

(MAIS UMA) INTRODUÇÃO AOS ESPAÇOS DE SOBOLEV

*Não se hão de admitir mais causas
das coisas naturais do que as que
não sejam ao mesmo tempo verdadeiras
e suficientes para explicar seus fenômenos.
(...) Quando o menos basta, o mais é em vão.*

Isaac Newton

SUMÁRIO

1	ESPAÇOS DE HILBERT	1
1.1	PRELIMINARES	1
1.2	O ESPAÇO $L^2([a, b])$	6
1.3	CONVEXIDADE E PRODUTO INTERNO	7
1.3.1	Convexos e o Ponto de Menor Norma	8
1.3.2	O Teorema de Separação de Hahn-Banach	10
1.3.3	Projeção Ortogonal	11
1.4	O TEOREMA DE REPRESENTAÇÃO DE RIESZ	13
1.5	PRODUTO INTERNO E LINEARIDADE	16
1.6	EXERCÍCIOS	17
2	UM PROBLEMA NÃO LINEAR	20
2.1	O LAGRANGEANO	20
2.2	FUNÇÕES TESTE	25
2.3	UM ESPAÇO DE SOBOLEV: $W^{1,2}(0, 1)$	27
2.4	O SUBESPAÇO $W_0^{1,2}(0, 1)$	30
2.5	DE VOLTA AO LAGRANGEANO	32
2.6	PONTOS CRÍTICOS	35
2.7	EXERCÍCIOS	38
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	44

CAPÍTULO 1

ESPAÇOS DE HILBERT

1.1 PRELIMINARES

Para simplificar o enunciado de alguns resultados e tendo em vista o problema que estudaremos no próximo capítulo, neste texto trataremos apenas de espaços vetoriais reais.

Começamos, portanto, recordando a definição de um espaço vetorial:

Definição 1.1 *Um espaço vetorial X sobre o $\mathbb{R}$ é um conjunto cujos elementos (chamados **vetores**) podem ser somados e multiplicados por **escalares**, isto é, os elementos de $\mathbb{R}$. Se $x, y, z \in X$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades devem ser satisfeitas pela adição e multiplicação por escalar:*

- (i) $x + y \in X$ (fechamento);
- (ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associatividade);
- (iii) $x + y = y + x$ (comutatividade);
- (iv) existe $0 \in X$ tal que $x + 0 = x$ (elemento neutro);
- (v) existe $(-x) \in X$ tal que $x + (-x) = 0$ (inverso aditivo);
- (vi) $\lambda x \in X$ (fechamento);
- (vii) $\mu(\lambda x) = (\mu\lambda)x$ (associatividade);
- (viii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (distributividade);
- (ix) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (distributividade);
- (x) $1x = x$ (regra da unidade).

Denotaremos $x + (-y)$ simplesmente por $x - y$.

Definição 1.2 Sejam X um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\mathcal{B}$ um subconjunto de X . Um elemento $x \in X$ é **combinação linear** dos elementos de $\mathcal{B}$ se existir uma quantidade finita de vetores $x_1, \dots, x_r \in \mathcal{B}$ e escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, tais que

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r. \quad (1.1)$$

O conjunto de todas as combinações lineares de elementos de $\mathcal{B}$ é o **espaço gerado** por $\mathcal{B}$, denotado por $\langle \mathcal{B} \rangle$.

Dizemos que $\mathcal{B}$ **gera** o espaço X , se todo elemento $x \in X$ for combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$.

Se, ao tomarmos $x = 0$ na equação (1.1), só existir a solução $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ para quaisquer vetores $x_1, \dots, x_r \in \mathcal{B}$ e $r \in \mathbb{N}$, dizemos que $\mathcal{B}$ é **linearmente independente**.

Um conjunto $\mathcal{B}$ é uma **base** de X (ou base de Hamel), se ele for linearmente independente e gerar X .

O espaço vetorial X tem **dimensão finita**, se existir uma base $\mathcal{B}$ com um número finito de elementos. Caso contrário, ele tem **dimensão infinita**.

É fácil verificar que, qualquer que seja o conjunto $\mathcal{B} \neq \emptyset$, $\langle \mathcal{B} \rangle$ sempre é um espaço vetorial. Quando $\mathcal{B}$ gera o espaço X , o número $r \in \mathbb{N}$ de elementos $x_i \in \mathcal{B}$ utilizados numa combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$ pode variar. Se $\mathcal{B}$ for uma base, cada elemento $x \in X$ escreve-se de maneira única como combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$. (Veja o Exercício 1.) Salientamos que uma base $\mathcal{B}$ não precisa ser um conjunto enumerável.

Pode-se verificar que, no caso de um espaço vetorial de dimensão finita, todas as bases têm o mesmo número de elementos; esse número comum é chamado então de **dimensão** do espaço X .

Em princípio, os espaços que consideraremos neste texto são espaços de funções. Isso significa que quase todos os nossos exemplos serão espaços vetoriais de dimensão infinita. Nesses espaços, muitas vezes a estrutura algébrica é insuficiente para a obtenção de resultados fortes, sendo necessária a inserção de uma estrutura topológica. A estrutura que consideraremos é introduzida por um produto interno, cuja definição agora recordamos:

Definição 1.3 Seja X um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Um **produto interno** em X é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;
- (ii) $\langle u + \lambda v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \lambda \langle v, w \rangle$;
- (iii) $\langle u, u \rangle \geq 0$ e $\langle u, u \rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

Um espaço vetorial X com um produto interno será chamado **espaço com produto interno**.

Exemplo 1.4 Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, o espaço $\mathbb{R}^n$ é um espaço com produto interno definindo-se

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = (y_1 \ \dots \ y_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = y^t x = x^t y,$$

em que x^t denota a transposta de x . Em um curso de Álgebra Linear, são estudados diversos produtos internos em $\mathbb{R}^n$. $\triangleleft$

Exemplo 1.5 Consideremos o conjunto ℓ^2 , das seqüências em $\mathbb{R}$ de quadrado somável:

$$\ell^2 = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}.$$

Nesse espaço, definimos a soma de seqüências e a multiplicação de uma seqüência por um escalar por

$$x + y = (x_n + y_n) \quad \text{e} \quad \lambda x = (\lambda x_n).$$

Em ℓ^2 , definimos o produto interno $\langle x, y \rangle = \langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$. (A desigualdade $|x_n y_n| \leq (1/2)[|x_n|^2 + |y_n|^2]$ garante que a série é absolutamente convergente). A verificação que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno no espaço vetorial ℓ^2 é simples. $\triangleleft$

Exemplo 1.6 Consideremos o espaço vetorial das funções contínuas $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com a soma $f + g$ e a multiplicação por escalar λf definidas por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, respectivamente. Nesse espaço, definimos

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

É imediato verificar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno. Com esse produto interno, o espaço das funções contínuas $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ será denotado por $C_{L^2}([a, b], \mathbb{R})$. Veja mais na Seção 1.2. $\triangleleft$

Definição 1.7 Seja X um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Uma **norma** em X é uma função $\| \cdot \|: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfaz

- (i) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo $x \in X$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$;
- (ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para quaisquer $x, y \in X$ (desigualdade triangular);
- (iii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Um **espaço normado** é um espaço vetorial X considerado com uma norma $\| \cdot \|$. Para ressaltarmos a norma $\| \cdot \|$ utilizada no espaço X , algumas vezes empregaremos a notação $(X, \| \cdot \|)$.

Todo espaço com produto interno é, de maneira natural, um espaço normado. É o que mostraremos na seqüência.

Definição 1.8 Sejam u, v vetores do espaço com produto interno E . Dizemos que esses vetores são **ortogonais** (ou **perpendiculares**), se $\langle u, v \rangle = 0$. Nesse caso, escrevemos $u \perp v$.

Abusando da notação, denotaremos $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$.

Teorema 1.9 (Pitágoras)

Seja E um espaço com produto interno e $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$. Então, $u \perp v$ se, e somente se,

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Demonstração: Como

$$\langle u + v, u + v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2,$$

vemos que $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ se, e somente se, $u \perp v$. □

Se $u, v \in E$ forem dois vetores linearmente independentes (com $u \neq \lambda v$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$), então podemos escrever o vetor v como a soma de dois vetores: $v = \alpha u + w$, em que w é ortogonal a u . De fato, como devemos ter $w = v - \alpha u$, basta mostrar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\langle v - \alpha u, u \rangle = 0$. Essa equação pode ser resolvida facilmente:

$$\langle v - \alpha u, u \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} \in \mathbb{R}.$$

(Note que $\|u\| = 0$ implica $u = 0v$ e os vetores u e v são linearmente dependentes.)

O vetor $\alpha u = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u$ é a *projeção ortogonal* do vetor v sobre o vetor u .

Figura 1.1: O vetor $\text{proj}_v u = (\langle u, v \rangle / \|v\|^2)v$ é a projeção ortogonal do vetor u no vetor não-nulo v .

Proposição 1.10 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Seja E um espaço com produto interno. Então, denotando $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$, para todos $u, v \in E$ vale:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

A igualdade apenas ocorre quando $u = \lambda v$.

Demonstração: A prova que apresentaremos é bem geométrica.¹

Se $u = \lambda v$, então $|\langle u, v \rangle| = |\lambda| \langle v, v \rangle = |\lambda| \|v\|^2 = \|u\| \|v\|$. Se $u \neq \lambda v$, já vimos que $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $|\langle v - \alpha u, u \rangle| = 0$ para $\alpha = \langle v, u \rangle / \|u\|^2$. Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\|\alpha u\|^2 < \|v\|^2.$$

¹Outra demonstração é sugerida no Exercício 4.

Substituindo o valor de α , obtemos

$$\frac{|\langle v, u \rangle|^2}{\|u\|^4} \|u\|^2 < \|v\|^2,$$

e a desigualdade (estrita) de Cauchy-Schwarz segue-se imediatamente daí, pois $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$. $\square$

Agora mostramos que todo espaço com produto interno é um espaço normado:

Proposição 1.11 *Todo espaço com produto interno E tem uma norma definida por $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$. Dizemos que essa norma é gerada pelo produto interno.*

Demonstração: A primeira propriedade de norma decorre imediatamente da definição do produto interno. Além disso,

$$\|\lambda u\|^2 = \langle \lambda u, \lambda u \rangle = \lambda^2 \langle u, u \rangle = |\lambda|^2 \|u\|^2.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2|\langle u, v \rangle| + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned} \quad \square$$

Definição 1.12 *Sejam X um espaço normado e (x_n) uma sequência em X . Dizemos que a sequência (x_n) **converge** a $x \in X$, ou que x é o **limite** da sequência (x_n) , denotado por $x_n \rightarrow x$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $\|x_n - x\| < \epsilon$. Equivalentemente,*

$$x_n \rightarrow x \quad \Leftrightarrow \quad \|x_n - x\| \rightarrow 0.$$

Assim, a convergência em um espaço normado é o mesmo que a convergência da sequência numérica $(\|x_n - x\|)$.

Uma sequência (x_n) num espaço normado X é de **Cauchy** se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \|x_m - x_n\| < \epsilon.$$

É fácil verificar que toda sequência convergente é de Cauchy. Por outro lado, existem sequências de Cauchy em um espaço normado que não são convergentes. Se todas as sequências de Cauchy em um espaço normado X forem *convergentes*, dizemos que X é *completo*.

Algumas vezes, um espaço vetorial X é espaço normado com diferentes escolhas de normas (uma situação em que isso ocorre será apresentada no Capítulo 2). Cada uma dessas normas define, em princípio, diferentes topologias, isto é, diferentes conceitos do que seja um conjunto aberto.² Pode ser importante saber se um conjunto aberto em uma topologia também é aberto na outra topologia. É o que agora tratamos.

²Um conjunto $A \subset X$ é aberto se, para todo $x_0 \in A$, existir $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x_0) \subset A$, em que $B_\epsilon(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| < \epsilon\}$ é a *bola aberta* de centro em x_0 e raio $\epsilon > 0$.

Definição 1.13 Duas normas $\|\cdot\|_0$ e $\|\cdot\|_1$ num espaço X são *equivalentes*, se a aplicação identidade $I: (X, \|\cdot\|_0) \mapsto (X, \|\cdot\|_1)$ for um homeomorfismo. Em outras palavras, quando existirem constantes $\kappa > 0$ e $\lambda > 0$ de modo que

$$\kappa\|x\|_0 < \|x\|_1 \leq \lambda\|x\|_0.$$

Resulta dessa definição que uma bola aberta na topologia gerada pela norma $\|\cdot\|_0$ é um conjunto aberto na topologia gerada pela norma $\|\cdot\|_1$, e vice-versa. Assim, as duas topologias definem os mesmos conjuntos abertos e as mesmas seqüências de Cauchy.

Definição 1.14 Um espaço normado completo é chamado *espaço de Banach*. Se esse espaço de Banach tiver sua norma gerada por um produto interno, dizemos que ele é um *espaço de Hilbert*.

Os espaços $\mathbb{R}^n$ e ℓ^2 são espaços de Hilbert, mas pode-se mostrar que o espaço $C_{L^2}([a, b], \mathbb{R})$ – veja o Exemplo 1.6 – não é um espaço de Hilbert.

