

# Sumário

|          |                                              |           |
|----------|----------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>O grau de Brouwer</b>                     | <b>1</b>  |
| 1.1      | Introdução . . . . .                         | 1         |
| 1.2      | A construção do grau de Brouwer . . . . .    | 4         |
| 1.3      | Propriedades elementares do grau . . . . .   | 8         |
| 1.4      | Estendendo o grau de Brouwer . . . . .       | 10        |
| <b>2</b> | <b>Algumas aplicações do grau de Brouwer</b> | <b>12</b> |
| 2.1      | Aplicações . . . . .                         | 13        |
| 2.2      | Exercícios . . . . .                         | 17        |
| <b>3</b> | <b>O grau de Leray-Schauder</b>              | <b>18</b> |
| 3.1      | O grau de Brouwer em subespaços . . . . .    | 18        |
| 3.2      | O grau de Leray-Schauder . . . . .           | 19        |
| <b>A</b> | <b>Resultados básicos</b>                    | <b>22</b> |
| A.1      | O teorema de Tietze . . . . .                | 22        |
| A.2      | Seqüências de Dirac e convolução . . . . .   | 24        |
| A.3      | Conjuntos de medida nula . . . . .           | 25        |
| A.4      | O lema de Sard . . . . .                     | 26        |
| A.5      | Partição da unidade . . . . .                | 27        |
| A.6      | Exercícios . . . . .                         | 28        |

# Capítulo 1

## O grau de Brouwer

Neste Capítulo construiremos o grau de Brouwer.

### 1.1 Introdução

O objetivo do grau de Brouwer é fornecer uma contagem simples do número de soluções da equação  $f(x) = b$ . Idealmente, essa contagem deve ser relativamente fácil de ser calculada. Além disso, para ser útil em aplicações, precisa ser suficientemente robusta, no sentido de que “pequenas deformações” da aplicação  $f$  não alterem o número de soluções da equação. Para explicar as hipóteses que faremos, examinaremos alguns exemplos unidimensionais.

(a)

(b)

(c)

Figura 1.1: Pequenas perturbações da função  $f$  produzem alterações no número de soluções da equação  $f(x) = 0$ .

Examinando a Figura 1.1, verificamos que ligeiras perturbações (no caso, simples translações) de uma função  $f$  podem causar variações no número de soluções da equação  $f(x) = 0$ . (É claro que o mesmo pode ocorrer se considerarmos a equação  $f(x) = b$ .) É razoável admitir que, se quisermos manter a propriedade de que o grau seja o mesmo para pequenas deformações de  $f$ , então devemos abrir mão de uma contagem “estrita” do número de soluções de  $f(x) = 0$ .

Analisando a Figura 1.1(b), verificamos que as soluções de  $f(x) = 0$  estão associadas a derivadas com sinais diferentes. Se incorporamos também o sinal da derivada de  $f$  ao cálculo do grau, então (b) e (c) da Figura 1.1 teriam o mesmo grau nulo. Uma vez que em (a) a derivada é nula na solução  $x = 0$ , então as três funções teriam o mesmo grau.

Uma tentativa de definição do grau de Brouwer da função  $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com relação ao ponto 0 (isto é, as soluções de  $f(x) = 0$ ) seria, portanto,

$$\deg(f, D, 0) = \sum_{x \in f^{-1}(0)} \operatorname{sgn} f'(x), \quad (1.1)$$

em que  $\operatorname{sgn} a = 1$ , se  $a > 0$  e  $\operatorname{sgn} a = -1$ , se  $a < 0$ .

Mas surge uma dificuldade: a incorporação do sinal da derivada na definição do grau de Brouwer é um problema em pontos críticos! Na Figura 1.1(a), a solução  $x = 0$  deveria ser desprezada para obtermos grau zero. Mas, se pensarmos nas funções  $g(x) = x^3$  e  $h(x) = -x^3$ , verificamos que, se efetuarmos translações semelhantes às da Figura 1.1, vemos que à solução  $x = 0$  em  $g$  deve ser incorporado o sinal positivo, enquanto ele deve ser negativo em  $h$ . Esse é um problema que deve ser resolvido com a nossa definição preliminar de grau no caso de pontos críticos. Mais do que isso, a incorporação do sinal da derivada exige uma regularidade de  $f$  (por exemplo,  $f \in C^1$ ), enquanto gostaríamos que fosse possível calcular o grau de uma função meramente contínua.

Colocar aqui uma figura

Agora passamos a uma segunda ordem de dificuldade. Consideremos a função  $\sin: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  e examinemos as soluções  $x = 0$ ,  $x = \pi$  e  $x = 2\pi$  de  $\sin x = 0$ . A translação  $g(x) = \sin x + \epsilon$ , para  $\epsilon > 0$  pequeno, tem duas soluções da equação  $g(x) = 0$  com derivadas com sinais opostos, o que produziria grau zero, como vimos anteriormente. Entretanto, a função  $f$  deveria ter grau 1, se seguirmos os mesmos critérios já utilizados!

Colocar aqui uma figura

A dificuldade aqui tratada é muito mais grave do que a anterior. A única forma de lidarmos satisfatoriamente com ela é não permitindo a existência de soluções de  $f(x) = 0$  na fronteira de seu domínio, o que será suposto quando da construção do grau de Brouwer. Isso significa, em particular, que a função  $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deve estar definida em  $\bar{D}$ . (Observe que o problema apresentada pela função  $g(x) = \sin x + \epsilon$  não é resolvido se simplesmente considerarmos que ela está definida no aberto  $(0, 2\pi)$ .)

Tratemos agora da própria fórmula (1.1). Generalizando para um aberto  $D \subset \mathbb{R}^n$  e  $f: \bar{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , podemos substituir  $\operatorname{sgn} f'(x)$  por  $\operatorname{sgn} \det Df(x)$ . Também podemos substituir  $x = 0$  por um ponto qualquer  $p \in \mathbb{R}^n$ . Assim, chegamos à uma nova definição provisória:

$$\deg(f, D, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn} \det Df(x) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn} J_f(x), \quad (1.2)$$

em que  $J_f(x)$  denota o determinante jacobiano de  $f$ .

Notamos em (1.2), em primeiro lugar, que  $f^{-1}(p)$  pode ser o conjunto vazio. Nesse caso, é natural definir  $\deg(f, D, p) = 0$ . É a convenção que faremos:

$$\deg(f, D, p) = 0 \quad \text{se } f^{-1}(p) = \emptyset.$$

Mas, para que (1.2) faça sentido, devemos garantir que o somatório esteja bem definido. Ora, como apenas  $\pm 1$  são suas parcelas, a única maneira de obtermos a convergência do somatório é exigindo que tenhamos uma soma finita, isto é, que o número de soluções  $x \in f^{-1}(p)$  seja finito. Vamos mostrar que isso pode ser facilmente obtido. Para isso, começamos introduzindo alguma notação.

Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado. Denotaremos  $f \in C^k(\bar{D})^m$  se existirem  $U$  e  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  tais que  $\bar{U} \subset U$  e  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  é de classe  $C^k$  ( $k = 0, 1, \dots, \infty$ ). O conjunto  $C^k(\bar{D})^m$  é o conjunto de restrições de tais aplicações ao compacto  $\bar{D}$ :

$$C^k(\bar{D})^m = \{f|_D: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^m; f: U \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ é } C^k\}.$$

Denotamos simplesmente  $C(\bar{D})^m := C^0(\bar{D})^m$ . Consideraremos o espaço  $C(\bar{D})^m$  com a norma do sup; os outros espaços serão considerados com a *topologia induzida por essa norma*.

**Definição 1.1.1** *Sejam  $f \in C^\infty(\bar{D})^m$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $x$  é um **ponto regular** de  $f$ , se a aplicação linear  $Df(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  for sobrejetora. Caso contrário,  $x$  é um **ponto crítico** de  $f$ . Um ponto  $p \in \mathbb{R}^m$  é um **valor crítico** de  $f$  se  $f^{-1}(p)$  contiver ao menos um ponto crítico de  $f$ . Caso contrário,  $p$  é um **valor regular** de  $f$ .*

*Denotamos por  $Z_f$  o conjunto dos pontos críticos de  $f$ .*

Note que, se  $f^{-1}(p) = \emptyset$ , então  $p$  é um valor regular de  $f$ . Se  $p \in f(D)$ , claramente devemos ter  $n \geq m$  para que  $p$  possa ser um valor regular. O conjunto  $f(Z_f) \subset \mathbb{R}^m$  é o conjunto dos valores críticos de  $f$ . (É claro que poderíamos apresentar a definição anterior para funções de classe  $C^1$ ; apenas questões técnicas motivaram a definição apresentada.)

**Lema 1.1.2** *Seja  $f \in C^1(\bar{D})^n$  e  $p \notin f(Z_f)$ . Então  $f^{-1}(p)$  é vazio ou um conjunto finito. Se  $p \notin f(\partial D)$ , então  $f^{-1}(p) \subset D$ .*

**Demonstração:** Suponhamos a existência de uma seqüência  $(x_k) \subset f^{-1}(p)$ , com  $x_k \neq x_\ell$  para  $k \neq \ell$ . Como  $\bar{D}$  é compacto, podemos assumir que  $x_k \rightarrow x \in \bar{D}$ . A continuidade de  $f$  implica que  $x \in f^{-1}(p)$ . Como  $p \notin f(Z_f)$ , temos que  $J_f(x) \neq 0$ . Como  $f$  é de classe  $C^1$ , podemos aplicar o Teorema da Aplicação Inversa: existe uma vizinhança  $U_x$  de  $x$  tal que  $f|_{U_x}: U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um difeomorfismo. Mas isso contradiz o fato que  $x_k \rightarrow x$ . A segunda afirmação é imediata.  $\square$

Assim, uma vez que as funções em  $C^1(\bar{D})^n$  são restrições de funções  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  (com  $\bar{D} \subset U$ ) de classe  $C^1$ , a fórmula (1.2) faz sentido mesmo que  $p \in f(\partial D)$ . Contudo, como mostramos anteriormente, essa possibilidade deve ser excluída, se quisermos que o grau seja invariante sob pequenas perturbações da função  $f$ .<sup>1</sup>

Portanto, o Lema 1.1.2 mostra que a seguinte definição do grau de Brouwer é satisfatória para aplicações  $f \in C^\infty(\bar{D})^n$  e  $p \notin (f(Z_f) \cup f(\partial D))$ :

<sup>1</sup>Note que, em geral,  $f(\partial\Omega) \neq \partial f(\Omega)$  (isso é claro se tomarmos  $f$  como uma função que leva um disco em uma cardióide com um laço interior: o laço interior não fará parte da fronteira da imagem).

**Definição 1.1.3** *Sejam  $f \in C^\infty(\bar{D})^n$  e  $p \notin (f(Z_f) \cup f(\partial D))$ . Definimos o grau de  $f$  em  $p$  com respeito a  $D$  por*

$$\begin{aligned} \deg(f, D, p) &= \sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn}(J_f(x)), \\ &= 0, \quad \text{se } f^{-1}(p) = \emptyset, \end{aligned}$$

em que  $\operatorname{sgn} a = 1$ , se  $a > 0$  e  $\operatorname{sgn} a = -1$ , se  $a < 0$ .

Note que estamos exigindo  $f \in C^\infty(\bar{D})^n$ , mesmo que essa definição faça sentido para  $f \in C^1(\bar{D})^n$ . Como na definição de valor regular, essa exigência é meramente técnica, no sentido de que mostraremos que o grau está bem definido para aplicações  $f \in C(\bar{D})^n$ .

