquanto $\operatorname{im} B$ tem como base os vetores de B correspondentes aos pivôs (veja o Corolário ??):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que $\operatorname{im} B = \{(0, -\chi_3, \chi_3, \chi_4, \chi_5, \chi_6)\}$.

É fácil verificar que $\ker B \cap \operatorname{im} B$ tem como base um autovetor associado ao autovalor 0. Apenas este autovetor pode produzir uma cadeia de Jordan de comprimento maior do que 1.

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker B \cap \operatorname{im} B.$$

O segundo autovetor associado a 0 não pertence a $\ker B \cap \operatorname{im} B$ e é dado por

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, existem apenas dois blocos associados ao autovalor 0. Um deles é uma cadeia de Jordan de tamanho 4 (justifique!) que tem como primeiro vetor

$$u_2 = u;$$

o outro é uma cadeia de Jordan de tamanho 1 criada pelo vetor $w_6 = v$.[†]

Precisamos encontrar os outros elementos da cadeia gerada por u_2 . Para isso, resolvemos

$$Bx = u_2,$$

cujas soluções gerais são, de acordo com a forma escalonada reduzida por linhas de $(B|b)$,

$$x = (0, 0, 3 - \alpha, \alpha, 1 + 3\beta, \beta).$$

Escolhemos uma solução u_3 (de $Bx = u_2$) com $u_3 \in \operatorname{im} B$. Para que a solução pertença a esse espaço, devemos ter $\alpha = 3$; escolhendo $\beta = 0$, obtemos

$$u_3 = (0, 0, 0, 3, 1, 0).$$

O vetor u_4 é escolhido como uma solução em $\operatorname{im} B$ de $Bx = u_3$. A forma escalonada reduzida por linhas de $(B|b)$ garante que a solução geral desse sistema é

$$x = (0, 3, -2 - \alpha, \alpha, 3\beta, \beta).$$

Devemos ter $\alpha = 1$ para que $x \in \operatorname{im} B$. Escolhendo $\beta = 1$, obtemos então

$$u_4 = (0, 3, -3, 1, 3, 1).$$

Finalmente, resolvemos o sistema $Bx = u_4$ e obtemos, por exemplo, a solução

$$v_5 = (3, 1, -1, 0, 1, 0),$$

vetor que não está em $\operatorname{im} B + \ker B$. Note que, qualquer que seja a escolha de β na determinação do vetor u_4 , teremos que a solução de $Bx = u_4$ não estará em $\operatorname{im} B$.

[†] A notação utilizada está de acordo com a demonstração da forma de Jordan apresentada no Apêndice 5.

Assim, a base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4, v_5, w_6)$ coloca B na forma canônica de Jordan.[‡] Somando 2, a matriz A está na forma de Jordan J apresentada no Exemplo 5.7 com a mesma base $\mathcal{B}$. $\triangleleft$

Exemplo 4.24 (Variação sobre o Exemplo 5.8) Consideremos mais uma vez a matriz A do Exemplo 5.8. Procederemos analogamente ao Exemplo 5.9 com relação à matriz $B = A - 2$. Consideremos o sistema $Bx = b$:

$$(B|b) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & 7 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \beta_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & \beta_6 \end{array} \right),$$

cujas solução é dada por

$$(R|b') = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \beta_1 + \beta_2 - 2\beta_4 - 5\beta_5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & \beta_2 - 3\beta_4 + 4\beta_5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \beta_4 - 2\beta_5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \beta_5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_5 + \beta_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_3 + 2\beta_4 - 5\beta_5/3 \end{array} \right),$$

de modo que uma base para $\ker B$ é formada pelos vetores

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

enquanto uma base para $\text{im } B$ é formada pelos vetores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

[‡]A base $\mathcal{B}$ está de acordo a notação $X = U \oplus V \oplus W$ apresentada no Apêndice 5.