Proposição 1.15 Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Se a norma $\|\cdot\|$ for gerada por um produto interno então ela satisfaz a identidade do paralelogramo:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x, y \in X. \quad (1.2)$$

Demonstração: Basta desenvolver o lado esquerdo de (1.2). □

Pode-se mostrar que a recíproca da Proposição 1.15 também é válida: veja [6].

Mas, e se o espaço normado X não for completo? Um resultado clássico garante que todo espaço normado X pode ser “completado”, isto é, existem um espaço normado completo $\tilde{X}$ e uma aplicação isométrica $i: X \rightarrow \tilde{X}$ de forma que $i(X)$ é denso em $\tilde{X}$. Quer dizer, o espaço X é denso no espaço $\tilde{X}$ e elementos de X preservam sua norma.³ Para detalhes (e um enunciado mais preciso), veja [6]. Contudo, esse espaço $\tilde{X}$ (chamado *completamento* do espaço X) é definido como sendo um espaço cujos elementos são seqüências de Cauchy. Por conseguinte, o completamento do espaço $C_{L^2}([a, b])$ não é, em princípio, um espaço de funções. Trataremos dessa questão com um pouco mais de detalhamento.

1.2 O ESPAÇO $L^2([a, b])$

Seja $C([a, b], \mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Nesse conjunto, definimos a norma⁴

$$\|f\|_{L^1} = \int_a^b |f(x)| dx.$$

³O exemplo básico acontece com $\mathbb{Q}$ e seu completamento, que é $\mathbb{R}$.

⁴A integral denota a integral de Riemann dos cursos de Cálculo.

Denotamos por $C_{L^1}([a, b], \mathbb{R})$ o espaço vetorial $C([a, b], \mathbb{R})$ com a norma $\|\cdot\|_{L^1}$. Uma vez que esse espaço não é completo (veja o Exercício 5), consideramos o seu completamento com a norma $\|\cdot\|_{L^1}$. Esse espaço completo será denotado por $L^1([a, b])$ ou, simplesmente, L^1 . O conjunto $C_{L^1}([a, b], \mathbb{R})$ é denso no espaço L^1 .

Pode-se mostrar que o conjunto L^1 é constituído por (classes de equivalência) de funções $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com a identificação $f = g$, se f e g diferem apenas num conjunto de *medida nula*,⁵ denotado por $f = g$ qtp. (Veja [26, 27, 34].)

Da mesma forma que acontece na passagem dos racionais para os reais, as funções em L^1 que podemos integrar explicitamente são basicamente aquelas que integrávamos nos cursos de Cálculo.⁶ A importância do espaço L^1 deve-se à riqueza de suas operações com limites, apresentadas em um curso de integração.

Uma vez construído o espaço L^1 , podemos construir outros espaços normados completos por meio de uma modificação da norma $\|\cdot\|_{L^1}$. Para os nossos propósitos, o mais importante deles é o espaço de Hilbert $L^2 = L^2([a, b])$.

Para $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, definimos

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Observe que a norma $\|\cdot\|_{L^2}$ é gerada pelo produto interno no espaço $C_{L^2}([a, b])$, de acordo com o Exemplo 1.6:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b fg.$$

O espaço L^2 é o completamento do espaço $C_{L^2}([a, b])$ com a norma gerada por esse produto interno. Assim, $C_{L^2}([a, b])$ é denso em L^2 . Note que $f \in L^2$ se, e somente se, $|f|^2 \in L^1$. Assim, duas funções em L^2 são iguais se diferem apenas em um conjunto de medida nula. Pode-se mostrar (veja [6]) que L^2 é um espaço separável, isto é, possui um conjunto enumerável denso.

1.3 CONVEXIDADE E PRODUTO INTERNO

Relembramos que um subconjunto C de um espaço vetorial V é **convexo** se, para todos $x, y \in C$ e $\lambda \in [0, 1]$, tivermos

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

⁵Um conjunto $U \subset [a, b]$ tem medida nula se, dado $\epsilon > 0$, existe uma coleção enumerável de intervalos abertos de raio δ_i (isto é, do tipo $(c - \delta_i, c + \delta_i)$) que cobre o conjunto U e tem comprimento total menor ou igual a ϵ . O exemplo básico é o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais em $[0, 1]$: tome uma enumeração $\{q_1, \dots, q_n, \dots\}$ desses racionais, considere os intervalos $(q_i - \epsilon/2^i, q_i + \epsilon/2^i)$, que cobrem $\mathbb{Q}$. A soma total dos comprimentos desses intervalos é justamente ϵ , mostrando que $\mathbb{Q}$ tem medida nula.

⁶Note que só operamos explicitamente com números racionais; a soma $\sqrt{2} + \pi$ representa um número real com uma série de propriedades: $\sqrt{2} + \pi = \pi + \sqrt{2}$, tem inverso, possui raiz n -ésima, pode ser aproximado por racionais etc Mas a soma $\sqrt{2} + \pi$ não pode ser, na prática, efetuada...

1.3.1 Convexos e o Ponto de Menor Norma

Lema 1.16 (Ponto de Menor Norma)

Seja C um conjunto convexo e completo de um espaço com produto interno E . Então existe um único ponto $x_0 \in C$ tal que, para todo $x \in C$,

$$\|x_0\| \leq \|x\|.$$

Note que, se E for um espaço de Hilbert, basta supor que C seja um subconjunto fechado e convexo.

Demonstração: A demonstração é bem geométrica e decorre da identidade do paralelogramo. Seja $\delta = \inf_{x \in C} \|x\|$.

Pela definição de δ , existe uma seqüência (x_n) em C tal que $\|x_n\| \rightarrow \delta$. Afirmamos que (x_n) é de Cauchy. De fato, da identidade do paralelogramo decorre que

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - \|x_n + x_m\|^2.$$

Uma vez que C é convexo, temos que $(x_n + x_m)/2 \in C$. Logo $\|(x_n + x_m)/2\| \geq \delta$, isto é,

$$\|x_n + x_m\|^2 \geq 4\delta^2.$$

Figura 1.2: Se os pontos a_m e a_n da seqüência (a_n) não se aproximarem um do outro para m e n suficientemente grandes, o ponto $\frac{a_n + a_m}{2}$ ficaria dentro do círculo de raio δ .

Portanto, temos

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4\delta^2. \quad (1.3)$$

Quando m, n tendem para infinito, $\|x_n\| \rightarrow \delta$ e $\|x_m\| \rightarrow \delta$. Assim, (x_n) é de Cauchy, como afirmado.

Como C é completo, existe $x_0 \in C$ tal que $x_n \rightarrow x_0$; assim, $\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x_0\|$.

Mas a desigualdade (1.3) também prova a unicidade do ponto de menor norma: se $x_0, \bar{x}_0 \in C$ forem tais que $\|x_0\| = \delta = \|\bar{x}_0\|$, então $\|x_0 - \bar{x}_0\|^2 = 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$, mostrando que $x_0 = \bar{x}_0$. $\square$

Note que o produto interno não aparece explicitamente na demonstração apresentada: ele foi substituído pela identidade do paralelogramo.

Uma consequência imediata do Lema 1.16 é que podemos minimizar a distância de um convexo completo C a qualquer ponto $y \in E$. Isto é, fixado $y \in E$, existe um único ponto $x_0 \in C$ tal que

$$\|y - x_0\| \leq \|y - x\|, \quad \forall x \in C. \quad (1.4)$$

Mostraremos esse fato e, ao mesmo tempo, forneceremos uma descrição alternativa, freqüentemente útil, do ponto x_0 . (Note que, tomando $y = 0$, estamos caracterizando o ponto de menor norma de um conjunto convexo e completo.)

Teorema 1.17 (Caracterização do Ponto de Menor Norma)

Seja C um conjunto convexo e completo de um espaço com produto interno E . Então, para todo $y \in E$, existe um único ponto $x_0 \in C$ tal que

$$\|y - x_0\| \leq \|y - x\|, \quad \forall x \in C.$$

Esse ponto x_0 é caracterizado por

$$\langle y - x_0, x - x_0 \rangle \leq 0, \quad \forall x \in C.$$

Demonstração: Para garantir a existência de x_0 , basta considerar o conjunto (convexo e completo) $C_0 = C - y$ e encontrar o ponto $x_1 \in C_0$ de menor norma (veja o Exercício 15). Então, $x_0 = x_1 + y$ é o ponto procurado.

Passemos à caracterização de x_0 . Tome $x \in C$ arbitrário. Como C é convexo, o segmento $tx + (1 - t)x_0 \in C$ para todo $0 \leq t \leq 1$. Portanto,

$$\|y - x_0\| \leq \|y - (tx + (1 - t)x_0)\| = \|(y - x_0) + t(x_0 - x)\|.$$

Elevando essa desigualdade ao quadrado, obtemos

$$\begin{aligned} \langle y - x_0, y - x_0 \rangle &\leq \\ &\leq \langle (y - x_0) + t(x_0 - x), (y - x_0) + t(x_0 - x) \rangle \\ &= \langle y - x_0, y - x_0 \rangle + 2t \langle y - x_0, x_0 - x \rangle + t^2 \langle x_0 - x, x_0 - x \rangle. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Consequentemente,

$$\langle y - x_0, x - x_0 \rangle \leq \frac{t}{2} \|x_0 - x\|^2.$$

Passando ao limite com t tendendo a zero, obtemos a desigualdade desejada.

Reciprocamente, suponhamos que $\langle y - x_0, x - x_0 \rangle \leq 0$ para todo $x \in C$. Então

$$\begin{aligned} \|y - x\|^2 &= \|y - x_0 + x_0 - x\|^2 \\ &= \|y - x_0\|^2 + 2 \langle y - x_0, x_0 - x \rangle + \|x_0 - x\|^2 \geq \|x_0 - x\|^2, \end{aligned}$$

pois todos os termos considerados são não-negativos. □

O Lema 1.16 e o Teorema 1.17 não são válidos em espaços de Banach. Veja os Exercícios 16 e 17. A definição de um espaço de Banach *uniformemente convexo* (veja [20]) resgata essa importante propriedade de espaços de Hilbert.

Figura 1.3: O ponto x_0 do conjunto convexo *completo* C mais próximo de y é caracterizado por $\langle y - x_0, x - x_0 \rangle \leq 0, \forall x \in C$.

1.3.2 O Teorema de Separação de Hahn-Banach

Fazendo um ligeiro desvio com respeito à nossa trajetória, mostraremos agora um resultado clássico da Análise Funcional, que proporcionará uma interpretação mais completa do Teorema 1.17. Para formulações mais gerais do Teorema de Separação de Hahn-Banach veja, por exemplo, [5] ou [28].

Teorema 1.18 (Teorema de Separação de Hahn-Banach)

Seja C um subconjunto convexo e completo do espaço com produto interno E . Se $y \notin C$, então existe um funcional linear contínuo $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \leq \alpha < f(y), \quad \forall x \in C.$$

Demonstração: De acordo com o Teorema 1.17, existe um único ponto $x_0 \in C$ tal que $\|y - x_0\| \leq \|y - x\|$ para todo $x \in C$. Esse ponto x_0 é caracterizado por

$$\langle x - x_0, y - x_0 \rangle \leq 0, \quad \forall x \in C,$$

ou seja,

$$\langle x, y - x_0 \rangle \leq \langle x_0, y - x_0 \rangle \quad \forall x \in C. \quad (1.6)$$

Definimos o funcional contínuo $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \langle x, y - x_0 \rangle$ e $\alpha = \langle x_0, y - x_0 \rangle$. A desigualdade (1.6) expressa que

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \alpha = \langle y, y - x_0 \rangle + \langle x_0 - y, y - x_0 \rangle \\ &= f(y) - \|y - x_0\|^2 < f(y), \end{aligned}$$

a última desigualdade sendo verdadeira porque $\|y - x_0\| \neq 0$, já que $y \notin C$. $\square$

Note que o valor α é atingido no ponto x_0 .

Observação 1.19 Podemos inverter as desigualdades satisfeitas por f . De fato, tomando $g = -f$, obtemos

$$g(y) < \beta \leq g(x), \quad \forall x \in C,$$

sendo $\beta = -\alpha$. $\triangleleft$

Definição 1.20 Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial arbitrário. Um **hiperplano** H é um subespaço vetorial de codimensão 1, isto é, existe $x_0 \in \mathcal{V}$ tal que

$$\mathcal{V} = H \oplus \langle x_0 \rangle.$$

Relembramos um fato básico da Álgebra Linear:

Proposição 1.21 Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial arbitrário e $g: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear não-nulo. Então $\ker g = \{x \in \mathcal{V} : g(x) = 0\}$ é um hiperplano.