Mas, se compararmos a Definição 1.1.3 com nosso objetivo inicial, que era obter uma contagem simples do número de soluções da equação  $f(x) = b$ , chegamos a um contra-senso: para que  $\deg(f, D, p)$  possa ser calculado, devemos saber quais são as soluções de  $f(x) = b$ !

Em vez de desistirmos de nosso propósito, vamos modificá-los; se tivermos métodos indiretos de calcular o grau  $\deg(f, D, p)$  e se  $\deg(f, D, p) \neq 0$  indicar a existência de *ao menos* uma solução de  $f(x) = p$ , então nosso trabalho não terá sido em vão. E isso realmente acontece, como mostraremos posteriormente.

## 1.2 A construção do grau de Brouwer

Para simplificar a notação, denotaremos

$$\begin{aligned} C_p(\bar{D})^n &= \{f \in C^0(\bar{D})^n : p \notin f(\partial D)\}, \\ C_p^\infty(\bar{D})^n &= \{f \in C^\infty(\bar{D})^n : p \notin f(Z_f) \cup f(\partial D)\}. \end{aligned}$$

Como antes, os conjuntos  $C_p(\bar{D})^n$  e  $C_p^\infty(\bar{D})^n$  serão considerados com a topologia induzida pela do espaço  $C(\bar{D})^n$ , isto é, pela norma do sup.

Queremos estender a definição do grau de Brouwer para o conjunto  $C_p(\bar{D})^n$ , isto é, queremos relaxar as condições  $p \notin f(Z_f)$  e  $f \in C^\infty(\bar{D})^n$  na definição do grau de Brouwer.

Começamos enunciando um importante resultado devido a Sard, cuja demonstração pode ser encontrada em [15]:

**Teorema 1.2.1 (Sard)** *O conjunto de valores regulares de toda aplicação  $h: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^\infty$  é denso no  $\mathbb{R}^m$ .*

No caso  $m = n$ , isto é, aplicações  $f: \bar{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , a demonstração do resultado de Sard é simples:

**Lema 1.2.2 (Sard)** *Seja  $f \in C^1(\bar{D})^n$ . Então  $f(Z_f)$  tem medida nula no  $\mathbb{R}^n$ .*

**Demonstração:** Como consequência do Teorema de Lindelöf,  $D$  é uma união enumerável de cubos abertos contidos em  $D$ . Logo,  $\bar{D}$  é uma união enumerável de cubos fechados  $C_k$  contidos em  $\bar{D}$ . Como a união enumerável de conjuntos de medida nula é um conjunto de medida nula, basta provarmos que  $f(Z_f \cap C)$  é um conjunto de medida nula, sendo  $C$  um cubo fechado contido em  $\bar{D}$ .

Subdividimos cada uma das arestas do cubo  $C$  em  $k$  partes iguais e obtemos assim uma partição do cubo  $C$  em  $k^n$  pequenos cubos  $C_i$ , de mesma aresta  $\delta$  e volume  $\delta^n$ . Se  $x, y \in C_i$ , temos  $|x - y|_{\max} \leq \delta$ .

Para cada cubo  $C_i$  tal que  $Z_f \cap C_i \neq \emptyset$ , escolhemos um ponto  $x_i \in Z_f \cap C_i$ . A imagem da aplicação linear  $Df(x_i) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  está contida num subespaço vetorial  $E_i \subset \mathbb{R}^n$ , de dimensão igual a  $n - 1$ , de acordo com o Teorema do Núcleo e da Imagem. (A imagem pode estar contida em um subespaço de dimensão menor do que  $n - 1$ , mas ela está certamente contida em um subespaço de dimensão  $n_1$ .)

Para cada  $x \in C_i$  podemos escrever

$$f(x) = [f(x_i) + Df(x_i)(x - x_i)] + r_i(x). \quad (1.3)$$

Note que a aplicação  $x \mapsto f(x_i) + Df(x_i)(x - x_i)$  toma valores no espaço afim  $L_i := f(x_i) + E_i$ , de dimensão igual a  $n - 1$ .

Seja  $M = \sup_{x \in C} \|Df(x)\|$  (aqui estamos usando que  $f \in C^1$ ). Então

$$|Df(x_i) \cdot (x - x_i)|_{\max} \leq M|x - x_i|_{\max} \leq M\delta.$$

Isso mostra que, para todo ponto  $x \in C_i$ , o ponto  $[f(x_i) + Df(x_i)(x - x_i)]$  pertence a um cubo  $K'_i$  de centro  $f(x_i)$  e aresta  $2M\delta$  contido em  $L_i$ .

Tratemos agora do resto  $r_i(x)$  em (1.3). Como  $f$  é diferenciável, dado arbitrariamente  $\epsilon > 0$ , podemos tomar o inteiro  $k$  (o número de subdivisões de cada aresta do cubo original  $C$ ) tão grande que, para cada cubo  $C_i$  contendo pontos de  $Z_f$  e todo  $x \in C_i$  valha

$$|r_i(x)|_{\max} \leq \epsilon|x - x_i|_{\max} \leq \delta\epsilon.$$

O resto afeta tanto  $[f(x_i) + Df(x_i)(x - x_i)]$  como a dimensão “faltante” em  $L_i$ . No primeiro caso, ela amplia a dimensão da aresta do cubo, de modo que  $[f(x_i) + Df(x_i)(x - x_i)]$  está contido em um cubo  $K_i$  de centro  $f(x_i)$  e aresta  $2M\delta + 2\delta\epsilon = 2(M + \epsilon)\delta$ . Quanto à dimensão “faltante”, essa pode sair  $\delta\epsilon$  do subespaço  $L_i$ . Decorre então de (1.3) que, para todo  $x \in C_i$ , a imagem  $f(x)$  pertence a um paralelepípedo  $P_i \subset \mathbb{R}^n$  que tem como seção o cubo  $K_i$  e “altura”  $2\delta\epsilon$ , cujo volume  $\text{vol}(P_i)$  é igual a  $[2(M + \epsilon)\delta]^{n-1}2\delta\epsilon = [(2\delta)^n(M + \epsilon)^{n-1}]\epsilon$ .

Como a imagem de  $C$  está contida em no máximo  $k^n$  desses paralelepípedos,  $f(S_f(C) \cap C)$  tem volume máximo  $[(2k\delta)^n(M + \epsilon)^{n-1}]\epsilon$ . Uma vez que  $\epsilon > 0$  é arbitrário,  $f(S_f(C) \cap C)$  tem medida nula.  $\square$

**Teorema 1.2.3** O conjunto  $C_p(\bar{D})^n$  é aberto em  $C(\bar{D})^n$  e  $C_p^\infty(\bar{D})^n$  é denso em  $C_p(\bar{D})^n$ .

**Demonstração:** Seja  $f \in C_p(\bar{D})^n$ . Se  $p \notin f(\partial D)$ , então existe uma bola  $B_r(p)$  tal que  $B_r(p) \cap f(\partial D) = \emptyset$ . Todas as funções contínuas  $g : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\|g - f\|_{\sup} < r/2$  estão em  $C_p(\bar{D})^n$ .

Dados  $\epsilon > 0$  e  $f \in C_p(\bar{D})^n$ , defina  $\epsilon' = \inf_{x \in \partial D} |f(x) - p|$  e  $\epsilon'' = \min\{\epsilon, \epsilon'\}$ . Pelo Teorema de Stone-Weierstraß, cada função coordenada  $f_i$  pode ser aproximada por um polinômio  $t_i$  tal que  $\sup_{x \in \bar{D}} |f_i(x) - t_i(x)| < \epsilon''/2$ . Se  $t = (t_1, \dots, t_n)$ , então  $\sup_{x \in \bar{D}} |f(x) - t(x)|_{\max} < \epsilon''/2$ .

Se  $p$  for valor regular de  $t$ , nossa demonstração está completa. Caso contrário, de acordo com o Lema de Sard 1.2.2, existe um valor regular  $q$  de  $t$  tal que  $|q - p| < \epsilon''/2$ . Então  $s = t + (q - p)$  dada por  $s(x) = t(x) + (q - p)$  é a aplicação procurada, pois  $p$  é valor regular de  $s$  (uma vez que  $s' = t'$  e  $t(x) = p$  se, e somente se,  $s(x) = q$ ) e

$$\sup_{x \in \bar{D}} |f(x) - s(x)|_{\max} \leq \sup_{x \in \bar{D}} |f(x) - t(x)|_{\max} + |q - p| < \epsilon''/2 + \epsilon''/2 = \epsilon'' \leq \epsilon.$$

(Note que, independentemente de  $p$  ser valor regular de  $t$ , a aplicação  $s$  é a aplicação procurada.)  $\square$

**Lema 1.2.4** *Seja  $f \in C_p^\infty(\bar{D})^n$ . Então existe um aberto  $V \ni p$  tal que todo ponto  $q \in V$  é valor regular de  $f$  e*

$$\deg(f, D, y) = \deg(f, D, p).$$

**Demonstração:** De acordo com o Lema 1.1.2,  $f^{-1}(p) = \{a_1, \dots, a_k\}$  ou  $f^{-1}(p) = \emptyset$ . Se  $p \notin f(\bar{D})$ , definimos  $\delta = \frac{1}{2} \text{dist}(p, f(\bar{D})) = \frac{1}{2} \inf\{|p - y|_{\max} : y \in f(\bar{D})\}$ . Temos que  $\delta > 0$ , pois  $\text{dist}(p, f(\bar{D}))$  é a distância entre compactos disjuntos. Assim,  $f^{-1}(q) = \emptyset$  para todo  $q \in V := B_\delta(p)$ .

Se  $f^{-1}(p) = \{a_1, \dots, a_k\}$  e  $i \in \{1, \dots, k\}$ , o Teorema da Aplicação Inversa garante a existência de abertos  $W_i \ni a_i$  e  $V_i \ni p$  tais que  $f$  transforma  $W_i$  difeomorficamente em  $Z_i$ . Reduzindo as vizinhanças  $W_i$ , se necessário, podemos supor que  $W_i \cap W_j = \emptyset$ , se  $i \neq j$ . Como  $J_f(a_i) \neq 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ , a continuidade de  $J_f(x)$  garante que uma nova redução de  $W_i$  torna possível a suposição  $\text{sgn } J_f(a_i) = J_f(u)$  para todo  $u \in W'_i$ , com  $i = 1 \dots, n$ . Defina então

$$V = \left( \bigcap_{i=1}^n V_i \right) \setminus f \left( \bar{D} \setminus \bigcup_{i=1}^n W_i \right).$$

O aberto  $V$  tem as propriedades desejadas.  $\square$

**Lema 1.2.5** *Considere uma função  $d: C_p^\infty(\bar{D}) \cap C_p(\bar{D})^n \rightarrow \mathbb{Z}$ , o primeiro conjunto considerado com a norma do sup e o último conjunto considerado com a topologia discreta.*

*Se  $d$  for localmente constante, então  $d$  é constante nas componentes conexas de  $C_p^\infty(\bar{D}) \cap C_p(D)$ . Em particular,  $d$  é contínua.*

**Demonstração:** Como  $d$  é localmente constante,  $d^{-1}(k)$  é aberto em  $C_p(\bar{D})^n$ , para todo inteiro  $k$ . Mas  $d^{-1}(k)$  é fechado, por ser o complementar do aberto  $d^{-1}(\mathbb{Z} \setminus \{k\})$ . Logo,  $d^{-1}(k)$  é a união de componentes conexas de  $C_p^\infty(\bar{D}) \cap C_p(\bar{D})^n$ .  $\square$

Agora enunciaremos um caso especial do Teorema da Aplicação Implícita que será útil para os nossos propósitos:

**Teorema 1.2.6** *Sejam  $h: \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^1$ , com  $h(t_0, x_0) = 0$  e  $J_{h(t_0, \cdot)}(x_0) \neq 0$  para algum  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times D$ . Então existem um intervalo  $(t_0 - r, t_0 + r)$ , uma bola  $B_\rho(x_0) \subset D$  e um caminho contínuo  $z: (t_0 - r, t_0 + r) \rightarrow B_\delta(x_0)$  tal que  $z(t_0) = x_0$  e  $z(t)$  é a única solução de  $h(t, x) = 0$  em  $B_\rho(x_0)$ .*

**Proposição 1.2.7** *Seja  $f \in C_p^\infty(D)^n$ . Então, para toda  $g \in C_p^\infty(\bar{D})^n$ , existe  $\delta = \delta(f, g, p)$  tal que*

$$\deg(f + tg, D, p) = \deg(f, D, p), \quad \forall |t| < \delta.$$

**Demonstração:** Se for  $f^{-1}(p) = \emptyset$ , seja  $\delta = \frac{1}{2} \text{dist}(p, f(\bar{D}))$ , em que  $\text{dist}(p, f(\bar{D})) = \inf\{|p - y|_{\max} : y \in f(\bar{D})\}$ . Temos que  $\delta > 0$ , pois  $\text{dist}(p, f(\bar{D}))$  é a distância entre compactos disjuntos. Uma vez que

$$\|f - (f + tg)\|_{\sup} = |t| \|g\|_{\sup},$$

temos que  $\text{dist}(p, (f + tg)(\bar{D})) > 0$ , desde que  $|t| < \delta / \|g\|_{\sup}$ . Assim, para tais valores de  $t$ ,  $(f + tg)^{-1}(p) = \emptyset$ .