Escalonando a matriz que tem esses vetores como *linhas*, obtemos uma descrição mais simples para a imagem de B : $\text{im } B = \{(\chi_1, \chi_2, 5\chi_3, 5\chi_4, 3\chi_3 + 6\chi_4, -3\chi_3 - 6\chi_4)\}$ e $\ker B \subset \text{im } B$. Isso quer dizer que os autovetores de B associados com o autovalor 1 vão gerar cadeias de comprimento maior do que 1.

Seja $u_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$. Substituindo as coordenadas deste vetor na matriz $(R|b')$, encontramos as soluções de $Bx = u_1$:

$$\{x = (\chi_1, 1 + \chi_4, -2\chi_4, \chi_4, 0, 0) \mid \chi_1, \chi_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Escolhendo $\chi_1 = \chi_4 = 0$, obtemos o vetor $u_2 \in \text{im } B$

$$u_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0).$$

Substituindo as coordenadas desse vetor na matriz $(R|b')$ encontramos as soluções de $Bx = u_2$:

$$x = (\chi_1, 1 + \chi_4, 1 - 2\chi_4, \chi_4, 0, 0).$$

Escolhendo $\chi_1 = \chi_4 = 0$, obtemos a solução

$$u_3 = (0, 1, 1, 0, 0, 0).$$

Note que a solução geral de $Bx = u_2$ sempre pertence a $\text{im } B$. Isso era esperado, pois o autovetor u_4 também gera uma cadeia.

Procedemos analogamente com relação ao autovetor $u_4 = (0, 1, -2, 1, 0, 0)$. Substituindo as coordenadas desse vetor no sistema (R, b') , encontramos a solução geral de $Bx = u_4$:

$$x = (\chi_1, -1 + \chi_4, -2 - 2\chi_4, 1, 0, 0).$$

Escolhendo $\chi_1 = \chi_4 = 0$, obtemos a solução

$$u_5 = (0, -1, -2, 0, 1, 0),$$

que é linearmente independente da solução u_2 .

Note que, como antes, a solução de $Bx = u_4$ nunca pertence a $\text{im } B$.

Se calcularmos o autovetor associado ao autovalor -3 , encontraremos $u_6 = (-2, 0, -1, 1, -1, 1)$. A representação de B na base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ está na forma de Jordan; somando -1 ao elementos diagonais dessa matriz, obtemos a forma de Jordan da matriz A , também assumida na base $\mathcal{B}$. $\triangleleft$

Observação 4.25 Se tivéssemos uma matriz A cujos autovetores possuem multiplicidade (por exemplo, no caso em que $\det A = (\zeta - 1)^3(\zeta + 1)^5$), o método utilizado nos exemplos anteriores seria aplicado às matrizes $B = A +$ e $C = A -$. As cadeias obtidas ao considerarmos a matriz B nos forneceria a parte da base associada ao autovalor 1 de A , enquanto as cadeias obtidas considerando C nos forneceria a parte da base associada ao autovalor -1 de A . $\triangleleft$

Vamos agora mostrar alguns atalhos que podem ser utilizados na obtenção da forma canônica de Jordan.

Exemplo 4.26 Consideremos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -10 & 2 & 14 & 6 \\ 1 & -1 & -7 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

cujo polinômio característico é $p(\zeta) = \zeta(\zeta + 2)^3$. Para determinar a forma de Jordan do(s) bloco(s) associados ao autovalor -2 , consideremos

$$A + 2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -10 & 4 & 14 & 6 \\ 1 & -1 & -5 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Podemos obter a dimensão do espaço $\ker(A + 2)$ por escalonamento. Contudo, podemos observar que o menor 3×3

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 14 & 6 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

tem determinante não nulo, como se observa facilmente ao desenvolver o determinante pela primeira linha dessa matriz. A consequência é que $A + 2$ tem posto 3 (de acordo com o Teorema de Kronecker, exercício ?? do Capítulo ??), de forma que existe um bloco 3×3 associado ao autovalor -2 . Multiplicando, obtemos

$$(A - 2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 \\ -24 & 2 & 8 & -6 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 8 & -2 & -8 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (A - 2)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -48 & 0 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