Demonstração: Como g não é nulo, existe $x_0 \in \mathcal{V}$ tal que $g(x_0) \neq 0$. Supondo que $v = x + \gamma x_0 \in \ker g \oplus \langle x_0 \rangle$, temos $g(v) = g(x + \gamma x_0) = \gamma g(x_0)$, de modo que $x = v - \gamma x_0 = v - (g(v)/g(x_0))x_0$. Assim, para todo $v \in \mathcal{V}$,

$$v = \left(v - \frac{g(v)}{g(x_0)} x_0 \right) + \frac{g(v)}{g(x_0)} x_0 \in \ker g \oplus \langle x_0 \rangle. \quad \square$$

Assim, temos a seguinte interpretação geométrica do Teorema de Separação de Hahn-Banach: dados um conjunto convexo e completo C do espaço com produto interno E e um ponto $y \notin C$, o funcional linear contínuo $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $g(x) = \langle x - x_0, y - x_0 \rangle$ define o hiperplano $\ker g$, ao qual pertence x_0 . O conjunto C está contido em $\{x : g(x) \leq 0\}$, enquanto $y \notin C$ está contido em $\{x : g(x) > 0\}$.

1.3.3 Projeção Ortogonal

Retornemos à situação do Teorema 1.17 num caso particular: vamos considerar o caso em que C é um *subespaço completo* do espaço com produto interno E . Afirmamos que o ponto $x_0 \in C$ mais próximo de $y \in E$, é caracterizado por

$$y - x_0 \in C^\perp.$$

(Em particular, vale $\langle y - x_0, x_0 \rangle = 0$.) Por esse motivo, o ponto x_0 é chamado *projeção ortogonal* de y no espaço C .

De fato, se $y - x_0 \notin C^\perp$, existiria $w \in C$ tal que $\langle y - x_0, w \rangle \neq 0$. Podemos supor que $\|w\| = 1$. Temos que

$$\langle (y - x_0) - \langle y - x_0, w \rangle w, w \rangle = \langle y - x_0, w \rangle - \|w\|^2 \langle y - x_0, w \rangle = 0.$$

Assim, de acordo com o Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} \|y - x_0\|^2 &= \|(y - x_0) - \langle y - x_0, w \rangle w + \langle y - x_0, w \rangle w\|^2 \\ &= \|(y - x_0) - \langle y - x_0, w \rangle w\|^2 + \|\langle y - x_0, w \rangle w\|^2 \\ &> \|(y - x_0) - \langle y - x_0, w \rangle w\|^2. \end{aligned}$$

Isto prova que o elemento $x_0 + \langle y - x_0, w \rangle w \in C$ está mais próximo de y do que x_0 , uma contradição.

Figura 1.4: O ponto x_0 pertencente ao subespaço completo F mais próximo de y é caracterizado por $(y - x_0) \perp F$.

Ressaltamos o resultado demonstrado:

Teorema 1.22 *Seja F um subespaço completo do espaço com produto interno E . Então, dado $y \in E$, o ponto $x_0 \in F$ mais próximo de y é caracterizado por*

$$(y - x_0) \in F^\perp.$$

Uma demonstração alternativa desse resultado pode ser obtida diretamente do Teorema 1.17. Basta notar que a desigualdade (1.5) garante que

$$0 \leq 2t \langle y - x_0, x_0 - x \rangle + t^2 \|x_0 - x\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ e } x \in F.$$

o que só é possível se $\langle y - x_0, x_0 - x \rangle = 0$ para todo $x \in F$. Isso quer dizer que $\langle y - x_0, w \rangle = 0$ para todo $w \in F$, e prova o resultado.

Relembramos que, dados F, G subespaços do espaço vetorial X , denotamos por $F + G$ o conjunto $\{y + z : y \in F, z \in G\}$. É fácil verificar que $F + G$ é um subespaço de X . Se, adicionalmente, todo elemento $x \in E$ puder ser escrito de maneira única como $y + z \in F + G$, denotamos $F + G$ por $F \oplus G$. (Veja o Exercício 6.)

Teorema 1.23 (Complemento Ortogonal de um Subespaço)

Seja F um subespaço completo do espaço com produto interno E . Então

$$E = F \oplus F^\perp$$

e $y \in E$ pode ser escrito como $x + z$, em que $x \in F$ é o elemento de F mais próximo de y e $z \in F^\perp$. Além disso, as aplicações $\Pi_1: E \rightarrow F$ e $\Pi_2: E \rightarrow F^\perp$, definidas por $\Pi_1 y = x \in F$ e $\Pi_2 y = z$, respectivamente, são lineares e contínuas. (Os elementos $x = \Pi_1 y$ e $z = \Pi_2 y$ são denominados projeção ortogonal de y sobre F e de y sobre $F^\perp$, respectivamente.)

Demonstração: Se x denotar o elemento de F mais próximo de y (cuja existência é garantida pelo fato de F ser completo), então $y = x + (y - x)$. O Teorema 1.22 garante que $y - x \in F^\perp$ e a unicidade da representação de y decorre de $F \cap F^\perp = \{0\}$.

Para $y \in E$, denotemos $\Pi_1 y = x$ e $\Pi_2 y = w \in F^\perp$. Isto é, estamos escrevendo $y = x + w$, com $x \in F$ e $w \in F^\perp$, como $y = \Pi_1 y + \Pi_2 y$. Assim,

$$\begin{aligned} y_1 + \alpha y_2 &= \Pi_1(y_1 + \alpha y_2) + \Pi_2(y_1 + \alpha y_2) \\ y_1 &= \Pi_1 y_1 + \Pi_2 y_1 \\ \alpha y_2 &= \alpha \Pi_1 y_2 + \alpha \Pi_2 y_2 \end{aligned}$$

Subtraindo da primeira equação a segunda e a terceira, concluímos que

$$\Pi_1(y_1 + \alpha y_2) - \Pi_1 y_1 - \alpha \Pi_1 y_2 = \Pi_2 y_1 + \alpha \Pi_2 y_2 - \Pi_2(y_1 + \alpha y_2).$$

Como o lado esquerdo dessa igualdade está em F e o lado direito em $F^\perp$, ambos são nulos. Isso prova a linearidade das aplicações Π_1 e Π_2 . Finalmente, do Teorema de Pitágoras vem que $\|y\|^2 = \|\Pi_1 y\|^2 + \|\Pi_2 y\|^2$. Isso mostra que $\|\Pi_1 y\| \leq \|y\|$ e $\|\Pi_2 y\| \leq \|y\|$, provando que Π_1 e Π_2 são contínuas. $\square$

Observação 1.24 Note que, dado $y \in E$ e $F \subset E$ subespaço completo, sempre existe o ponto de $F^\perp$ mais próximo de y : ele é o ponto $y - x_F$. Se E não for de Hilbert, mas F for completo, então o subespaço $F^\perp$ não é completo (veja o Exercício 21). Relembramos que $F^\perp$ sempre é um subespaço *fechado*. (Veja o Exercício 7.) Nesse caso, temos uma soma direta $F \oplus F^\perp = G$, mas pode ser que $G \neq E$.

$\triangleleft$

1.4 O TEOREMA DE REPRESENTAÇÃO DE RIESZ

Lema 1.25 *Sejam E um espaço com produto interno e $f: E \rightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear não-nulo. Se f for descontínuo, então $\ker f$ é denso em E . O funcional f é contínuo se, e somente se, $\ker f$ for fechado.*

Demonstração: Suponhamos que f seja descontínuo. Se $z \notin \ker f$, a Proposição 1.21 garante que $\ker f$ é um hiperplano, de modo que

$$x = y + \lambda z \in \ker f \oplus \langle z \rangle.$$

A descontinuidade de f garante a existência de uma seqüência (x_n) em E tal que $|f(x_n)| > n\|x_n\|$. Temos que $x_n = y_n + \lambda_n z \in \ker f \oplus \langle z \rangle$ e $f(x_n) = \lambda_n f(z)$, de modo que $|\lambda_n| |f(z)| \geq n\|y_n + \lambda_n z\|$. Dividindo por $\lambda_n \neq 0$, obtemos

$$\|z - \lambda_n^{-1}(-y_n)\| \leq \frac{|f(z)|}{n},$$

provando que z é aproximado por elementos em $\ker f$. Assim, $\ker f$ é denso em E .

Se f for contínuo, claramente $\ker f$ é fechado. $\square$

Note que o produto interno não foi utilizado na demonstração, que continua válida para qualquer espaço normado.

Fixado $y \in E$, $f_y(x) = \langle x, y \rangle$ é um funcional linear contínuo (como consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz). Em outras palavras, cada elemento y do espaço com produto interno E induz um elemento $f_y \in E^*$. Se E for um espaço de Hilbert, vale a recíproca; mais precisamente:

Teorema 1.26 (de Representação de Riesz)

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e f um elemento do espaço dual $\mathcal{H}^*$, isto é, um funcional linear contínuo $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$. Então existe um único elemento $y \in \mathcal{H}$ tal que

$$f(x) = \langle x, y \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Além disso, a aplicação $f \mapsto y$ é uma isometria.

Demonstração: Se f for identicamente nula, basta tomar $y = 0$. Caso contrário, $\ker f = \{x \in \mathcal{H} : f(x) = 0\}$ é um hiperplano fechado e, portanto, completo. Logo,

$$\mathcal{H} = \ker f \oplus (\ker f)^\perp,$$

de acordo com o Teorema 1.23. Como $\ker f$ tem codimensão 1, $(\ker f)^\perp = \langle x_0 \rangle$, em que x_0 foi escolhido de forma que $f(x_0) = 1$.

Temos que

$$x = (x - f(x)x_0) + f(x)x_0 \in \ker f \oplus \langle x_0 \rangle. \quad (1.7)$$

Ora, o funcional $g: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$ definido por

$$g(x) = \langle x, x_0 \rangle$$

é nulo em $\ker f$ e $g(x_0) = \|x_0\|^2 \neq 0$. De (1.7) decorre que

$$g(x) = g(f(x)x_0) = f(x)g(x_0) = f(x)\|x_0\|^2$$

e, portanto,

$$f(x) = \frac{g(x)}{\|x_0\|^2} = \frac{\langle x, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} = \langle x, y \rangle,$$

sendo

$$y := \frac{x_0}{\|x_0\|^2}.$$

A unicidade de y é óbvia: se tivermos $\langle x, y_1 \rangle = \langle x, y \rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$, então $\langle x, y - y_1 \rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, de onde concluímos que $y = y_1$ ao tomarmos $x = y - y_1$.

Finalmente,

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, y \rangle| \leq \sup_{\|x\|=1} \|x\| \|y\| = \|y\|.$$

Por outro lado,

$$\|y\|^2 = \langle y, y \rangle = |f(y)| \leq \|f\| \|y\|.$$

Assim, $\|f\| = \|y\|$. □

Observação 1.27 A essência da demonstração do Teorema de Representação de Riesz consiste na igualdade (1.7), que nos mostra que

$$x = (x - f(x)x_0) + f(x)x_0 \in \ker f \oplus (\ker f)^\perp$$

e reduz a arbitrariedade na escolha do elemento x_0 na demonstração da Proposição 1.21. Observe que, em particular, a demonstração do Teorema de Representação de Riesz mostra que, se dois funcionais se anulam no mesmo hiperplano, então um é múltiplo do outro. $\triangleleft$

Exemplo 1.28 Consideremos o espaço de Hilbert $L^2([a, b])$ e um funcional linear contínuo $\ell: L^2([a, b]) \rightarrow \mathbb{K}$. O Teorema de Representação de Riesz garante a existência de uma única função $g \in L^2([a, b])$ tal que, para todo $f \in L^2([a, b])$, temos

$$\ell(f) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx. \quad \triangleleft$$

Exemplo 1.29 Seja $f: \ell^2 \rightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Se $x = (x_i) \in \ell^2$, o Teorema de Representação de Riesz garante a existência de uma sequência $(a_i) \in \ell^2$ tal que

$$f(x) = \langle (x_i), (a_i) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{a}_i. \quad \triangleleft$$

Exemplo 1.30 As hipóteses do Teorema de Riesz são necessárias; para verificarmos esse fato, basta considerarmos duas espécies de contra-exemplos.

O primeiro deles acontece quando trabalhamos em um espaço com produto interno E , que não é completo, e um funcional linear contínuo $f: E \rightarrow \mathbb{K}$. Consideremos o espaço $E = \ell_0$ de todas as seqüência (x_i) com $x_i = 0$ exceto talvez para um número finito de índices. Claramente ℓ_0 é um subespaço do espaço de Hilbert ℓ^2 e, dessa maneira, um espaço com produto interno.

Consideremos a base ortonormal $\mathcal{S} = \{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ do espaço ℓ^2 . Dado $x \in \ell_0$, temos que existe $m = m(x) \in \mathbb{N}$ tal que $x = x_1 e_1 + \dots + x_m e_m$. Assim, $\mathcal{S}$ é uma *base de Hamel* do espaço ℓ_0 .

Consideremos $f: \ell_0 \rightarrow \mathbb{K}$ definido por

$$f(x) = f(x_1 e_1 + \dots + x_m e_m) = x_1 + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_m}{m}.$$

A desigualdade de Hölder garante que o funcional f é contínuo. Suponhamos a existência de $v \in \ell_0$ tal que $f(x) = \langle x, v \rangle$ para todo $x \in \ell_0$. Como $f(e_i) = 1/i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, temos que $1/i = f(e_i) = \langle e_i, v \rangle$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Isso implicaria $v = (1, 1/2, \dots, 1/m, \dots)$, que não é um elemento de ℓ_0 . Isso prova que o Teorema de Representação de Riesz não é válido em ℓ_0 . Note que a idéia desse contra-exemplo é muito simples: consideramos ℓ^2 e $g: \ell^2 \rightarrow \mathbb{K}$ dado por $g(x) = \langle x, v \rangle$. Escolhemos v e um subespaço de ℓ^2 que não contém o ponto v (no caso, o espaço ℓ_0) e a restrição de f a esse subespaço. Pronto!