Suponhamos agora que  $f^{-1}(p) = \{a_1, \dots, a_k\}$ . Defina  $f_t = f + tg$  e  $h(t, x) = f_t(x) - p$ . Temos que, para  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $h(0, a_i) = f(a_i) - p = 0$  e  $J_{h(0, \cdot)}(a_i) = J_f(a_i) \neq 0$ . Assim, decorre do Teorema 1.2.6 a existência de um intervalo  $(-r, r)$ , bolas disjuntas  $\bar{B}_\rho(a_i)$  e caminhos contínuos  $z_i: (-r, r) \rightarrow B_\rho(a_i)$  tais que

$$f_t^{-1}(p) \cap V = \{z_1(t), \dots, z_k(t)\}, \quad \text{em que} \quad V = \bigcup_{i=1}^k B_\rho(a_i).$$

Redefinindo  $r$  e  $\rho$ , se necessário, podemos supor que  $\text{sgn } J_f(x) = \text{sgn } J_f(a_i)$  em  $\bar{B}_\rho(a_i)$ .

Seja  $\gamma = \text{dist}(p, \bar{D} \setminus V)$ . Então

$$|f_t(x) - p| \geq |f(x) - p| - |f_t(x) - f(x)| > \rho - |t| \|g\|_{\sup} > 0,$$

desde que  $|t| < \delta_0 = \min\{r, \gamma / \|g\|_{\sup}\}$ . Para tais valores de  $t$  temos que  $f_t^{-1}(p) = \{z_1(t), \dots, z_k(t)\}$ , ou seja, todas as soluções de  $f_t(x) = p$  são as soluções já encontradas  $z_1(t), \dots, z_k(t)$ .

Finalmente, como  $J_{f_t}(x)$  é contínuo em  $(t, x)$ , existe  $\delta \leq \delta_0$  tal que

$$|J_{f_t}(x) - J_f(x)| < \min\{|J_f(z)| : z \in \bar{V}\}, \quad \forall |t| < \delta \quad \text{e} \quad x \in \bar{V}.$$

Consequentemente,  $\text{sgn } J_{f_t}(z_i(t)) = \text{sgn } J_f(z_i(t)) = \text{sgn } J_f(a_i)$ , ou seja,

$$\deg(f_t, D, p) = \text{sgn}(f, D, p),$$

de acordo com a Definição 1.1.3. □

**Corolário 1.2.8** *A aplicação  $\deg(\cdot, D, p)$  é localmente constante, isto é, para toda  $f \in C_p^\infty(\bar{D})^n \subset C_p(\bar{D})^n$ , as aplicações  $g$  do aberto*

$$\{g \in C_p^\infty(\bar{D})^n : \|g - f\|_{\sup} < \text{dist}(p, f(\partial D))\}$$

*têm todas o mesmo grau de  $f$  em  $p$ :*

$$\deg(f, D, p) = \deg(g, D, p).$$

**Demonstração:** Seja  $\alpha = \text{dist}(p, f(\partial D))$ . Suponhamos que  $\|g - f\|_{\text{sup}} < \alpha$ . Defina  $h: [0, 1] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $h(t, x) = f(x) + t(g(x) - f(x))$  para  $t \in [0, 1]$ . Então  $h \in C^\infty$  e  $0 \notin h([0, 1] \times \partial D)$ , pois

$$|h(t, x)| = |f(x) + t(g(x) - f(x))| \geq |f(x)| - t|g(x) - f(x)| > 0.$$

Como consequência do Lema 1.2.4, existe um aberto  $V \ni p$  tal que

$$\deg(f, D, p) = \deg(f, D, q) \quad \text{e} \quad \deg(g, D, p) = \deg(g, D, q), \quad \forall q \in V. \quad (1.4)$$

O Teorema de Sard garante que o conjunto de pontos em  $V$  que são valores críticos de  $h$  tem medida nula. Tomemos, portanto, um ponto  $q \in V$  que seja valor regular de  $h$ .

Logo, está bem definida a função  $d: [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}$  dada por  $d(t) = \deg(h(t, \cdot), D, q)$ . Então, para todo  $t_0 \in [0, 1]$  fixo, como

$$\begin{aligned} h(t, x) &= f(x) + t_0(g(x) - f(x)) + (t - t_0)(g(x) - f(x)) \\ &= h(t_0, x) + (t - t_0)(g(x) - f(x)), \end{aligned}$$

decorre da Proposição 1.2.7 que  $d(t)$  é localmente constante em uma vizinhança de  $t_0$ . Assim,  $d(t)$  é contínua em  $[0, 1]$  e, como este conjunto é conexo,  $d([0, 1]) \subset \mathbb{Z}$  é conexo. Portanto,  $d(t)$  é constante em  $[0, 1]$ . Em particular,  $\deg(f, D, q) = \deg(g, D, q)$ . O resultado segue-se então de (1.4).  $\square$

**Corolário 1.2.9** *Todas as funções  $f \in C_p^\infty(\bar{D})^n$  na mesma componente conexa de  $C_p(\bar{D})^n$  têm o mesmo grau.*

**Demonstração:** Decorre imediatamente do Lema 1.2.5 e do Corolário 1.2.8.  $\square$

Resulta imediatamente do Corolário 1.2.9 que está bem definido o grau em  $C_p(\bar{D})^n$  por meio de

**Definição 1.2.10** *Seja  $f \in C_p(\bar{D})^n$ . Definimos*

$$\deg(f, D, p) = \deg(g, D, p),$$

*em que  $g \in C_p^\infty(\bar{D})^n$  é uma aplicação na mesma componente conexa de  $f$  em  $C_p(\bar{D})^n$ .*

Note que, em particular, o grau de quaisquer duas aplicações  $f, g \in C_p(\bar{D})^n$  na mesma componente conexa é igual.

## 1.3 Propriedades elementares do grau

**Teorema 1.3.1 (Propriedades básicas do grau de Brouwer)** *A função*

$$\deg: C_p(\bar{D})^n \rightarrow \mathbb{Z}$$

*tem as seguintes propriedades:*

- (i)  $\deg(f, \emptyset, p) = 0$ ;
- (ii)  $\deg(id, D, p) = 1$ ;
- (iii) se  $D_1, D_2 \subset D$  são abertos disjuntos e  $p \notin f(\bar{D} \setminus (D_1 \cup D_2))$ , então
$$\deg(f, D, p) = \deg(f|_{D_1}, D_1, p) + \deg(f|_{D_2}, D_2, p).$$

Amann [3] prova a existência de uma *única* função grau satisfazendo essas propriedades. A unicidade da função grau também é mostrada, com propriedades equivalente àsquelas do Teorema 1.3.1, em Deimling [8].

A demonstração do Teorema 1.3.1 é imediata: reduzindo ao caso de aplicações em  $C_p^\infty(\bar{D})^n$ , as propriedades (i) – (iii) decorrem da definição do grau para tais funções.

**Corolário 1.3.2 (Propriedades elementares do grau de Brouwer)** *A função*

$$\deg: C_p(\bar{D})^n \rightarrow \mathbb{Z}$$

*satisfaz as seguintes propriedades:*

- (iv)  $\deg(f, D, p) = \deg(f - p, D, 0)$ ;
- (v) se  $D_1 \subset D$  for aberto e  $p \notin f(\bar{D} \setminus D_1)$ , então
$$\deg(f, D, p) = \deg(f, D_1, p);$$
- (vi) se  $\deg(f, D, p) \neq 0$ , então  $p \in f(D)$ , isto é, existe  $x \in D$  tal que  $f(x) = p$ ;
- (vii) se  $|p - q| < \text{dist}(p, f(\partial D))$ , então  $\deg(f, D, p) = \deg(f, D, q)$ ;
- (viii)  $\deg(f, D, \cdot)$  é constante nas componentes conexas de  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ ;
- (ix)  $\deg(H(t, \cdot), D, p)$  independe de  $t$  para toda homotopia contínua  $H: [0, 1] \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $p \notin H(t, \partial D)$  para todo  $t \in [0, 1]$ ;
- (x) se  $f$  e  $g$  coincidem em  $\partial D$ , então

$$\deg(f, D, p) = \deg(g, D, p).$$

**Demonstração:** A propriedade (iv) decorre de  $f(x) = p$  se, e somente se,  $g(x) = 0$ , em que  $g(x) = f(x) - p$ ; por sua vez, (v) decorre da definição do grau para aplicações em  $C_p^\infty(\bar{D})^n$ .

Suponhamos que  $p \notin f(D)$ . De acordo com (v), podemos tomar  $D_1 = \emptyset$  e concluir que  $\deg(f, D, p) = 0$ , o que prova (vi).

Quanto a (vii), decorre de (iv) que

$$\deg(f, D, p) = \deg(f - p, D, 0) = \deg(f - q, D, 0) = \deg(f, D, q).$$

Assim,  $\deg(f, D, \cdot)$  é localmente constante. Como antes (Lema 1.2.5), isso implica que  $\deg(f, D, \cdot)$  é constante nas componentes conexas de  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ , provando (viii).

Para provar (ix), basta repetir a argumentação dada no final da demonstração do Corolário 1.2.8: definindo  $d(t) = \deg(H(t, \cdot), D, p)$ , a continuidade de  $H$  garante que  $H(t_1, \cdot)$  e  $H(t_2, \cdot)$  estão na mesma componente conexa para  $t_1$  e  $t_2$  suficientemente próximos; assim,  $d(t)$  é localmente constante e, portanto, contínua no conexo  $[0, 1]$ . Logo  $u([0, 1]) \subset \mathbb{Z}$  é conexo e, portanto, constante. (Note que  $p \notin H(t, \partial D)$ ) para todo  $t \in [0, 1]$  garante que a homotopia  $H(t, \cdot)$  está sempre na mesma componente conexa de  $C_p(\bar{D})^n$ .