A segunda coluna de $(A - 2)^3$ nos informa que $e_2 \in \ker(A - 2)^3$, enquanto a segunda coluna de $(A - 2)^2$ nos informa que esse vetor não pertence a $\ker(A - 2)^2$. Assim, uma base em que a matriz A assume sua forma de Jordan é dada por $\mathcal{B} = \{(A - 2)^2 e_2, (A - 2)e_2, e_2, u\}$, em que u é um autovetor associado ao autovalor 0 .

◁

Referências Bibliográficas

- [1] H. Amann: Ordinary Differential Equations - an Introduction to Nonlinear Analysis, Walter de Gruyter, Berlin, 1990.
- [2] H. Anton and C. Rorres: Elementary Linear Algebra: Applications version, 6th. edition, Wiley, New York, 1991.
- [3] R. Bellman: Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York, 1960. (Republished in the series “Classics in Applied Mathematics”, vol. 12, SIAM, 1995).
- [4] H. Bueno: Equações Diferenciais Ordinárias - 1a. parte. Notas de aula. Departamento de Matemática da UFMG, 2001.
- [5] H. P. Bueno: *Functions of Matrices*, Cubo **5** (2003), no. 3, 31-54.
- [6] H. Bueno: Álgebra Linear: um segundo curso. SBM, Rio de Janeiro, 2006.
- [7] B. Chisala: A quick Cayley-Hamilton, Amer. Math. Monthly 105 (1998), no. 9, 842-844.
- [8] E. A. Coddington and N. Levinson: Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [9] H. S. M. Coxeter: Regular Polytopes, 3rd. Edition, Dover, New York, 1973.
- [10] N. Dunford and J. T. Schwarz: Linear operators I, Interscience, New York, 1968.
- [11] Gantmacher, F. R.: The Theory of Matrices, vol. 1 and 2, Chelsea Publishing Co., New York, 1959.
- [12] N.J. Higham: Function of Matrices - Theory and Applications, Siam, Philadelphia, 2008.
- [13] M. Hirsch and S. Smale: Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, New York, 1974.

- [14] K. Hoffman and R. Kunze: Linear Algebra, 2nd. edition, Prentice Hall, Englewoods Cliffs, 1971.
- [15] S. Lang: Linear Algebra, 3rd. Edition, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [16] S. Lang: Complex Analysis, 4th. Edition, Springer, New York, 1999.
- [17] P. D. Lax: Linear Algebra, Wiley-Interscience Publication, New York, 1997.
- [18] M. Reed and B. Simon: Methods of Modern Mathematical Physics, vol. I, Academic Press, New York, 1972.
- [19] W. Rudin: Real and Complex Analysis, 3rd. Edition, McGraw-Hill, New York, 1987.
- [20] R. J. Santos: Álgebra Linear e Aplicações, Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2004.
- [21] R. J. Santos: Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias, Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2005.
- [22] N. C. Saldanha and C. Tomei: *Spectra of Regular Polytopes*, Discrete & Computational Geometry **7** (1992), 403-414.
- [23] J. Sotomayor: Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [24] G. Strang: Linear Algebra and its Applications, 3rd. edition, Harcourt, Fort Worth, 1988.
- [25] C. Tomei: Novos Cursos de Álgebra Linear para Alunos de Engenharia e Ciências Básicas, XXII CNMAC, 1999.

Índice Remissivo

autovalor

índice de um, 4

autovetores

generalizados, 4

base

de Jordan, 1

bloco

de Jordan, 1

forma

canônica de Jordan, 1

índice de um autovalor, 4

Jordan, C.

base de, 1

bloco de, 1

cadeia de, 2

comprimento de uma, 2

forma canônica de, 1

matriz

forma canônica de Jordan, 1

teorema

espectral, 4

forma de Jordan complexa, 2