Se $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$ for um funcional linear descontínuo, então nunca poderemos ter $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$, pois $\langle x, x_0 \rangle$ sempre define um funcional linear contínuo. Mas existem funcionais lineares que não são contínuos em um espaço de Hilbert? A resposta é sim, mas não exemplificaremos aqui esse fato. (Veja [6].) $\triangleleft$

Complementando o Exemplo 1.30, verificamos que o Teorema de Representação de Riesz caracteriza os espaços de Hilbert:

Teorema 1.31 *Seja E um espaço com produto interno. Então E é um espaço completo se, e somente se, for válido o Teorema de Representação de Riesz.*

Demonstração: Se E for completo, já mostramos a validade do Teorema de Representação de Riesz. Por sua vez, a validade desse teorema implica a existência de um isometria entre E e E^* . Como E^* sempre é completo, E é completo. $\square$

Assim, se E for um espaço com produto interno que não é completo, existe um funcional linear contínuo $f: E \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $f \neq f_y$ para todo $y \in \mathcal{H}$, em que $f_y: E \rightarrow \mathbb{K}$ é dado por $f_y(x) = \langle x, y \rangle$. Como $\ker f$ tem codimensão 1, isso quer dizer que $(\ker f)^\perp = \{0\}$.

Exemplo 1.32 Vamos mostrar que, em um espaço com produto interno E que não é completo, sempre existem subespaços fechados F tais que $F \oplus F^\perp \neq E$.

Assim, supondo que E que não seja completo, consideremos um funcional linear contínuo $f: E \rightarrow \mathbb{K}$, ou seja, um elemento de E^* . Como vimos, existe $f \in E^*$ tal que $(\ker f)^\perp = \{0\}$. Sejam $F = \ker f$. Como f não é identicamente nulo,⁷ F é um subespaço próprio de E . Como $F^\perp = \{0\}$, temos $E \neq F \oplus F^\perp$. $\triangleleft$

1.5 PRODUTO INTERNO E LINEARIDADE

Sejam E, F espaços com produto interno. Como sabemos, o espaço $\mathcal{L}(E, F)$ de todas as aplicações lineares contínuas $T: E \rightarrow F$ é um espaço normado com a norma

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Daí decorre imediatamente que $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$ para todo $x \in E$. Assim, se $S \in \mathcal{L}(F, G)$ (em que G é um espaço normado), então $\|STx\| \leq \|S\| \|Tx\| \leq \|S\| \|T\| \|x\|$, de modo que

$$\|ST\| \leq \|S\| \|T\|.$$

Em particular, se $F = G = E$, temos que $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ é uma álgebra normada. Se E for completo, então $\mathcal{L}(E)$ é completo; por esse motivo, $\mathcal{L}(E)$ é chamado *álgebra de Banach*.

Lema 1.33 *Seja E um espaço com produto interno e $T \in \mathcal{L}(E)$. Então*

$$(i) \quad \|x\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x, y \rangle|;$$

$$(ii) \quad \|T\| = \sup_{\|x\|=1=\|y\|} |\langle Tx, y \rangle|.$$

⁷É claro que o Teorema de Representação de Riesz vale para o funcional linear $f \equiv 0$.

Demonstração: Para provar (i), notamos que $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \leq \|x\|$, se $\|y\| = 1$. A igualdade é verificada ao tomarmos $y = x/\|x\|$.

Aplicando esse resultado, obtemos

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1=\|y\|} |\langle Tx, y \rangle|. \quad \square$$

1.6 EXERCÍCIOS

1. Seja $\mathcal{B}$ um subconjunto não-vazio do espaço vetorial X . Mostre que $\langle \mathcal{B} \rangle$ é um subespaço de X . Se $\mathcal{B}$ for uma base, mostre que cada $x \in X$ escreve-se de maneira única como combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$.
2. Sejam E um espaço com produto interno e $\|\cdot\|$ a norma gerada por seu produto interno. Mostre que $\|\cdot\|^2$ é uma função convexa.
3. Mostre que a norma $\|\cdot\|_{\sup}$ em $C([a, b], \mathbb{K})$ não é gerada por um produto interno.
4. Seja E um espaço com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Demonstre a desigualdade de Cauchy-Schwarz da seguinte maneira: para $x, y \in E$, desenvolva a expressão $0 \leq \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle$. Escolhendo $\alpha = \langle x, y \rangle$, obtenha um trinômio do segundo grau com coeficientes reais. Analise esse trinômio e obtenha a desigualdade de Cauchy-Schwarz.
5. Mostre que o espaço $C_{L^1}([a, b], \mathbb{R})$ das funções contínuas $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com a norma $\|\cdot\|_{L^1}$ não é completo. Mostre também que $C_{L^2}([a, b], \mathbb{R})$ com a norma $\|\cdot\|_{L^2}$ não é completo.
6. Se F, G forem subespaços do espaço vetorial X , mostre que $F + G$ é um subespaço de X . Mostre que todo elemento $x \in F + G$ pode ser escrito de maneira *única* como $y + z \in F + G$ se, e somente se, $F \cap G = \{0\}$.
7. Seja $B \neq \emptyset$ um subconjunto do espaço E com produto interno. Mostre que $B^\perp$ é um subespaço fechado de E .
8. Mostre que o espaço ℓ^2 é separável.
9. Demonstre, por contradição, que se o espaço com produto interno E for separável, então qualquer conjunto ortonormal em E é, necessariamente, enumerável. Para isso, calcule $\|x_\alpha - x_\beta\| \geq c > 0$ para elementos $\alpha \neq \beta$ em A e considere as bolas $B_{c/2}(x_\alpha)$.
10. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável e $F \subset \mathcal{H}$ um subespaço fechado. Mostre que F é um espaço de Hilbert separável.
11. Seja $f: E \rightarrow F$ é uma bijeção linear entre os espaços com produto interno E e F . Então f é um isomorfismo se, e somente se, for uma *isometria*, isto é, $\|x\|_1 = \|f(x)\|_2$ para todo $x \in E$.

12. O *cubo de Hilbert* é o conjunto dos pontos $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2$ tais que $x_i \leq 1/i$. Mostre que o cubo de Hilbert é um conjunto compacto.
13. Seja B uma bola (aberta ou fechada) em um espaço de Banach X . Mostre que B é um conjunto convexo.
14. Sejam E um espaço com produto interno e $\|\cdot\|$ a norma por ele gerada. Mostre que $\|\cdot\|^2$ é uma função convexa.
15. Mostre que todo subespaço de um espaço vetorial é convexo; que translações de conjuntos convexos são conjuntos convexos; que qualquer interseção de conjuntos convexos é um conjunto convexo (mesmo que vazio). Mostre também que, se p for uma semi-norma⁸ em E , então, para todo $r \geq 0$, os conjuntos

$$\{x \in E : p(x) \leq r\} \quad \text{e} \quad \{x \in E : p(x) < r\}$$

são convexos.

16. Considere o espaço de Banach $X = \mathbb{R}^2$ com $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$. Mostre que X não satisfaz o Lema 1.16.
17. Em um espaço de Banach X , dê exemplo de um conjunto convexo e fechado $C \subset X$ e um ponto $x \notin C$ tal que não existe $y \in C$ satisfazendo $\|x - y\| \leq \|x - z\|$ para todo $z \in C$.
18. Seja E um espaço com produto interno E e M um subespaço. Dê um exemplo em que M é fechado, $M \neq M^{\perp\perp}$ e $E \neq M \oplus M^\perp$. (Compare com o Exercício 20.)
19. Seja F um subespaço *completo* do espaço com produto interno E . Se $F \neq E$, mostre que existe $0 \neq y \in F^\perp$.
20. (ORTOGONALIDADE E PRODUTO INTERNO) Seja E um espaço com produto interno e $R, S \subset E$ subconjuntos arbitrários. Mostre:
- (a) $S^\perp$ é um subespaço fechado de E ;
 - (b) $R \subset S$ implica $S^\perp \subset R^\perp$;
 - (c) $S^\perp = (\overline{\langle S \rangle})^\perp$;
 - (d) $S \cap S^\perp \subset \{0\}$ e $S \cap S^\perp = \{0\}$, se $0 \in S$;
 - (e) $(S^{\perp\perp})^\perp =: S^{\perp\perp\perp} = S^\perp$;
 - (f) $S \subset S^{\perp\perp} := (S^\perp)^\perp$;
 - (g) se S for um subespaço *fechado* do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então $S = S^{\perp\perp}$.
 - (h) se S for um subconjunto qualquer de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então $S^{\perp\perp} = \overline{\langle S \rangle}$.

⁸Uma **semi-norma** é uma função não-negativa p que satisfaz as propriedades (i) e (ii) da Definição 1.7.

21. Seja E um espaço com produto interno e F um subespaço completo de E . Mostre que $F^\perp$ não é completo.
22. Seja F um subespaço completo do espaço com produto interno E e $G = z + F$, em que $z \in E$ é um elemento fixo. Então o elemento $x_0 \in G$ de menor norma é caracterizado por

$$x_0 \in F^\perp.$$

23. Considere o espaço $C_{L^2}([0, \pi], \mathbb{R})$ e seu subespaço $\mathbb{R}_2[t]$. Considere o funcional linear $\ell: \mathbb{R}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\ell(p) = \langle p(t), \sin t \rangle.$$

Ache $q \in \mathbb{R}_2[t]$ tal que

$$\ell(p) = \langle p(t), q(t) \rangle \quad \forall p \in \mathbb{R}_2[t].$$

24. Seja $F \subset H$ um subespaço fechado do espaço de Hilbert H . Seja $f: F \rightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Mostre que existe um funcional linear $\tilde{f}: H \rightarrow \mathbb{K}$ que estende f , com $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. Esse resultado pode ser generalizado para espaços de Banach (chama-se *Teorema de Hahn-Banach*), mas a demonstração então não é trivial.

CAPÍTULO 2

UM PROBLEMA NÃO LINEAR

Em geral, a resolução de equações diferenciais não-lineares é muito mais trabalhosa do que o caso linear.

Neste capítulo, procuramos uma solução $u \in C^2(0,1) \cap C^0([0,1])$ para a equação não-linear

$$\begin{aligned} u'' &= -f(u), \quad t \in (0,1) \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

em que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Outras hipóteses sobre f serão acrescentadas quando necessárias.

Uma solução $u(t)$ do problema (2.1) pode ser interpretada como sendo uma função que descreve a posição (em função do tempo) de uma partícula de massa unitária que se move em linha reta sob a ação de uma força externa f que depende unicamente¹ da posição $u(t)$. Assim, a equação $u'' = -f(u)$ nada mais é do que a expressão da segunda lei de Newton. O sinal negativo quer dizer que a força f se opõe ao movimento da partícula, como no caso da lei de Hooke. Os valores de u nos pontos de fronteira 0 e 1 nos dizem que a partícula saiu da origem com uma certa velocidade que permite o seu retorno ao ponto inicial exatamente quando $t = 1$. Não é garantida que tal velocidade exista, isto é, não sabemos *a priori* se o problema (2.1) possui solução. Com certas hipóteses adicionais sobre a força f mostraremos que existe *pelo menos* uma solução desse problema.

Mas a função diferenciável $u(t)$ descreve não apenas a trajetória da partícula, mas todo o seu movimento: a velocidade $u'(t)$ e a aceleração $u''(t)$ em cada instante t . Não nos interessa apenas a descrição das sucessivas posições ocupadas pela partícula, mas também o tempo de permanência em cada ponto. (Por exemplo, a partícula poderia ficar parada durante certo intervalo de tempo e então reiniciar o movimento.)

2.1 O LAGRANGEANO

Desde os primórdios da Física, acreditou-se que o universo é regido por princípios básicos. Tudo começou com Euclides em seu livro intitulado *Catoptrica* (teoria

¹Uma força externa que dependesse simultaneamente do tempo t e da posição $u(t)$ seria representada por $f(t, u(t))$.

especular). Nesta obra ele prova que o caminho percorrido pela luz que é refletida em um espelho tem o ângulo de incidência igual ao ângulo de reflexão. Daí, Heron de Alexandria demonstra que o caminho percorrido pela luz ao ir de um ponto P a um outro ponto Q com reflexão no espelho é o menor entre todos os outros caminhos que saem do ponto P, fazem uma reflexão no espelho e atingem o ponto Q. Se o meio for homogêneo, então a velocidade da luz é constante. Portanto, ela percorre o caminho que leva o menor tempo. Heron aplicou esse princípio do menor caminho ou do tempo mínimo a problemas de reflexão em espelhos esféricos convexos e côncavos. Com base nesses problemas de reflexão, os filósofos e cientistas do período pós-grego estenderam esse princípio de otimização e propuseram a doutrina de que a natureza age da melhor maneira possível, quer dizer, a natureza não faz nada supérfluo nem qualquer trabalho desnecessário. Leonardo da Vinci acreditava que a natureza era econômica e que sua economia era quantitativa. No século XVII, Fermat postulou o Princípio do Tempo Mínimo e a partir dele deduziu a lei da refração da luz.