Para verificar (x), considere a homotopia contínua  $H(t, \cdot) = (1 - t)f(\cdot) + tg(\cdot)$ . Como  $f = g$  em  $\partial D$ , vemos que  $H(t, \cdot) = f(\cdot) = g(\cdot)$  em  $\partial D$   $\square$

**Observação 1.3.3** Toda aplicação contínua  $f: \partial D \rightarrow \mathbb{R}^n$  pode ser estendida a uma aplicação  $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de acordo com o Teorema de Extensão de Tietze (aplicado a cada coordenada de  $f$ ). Essa extensão não é única, mas elas coincidem em  $\partial D$ . Isso significa que faz sentido  $\deg(f, D, p)$  mesmo que  $f$  só esteja definida em  $\partial D$  e  $p \notin f(\partial D)$ .  $\triangleleft$

**Exercício 1.3.4** Seja  $f \in C_p(\bar{D})^n$  e  $q \in \mathbb{R}^n$  arbitrário. Mostre que

$$\deg(f - q, D, p - q) = \deg(f, D, p).$$

Conclua que, se  $H(t, \cdot): \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  for uma homotopia contínua e  $t \mapsto p(t)$  um caminho contínuo de  $[0, 1]$  no  $\mathbb{R}^n$  tal que  $p(t) \notin H(t, \partial D)$  para todo  $t \in [0, 1]$ , então

$$\deg(H(t, \cdot), D, p(t))$$

é independente de  $t \in [0, 1]$ .

## 1.4 Estendendo o grau de Brouwer

**Proposição 1.4.1** Seja  $u: D \rightarrow u(D)$  um difeomorfismo (global). Então

$$\deg(f, D, p) = \deg(u \circ f \circ u^{-1}, u(D), u(p)).$$

**Demonstração:** Basta mostrar o resultado no caso em que  $p = 0$  e  $f \in C_p^\infty(\bar{D})^n$  e  $u(p) = u(0) = 0$ . Nesse caso,

$$\begin{aligned} \deg(u \circ f \circ u^{-1}, u(D), 0) &= \sum_{x \in (u \circ f \circ u^{-1})^{-1}(0)} \operatorname{sgn} \det(u \circ f \circ u^{-1})'(x) \\ &= \sum_{y \in f^{-1}(0)} \operatorname{sgn} \det(f'(y)) \\ &= \deg(f, D, 0), \end{aligned}$$

de acordo com a regra da Cadeia e o fato que o determinante do produto é igual ao produto dos determinantes.  $\square$

Uma consequência imediata da Proposição 1.4.1 é que o grau de Brouwer pode ser estendido a qualquer espaço vetorial *real* de dimensão finita  $X$  por meio de um isomorfismo com o espaço  $\mathbb{R}^n$ , sendo  $n = \dim X$ , uma vez que o grau independe do isomorfismo escolhido entre  $X$  e  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercício 1.4.2** Mostre que o grau de Brouwer pode ser estendido para o espaço  $\mathbb{C}^n$ , ao identificar esse espaço com  $\mathbb{R}^{2n}$  por meio do homeomorfismo canônico  $x + iy \mapsto (x, y)$ .

**Exercício 1.4.3** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Mostre que  $\partial\Omega$  não é um *retrato* de  $\bar{\Omega}$ , isto é, não existe uma aplicação contínua  $r: \bar{\Omega} \rightarrow \partial\Omega$  tal que  $r|_{\partial\Omega}: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a aplicação identidade  $i: \partial\Omega \rightarrow \partial\Omega$ .

A definição do grau de uma aplicação  $f \in C_p^\infty(\bar{D})^n$ ,

$$\begin{aligned} \deg(f, D, p) &= \sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn}(J_f(x)), \\ &= 0, \quad \text{se } f^{-1}(p) = \emptyset, \end{aligned}$$

é válida se  $f \in C_p^1(\bar{D})^n$ :

**Proposição 1.4.4** *Sejam  $D \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado e  $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação contínua tal que  $f|_D$  seja de classe  $C^1$ . Se  $p \notin f(\partial D) \cup f(Z_f)$ , então  $\deg(f, D, p)$  pode ser calculado pela definição dada para  $f \in C_p^\infty(\bar{D})^n$ .*

**Demonstração:** Sem perda de generalidade, podemos supor que  $p = 0$ . Como as soluções de  $f(x) = 0$  são isoladas, a propriedade básica (iii) do grau de Brouwer garante que podemos considerar que  $f(x) = 0$  tenha uma única solução  $x_0 \in D$ .

Defina  $g(x) = f'(x_0)(x - x_0)$ . Então  $g \in C_0^\infty(\bar{D})^n$  e, por definição,

$$\deg(g, B_\delta(x_0), 0) = \operatorname{sgn} \det f'(x_0),$$

para todo  $\delta$  positivo.

Mas,

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + r(x - x_0),$$

com  $r(x - x_0)/|x - x_0| \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Tome  $\delta$  suficientemente pequeno de modo que  $|x - x_0| \leq \delta$  implique  $B_\delta(x_0) \subset D$  e

$$\frac{|r(x - x_0)|}{|x - x_0|} \leq \frac{\|f'(x_0)\|}{2}.$$

Para esse valor de  $\delta > 0$ , a homotopia

$$h(t, x) = f'(x_0)(x - x_0) + t r(x - x_0)$$

é admissível e

$$\deg(f, B_\delta(x_0), 0) = \deg(g, B_\delta(x_0), 0),$$

como queríamos verificar. □

**Observação 1.4.5** Suponhamos que  $f'(x_0)$  só tenha autovalores reais, que  $x_0 \in D$  seja a única solução de  $f(x) = 0$ , sendo  $f \in C_p^1(\bar{D})^n$ . A demonstração acima mostra que

$$\deg(f, D, 0) = (-1)^m,$$

sendo  $m$  a dimensão do auto-espaço associado aos autovalores negativos da aplicação  $f'(x_0)$ . ◁

## Capítulo 2

# Algumas aplicações do grau de Brouwer

**Exemplo 2.0.6** Considere  $D = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ . Então

$$\deg(id, D, 0) = 1,$$

pois  $id^{-1}(0) = \{0\}$  e  $id'(0) = 1$ .

Quer dizer,  $\deg(id, D, 0)$  contou exatamente o número de soluções de  $id(x) = 0$ .

Por outro lado, considerarmos  $f(x) = x^2 - 1$ , notamos que

$$\deg(f, D, 0) = 0,$$

pois  $Df(x)$  tem sinais contrários em  $\pm 1$ , que são soluções de  $f(x) = 0$ . Assim, sinais contrários da derivada em pontos tais que  $f(x) = 0$  podem fazer com que  $\deg(f, D, 0)$  não descreva uma contagem de soluções de  $f(x) = 0$ .  $\triangleleft$

Algumas complicações podem surgir na definição dada de  $\deg(f, D, 0)$ . Por exemplo, se considerarmos  $f(x) = |x|$ , não está definida a derivada em  $Df(0)$  e portanto a fórmula usada para definir o grau não faz sentido. Ou mesmo se considerarmos  $f(x) = x^4$ , então  $Df(0) = 0$  está definido, mas não  $\text{sgn}(Df(0))$ . Ou ainda uma função como  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ , que tem infinitos zeros numa vizinhança de 0, de modo que não é claro que o somatório esteja bem definido.

A solução para todos os problemas levantados decorre de uma propriedade fundamental, que motiva a definição de grau: considerando o espaço das funções contínuas  $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , as funções tais que  $0 \notin f(\partial D)$  realizam uma partição desse conjunto, de modo que as componentes conexas definidas por essa partição decompõem  $D$  em conjuntos em que o grau é constante! Isso motiva a exigência  $0 \notin f(\partial D)$ .

**Exemplo 2.0.7** Consideremos o espaço das funções contínuas  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  com a propriedade de que  $0 \notin f(\partial D)$ . Denotaremos esse espaço  $D_0(D)$ .

Consideremos duas funções  $f, g \in D_0(\bar{D})$  (visualise  $f$  como uma função bastante complicada, cheia de zeros e  $g$  como uma função bastante simples: a reta que une  $f(-1)$  a  $f(1)$ ). Considere a homotopia

$$f_t := tf + (1 - t)g, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Note que  $0 \notin f_t(\partial D)$  para todo  $t$  (nos pontos  $-1$  e  $+1$  os valores de  $f$  e  $g$  são iguais; esse mesmo valor é assumido por  $f_t$  para todo  $t$ !). Essas funções estão, portanto, na mesma componente conexa de  $D_0(D)$ . Logo seus graus são iguais!  $\triangleleft$

Em dimensão 1 existem poucas componentes conexas de  $D_0(D)$ : ou ambos os valores de fronteira são negativos (caso representado pela função  $f(x) = c < 0$ , cujo grau é 0), ou ambos valores de fronteira são positivos (caso representado pela função  $f(x) = c > 0$ , cujo grau também é zero) ou ela passa de negativo para positivo (caso representado pela função  $f = id$ , cujo grau é 1) ou ela passa de positivo para negativo (caso representado pela função  $f = -id$ , cujo grau é  $-1$ ). Note que, nos dois últimos casos, o Teorema do Valor Intermediário nos garante a existência de soluções de  $f(x) = 0$ . Acabamos também de mostrar que, em dimensão 1, o grau só assume os valores  $0, \pm 1$ .

Salientamos o resultado fundamental que possibilita a definição do grau em condições mais gerais do que aquelas em que é possível o emprego da fórmula (??):

**Fato:** Denotemos por  $C^0(\bar{D})^n$  o espaço das funções contínuas  $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Então  $\deg(f, D, 0)$  é constante nas componentes conexas de  $C^0(\bar{D})^n \setminus \{f : 0 \in f(\partial D)\}$ .

Note que isso acarreta que o grau é contínuo nessas componentes conexas, uma vez que a função  $\deg : D_0(D) \rightarrow \mathbb{Z}$  só pode assumir valores inteiros.

**Corolário 2.0.8**  $\deg : D_0(D) \rightarrow \mathbb{Z}$  só depende dos valores assumidos na fronteira.

**Demonstração:** Considere  $f, g \in D_0(D)$  com os mesmos valores em  $\partial D$  e defina a homotopia

$$f_t = tf + (1 - t)g, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Como  $0 \notin f_t(\partial D)$  para todo  $t \in [0, 1]$ , isso quer dizer que podemos deformar  $f$  de modo a transformá-la na função  $g$ , sem que essa homotopia saia da componente conexa de  $f$ . Isso quer dizer que  $f$  e  $g$  têm o mesmo grau.  $\square$

**Observação 2.0.9** Se 0 for valor regular de  $f \in C^\infty(D)$  tal que  $0 \notin f(\partial D)$ , então  $f^{-1}(0) \cap \bar{D}$  só assume um número finito de pontos. De fato, suponhamos que existisse uma sequência  $z_n \in \bar{D}$  de zeros de  $f$ . Se essa sequência convergisse para  $z \in \partial D$ , isso seria contrário a exigência imposta sobre  $f$ . Se convergisse para um ponto interior, qualquer vizinhança desse ponto de acumulação teria um sequência de pontos cuja imagem é zero. Em outras palavras, a função não seria injetiva, o que contrariaria o Teorema da Função Inversa!  $\triangleleft$

## 2.1 Aplicações

**Teorema 2.1.1 (do Ponto Fixo de Brouwer)** Toda função contínua  $f : \bar{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{B}_1(0)$  possui um ponto fixo.

**Demonstração:** Se  $f$  tiver um ponto fixo em  $\partial B_1(0)$ , nada há a demonstrar. Caso contrário,  $id - f \in D_0(B_1(0))$ . Basta, portanto, mostrar que

$$\deg(id - f, B_1(0), 0) = \deg(id, B_1(0), 0) = 1,$$

o que implicaria na existência de raízes de  $id - f$ , que são pontos fixos de  $f$ .