No início do século XVIII, uma enorme quantidade de exemplos mostrava que a natureza de fato empreende a otimização de algumas quantidades importantes. Os exemplos sugeriam que deveria haver algum princípio mais geral, ou seja, toda dinâmica aconteceria na otimização quantitativa de algo (tempo, distância, trabalho, energia, etc); restava encontrar esse algo.

A procura por esse princípio geral foi empreendida por Maupertuis (1698-1759), que propôs em 1744 seu famoso Princípio da Ação Mínima. De acordo com esse princípio, qualquer dinâmica na natureza deve minimizar o que Maupertuis chamou de Ação, a saber, a quantidade de movimento vezes a distância percorrida. Em termos matemáticos,

$$\Gamma = mvs,$$

em que m é a massa do corpo, v sua velocidade e s a distância percorrida. O resultado Γ desse produto Maupertuis chamou de Ação. No caso em que a velocidade não é constante e o caminho percorrido é uma curva, a Ação é dada pela integral

$$\Gamma = \int mvd s.$$

A quantidade universal a ser otimizada era a Ação, assim pensava Maupertuis.

Euler, no mesmo ano de 1744, reformulou a definição de Ação introduzindo a variável temporal. Como $ds = vdt$, substituindo essa expressão na definição da Ação, obteve

$$\Gamma(t) = \int mv^2 dt.$$

A quantidade mv^2 era chamada, na época de Euler, de força viva. Depois, por questão de compatibilidade com as leis de Newton e com a conservação da energia, $(1/2)mv^2$, metade da força viva, passou a ser chamada de *energia cinética* da massa m , denotada por $\mathcal{K}(t)$ quando expressa em termos do tempo t . No caso do problema (2.1), como $u(t)$ é a função que descreve a posição da partícula em função do tempo t , temos

$$\mathcal{K}(t) = \frac{1}{2}[u'(t)]^2 = \frac{1}{2}|u'(t)|^2.$$

Euler então faz uso de sua ideia original do cálculo das variações. Considera o movimento de uma partícula se movendo ao longo de todas as curvas em um plano unindo dois pontos fixos. Para cada trajetória $u(t)$ está associada a Ação da partícula. Assim, a Ação é entendida como um funcional definido no espaço de todas as curvas planas que ligam esses dois pontos fixos. Assim, ele consegue definir, ainda que seja de uma maneira um tanto vaga, a taxa de variação de um funcional. Com uma frase lapidar, Euler estabelece a extensão do conceito de ponto de mínimo do cálculo a espaços funcionais: a Ação será mínima exatamente na curva em que sua taxa de variação for nula, ou seja, na curva que faz o papel de ponto estacionário. Por analogia, podemos dizer que nesse percurso estacionário a velocidade da Ação é nula, velocidade entendida aqui como taxa de variação da quantidade denominada Ação com referência a mudanças de caminhos, que são os objetos do espaço funcional em questão. Em termos matemáticos, Euler procurava a trajetória $u(t)$ tal que

$$\mathcal{K}(u) = \frac{1}{2}|u'(t)|^2$$

fosse mínimo.

As ideias de Euler foram aprimoradas por Lagrange, que generalizou o princípio de modo a ser aplicado a um maior número de problemas dinâmicos. Definiu a Ação associada a uma trajetória como sendo a soma da energia cinética efetiva em cada instante do percurso. Para Lagrange, energia cinética efetiva nada mais é do que a energia cinética subtraída de toda energia potencial. Podemos chamar isso de *energia atual* de uma partícula, visto que sua energia virtual (potencial) foi suprimida. Mais precisamente, a energia atual, que denotaremos por L , é dada por

$$L(t) = \mathcal{K}(t) - \mathcal{U}(t),$$

em que $\mathcal{U}(t)$ é a energia potencial da massa m . Essa energia atual $L(t)$ é chamada de Lagrangiano. Portanto, a Ação associada a uma trajetória $u(t)$, no sentido de Lagrange, é a integral do Lagrangiano da partícula em cada instante do percurso:

$$\Gamma(t) = \int L dt.$$

Aplicando a ideia do cálculo de variações, procuramos encontrar a trajetória $u(t)$ da partícula que minimize a ação que lhe é associada:

$$\Gamma(u) = \int L(u(t)) dt.$$

É dessa forma que o Princípio da Ação Mínima será utilizado no estudo de (2.1). Note que na trajetória que minimiza a ação associada há uma equiparação ótima entre a média temporal das energias cinéticas e das energias potenciais, isto é, neste percurso elas se distribuem da maneira mais igual possível.

Por sua vez, a energia potencial da partícula no instante t é definida como sendo o simétrico da integral da força externa aplicada ao sistema. Assim,

$$\mathcal{U}(t) = - \int_0^t [-f(s)] ds. \quad (2.2)$$

(Note que o sinal negativo dentro da integral decorre da equação (2.1).)

Decorre dessa definição que estamos considerando a origem como um nível em que a energia potencial é nula. Há duas razões para o sinal negativo (externo à integral) na definição da energia potencial $\mathcal{U}(t)$. Uma é para ser coerente com a ideia de que é realizado trabalho quando se perde energia potencial. A outra se relaciona com a energia total durante o percurso. Essa é definida como a soma da energia cinética com a energia potencial da partícula. Para possibilitar que a energia total seja constante – o que é o princípio da conservação da energia –, a energia potencial deve ser definida com o sinal negativo: o que se ganha em energia cinética deve equivaler ao que se perde em energia potencial.

Assim, usando a ideia básica do cálculo de variações, procuramos minimizar

$$\Gamma(u) = \int L(u(t))dt.$$

Como $t \in [0, 1]$, vamos encontrar pontos críticos da função²

$$\begin{aligned}\Gamma(u) &= \int_0^1 \mathcal{K}(u(t))dt - \int_0^1 \mathcal{U}(u(t))dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 |u'(t)|^2 dt - \int_0^1 F(u(t))dt\end{aligned}$$

em que $F(x) = \int_0^x f(s)ds$. (Note o cancelamento dos sinais negativos em (2.2).)

Toda a nossa atenção será dedicada a Γ : desde a definição de um domínio apropriado até o estudo de condições que garantam a existência de pontos críticos para essa função. Veremos que todo ponto crítico de Γ é solução de (2.1) e vice-versa (veja o Teorema 2.24). Assim, pontos de máximo, de mínimo ou de sela serão todos soluções de (2.1).

Para isso, começamos relembrando alguns resultados básicos:

Definição 2.1 Sejam X e Y espaços de Banach reais e $U \subset X$ um subconjunto aberto. Uma aplicação $g: U \rightarrow Y$ é **diferenciável** no aberto U se, dado $\epsilon > 0$, para todo $x \in U$ existem $0 < \delta = \delta(x)$ e uma aplicação linear $T = T(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ de modo que³

$$\|g(x+h) - g(x) - T \cdot h\| < \epsilon \|h\| \quad \text{sempre que } \|h\| < \delta. \quad (2.3)$$

Nesse caso, denota-se a **derivada** T da função g no ponto x por $Dg(x)$.

Exemplo 2.2 Sejam X, Y espaços de Banach. Toda aplicação linear *contínua* $S: X \rightarrow Y$ é diferenciável e $DS(x) = S$. De fato,

$$\|S \cdot (x+h) - S \cdot x - S \cdot h\| = 0 \quad \text{para todos } x, h \in X.$$

Assim, qualquer que seja $\epsilon > 0$, a condição de diferenciabilidade é cumprida por S . $\triangleleft$

²Usualmente chamada de *funcional energia* associado a (2.1), se bem o que nome *ação* seja mais apropriado.

³A aplicação linear T sendo avaliada no ponto h está sendo denotada por $T \cdot h$, enquanto $T(x)$ denota que T depende do ponto x . Note que T é contínua, por hipótese.

Exemplo 2.3 Sejam X, Y, Z espaços de Banach. Toda aplicação bilinear *contínua* $B: X \times Y \rightarrow Z$ é diferenciável, pois

$$\|B(x+h, y+k) - B(x, y) - [B(x, k) + B(h, y)]\| = \|B(h, k)\|$$

para todos $x, h \in X$ e $y, k \in Y$.

Como $B(x, \cdot)$ e $B(\cdot, y)$ são aplicações lineares, para mostrarmos que a derivada $DB(x, y)(h, k)$ é dada pela aplicação linear contínua $B(x, k) + B(h, y)$, basta verificar que $\|B(h, k)\|$ satisfaz a condição de diferenciabilidade (2.3), isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|B(h, k)\| \leq \epsilon \|(h, k)\|, \quad \text{se } \|(h, k)\| < \delta.$$

De fato, a continuidade de B garante que $\|B(h, k)\| \leq c\|h\| \|k\|$. Assim, considerando $\|(h, k)\| = \max\{\|h\|, \|k\|\}$,

$$\frac{\|B(h, k)\|}{\|(h, k)\|} \leq c \min\{\|h\|, \|k\|\},$$

que pode ser feito menor do que qualquer $\epsilon > 0$ dado.

Um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ em um espaço de Hilbert real $\mathcal{H}$ é uma aplicação bilinear contínua. Assim, se $B = \langle \cdot, \cdot \rangle$, temos que

$$D\langle x, y \rangle(h, k) = \langle h, y \rangle + \langle x, k \rangle.$$

◁

Exemplo 2.4 Um caso particular do Exemplo 2.3 ocorre quando considerarmos a forma quadrática associada a uma forma bilinear contínua. Isto é, $J: X \rightarrow Z$ dada por

$$J(u) = B(u, u),$$

em que $B: X \times X \rightarrow Y$ é uma aplicação bilinear contínua entre espaços de Banach. Nesse caso, temos

$$J(u) \cdot h = B(u, h) + B(h, u).$$

De fato, como naquele exemplo, temos

$$J(u+h) - J(u) = B(u+h, u+h) - B(u, u) = B(u, h) + B(h, u) - B(h, h)$$

e já vimos que $\frac{\|B(h, h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$.

Note que, se B for simétrica, então $J'(u) \cdot h = 2B(u, h)$.

◁

Como já dissemos, nosso primeiro objetivo no estudo da função Γ será a apresentação de um espaço de Banach X no qual essa função esteja bem definida. Em outras palavras, precisamos que $|u'(t)|^2$ e $F(u(t))$ sejam funções integráveis. A primeira integral sugere que tenhamos $u' \in L^2$. Mas não basta exigir que $u \in C^1$, pois sabemos que o espaço $C_{L^2}^1$ (das funções de classe C^1 com a norma L^2) não é completo. Além disso, é claro, precisamos ter que $\Gamma: X \rightarrow \mathbb{R}$ seja diferenciável.

Para encontrar esse espaço de Banach, começamos por introduzir um espaço que, em última instância, implicará um novo entendimento do que é uma função.

2.2 FUNÇÕES TESTE

A maneira clássica (e mais “natural”) de conhecer uma função é saber como ela atua em cada ponto de seu domínio. Essa atuação é descrita, muitas vezes, por uma expressão algébrica. É o que acontece quando escrevemos $f(x) = x^2 + 1$, por exemplo. A “dinâmica” da atuação dessa função é então descrita pelo seu gráfico.

Uma outra maneira, mais indireta, de se conhecer uma função se dá quando determinamos um conjunto de funções acessórias e, para cada uma de tais funções, obtemos valores reais, em geral via integração. Isso é o que acontece, por exemplo, na teoria de séries de Fourier: o conjunto $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ gera, para $m \in \mathbb{N}$ e para a função f (periódica, de período 2π), os valores reais

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx \quad m \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx, \quad m \in \{1, 2, 3, \dots\} \end{aligned}$$

isto é, os coeficientes de Fourier de f . O Teorema de Riesz-Fischer (veja [6]) garante que, para uma grande classe de funções f , podemos “recuperar” a função f se conhecermos os valores desses coeficientes.

Essa será, em última instância, a nossa abordagem neste capítulo. Escolheremos um conjunto adequado de funções acessórias, que atuarão na função f produzindo uma coleção de valores reais; essa coleção de valores reais fornecerá informações sobre a própria função f . (Diferentemente do caso de séries de Fourier, o conjunto escolhido não será enumerável.)

A escolha adequada de uma classe de funções acessórias permite estender o conceito de função e a introdução do conceito de *distribuição*, que não será abordado neste texto. A classe mais adequada para esse propósito é a classe de funções C^∞ com suporte compacto, que define o espaço das funções teste.

Definição 2.5 Dizemos que uma função $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tem **suporte compacto** se existir um intervalo $[a, b] \subset (0, 1)$ tal que $\text{supp } f \subset [a, b]$, em que

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in (0, 1) : f(x) \neq 0\}}.$$

Denotamos por $C_0^\infty(0, 1)$ o espaço de todas as funções reais $\phi \in C^\infty$ com suporte compacto. Os elementos de $C_0^\infty(0, 1)$ são chamados **funções teste**.

O espaço $C_0^\infty(0, 1)$ e, com isso, o conceito de distribuição, é devida a L. Schwartz, se bem que S.L. Sobolev tenha feito estudos nessa direção alguns anos antes. Uma abordagem elementar pode ser encontrada no segundo capítulo do livro de Stakgold [30].

Note que as funções $\phi \in C_0^\infty(0, 1)$ estendem-se naturalmente a funções de classe C^∞ definidas em toda a reta, ao definirmos seu valor como nulo para todo $x \notin (0, 1)$. Essa extensão será, muitas vezes, identificada com a função ϕ .

Observação 2.6 O espaço $C_0^\infty(0,1)$ é denso em $C_{L^2}([0,1],\mathbb{R})$. De fato, pelo Teorema de Aproximação de Weierstraß, toda função contínua $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por um polinômio p , isto é, dado $\epsilon > 0$,

$$|g(t) - p(t)| < \epsilon \quad \forall t \in [0,1].$$

Seja agora $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$ uma função teste tal que $\varphi(t) = 1$ para todo $t \in [\epsilon, 1 - \epsilon]$ e $\varphi(t) = 0$ para todo $t \in [0, \epsilon/2] \cup [1 - \epsilon/2, 1]$. (Com uma pequena modificação, tal função é construída explicitamente em [23], p. 433.)

Com isso, a função $\varphi p \in C_0^\infty(0,1)$ e

$$\left(\int_0^1 |g - \varphi p|^2 dt \right)^{1/2} \leq k\sqrt{\epsilon},$$

em que k é uma constante. Isso mostra o afirmado.

Mas podemos concluir algo mais: como o espaço das funções contínuas $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ com a norma L^2 é denso em $L^2 := L^2([0,1])$ (veja a Seção 1.2), concluimos que $C_0^\infty(0,1)$ é denso em L^2 . $\triangleleft$

Note que se $\phi \in C_0^\infty(0,1)$ e $\text{supp } \phi \subset [a,b] \subset (0,1)$, então $\text{supp } \phi' \subset [a,b]$ e, portanto, $\phi' \in C_0^\infty(0,1)$. Mas, o que acontece se integrarmos uma função teste? A primitiva continua sendo uma função teste?

Lema 2.7 Uma função $\phi \in C_0^\infty(0,1)$ tem primitiva $\psi \in C_0^\infty(0,1)$ se, e somente se,

$$\int_0^1 \phi = 0.$$

Demonstração: Se $\psi' = \phi$, o Teorema Fundamental do Cálculo garante que

$$\int_0^1 \phi = \int_0^1 \psi' = \psi(1) - \psi(0) = 0.$$

Reciprocamente, suponhamos $\text{supp } \phi \subset [a,b] \subset (0,1)$ e que $\int_0^1 \phi = 0$. Consideremos a primitiva de ϕ , isto é, $\psi(t) = \int_0^t \phi(s)ds$, que mostraremos ter suporte em $[a,b]$. Se $t \in [0,a]$ então $\phi(t) = 0 = \psi(t)$ e, se $t \in [b,1]$, como $\int_0^1 \phi = \int_a^b \phi$, temos

$$\psi(t) = \int_0^a \phi + \int_a^b \phi + \int_b^t \phi = 0,$$

mostrando que $\psi \in C_0^\infty(0,1)$. $\square$

Agora mostraremos que o subconjunto das funções $\phi \in C_0^\infty(0,1)$ que possuem primitiva em $C_0^\infty(0,1)$ possui codimensão 1:

Proposição 2.8 *Seja $\phi_1 \in C_0^\infty(0,1)$ tal que $\int_0^1 \phi_1 = 1$. Seja*

$$M := \left\{ \psi \in C_0^\infty(0,1) : \int_0^1 \psi = 0 \right\}.$$

Então M é um hiperplano; mais precisamente, vale a decomposição algébrica⁴

$$C_0^\infty(0,1) = M \oplus \langle \phi_1 \rangle, \quad (2.4)$$

sendo $\langle \phi_1 \rangle$ o espaço unidimensional de múltiplos de ϕ_1 .

Demonstração: Para qualquer $\phi \in C_0^\infty([0,1])$ temos que $\phi = (\phi - \lambda\phi_1) + \lambda\phi_1$. Escolhendo $\lambda = \int_0^1 \phi$, temos que $\phi - \lambda\phi_1 \in M$, provando (2.4). $\square$

Observe que, como M é o núcleo do funcional $\varphi \mapsto \int_0^1 \varphi$, o resultado anterior não passa de uma concretização da Proposição 1.21.

2.3 UM ESPAÇO DE SOBOLEV: $W^{1,2}(0,1)$

Definição 2.9 *Seja $u \in L^2 = L^2([0,1], \mathbb{R})$. Dizemos que u é **fracamente diferenciável** ou **diferenciável no sentido das distribuições**, se existir $v \in L^2$ tal que*

$$\int_0^1 u\phi' = - \int_0^1 v\phi, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(0,1).$$

*Nesse caso, dizemos que v é **derivada fraca** ou **derivada generalizada** de u e escrevemos $v = u'$, mantendo a mesma notação utilizada para a derivada tradicional.*

Na notação $v = u'$ estamos admitindo a unicidade da derivada fraca, fato que agora mostraremos:

Lema 2.10 *A derivada fraca de $u \in L^2$, se existir, é única.*

Demonstração: Suponhamos que existam $v, w \in L^2$ tais que

$$\int_0^1 u\phi' = - \int_0^1 v\phi = - \int_0^1 w\phi, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(0,1).$$

Então

$$\int_0^1 (v - w)\phi = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(0,1). \quad (2.5)$$

A igualdade significa que $(v - w)$ é ortogonal (em L^2) a toda função $\phi \in C_0^\infty(0,1) \subset L^2$. Como $C_0^\infty(0,1)$ é denso em L^2 , isso implica que $v - w$ é ortogonal a qualquer função de L^2 . Assim, $v - w = 0$ em L^2 , ou seja, $v = w$. (Veja também o Exercício 2). $\square$

Mostraremos posteriormente que a derivada de uma função (no sentido tradicional), quando existir, coincide com sua derivada fraca. (Veja a demonstração da Proposição 2.15.)

⁴Com isso estamos querendo dizer que estamos decompondo um espaço vetorial como soma direta de dois subespaços, sem considerar qualquer topologia no espaço vetorial.

Definição 2.11 Definimos o espaço de Sobolev $W^{1,2}([0,1], \mathbb{R})$ como o subconjunto de todas as funções $u \in L^2$ que possuem derivada fraca.

Escreveremos $W^{1,2}$ ao invés de $W^{1,2}([0,1], \mathbb{R})$. É fácil ver que $W^{1,2}$ é um subespaço de L^2 , algumas vezes denotado por $H^1([0,1], \mathbb{R})$.

Em $W^{1,2}(0,1)$ definimos a norma

$$\|u\|_1 = \|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2},$$

que é gerada pelo produto interno

$$\langle u, v \rangle_1 = \langle u, v \rangle + \langle u', v' \rangle,$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno em L^2 .

Note que $\|\cdot\|_{L^2}$ já é uma norma em $W^{1,2}(0,1)$, mas com essa norma esse espaço não é completo (veja o Exercício 4). A definição dada tem a seguinte motivação:

Teorema 2.12 O espaço $(W^{1,2}(0,1), \|\cdot\|_1)$ é um espaço de Hilbert.

Demonstração: Seja (u_n) uma seqüência de Cauchy em $W^{1,2}(0,1)$. Então, (u_n) e (u'_n) são seqüências de Cauchy em L^2 . Assim, existem funções $u \in L^2$ e $g \in L^2$ tais que $u_n \rightarrow u$ e $u'_n \rightarrow g$ em L^2 .

Por definição, temos que

$$\int_0^1 u_n \phi' = - \int_0^1 u'_n \phi, \quad \forall \phi \in C_0^\infty([0,1]).$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, decorre da desigualdade de Cauchy-Schwarz (veja o Exercício 6) que

$$\int_0^1 u \phi' = - \int_0^1 g \phi. \quad (2.6)$$

Assim, $u \in W^{1,2}(0,1)$ e do Lema 2.10 segue que $u' = g$, com $u_n \rightarrow u$ em $W^{1,2}(0,1)$. Como $\|\cdot\|_1$ é gerada por um produto interno, o resultado está provado. $\square$

Se uma função definida em um intervalo tem derivada (tradicional) nula, então ela é constante. Esse resultado também possui generalização para derivadas no sentido fraco.

Lema 2.13 Seja $f \in L^2$. Suponhamos que

$$\int_0^1 f \phi' = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(0,1).$$

Então existe uma constante c tal que $f = c$ em L^2 .

Demonstração: A Proposição 2.8 garante que, para todo $\phi \in C_0^\infty(0,1)$, podemos escrever $\phi = \psi + \lambda\phi_1$, sendo $\psi \in M = \{\psi \in C_0^\infty(0,1) : \int_0^1 \psi = 0\}$, $\phi_1 \in C_0^\infty(0,1)$ tal que $\int_0^1 \phi_1 = 1$ e $\lambda = \int_0^1 \phi$. Portanto,

$$\int_0^1 f\phi = \int_0^1 f\psi + \lambda \int_0^1 f\phi_1 = \left(\int_0^1 \phi\right) \int_0^1 f\phi_1 = c \int_0^1 \phi,$$

sendo $c = \int_0^1 f\phi_1$. (Temos que $\int_0^1 f\psi = 0$. De fato, como $\int_0^1 \psi = 0$, decorre do Lema 2.7 que $\psi = \gamma'$ para algum $\gamma \in C_0^\infty$. Assim, $\int_0^1 f\psi = \int_0^1 f\gamma' = 0$.)

Logo,

$$\int_0^1 (f - c)\phi = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(0,1).$$

Daí decorre, como na demonstração do Lema 2.10, que $f = c$ qtp. $\square$

Definição 2.14 Uma função $u \in W^{1,2}(0,1)$ é **fracamente** C^1 se sua derivada fraca u' estiver em $C^0([0,1])$.

O próximo resultado fornece um método para se determinar se os elementos de $W^{1,2}(0,1)$ estão em $C^1([0,1])$.

Proposição 2.15 Uma função $u \in W^{1,2}(0,1)$ é de classe C^1 se, e somente se, u for fracamente C^1 .

Demonstração: Suponhamos que $u \in C^1([0,1])$. Como u' é contínua, podemos integrar por partes:

$$\int_0^1 u\phi' = u\phi|_0^1 - \int_0^1 u'\phi = - \int_0^1 u'\phi.$$

Assim, a derivada fraca de u é justamente u' .

Suponhamos agora que $u \in W^{1,2}(0,1)$ seja tal que $u' \in C^0([0,1])$. Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, defina $w \in C^1([0,1])$ por

$$w(t) = \int_0^t u'(s)ds.$$

Uma vez que $\int_0^1 u\phi' = - \int_0^1 u'\phi$ para todo $\phi \in C_0^\infty(0,1)$, temos

$$\int_0^1 w\phi' = - \int_0^1 w'\phi = - \int_0^1 u'\phi = \int_0^1 u\phi'.$$

Assim,

$$\int_0^1 (u - w)\phi' = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(0,1).$$

Decorre do Lema 2.13 que existe uma constante c tal que $u - w = c$ qtp. Assim, $u = w + c$ qtp. Isso mostra que existe um representante C^1 na classe da função u . $\square$

2.4 O SUBESPAÇO $W_0^{1,2}(0,1)$

Uma vez que $C_0^\infty(0,1)$ é um subespaço de $W^{1,2}(0,1)$, faz sentido tomar o fecho desse subespaço em $W^{1,2}(0,1)$:

Definição 2.16 Definimos $W_0^{1,2}(0,1)$ como o fecho de $C_0^\infty(0,1)$ em $W^{1,2}(0,1)$.

Note que $W_0^{1,2}(0,1)$ é, por definição, completo. Em princípio, poderia ser que $W_0^{1,2}(0,1) = W^{1,2}(0,1)$. Veremos que isso não acontece.

Proposição 2.17 (Desigualdade de Poincaré) Para toda função $u \in W_0^{1,2}(0,1)$ vale

$$\|u\|_{L^2} \leq \|u'\|_{L^2}.$$

Demonstração: Seja $\phi \in C_0^\infty(0,1)$. Começamos relacionando as normas em L^2 de ϕ e ϕ' . Decorre da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$|\phi(t)| = |\phi(t) - \phi(0)| = \left| \int_0^t \phi'(s) ds \right| \leq \left(\int_0^1 1^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |\phi'|^2 ds \right)^{1/2} = \|\phi'\|_{L^2}.$$

Assim,

$$\|\phi\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |\phi(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 \|\phi'\|_{L^2}^2 dt \right)^{1/2} = \|\phi'\|_{L^2}.$$

Se $u \in W_0^{1,2}(0,1)$, existe uma sequência $\phi_n \in C_0^\infty(0,1)$ tal que $\phi_n \rightarrow u$ e $\phi'_n \rightarrow u'$, ambas as convergências em L^2 . Obtemos o afirmado ao tomar o limite $n \rightarrow \infty$ na desigualdade

$$\|\phi_n\|_{L^2} \leq \|\phi'_n\|_{L^2}. \quad \square$$

Podemos deduzir da desigualdade de Poincaré que $W^{1,2}(0,1) \neq W_0^{1,2}(0,1)$. (Veja o Exercício 8).