Para mostrar que a homotopia  $h_t := id - tf$  para  $t \in [0, 1]$  é admissível, suponhamos por absurdo que existam  $t_0 \in (0, 1)$  e  $x_0 \in \partial B_1(0)$  tais que

$$x_0 - t_0 f(x_0) = 0.$$

Como isso implica que  $|f(x_0)| = \frac{|x_0|}{t_0} > 1$ , temos um absurdo.  $\square$

**Teorema 2.1.2** *Não existe aplicação contínua  $f: \bar{B}_1(0) \rightarrow \partial B_1(0)$  tal que  $f|_{\partial B_1(0)}$  é a identidade.*

**Demonstração:** Suponhamos que exista tal aplicação. Então,  $\deg(f, B_1(0), 0) = 0$ , pois  $0 \notin f(\bar{B}_1(0)) = \partial B_1(0)$ . Contudo, pelo Corolário 1.3.2-(x),  $\deg(id, B_1(0), 0) = \deg(f, B_1(0), 0)$ . Como  $\deg(id, B_1(0), 0) = 1$ , temos uma contradição.  $\square$

**Teorema 2.1.3** *Seja  $f: \mathbb{S}^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$  contínua. Então  $f$  tem um autovetor, isto é, existe  $x \in \mathbb{S}^{2n}$  tal que  $f(x) = \lambda x$ . Em particular, dada  $f: \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathbb{S}^{2n}$  contínua, ou  $f$  ou  $-f$  tem ponto fixo.*

**Demonstração:** Se  $f$  tem uma raiz, nada há a demonstrar. Caso contrário, o Teorema de Tietze garante a existência de uma extensão contínua  $\tilde{f}: \bar{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$  de  $f$ , com  $\sup \tilde{f} = \sup f$  e  $\inf \tilde{f} = \inf f$ . Notamos que  $\tilde{f} \in D_0(B_1(0))$  e passaremos a denotar  $\tilde{f}$  apenas por  $f$ .

Claramente temos que

$$\deg(id, B_1(0), 0) = 1 \quad \text{e} \quad \deg(-id, B_1(0), 0) = -1.$$

Assim,  $f$  não pode pertencer simultaneamente às componentes conexas que contém  $id$  e  $-id$ . Isso quer dizer que uma das duas homotopias,

$$h_t := tf + (1 - t)id \quad \text{ou} \quad g_t := tf + (1 - t)(-id)$$

não é admissível, isto é, existem  $t_0 \in (0, 1)$  e  $x_0 \in \mathbb{S}^{2n} = \partial B_1(0)$  que anula uma dessas homotopias. Quer dizer,

$$f(x_0) = \frac{\pm(1 - t_0)}{t_0} x_0,$$

em que o sinal é tomado de acordo com a homotopia que não é admissível.

Isso prova a primeira afirmação: existe  $x \in \mathbb{S}^{2n}$  tal que  $f(x) = \lambda x$ .

Se  $f: \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathbb{S}^{2n}$ , claramente  $|\lambda| = 1$ , de forma que  $f(x) = \pm x$ , mostrando a última afirmação.  $\square$

Observe que, na demonstração anterior, precisamos de dimensão par para garantir que  $id$  e  $-id$  estão em componentes conexas distintas!

**Corolário 2.1.4** *Existe um campo vetorial contínuo, não-nulo e tangente a  $\mathbb{S}^{n-1}$  se, e somente se,  $n$  for par.*

**Demonstração:** Suponhamos que  $n$  seja par. Defina  $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  por

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_n, x_{n-1}).$$

Claramente  $f(x) \perp x$ , de forma que  $f(x)$  é tangente a  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $n$  não seja par. Então  $n - 1 = 2k$  e, de acordo com o Teorema 2.1.3,  $f : \mathbb{S}^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$  tem um autovetor. Logo esse campo não pode ser tangente!  $\square$

**Teorema 2.1.5** *Sejam  $D \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação contínua. Suponhamos a existência de  $x_0 \in D$  tal que, para todo  $x \in \partial D$ ,  $\langle f(x), x - x_0 \rangle \geq 0$ . Então existe  $x \in \bar{D}$  tal que  $f(x) = 0$ .*

**Demonstração:** Por definição,  $\deg(x - x_0, D, 0) = 1$ . Basta então mostrar que  $f$  é homotópica em  $D_0(D)$  a  $(x - x_0)$ . Suponhamos que existam  $t \in (0, 1)$  e  $x \in \partial D$  tais que

$$tf(x) + (1 - t)(x - x_0) = 0.$$

Então  $f(x) = -\frac{(1-t)(x-x_0)}{t}$ , o que contraria  $\langle f(x), x - x_0 \rangle \geq 0$ . Se fosse  $t = 1$ , teríamos  $f(x) = 0$ , e  $x$  é o ponto cuja existência foi afirmada. Note que não podemos ter  $t = 0$ , pois então  $x - x_0 = 0$ , o que implica  $x_0 \in \partial D$ , que é contrário a nossa hipótese.  $\square$

**Observação 2.1.6** Trocando, na demonstração,  $f$  por  $-f$ , podemos substituir a condição

$$\langle f(x), x - x_0 \rangle \geq 0$$

por  $\langle f(x), x - x_0 \rangle \leq 0$ .  $\triangleleft$

**Teorema 2.1.7** *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua tal que*

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|} = +\infty.$$

*Então  $f$  é sobrejetora.*

**Demonstração:** Dado  $y \in \mathbb{R}^n$ , vamos mostrar que existe  $B_r(0)$ , com  $y$  em seu interior, tal que

$$\deg(f - y, B_r(0), 0) = \deg(id - y, B_r(0), 0).$$

Como  $\deg(id - y, B_r(0), 0) = 1$ , existe  $x \in B_r(0)$  tal que  $f(x) - y = 0$ , ou seja,  $f(x) = y$ , mostrando que  $f$  é sobrejetora.

Tomamos  $r$  tal que  $r > |y|$ , o que torna  $y$  interior a  $B_r(0)$ . Afirmamos que a homotopia  $h_t(x) = t(f(x) - y) + (1-t)(x - y) = tf(x) + (1-t)x - y$  é admissível. De fato, para todo  $x$  com  $|x| = r$  e  $t \in [0, 1]$  temos que

$$\langle h(t), x \rangle = r \left[ t \frac{\langle f(x), x \rangle}{|x|} + (1-t)r - \frac{\langle y, x \rangle}{r} \right] > r \left[ t \frac{\langle f(x), x \rangle}{|x|} + (1-t)r - |y| \right].$$

Se  $t > 0$ , a hipótese garante que  $h_t(x) > 0$  desde que  $r = |x|$  seja suficientemente grande. Se  $t = 0$ , a escolha  $r > |y|$  garante que  $h_t(x) > 0$ . Isso mostra que  $h_t(x)$  é admissível e completa a demonstração.  $\square$

**Teorema 2.1.8 (Fundamental da álgebra)** *Um polinômio de grau  $n$  possui exatamente  $n$  raízes.*

**Demonstração:** Escreva o polinômio  $p(z)$  de grau  $n$  na forma  $z^n + p_{n-1}(z)$ , em que  $p_{n-1}(z)$  é um polinômio de grau  $n-1$ . Afirmamos que, para  $R$  suficientemente grande, todas as raízes de  $p$  estão contidas em  $B_R(0)$ . De fato, para  $R$  suficientemente grande, temos  $R^n = |z|^n \geq |p_{n-1}(z)|$  e portanto  $0 < |z^n| - |p_{n-1}(z)| \leq |p(z)|$ . Defina então

$$h_t(z) = z^n + tp_{n-1}(z).$$

Note que, para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $|R|^n > t|p_{n-1}(R)|$ . Isso mostra que  $h_t$  não tem zeros em  $\partial B_R(0)$ . Então<sup>1</sup>

$$\deg(z^n + p_{n-1}(z), B_R(0), 0) = \deg(z^n, B_R(0), 0).$$

Podemos supor que  $R > 1$ . Isso quer dizer que a homotopia  $g_t(z) = z^n + t(1)$  é admissível e, portanto,

$$\deg(z^n, B_R(0), 0) = \deg(z^n + 1, B_R(0), 0).$$

Podemos calcular explicitamente as  $n$  raízes do polinômio  $z^n + 1$  e verificar que elas não são pontos críticos. Interpretando  $f(z) = z^n + 1$  como uma função de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (u, v)$ , analisemos  $Df$ :

$$Df = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix},$$

devido às equações de Cauchy-Riemann. Decorre da última expressão que  $\det Df = u_x^2 + u_y^2 > 0$ . Quer dizer, na fórmula (??) todas as raízes são contadas com o sinal positivo. (Isso mostra que, para funções analíticas, a função  $\deg$  realmente conta os zeros!)

Temos, portanto,  $\deg(p(z), B_R, 0) = \deg(z^n + 1, B_R, 0) = n$ . Isso prova que  $p(z)$  tem, no mínimo,  $n$  raízes. Como é fácil verificar que um polinômio de grau  $n$  possui no máximo  $n$  raízes, o resultado está provado.  $\square$

<sup>1</sup>Estamos usando as propriedades de grau como se ele fosse definido em  $\mathbb{C}$ . Deveríamos, para ser rigorosos, considerar as partes real e imaginária de  $z^n + tp_{n-1}(z)$ !

## 2.2 Exercícios

O conjunto  $D$  denotará um aberto limitado do espaço considerado.

**Definição 2.2.1** *Sejam  $X, Y$  espaços normados. Uma aplicação  $f: A \subset X \rightarrow B \subset Y$  é própria, se a imagem inversa  $f^{-1}(K)$  de todo compacto  $K \subset B$  for um conjunto compacto.*

1. Considere uma aplicação  $f: A \subset X \rightarrow B \subset Y$ , com  $X, Y$  espaços normados. Verifique que: se  $A$  for compacto e  $f$  contínua, então  $f$  é própria; se  $B$  for compacto,  $f$  é própria se, e somente se,  $A$  for compacto; todo homeomorfismo  $f$  é uma aplicação própria.
2. Mostre que toda aplicação própria  $f: A \subset X \rightarrow B \subset Y$  é fechada, isto é,  $f(F) \subset Y$  é fechado para todo fechado  $F \subset A$ .
3. Mostre que uma aplicação contínua  $f: A \subset X \rightarrow B \subset Y$  é própria se, e somente se,  $\|f(x_k)\| \rightarrow \infty$  sempre que  $\|x_k\| \rightarrow \infty$ .
4. Sejam  $X$  um espaço normado e

$$C = \{f: \bar{D} \subset X \rightarrow X : f \text{ é contínua, } 0 \notin \overline{f(\partial D)}\}.$$

Mostre que  $C$  é aberto com a norma do sup.

5.