A desigualdade de Poincaré nos garante que, para todo $u \in W_0^{1,2}(0,1)$ vale

$$\|u'\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2} \leq 2\|u'\|_{L^2},$$

o que mostra a equivalência da norma $\|\cdot\|_1$ com a norma $\|\cdot\|_0$, assim definida:

$$\|u\|_0 := \|u'\|_{L^2} \quad \forall u \in W_0^{1,2}(0,1).$$

Também a norma $\|\cdot\|_0$ é gerada por um produto interno:

$$\langle u, v \rangle_0 = \int_0^1 u'v'.$$

Assim, $W_0^{1,2}(0,1)$ é um *espaço de Hilbert* com esse produto interno. Uma vez que $W_0^{1,2}([0,1]) \subset L^2([0,1]) = L^2$, o fato de L^2 ser separável garante que $W_0^{1,2}([0,1])$ também é um *separável*.

Vamos agora caracterizar as funções em $W_0^{1,2}(0,1)$ e mostrar que podemos dar um sentido a $u(0)$ e $u(1)$ em $W_0^{1,2}(0,1)$. Como duas funções em $W^{1,2}(0,1)$ são definidas a menos de um conjunto de medida nula, de modo que esse é um fato notável!

Lema 2.18 *Se $u \in W_0^{1,2}(0,1)$, então existe uma função contínua v satisfazendo $v(0) = 0 = v(1)$ tal que $u = v$ q.t.p. Em outras palavras, dada $u \in W_0^{1,2}(0,1)$, podemos supor que u seja contínua e nula nos extremos do intervalo $[0,1]$.*

Demonstração: Considere uma seqüência (ϕ_n) em $C_0^\infty(0,1)$ tal que $\phi_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,2}(0,1)$. A desigualdade de Cauchy-Schwarz nos garante que, para todo $t \in [0,1]$ vale

$$\begin{aligned} |\phi_n(t) - \phi_m(t)| &= \left| \int_0^t \phi_n'(s) ds - \int_0^t \phi_m'(s) ds \right| \\ &\leq \int_0^1 |\phi_n' - \phi_m'| \leq \left(\int_0^1 |\phi_n' - \phi_m'|^2 \right)^{1/2} \\ &= \|\phi_n' - \phi_m'\|_{L^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Assim, $(\phi_n(t))$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$ e, portanto $\phi_n(t) \rightarrow v(t)$ para todo $t \in [0,1]$. (Em particular, $v(0) = v(1) = 0$, pois ϕ_n é nula nos extremos do intervalo $[0,1]$ para qualquer n .) Mas algo mais foi provado: a mesma desigualdade (2.7) vale para todo $t \in [0,1]$, garantindo que a convergência $\phi_n \rightarrow v$ é uniforme. Isso implica que v é uma função contínua e também que $\phi_n \rightarrow v$ em L^2 . (Veja [6].)

Por outro lado, $\phi_n \rightarrow u$ em L^2 , pela própria definição. A unicidade do limite (em L^2) garante então que $u = v$ qtp. (Note que u' é a derivada fraca de v .) $\square$

Observação 2.19 Um resultado importante, cuja prova não será apresentada aqui, é que o conjunto das funções C^∞ que estão em $W^{1,2}(0,1)$ é denso em $W^{1,2}(0,1)$. Utilizando esse resultado, a mesma demonstração do Lema 2.18 garante que, dada $f \in W^{1,2}(0,1)$, existe $g \in C^0([0,1])$ tal que

- (a) $g = f$ em L^2 , isto é, $g = f$ q.t.p.;
- (b) g é uma primitiva de f' ;
- (c) $g' = f'$ no sentido fraco.

Em outras palavras, toda função $f \in W^{1,2}(0,1)$ possui um representante absolutamente contínuo com derivada (q.t.p.) em L^2 .

Uma segunda prova dessa afirmação pode ser feita utilizando-se o Teorema de Fubini. Veja [5]. $\triangleleft$

Teorema 2.20 (Imersão de $W_0^{1,2}(0,1)$ em $C^0([0,1])$)

A imersão de $W_0^{1,2}([0,1])$ em $C^0([0,1])$ é contínua. Em outras palavras, a aplicação identidade $I: W_0^{1,2}([0,1]) \rightarrow C^0([0,1])$ é contínua. Em símbolos,

$$W_0^{1,2}([0,1]) \hookrightarrow C^0([0,1]).$$

Demonstração: Se $\phi_n \in C_0^\infty(0, 1)$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz garante que

$$|\phi_n(t)| = \left| \int_0^t \phi_n'(s) ds \right| \leq \int_0^1 |\phi_n'| \leq \left(\int_0^1 |\phi_n'|^2 \right)^{1/2} = \|\phi_n\|_0.$$

Segue daí que

$$\|\phi_n\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |\phi_n(t)| \leq \|\phi_n\|_0.$$

Pelo Lema 2.18, escolhendo o representante contínuo de $u \in W_0^{1,2}([0,1])$ e uma seqüência (ϕ_n) tal que $\phi_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,2}([0,1])$ e também uniformemente (quer dizer, na norma $\|\cdot\|_\infty$), temos que $\|\phi_n\|_\infty \rightarrow \|u\|_\infty$ e também que $\|\phi_n\|_0 \rightarrow \|u\|_0$. Assim,

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_0,$$

o que mostra o afirmado. $\square$

Observação 2.21 Pode-se mostrar que a imersão I é *compacta*, isto é, leva a bola unitária $B \subset W_0^{1,2}(0,1)$ em um subconjunto relativamente compacto de $C^0([0,1])$. A demonstração decorre imediatamente do Teorema de Arzelà-Ascoli. (Veja [5], p. 129 ou [6].) $\triangleleft$

2.5 DE VOLTA AO LAGRANGEANO

Considerando Γ definido em $W_0^{1,2}([0,1])$, temos o funcional Γ bem definido: o Lema 2.18 (ou então o Teorema 2.20) garante que $F(u) = F \circ u$ é contínua e, portanto, integrável.

Lema 2.22 A função $t \mapsto F(t)$ é uniformemente diferenciável em todo intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $F'(t) = f(t)$. Isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|F(t+s) - F(t) - f(t)s| \leq \epsilon|s| \quad \forall |s| < \delta$$

para todo $t \in [a, b]$.

Demonstração: Com efeito,

$$\begin{aligned} F(t+s) - F(t) - f(t)s &= \int_0^{t+s} f(\tau) d\tau - \int_0^t f(\tau) d\tau - \int_t^{t+s} f(t) d\tau \\ &= \int_t^{t+s} [f(\tau) - f(t)] d\tau. \end{aligned}$$

Como $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, ela é uniformemente contínua no intervalo compacto $[a-1, b+1]$. Portanto, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(\tau) - f(t)| < \epsilon$ sempre que $|\tau - t| < \delta$, com $\tau, t \in [a-1, b+1]$. Isso prova o afirmado. $\square$

Lema 2.23 A função $\Gamma: W_0^{1,2}(0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e

$$\Gamma'(u)v = \int_0^1 u'v' - \int_0^1 f(u)v.$$

Quer dizer, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\Gamma(u+v) - \Gamma(u) - \Gamma'(u)(v)| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad \|v\|_0 < \delta.$$

O funcional linear $\Gamma'(u)$ é contínuo.

Demonstração: Uma vez que $\Gamma(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u'|^2 - \int_0^1 F(u)$, vamos calcular separadamente as derivadas das duas expressões integrais.

Temos que $\frac{1}{2} \int_0^1 |u'|^2 = \frac{1}{2} \langle u, u \rangle_0$. A derivada da aplicação bilinear $\langle u, u \rangle$ foi calculada na observação 2.1. Note que devemos aplicar essa derivada no vetor (v, v) , pois $\Gamma(u)$ não é uma aplicação bilinear. Assim, derivando $\frac{1}{2} \langle u, u \rangle_0$, encontramos

$$\frac{1}{2} (\langle v, u \rangle_0 + \langle u, v \rangle_0) = \langle u, v \rangle_0 = \int_0^1 u'v'.$$

Passamos agora à segunda expressão integral. O Lema 2.22 garante que, escolhido um intervalo $[a, b]$ e dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $t \in [a, b]$,

$$|F(t+s) - F(t) - f(t)s| \leq \epsilon|s| \quad \forall |s| < \delta.$$

Seja $u \in W_0^{1,2}(0,1)$ arbitrária. Pelo Lema 2.18, podemos assumir que u é contínua. Assim, são assumidos os valores $a := \min_{t \in [0,1]} u(t)$ e $b = \max_{t \in [0,1]} u(t)$, o que fixa o intervalo $[a, b]$. Além disso, se exigirmos que $\|v\|_0 < \delta$, teremos que $|v(t)| < \delta$ para todo $t \in [0, 1]$, de acordo com o Teorema 2.20. Portanto,

$$|F(u(t) + v(t)) - F(u(t)) - f(u(t))v(t)| \leq \epsilon|v(t)| \quad \text{sempre que} \quad \|v\|_0 < \delta.$$

Afirmamos que podemos integrar separadamente os termos dessa última desigualdade. De fato, como F, u e v são contínuas, os dois primeiros termos podem ser integrados em $[0, 1]$. Quanto ao terceiro termo, a continuidade de f e u garante que $f(u) \in L^2$. Como $v \in L^2$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz garante que $f(u)v$ está em L^1 .

Assim,

$$\left| \int_0^1 F(u+v) - \int_0^1 F(u) - \int_0^1 f(u)v \right| \leq \int_0^1 |F(u+v) - F(u) - f(u)v| \leq \epsilon \int_0^1 |v|.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade de Poincaré, obtemos que

$$\epsilon \int_0^1 |v| \leq \epsilon \left(\int_0^1 |v|^2 \right)^{1/2} = \epsilon \|v\|_{L^2} \leq \epsilon \|v'\|_{L^2} = \epsilon \|v\|_0.$$

Mostramos assim que

$$\left| \int_0^1 F(u+v) - \int_0^1 F(u) - \int_0^1 f(u)v \right| \leq \epsilon \|v\|_0 \quad \text{sempre que } \|v\|_0 < \delta.$$

Somando as derivadas calculadas, vemos que a derivada $\Gamma'(u)$ tem a forma afirmada.

Note que, como $f(u) \in L^2$, existe $k > 0$ tal que $\|f(u)\|_{L^2} < k$. Portanto

$$\|\Gamma'(u)v\| = |\langle u, v \rangle_0 - \langle f(u), v \rangle_{L^2}| \leq \|u\|_0 \|v\|_0 + k \|v\|_{L^2} \leq c \|v\|_0,$$

de acordo com as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré. $\square$

Teorema 2.24 A função $u \in C^2$ é solução da equação diferencial (2.1) se, e somente se, $\Gamma'(u) \equiv 0$.

Demonstração: Suponhamos que $\Gamma'(u) \equiv 0$. Então, em particular,

$$\int_0^1 u' \phi' = \int_0^1 f(u) \phi \quad \text{para todo } \phi \in C_0^\infty(0,1).$$

Essa igualdade nos mostra que a derivada fraca da função $u' \in L^2$ existe e é igual a $-f(u) \in L^2$. Ora, já vimos que $f(u)$ é contínua, de modo que u' é uma função contínua. A Proposição 2.15 nos garante então que $u' \in C^1([0,1])$. Temos assim que $u'' = -f(u)$. Repetindo o argumento para $u \in W^{1,2}(0,1)$ temos: $u' \in C^1([0,1]) \subset C^0([0,1])$ implica que $u \in C^1([0,1])$ (pela Proposição 2.15); mas $u \in C^1([0,1])$ com $u' \in C^1([0,1])$ nos mostra que $u \in C^2([0,1])$ e $u'' = -f(u)$. Assim, pontos críticos de $\Gamma(u)$ são soluções de classe C^2 da equação $u'' + f(u) = 0$. (Mais precisamente, se $\Gamma'(u) \equiv 0$, então existe $w \in C^2([0,1])$ tal que $w'' + f(w) = 0$ e $w = u$ q.t.p.). Como $u \in W_0^{1,2}(0,1)$, o Lema 2.18 nos garante que a condição de fronteira $u(0) = u(1) = 0$ é satisfeita.

Reciprocamente, suponhamos que $u \in C^2$ satisfaça $u'' + f(u) = 0$, com $u(0) = u(1) = 0$. Temos então que $u \in W_0^{1,2}(0,1)$, com $u'' \in L^2$ e $f(u) \in L^2$. Multiplicando por uma função teste $\phi \in C_0^\infty(0,1)$ e integrando, obtemos

$$\int_0^1 u'' \phi + \int_0^1 f(u) \phi = 0.$$

Integrando a primeira integral por partes, vemos que

$$\int_0^1 u' \phi' = \int_0^1 f(u) \phi \quad \forall \phi \in C_0^\infty(0,1).$$

Ora, como essa igualdade vale no subconjunto $C_0^\infty(0,1)$, que é denso no espaço $W_0^{1,2}(0,1)$, podemos concluir (veja o exercício 11) que

$$\int_0^1 u' v' = \int_0^1 f(u) v \quad \forall v \in W_0^{1,2}(0,1).$$

Isso mostra que $\Gamma'(u) \equiv 0$. $\square$

Assim, para obtermos uma solução do problema (2.1) basta provarmos a existência de pontos críticos do funcional linear Γ . Note que, até o momento, só empregamos a continuidade da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

2.6 PONTOS CRÍTICOS

Começamos mostrando alguns resultados sobre espaços de Hilbert separáveis:

Teorema 2.25 *Seja H um espaço de Hilbert separável. Se (x_n) é uma seqüência limitada em H , isto é, se existe $C > 0$ tal que $\|x_n\| \leq C$ para todo n , então existem uma subseqüência (x_{n_i}) e um elemento $x \in H$ tais que*

$$\langle x_{n_i}, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle \quad \forall y \in H.$$

Observação 2.26 Nesse resultado estamos mostrando que toda seqüência limitada possui uma subseqüência que converge fracamente. $\triangleleft$

Demonstração: Fixado $y \in H$, temos

$$|\langle x_n, y \rangle| \leq \|x_n\| \|y\| \leq C \|y\|,$$

mostrando que a seqüência de números reais $\langle x_n, y \rangle$ é limitada e, portanto, possui uma subseqüência convergente.