## Capítulo 3

# O grau de Leray-Schauder

Neste Capítulo nosso propósito é estender o grau de Brouwer a espaços de dimensão infinita. Começamos mostrando, indiretamente, que devemos restringir a classe de aplicações para a qual o grau está definido.<sup>1</sup>

Suponhamos que seja possível definir o grau em espaços de dimensão infinita, satisfazendo as propriedades básicas do grau, dadas pelo Teorema 1.3.1. Então seria válido o resultado dado pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer 2.1.1, que é uma consequência daquelas propriedades. Contudo, temos o seguinte exemplo:

**Exemplo 3.0.2** Considere o espaço de Hilbert  $\ell^2$ , formado por todas as seqüências  $x = (x_n)$  tais que  $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ . Consideremos a aplicação  $T: \overline{B}_1(0) \rightarrow \ell^2$  dada por  $Tx = (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, \dots, x_n, \dots)$ . Temos que  $T(\overline{B}_1(0)) \subset \partial B_1(0)$ , pois  $\|Tx\|^2 = (1 - \|x\|^2) + \|x\|^2 = 1$ . Dessa forma,  $T$  deveria satisfazer o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer 2.1.1. Contudo,  $T$  não possui ponto fixo: se fosse  $Tx = x$  com  $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ , então deveríamos ter  $\|x\| = 1$ , já que  $T(\overline{B}_1(0)) \subset \partial B_1(0)$ . Mas então  $Tx = (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ , o que mostra que  $x = 0$ , absurdo.  $\triangleleft$

A obtenção de conjuntos de aplicações nos quais pode ser definida a noção de grau (análogo ao grau de Brouwer) é um problema difícil. Mostraremos que podemos definir o grau para aplicações da forma  $\Psi = id - f$ , em que  $f: D \subset X \rightarrow X$  é uma aplicação compacta.

### 3.1 O grau de Brouwer em subespaços

Suponhamos que  $D \subset \mathbb{R}^n$  seja um aberto limitado e consideremos, para  $m < n$ , o espaço  $\mathbb{R}^m$ . Identificamos esse espaço com o subespaço do  $\mathbb{R}^n$  formado pelos pontos cujas últimas  $n - m$  coordenadas são todas nulas. Da mesma forma, dada uma aplicação  $f: \overline{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , identificaremos essa aplicação com uma aplicação  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  atribuindo a  $f$  um total de  $n - m$  funções coordenadas nulas.

---

<sup>1</sup>Faremos isso empregando um exemplo devido a Kakutani; contudo, um exemplo de Leray, dado em 1936, mostra diretamente que o grau não pode ser definido para aplicações contínuas em espaços de dimensão infinita. Veja [14].

**Lema 3.1.1** Se  $f: \bar{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  for contínua e  $id - f = \Psi: \bar{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  então, para todo  $p \in \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $p \notin \Psi(\partial D)$  vale

$$\deg(\Psi, D, p) = \deg(\Psi|_{\mathbb{R}^m \cap D}, \mathbb{R}^m \cap D, p).$$

**Demonstração:** Denotando  $\psi = \Psi|_{\mathbb{R}^m \cap D}$ , começamos mostrando que  $\psi^{-1}(p) = \Psi^{-1}(p)$ . Claramente  $\psi^{-1}(p) \subset \Psi^{-1}(p)$ . Se  $x \in \Psi^{-1}(p)$ , então  $p = \Psi(x) = x + f(x)$ , o que implica que  $x = p - f(x) \in \mathbb{R}^m$ . Portanto,  $x \in \bar{D} \cap \mathbb{R}^m$  e, como  $p \notin \Psi(\partial D)$ , temos  $x \in D \subset \mathbb{R}^m$  e  $p = \psi(x)$ .

Podemos supor que  $f \in C^\infty$  e que  $p$  seja valor regular de  $\Psi$  (e, portanto, de  $\psi$ ). Como  $\Psi(x) = p$  se, e somente se,  $x = (x_1, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ , decompondo  $x = (x_1, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$

$$\det D\Psi(x) = \begin{pmatrix} id - D_1 f(x_1, 0) & -D_2 f(x_1, 0) \\ 0 & id_{\mathbb{R}^{n-m}} \end{pmatrix} = \det D\psi(x),$$

completando a demonstração. □

## 3.2 O grau de Leray-Schauder

**Definição 3.2.1** Sejam  $X, Y$  espaços normados e  $M \subset X$ . Uma aplicação  $f: D \rightarrow Y$  é *compacta*,<sup>2</sup> se

- (i)  $f$  for contínua;
- (ii)  $\overline{f(A)}$  for compacto, para todo subconjunto limitado  $A \subset D$ .

**Definição 3.2.2** Seja  $M$  um subconjunto do espaço normado  $X$ . Dizemos que  $M$  tem *dimensão finita*, se existir um subespaço de dimensão finita que contém  $M$ .

**Teorema 3.2.3** Sejam  $X, Y$  espaços normados e  $D \subset X$  um subconjunto limitado. Seja  $f: D \rightarrow Y$  uma aplicação compacta. Então, para todo  $\epsilon > 0$ , existe uma aplicação  $f_\epsilon: D \rightarrow Y$  tal que  $f_\epsilon(D)$  tem dimensão finita e  $\|f_\epsilon(x) - f(x)\| < \epsilon$ .

**Demonstração:** Uma vez que  $D$  é limitado,  $\overline{f(D)}$  é um conjunto compacto. Fixado  $\epsilon > 0$ , uma vez que  $\overline{f(D)} \subset \bigcup_{p \in \overline{f(D)}} B_\epsilon(p)$ , existem pontos  $p_1, \dots, p_k \in \overline{f(D)}$  tais que

$$\overline{f(D)} \subset \bigcup_{i=1}^k B_\epsilon(p_i).$$

---

<sup>2</sup>Autores europeus denominam tal aplicação de *completamente contínua*. Se  $\overline{f(D)}$  for compacto em  $Y$ , esses autores chamam  $f$  de *compacta*. Se  $D$  for limitado, as denominações coincidem.

Definimos, para  $x \in D$ ,  $m_i(x, \epsilon) = \max\{0, \epsilon - \|f(x) - p_i\|\}$ . Claramente  $m_i(\cdot, \epsilon)$  é contínua e  $m_i(x, \epsilon) > 0$  garante que  $f(x) \in B_\epsilon(p_i)$ . Isso implica que, para todo  $x \in D$ ,

$$\theta_i(x, \epsilon) = \frac{m_i(x, \epsilon)}{\sum_{j=1}^k m_j(x, \epsilon)}$$

é uma função contínua e bem-definida. De fato, existe pelo menos uma bola  $B_\epsilon(p_i)$  tal que  $x \in B_\epsilon(p_i)$ , de modo que  $\sum_{j=1}^k m_j(x, \epsilon) > 0$ .

Definimos então

$$f_\epsilon(x) = \sum_{j=1}^k \theta_j(x, \epsilon) p_j.$$

Uma vez que  $\sum_{j=1}^k \theta_j(x, \epsilon) = 1$ , temos

$$\begin{aligned} \|f(x) - f_\epsilon(x)\| &= \left\| \sum_{j=1}^k \theta_j(x, \epsilon) f(x) - \sum_{j=1}^k \theta_j(x, \epsilon) p_j \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^k \theta_j(x, \epsilon) \|f(x) - p_j\| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Claramente  $f_\epsilon(D) \subset \langle p_1, \dots, p_k \rangle$ , o espaço gerado pelos pontos  $p_1, \dots, p_k$ .  $\square$

**Definição 3.2.4** *Sejam  $X, Y$  espaços normados. Uma aplicação  $\Psi: A \subset X \rightarrow Y$  é **própria** se, para todo conjunto compacto  $K \subset Y$ , temos  $\Psi^{-1}(K)$  compacto.<sup>3</sup>*

**Lema 3.2.5** *Sejam  $X$  um espaço normado e  $F \subset X$  um conjunto fechado e limitado. Se  $f: F \subset X \rightarrow X$  for compacta, então  $\Psi: F \rightarrow E$  dada por  $\Psi = \text{id} - f$  (chamada perturbação compacta da identidade) é própria. Em particular,  $\Psi$  leva conjuntos fechados em conjuntos fechados.*

**Demonstração:** Seja  $K \subset X$  um conjunto compacto. Queremos mostrar que  $V = \Psi^{-1}(K)$  é compacto. Seja  $(x_n)$  uma seqüência em  $V$ . Como  $\Psi(x_n)$  é uma seqüência em  $K$ , podemos supor que  $\Psi(x_n)$  seja convergente, isto é,  $\Psi(x_n) = x_n - f(x_n) \rightarrow y$ . Como  $V \subset F$  é limitado, a seqüência  $(x_n)$  possui uma subseqüência  $(x_{n_j})$  tal que  $f(x_{n_j}) \rightarrow z$ . Assim,  $x_{n_j} = \Psi(x_{n_j}) + f(x_{n_j}) \rightarrow y + z$ , mostrando que  $V$  é compacto.

Seja  $\Psi(x_n)$  uma seqüência tal que  $\Psi(x_n) \rightarrow z$ , com  $x_n \in F$ . Queremos mostrar que existe  $x_0 \in F$  tal que  $\Psi(x_0) = z$ . Uma vez que  $K := \{\Psi(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{z\}$  é compacto e  $\Psi$  é própria,  $\Psi^{-1}(K)$  é compacto. Como  $(x_n) \subset \Psi^{-1}(K)$ ,  $(x_n)$  possui subseqüência  $(x_{n_j})$  tal que  $x_{n_j} \rightarrow x_0 \in \Psi^{-1}(K)$ . Como  $(x_{n_j}) \subset F$ , temos que  $x_0 \in F$ . Como  $f$  é contínua,

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n_j \rightarrow \infty} f(x_{n_j}) = f\left(\lim_{n_j \rightarrow \infty} x_{n_j}\right) = f(x_0),$$

<sup>3</sup>Como estamos lidando com espaços métricos, as noções de conjuntos compactos (por cobertura) e seqüencialmente compacto são equivalentes.

como queríamos provar.  $\square$

Na sequência, sejam  $X$  um espaço normado e  $D \subset X$  um conjunto aberto limitado. Seja  $f: \bar{D} \rightarrow X$  uma aplicação compacta e  $\Psi = id - f: D \rightarrow X$ . Suponhamos que  $p \notin \Psi(\partial D)$ . O Lema 3.2.5 garante que  $f(\partial D)$  é fechado, de modo que  $\text{dist}(p, f(\partial D)) =: r > 0$ . De acordo com o Teorema 3.2.3, existe uma aplicação  $f_\epsilon$ , de posto finito, tal que

$$\|f(x) - f_\epsilon(x)\| < \epsilon < r, \quad \forall x \in \bar{D}.$$

Suponhamos que  $f_\epsilon(\bar{D}) \subset V \ni p$ , em que  $V \subset X$  é um subespaço de dimensão finita. Denotamos  $D_\epsilon = D \cap V$  e  $\Psi_\epsilon = id - f_\epsilon$ .

**Lema 3.2.6** Para todo  $\epsilon < r = \text{dist}(p, f(\partial D))$ ,

$$\deg(\Psi_\epsilon, D_\epsilon, p)$$

está bem definido e independe de  $\epsilon$ .

**Demonstração:** Seja  $\partial D_\epsilon$  a fronteira de  $D_\epsilon$  em  $V$ . Uma vez que  $\partial D_\epsilon \subset \partial D$  e  $p \notin \Psi_\epsilon(\partial D_\epsilon)$  para  $0 < \epsilon < r$ ,  $\deg(\Psi_\epsilon, D_\epsilon, p)$  está bem definido.

Sejam  $\epsilon_1, \epsilon_2 \in (0, r)$ ,  $f_{\epsilon_1}$  e  $f_{\epsilon_2}$  as aproximações de posto finito de  $f$  associadas a  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ , respectivamente, dadas pelo Teorema 3.2.3. Sejam, respectivamente,  $V_{\epsilon_1}$  e  $V_{\epsilon_2}$  os subespaços de dimensão finita em que essas aplicações tomam valores. Definimos  $V = V_{\epsilon_1} + V_{\epsilon_2}$  e  $D_V = D \cap V$ . De acordo com o Lema 3.1.1, temos

$$\deg(\Psi_{\epsilon_1}, D_V, p) = \deg(\Psi_{\epsilon_1}, D_{\epsilon_1}, p)$$

e

$$\deg(\Psi_{\epsilon_2}, D_V, p) = \deg(\Psi_{\epsilon_2}, D_{\epsilon_2}, p).$$

Definindo

$$H(t, x) = t\Psi_{\epsilon_1}(x) + (1 - t)\Psi_{\epsilon_2}(x),$$

vemos que  $H$  é uma homotopia admissível ligando  $\Psi_{\epsilon_1}$  e  $\Psi_{\epsilon_2}$  e, para todo  $t \in [0, 1]$ , temos que  $p \notin H(\partial D, t)$ . Isso mostra que  $\deg(\Psi_{\epsilon_1}, D_V, p) = \deg(\Psi_{\epsilon_2}, D_V, p)$ , de modo que  $\deg(\Psi_{\epsilon_1}, D_{\epsilon_1}, p) = \deg(\Psi_{\epsilon_2}, D_{\epsilon_2}, p)$ , completando a prova do resultado.  $\square$

**Definição 3.2.7** Sejam  $X$  um espaço normado e  $D \subset X$  um aberto limitado. Para toda aplicação compacta  $f: \bar{D} \rightarrow X$ , definimos o grau da perturbação compacta da identidade  $\Psi = id - f: \bar{D} \rightarrow X$  com respeito ao ponto  $p \notin \Psi(\partial D)$  por

$$\deg(\Psi, D, p) = \deg(\Psi_\epsilon, D_\epsilon, p),$$

em que  $\Psi_\epsilon$  é uma aproximação de posto finito de  $\Psi$  tomando valores no subespaço  $V \subset X$  de dimensão finita que contém  $p$ ,  $D_\epsilon = D \cap V$  e  $0 < \epsilon < r = \text{dist}(p, \Psi(\partial D))$ .

**Observação 3.2.8** Notamos que apenas necessitamos que  $D \cap V$  seja um aberto limitado para todo subespaço  $V$  de dimensão finita. Assim, podemos estender a definição do grau de uma perturbação compacta da identidade a abertos não-limitados, desde que  $D \cap V$  seja limitado, se  $V \subset X$  tiver dimensão finita.  $\triangleleft$

# Apêndice A

## Resultados básicos

### A.1 O teorema de Tietze

**Teorema A.1.1 (Tietze)** *Sejam  $X$  um espaço métrico,  $A \subset X$  um conjunto fechado e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e limitada. Então existe uma extensão contínua  $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$  de  $f$  tal que*

$$\sup_{y \in A} f = \sup_{x \in X} \tilde{f} \quad \inf_{y \in A} f = \inf_{x \in X} \tilde{f}.$$

**Demonstração:** Se  $f$  for constante, o resultado é trivial. Suponhamos inicialmente que  $\inf_{y \in A} f = 1$  e  $\sup_{y \in A} f = 2$ . Definimos então  $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$  da seguinte maneira:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ \frac{\inf_{y \in A} \{f(y)d(x, y)\}}{d(x, A)} & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Note que, se  $x \notin A$ , claramente temos que  $1 \leq \tilde{f} \leq 2$ . Vamos mostrar que  $\tilde{f}$  é contínua. No conjunto aberto  $X \setminus A$  podemos escrever

$$\tilde{f} = \frac{g(x)}{d(x, A)},$$

em que  $g(x) = \inf_{y \in A} \{f(y)d(x, y)\}$ . Como  $d(x, A)$  define uma função contínua que não se anula<sup>1</sup>, para mostrarmos que  $\tilde{f}$  é contínua em  $X \setminus A$  basta provarmos que  $g$  é contínua em cada ponto  $x \in X \setminus A$ . Seja, portanto,  $r := d(x, A) > 0$ . Se  $d(x, x') \leq \epsilon < r$ , temos  $d(x, y) \leq d(x', y) + \epsilon$  e portanto

$$g(x) = \inf_{y \in A} \{f(y)d(x, y)\} \leq \inf_{y \in A} \{f(y)[d(x', y) + \epsilon]\} \leq \inf_{y \in A} \{f(y)d(x', y)\} + 2\epsilon = g(x') + 2\epsilon,$$

---

<sup>1</sup>De fato,

$$d(x, A) = \inf_{z \in A} \{d(x, z)\} \leq \inf_{z \in A} \{d(x, y) + d(y, z)\} = d(x, y) + \inf_{z \in A} \{d(y, z)\} = d(x, y) + d(y, A).$$

Por simetria,  $d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A)$ . Isto mostra que  $d(\cdot, A)$  é uniformemente contínua. Como  $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in A$  (pois  $A$  é fechado), o resultado está mostrado.

uma vez que  $f(y) \leq 2$ . Por simetria,  $g(x') \leq g(x) + 2\epsilon$ , o que mostra a continuidade de  $\tilde{f}$  em  $X \setminus A$ .

Resta provar a continuidade de  $\tilde{f}$  nos pontos de  $\partial A$ . Seja portanto  $x \in \partial A$  e  $r > 0$  tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \epsilon \quad \forall y \in A \cap B_r(x) =: C.$$

Definindo  $D := A \setminus C$ , temos, se  $x' \in X \setminus A$  e  $d(x', x) \leq r/4$  que, para todo  $y \in D$  vale  $d(x', y) \geq d(x, y) - d(x, x') \geq 3r/4$ . Portanto,

$$\inf_{y \in D} \{f(y)d(x', y)\} \geq \inf_{y \in A} f(y) \cdot \frac{3r}{4} \geq \frac{3r}{4}.$$

Por outro lado,  $f(x)d(x, x') \leq \sup_{y \in A} f(y)d(x, x') \leq r/2$  e portanto

$$\inf_{y \in A} \{f(y)d(x', y)\} = \inf_{y \in C} \{f(y)d(x', y)\}.$$

Uma vez que  $\inf_{y \in C} d(x', y) = d(x, A)$  e  $f(x) - \epsilon \leq f(y) \leq f(x) + \epsilon$  para todo  $y \in C$ , temos, para todo  $y \in C$ ,

$$(f(x) - \epsilon) \inf_{y \in C} d(x', y) \leq f(y) \inf_{y \in C} d(x', y) \leq (f(x) + \epsilon) \inf_{x \in C} d(x', y).$$

Mas, da primeira desigualdade decorre

$$(f(x) - \epsilon) \inf_{y \in C} d(x', y) \leq \inf_{y \in C} f(y) \inf_{y \in C} d(x', y) \leq \inf_{y \in C} \{f(y)d(x', y)\},$$

enquanto  $\inf_{y \in C} \{f(y)d(x', y)\} \leq f(y) \inf_{y \in C} d(x', y)$ , donde concluimos que

$$(f(x) - \epsilon)d(x', A) \leq \inf_{y \in C} \{f(y)d(x', y)\} = \inf_{y \in A} \{f(y)d(x', y)\} \leq (f(x) + \epsilon)d(x', A).$$

Dividindo esta desigualdade por  $d(x', A)$ , obtemos que  $|\tilde{f}(x') - f(x)| \leq \epsilon$  para todo  $x' \in X \setminus A$  tal que  $d(x, x') \leq r/4$ . Por outro lado, quando  $x' \in A$  e  $d(x, x') \leq r/4$ , então  $|\tilde{f}(x') - f(x)| = |f(x') - f(x)| \leq \epsilon$ , completando a demonstração.  $\square$

**Corolário A.1.2** *Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos fechados e não vazios no espaço métrico  $X$ . Se  $A \cap B = \emptyset$ , então existe uma função contínua  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f(x) = 1$  em  $A$  e  $f(x) = 0$  em  $B$ .*

**Demonstração:** Defina a aplicação contínua  $g : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$  por  $g(x) = 1$  se  $x \in A$  e  $g(y) = 0$  se  $y \in B$  e aplique o Teorema de Tietze.  $\square$

## A.2 Seqüências de Dirac e convolução

Definimos  $\phi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\phi_1(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{-1}{1-\|x\|^2}\right), & \text{se } \|x\| < 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que  $c > 0$  é tal que  $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_1(x) dx = 1$ . De acordo com o exemplo ??, temos que  $\phi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Definimos então  $\phi_k(x) = k^{-n} \phi_1(x/k)$ . Claramente vale

$$\phi_k(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k(x) dx = 1 \quad \text{e} \quad \text{supp } \phi_k \subset B_{1/k}(0).$$

A seqüência  $\phi_k$  é chamada seqüência de Dirac padrão.

Dada uma função localmente integrável  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos a suavização de  $f$  por  $f_k = \phi_k * f$ , isto é,

$$f_k(x) = \int_U f(\xi) \phi_k(x - \xi) d\xi = \int_{B_{1/k}(0)} \phi_k(\xi) f(x - \xi) d\xi$$

para todo  $x \in U_{1/k} := \{x \in U : \text{dist}(x, \partial U) > 1/k\}$ .

### Teorema A.2.1 (Propriedades da suavização)

- (i)  $f_k \in C^\infty(U_{1/k})$ ;
- (ii) Se  $f \in C(U)$ , então  $f_k \rightarrow f$  uniformemente em compactos de  $U$ .

**Demonstração:** (i) Fixe  $x \in U_{1/k}$  e  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Escolha  $t \in \mathbb{R}$  tão pequeno que  $x + te_i \in U_{1/k}$ . Então vale

$$\begin{aligned} \frac{f_k(x + te_i) - f_k(x)}{t} &= k^{-n} \int_U \frac{1}{t} \left[ \phi\left(\frac{x + te_i - \xi}{k}\right) - \phi\left(\frac{x - \xi}{t}\right) \right] f(\xi) d\xi \\ &= k^{-n} \int_V \frac{1}{t} \left[ \phi\left(\frac{x + te_i - \xi}{k}\right) - \phi\left(\frac{x - \xi}{t}\right) \right] f(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

para algum aberto  $V \subset\subset U$ . De acordo com o Corolário ??,

$$\frac{1}{t} \left[ \phi\left(\frac{x + te_i - \xi}{k}\right) - \phi\left(\frac{x - \xi}{t}\right) \right] \rightarrow \frac{1}{k} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \left( \frac{x - \xi}{k} \right) \quad \text{uniformemente em } V.$$

Isso mostra que  $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x)$  existe e é igual a

$$\int_U \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}(x - \xi) f(\xi) d\xi.$$

Procedendo analogamente, mostramos que  $D^\alpha f_k(x)$  existe e

$$D^\alpha f_k(x) = \int_U D^\alpha \phi_k(x - \xi) f(\xi) d\xi$$

para qualquer multi-índice  $\alpha$ .

(ii) Dado  $\epsilon > 0$ , escolha um aberto  $V \subset\subset U$ . Tome  $x \in V$  arbitrário. Temos

$$\|f_k(x) - f(x)\| = \left\| \int_U \phi_k(x - \xi) [f(\xi) - f(x)] d\xi \right\|$$

Temos que  $\int_U \phi_k(x - \xi) d\xi = 1$ . Uma vez que  $f$  é uniformemente contínua no compacto  $\bar{V}$ , tomando  $k_0$  suficientemente grande, temos

$$\|f(x) - f(\xi)\| < \epsilon, \quad \text{se } \|x - \xi\| \leq 1/k_0,$$

para qualquer  $x \in \bar{V}$ . Portanto, para  $k \geq k_0$

$$\|f_k(x) - f(x)\| \leq \epsilon.$$

□

### A.3 Conjuntos de medida nula

Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  tem **medida nula** se, para todo  $\epsilon > 0$  dado, for possível obter uma coleção enumerável de cubos abertos  $C_i$  tais que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(C_i) < \epsilon.$$

**Lema A.3.1** *As seguintes afirmações são válidas:*

- (i) *todo subconjunto de um conjunto de medida nula tem medida nula;*
- (ii) *Qualquer reunião enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula;*
- (iii) *Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  tem medida nula e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  é localmente Lipschitziana, então  $f(A)$  tem medida nula no  $\mathbb{R}^n$ ;*
- (iv) *Se  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação  $C^1$  definida no aberto  $U$  e  $A \subset U$  é um conjunto de medida nula no  $\mathbb{R}^n$ , então  $f(A)$  tem medida nula;*
- (v) *Se  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma aplicação  $C^1$  definida no aberto  $U$  e se  $m > n$ , então  $f(U)$  tem medida nula no  $\mathbb{R}^m$ .*

**Demonstração:** (i) é evidente. Suponhamos que cada conjunto  $A_i$  tenha medida nula no  $\mathbb{R}^n$ . Então existem cubos  $C_{ij}$  tais que

$$A_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_{ij} \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(C_{ij}) < \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Assim,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} C_{ij} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(C_{ij}) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} < \epsilon,$$

provando (ii). Para mostrarmos (iii), suponhamos inicialmente que  $f$  seja Lipschitziana. Então existe  $L$  tal que  $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$  para quaisquer  $x, y \in A$ . Como  $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$  em que  $C_i$  é um cubo de aresta  $a_i$  e  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^n < \epsilon/L^n$ , temos que para  $x, y \in C_i$  vale

$$\|x - y\| < a_i \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(y)\| < La_i.$$

Segue-se que cada uma das  $n$  projeções de  $f(A \cap C_i)$  sobre os eixos coordenados está contida num intervalo de comprimento  $La_i$ . Portanto,  $f(A \cap C_i)$  está contida no produto cartesiano desses intervalos, que é um cubo  $D_i$  com  $\text{vol}(D_i) = L^n a_i^n$ . Consequentemente,

$$f(A) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} f(A \cap C_i) \subset D_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(D_i) = L^n \sum_{i=1}^{\infty} a_i^n < \epsilon.$$

Isso mostra que  $f(A)$  tem medida nula.

No caso geral, temos  $A \subset \bigcup V_x$ , em que cada  $V_x$  é aberto e a restrição  $f|_{V_x \cap A}$  é Lipschitziana. Pelo Teorema de Lindelöf, existe uma subcobertura enumerável

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i.$$

Pelo que mostramos antes,  $f(V_i \cap A)$  tem medida nula. Logo  $f(A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(V_i \cap A)$  é reunião enumerável de conjuntos de medida nula, mostrando que  $f(A)$  tem medida nula.

Uma vez que toda aplicação  $C^1$  é localmente Lipschitziana, (iv) decorre de (iii).

Fixado  $\delta > 0$ , pelo Teorema de Lindelöf  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$  é a reunião enumerável de cubos  $C_i$  com  $\text{vol}(C_i) = \delta$ . Seja dado  $\epsilon > 0$ . Considere então o bloco (paralelepípedo)  $P_i$  no  $\mathbb{R}^m$  tendo como seção esse cubo  $C_i$  e altura  $\epsilon/(2^i \delta)$ . Claramente (veja exercício 2)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(P_i) = \delta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i \delta} = \epsilon,$$

mostrando (v). □

## A.4 O lema de Sard

Denotamos por  $S_f(U)$  o conjunto dos **pontos críticos** de  $f$ , isto é,

$$S_f(U) = \{x \in U : J_f(x) = 0\},$$

em que  $J_f(x) = \det f'(x)$  é o determinante jacobiano.

**Lema A.4.1 (Lema de Sard)** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação  $C^1$ . Então  $f(S_f(U))$  tem medida nula no  $\mathbb{R}^n$ .*

**Demonstração:** Como consequência do Teorema de Lindelöf,  $U$  é uma reunião enumerável de cubos fechados. Basta, portanto, provarmos que  $C$  é um cubo fechado contido em  $U$ , então  $f(S_f(C)) = 0$ .

Subdividimos cada uma das arestas do cubo  $C$  em  $k$  partes iguais e obtemos assim uma partição do cubo  $C$  em  $k^n$  pequenos cubos  $C_i$ , de mesma aresta  $\delta$  e volume  $\delta^n$ . Se  $x, y \in C_i$ , temos  $\|x - y\| \leq n\delta$ .

Para cada cubo  $C_i$  tal que  $S_f(C) \cap C_i \neq \emptyset$ , escolhemos um ponto  $x_i \in S_f(C) \cap C_i$ . A imagem da aplicação linear  $f'(x_i) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  está contida num subespaço vetorial  $E_i$ , de dimensão menor ou igual a  $n - 1$  (se a dimensão da imagem fosse  $n$ ,  $f'(x_i)$  seria um isomorfismo, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem).

Para cada  $x \in C_i$  podemos escrever

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i) \cdot (x - x_i) + r_i(x).$$

Note que a aplicação  $x \mapsto f(x_i) + f'(x_i) \cdot (x - x_i)$  toma valores no espaço afim  $L_i := x_i + E_i$ , de dimensão menor ou igual a  $n - 1$ .

Como  $f$  é diferenciável, dado arbitrariamente  $\epsilon > 0$ , podemos tomar o inteiro  $k$  (o número de subdivisões de cada aresta do cubo original  $C$ ) tão grande que, para cada cubo  $C_i$  contendo pontos de  $S_f(C)$  e todo  $x \in C_i$  valha

$$\|r_i(x)\| \leq \epsilon \|x - x_i\| \leq n\delta\epsilon.$$

Seja  $M := \sup_{x \in C} \|f'(x)\|$  (aqui estamos usando que  $f \in C^1$ ). Então

$$\|f'(x_i) \cdot (x - x_i)\| \leq M\|x - x_i\| < Mn\delta.$$

Isso mostra que, para todo ponto  $x \in C_i$ , o ponto  $f(x_i) + f'(x_i) \cdot (x - x_i)$  pertence a um cubo de centro  $x_i$  e aresta  $2Mn\delta$  contido em  $L_i$ . Consideremos então o paralelepípedo  $P_i \subset \mathbb{R}^n$  que tem esse cubo  $(n - 1)$ -dimensional como base e altura  $2n\delta\epsilon$  (contendo, portanto, o cubo  $C_i$ ), temos que  $\text{vol}(P_i) = (2Mn\delta)^{n-1} 2n\delta\epsilon = (2^n n^n \delta^n M^{n-1})\epsilon$ , que tem, portanto, pode ser feito arbitrariamente pequeno. Como a imagem de  $C$  está contida em no máximo  $k^n$  desses paralelepípedos (formados por cada cubo  $C_i$ ),  $f(S_f(C) \cap C)$  tem volume  $k^n (2^n n^n \delta^n M^{n-1})\epsilon$  e, portanto, medida nula, pois  $\epsilon$  é arbitrário.  $\square$

**Observação A.4.2** O Lema de Sard pode ser facilmente transposto para variedades de dimensão finita [20]. Possui também uma versão mais geral, válida para espaços de Sobolev. Veja [14].

## A.5 Partição da unidade

Seja  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha(t) = 0$ , se  $t \leq 0$ ,  $\alpha(t) = \exp(-1/t)$ , se  $t > 0$ . De acordo com o exemplo ??,  $\alpha \in C^\infty$ . Fazer gráficos de  $\alpha(t)$ ,  $\alpha(t + 2)$ ,  $\alpha(-1 - t)$

## A.6 Exercícios

1. Mostre que, na definição de conjunto de medida nula, podemos considerar cubos fechados ao invés de cubos abertos.
2. Mostre que, na definição de conjunto de medida nula, podemos considerar blocos fechados (isto é, paralelepípedos  $n$ - dimensionais) ao invés de cubos.
3. Mostre que se, para todo  $\epsilon > 0$ , existem cubos  $C_i$  tais que  $A \subset (\cup_{i=1}^{\infty} C_i) \cup Z$  com  $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(C_i) < \epsilon$  e se  $Z$  tem medida nula, então  $A$  tem medida nula.
4. Mostre que qualquer bloco (não-degenerado) no  $\mathbb{R}^n$  não tem medida nula.

# Referências Bibliográficas

- [1] N.I. Akhiezer e I.M. Glazman: Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces, Dover, New York, 1993.
- [2] H.W. Alt: Lineare Funktionalanalysis, 2. Auflage, Springer, Berlin, 1992.
- [3] H. Amann: Ordinary differential equations - an introduction to nonlinear analysis, Walter de Gruyter, Berlin, 1990.
- [4] H. Brezis: Analyse fonctionnelle - théorie et applications, Masson, Paris, 1983.
- [5] H.P. Bueno: Álgebra Linear, um segundo curso, SBM, Rio de Janeiro, 2006.
- [6] E.A. Coddington e N. Levinson: Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [7] L. Debnath e P. Mikusiński: Introduction to Hilbert spaces with applications, Academic Press, Boston, 1990.
- [8] K. Deimling: Nonlinear functional analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [9] J. Dugundji: Topology, Allyn Bacon, Boston, 1966.
- [10] D.G. de Figueiredo: *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, Lecture Notes in Mathematics 957 (1982), Springer-Verlag, Berlin, 34-87.
- [11] G. Helmberg: Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space, North-Holland, Amsterdam, 1969.
- [12] C.S. Hönic: Análise Funcional e o Problema de Sturm-Liouville, Ed. Edgard Blücher-Ed. da USP, São Paulo, 1978.
- [13] C.S. Hönic: Análise Funcional e Aplicações, IME-USP, São Paulo, 1970.
- [14] I. Fonseca e W. Gangbo: Degree Theory in Analysis and Applications, Oxford Science Publications, Oxford, 1995.
- [15] M. Golubitsky e V. Guillemin: Stable Mappings and Their Singularities, Springer-Verlag, New York, 1973.
- [16] L. Jantscher: Hilberträume, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1977.

- [17] S. Lang: Real and Functional Analysis, 3rd. Edition, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [18] P.D. Lax: Linear Algebra, Wiley-Interscience Publication, New York, 1997.
- [19] E.L. Lima: Análise no Espaço  $\mathbb{R}^n$ , Editora Universidade de Brasília/Editora Edgar Blücher Ltda, 1970.
- [20] E.L. Lima: Curso de Análise, volume I, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.
- [21] E.L. Lima: Espaços Métricos, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.
- [22] :M. Reed and B. Simon: Methods of Modern Mathematical Physics, v. 1, Academic Press, New York, 1972.
- [23] H. L. Royden: Real Analysis, 2nd. Edition, Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 1968.
- [24] W. Rudin: Real and Complex Analysis, 3rd. Edition, McGraw-Hill International Editions, New York, 1987.
- [25] W. Rudin: Functional Analysis, 2nd. Edition, McGraw-Hill, New York, 1991.
- [26] R. J. Santos: Álgebra Linear e Aplicações, Departamento de Matemática da UFMG, Belo Horizonte, 2004.
- [27] I. Stakgold: Green's Functions and Boundary Value Problems, Wiley, New York, 1979.
- [28] A.E. Taylor e Lay: Introduction to Functional Analysis xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
- [29] A. Wilansky: Functional Analysis, Blaisdell, New York, 1964.
- [30] R.L. Wheeden e A. Zygmund: Measure and Integral, Marcel Dekker, New York, 1977.

# Índice Remissivo

- conjunto
  - de medida nula, 25
- lema
  - de Sard, 4, 27
  - propriedades de conjuntos de medida nula, 25
- medida nula, 25
- ponto crítico, 26
- Sard, 4, 27
- seqüência de Dirac, 24
- suavização
  - de uma função, 24
- teorema
  - propriedades da suavização, 24