Seja $D = \{d_1, d_2, \dots\} \subset H$ um conjunto denso. Tomando $y = d_1$, existe uma subseqüência $(x_{n_{1i}})$ tal que

$$\langle x_{n_{1i}}, d_1 \rangle \text{ é convergente.}$$

Existe agora uma subseqüência $(x_{n_{2i}})$ de $(x_{n_{1i}})$ tal que

$$\langle x_{n_{2i}}, d_i \rangle \text{ é convergente, se } i = 1, 2.$$

Repetindo esse processo (chamado *método diagonal de Cantor*), obtemos uma subseqüência (x_{n_j}) de (x_n) tal que $\langle x_{n_j}, d \rangle$ é convergente, qualquer que seja $d \in D$. Para simplificar a nossa notação, vamos escrever (x_n) ao invés de (x_{n_j}) . Assim, temos que

$$\langle x_n, d \rangle \text{ é convergente } \forall d \in D.$$

Decorre daí que $\langle x_n, y \rangle$ é convergente para todo $y \in H$. De fato, dado $\epsilon > 0$, fixe $y \in H$ e tome $d_y \in D$ tal que $\|y - d_y\| < \epsilon$. Como a seqüência $\langle x_n, d_y \rangle$ é convergente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |\langle x_n, d_y \rangle - \langle x_m, d_y \rangle| < \epsilon.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y \rangle - \langle x_m, y \rangle| &\leq |\langle x_n, y \rangle - \langle x_n, d_y \rangle| + |\langle x_n, d_y \rangle - \langle x_m, d_y \rangle| + |\langle x_m, d_y \rangle - \langle x_m, y \rangle| \\ &\leq \|x_n\| \|y - d_y\| + \epsilon + \|x_m\| \|y - d_y\| \\ &\leq C\epsilon + \epsilon + C\epsilon. \end{aligned}$$

Isso mostra que $\langle x_n, y \rangle$ é de Cauchy e, portanto, convergente.

Definimos então $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle.$$

Obviamente f é um funcional linear. A continuidade de f também é imediata: $|f(y)| \leq C\|y\|$.

Pelo Teorema de Representação de Riesz 1.26 temos que existe $x \in H$ tal que $f(y) = \langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$, para todo $y \in H$. Mas isso é o mesmo que afirmar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall y \in H.$$

□

Definição 2.27 Uma função $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ definida no espaço de Banach X é **coerciva** se $F(x) \rightarrow +\infty$ sempre que $\|x\| \rightarrow \infty$.

Dada uma função contínua e coerciva $F: X \rightarrow \mathbb{R}$, uma vez escolhido um ponto arbitrário de X (por exemplo, $x = 0$), encontramos $R > 0$ tal que $F(x) > F(0)$ sempre que $\|x\| > R$. Assim, se o mínimo de F é atingido num ponto $x_0 \in X$, necessariamente $x_0 \in \overline{B_R(0)}$. Se X tem dimensão infinita, a bola fechada $\overline{B_R(0)}$ não é compacta, de modo que não podemos concluir imediatamente a existência do ponto de mínimo x_0 da função contínua $F: \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{R}$. Essa é a principal dificuldade para a demonstração do próximo resultado.

Teorema 2.28 Sejam H um espaço de Hilbert separável e $F: H \rightarrow \mathbb{K}$ uma função contínua, convexa e coerciva. Então F é limitada inferiormente e existe $x_0 \in H$ tal que

$$F(x_0) = \inf_{x \in H} F(x).$$

Demonstração: Seja $M = F(0)$. A coercividade de F garante a existência de $R > 0$ tal que $F(x) > F(0)$ sempre que $\|x\| > R$.

Consideremos a restrição $F: \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{R}$ e suponhamos, por absurdo, que F não seja limitada inferiormente. Isso implica que existe uma seqüência (x_n) em $\overline{B_R(0)}$ tal que $F(x_n) \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

Como a seqüência (x_n) é limitada, passando a uma subsequência se necessário, o Teorema 2.25 garante que podemos supor que

$$\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle \quad \forall y \in H.$$

Claramente vale $\|x\| \leq R$. VERIFICAR SE É TÃO TRIVIAL.

Fixe $\mathbb{R} \ni a < F(x)$. Como $F(x_n) \rightarrow -\infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F(x_n) \leq a < F(x)$ para todo $n \geq n_0$. Defina $C = F^{-1}(-\infty, a]$. O conjunto C é fechado, como imagem inversa de um fechado por uma função contínua. É fácil verificar que C é convexo (veja o exercício 12). Além disso, $x \notin C$ e $x_n \in C$ para todo $n \geq n_0$.

Assim, o Teorema de Separação de Hahn-Banach 1.18 garante a existência de $y \in H$ tal que

$$\langle x_n, y \rangle < \alpha \leq \langle x, y \rangle \quad \forall n > n_0.$$

Mas isso é um absurdo, pois $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$.

Concluimos assim que F é limitada inferiormente. Seja, portanto $m = \inf_{x \in \overline{B_r(0)}} F(x)$.

Considere então uma seqüência $(x_n) \in \overline{B_r(0)}$ tal que $F(x_n) \rightarrow m$.

Como antes, passando a uma subsequência se necessário, o Teorema 2.25 garante a existência de $x_0 \in \overline{B_r(0)}$ tal que

$$\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x_0, y \rangle \quad \forall y \in H.$$

Afirmamos que $m = F(x_0)$. Se esse não fosse o caso, existiria $\epsilon > 0$ tal que $m + \epsilon < F(x_0)$. Definimos então o convexo fechado $C = F^{-1}(-\infty, m + \epsilon]$. Então existe n_0 tal que $x_n \in C$ para todo $n \geq n_0$ (pois $F(x_n) \rightarrow m$), enquanto $x_0 \notin C$ (pois $F(x_0) > m + \epsilon$).

Uma nova aplicação do Teorema de Separação de Hahn-Banach 1.18 garante a existência de $y \in H$ tal que $\langle z, y \rangle < \alpha \leq \langle x_0, y \rangle$ para todo $z \in C$. Em particular, $\langle x_n, y \rangle < \alpha \leq \langle x_0, y \rangle$ para todo $n \geq n_0$, o que contradiz $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x_0, y \rangle$. Isso completa a demonstração. $\square$

Agora estamos em condições de completar a nosso estudo da equação (2.1).

Teorema 2.29 *Suponhamos que a função contínua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*

(i) *seja decrescente;*

(ii) *existam $0 < a < 1$ e $b > 0$ tais que*

$$|f(t)| \leq a|t| + b \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Então o problema não-linear

$$\begin{aligned} u'' &= -f(u), \quad t \in (0, 1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

possui ao menos uma solução.

Demonstração: Consideremos o funcional energia $\Gamma: W_0^{1,2}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\Gamma(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u'|^2 - \int_0^1 F(u),$$

em que $F(u) = \int_0^t f(u(s))ds$.

De acordo com o Teorema 2.24, a existência de uma solução para o problema não-linear estará garantida se provarmos a existência de um ponto crítico para o funcional Γ . Para isso, mostraremos que Γ é convexa e coerciva.

A condição (i) garante que Γ é convexa. De fato, como $F(t) = \int_0^t f(s)ds$, temos que $F'(t) = f(t)$ é decrescente, o que garante que F é côncava. Como $\|u\|_0^2$ é convexa, $\Gamma(u) = \|u\|_0^2 - \int_0^1 F(u)$ é convexa.

Como $|f(t)| < a|t| + b$, integrando essa desigualdade obtemos $|F(t)| < \frac{1}{2}a|t|^2 + b|t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (veja o Exercício 13). Logo,

$$|F(u(t))| \leq \frac{1}{2}a|u(t)|^2 + b|u(t)| \quad \forall u \in W_0^{1,2}([0, 1]).$$

Segue-se daí que

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(u) &\leq \int_0^1 |F(u(t))| dt \leq \int_0^1 \left[\frac{1}{2} a |u(t)|^2 + b |u(t)| \right] dt \\ &\leq \frac{1}{2} a \|u\|_0^2 + b \|u\|_0 \quad \forall u \in W_0^{1,2}([0,1]). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Gamma(u) = \frac{1}{2} \|u\|_0^2 - \int_0^1 F(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_0^2 - \frac{a}{2} \|u\|_0^2 - b \|u\|_0.$$

Como $0 < a < 1$, temos que $\Gamma(u) \rightarrow +\infty$ quando $\|u\|_0 \rightarrow \infty$, mostrando que Γ é coercivo. $\square$

2.7 EXERCÍCIOS

1. Defina $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp(1/(x^2 - 1)), & \text{se } |x| < 1, \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Mostre que $\varphi \in C_0^\infty([-1,1])$. Verifique também que $\varphi_{a,b}$ definida por $\varphi_{a,b}(x) = \varphi(ax + b)$ é uma função C^∞ de suporte compacto para todos $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Qual é o suporte de $\varphi_{a,b}$? Mostre que $\gamma(x) = f(x)\varphi(x)$ está em $C_0^\infty([-1,1])$ para toda $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ .

2. Suponhamos que a igualdade (2.5) se verifique para $u \in C^0([0,1])$. Escolha adequadamente $\phi \in C_0^\infty(a,b)$ e conclua que $u \equiv 0$. Deduza daí que a igualdade (2.5) é válida se $u \in L^2$.
3. Mostre que a função

$$u(t) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ t & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

pertence a $W^{1,2}([0,1])$ e calcule sua derivada fraca

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t < 1/2 \\ 1 & \text{se } 1/2 < t \leq 1 \end{cases}$$

Generalize: mostre que toda função contínua que possua derivada contínua por partes pertence a $W^{1,2}([0,1])$.

Mostre, por outro lado, que $H \notin W^{1,2}([0,1])$.

4. Mostre que $W^{1,2}([0,1])$ não é completo com a norma $\|\cdot\|_{L^p}$.
5. Mostre que a norma $\|u\| = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$ é equivalente à norma $\|\cdot\|_1$ do espaço $W^{1,2}([0,1])$.

6. Mostre a igualdade (2.6).
7. Mostre que $W^{1,2}$ é separável.
8. Dê exemplo de $u \in W^{1,2}([0,1])$ para o qual não vale a desigualdade de Poincaré.
9. Na demonstração do Lema 2.18, justifique: $\phi_n \rightarrow v$ na norma $\|\cdot\|_{L^2}$.
10. Mostre que a imersão $W_0^{1,2}([0,1]) \hookrightarrow C^0([0,1])$ é compacta.
11. Mostre que, se

$$\int_0^1 u' \phi' = \int_0^1 f(u) \phi \quad \forall \phi \in C_0^\infty(0,1),$$

então podemos concluir que

$$\int_0^1 u' v' = \int_0^1 f(u) v \quad \forall v \in W_0^{1,2}([0,1]).$$

12. Mostre que o conjunto $C = F^{-1}(-\infty, a]$ utilizado na demonstração do Teorema 2.28 é convexo.
13. Preencha os detalhes na demonstração do Teorema 2.29.
14. Seja $\mathcal{V} = C_0^\infty(0,1)$ considerado como espaço vetorial. Seja $T: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo tal que $T(f') = 0$, para todo $f \in \mathcal{V}$ (f' denota a derivada de f). Mostre que T é constante, no seguinte sentido: existe uma constante c tal que $T(f) = \int cf$, para todo $f \in \mathcal{V}$.

Esse resultado é chamado *Princípio Geral de Regularização*. (Compare esse resultado com o Lema 2.7, a Proposição 2.8 e o Lema 2.13. O Lema 2.13 é o caso particular em que T é definido em f por meio de integração.)

Os próximos exercícios apresentam variações sobre o problema tratado neste Capítulo e têm o objetivo de fixar aspectos do método utilizado em sua solução. Começamos com uma versão mais simples do mesmo problema:

15. Considere o problema linear

$$\begin{aligned} u'' &= -f(t), \quad t \in (0,1) \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

em que a função $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Vamos ignorar o fato que esse problema pode ser resolvido diretamente e considerar uma abordagem alternativa para o mesmo.

- (a) Suponha a existência de uma solução $u \in C^2 = C^2([0,1], \mathbb{R})$ para (2.8). Multiplique essa equação por uma função teste $\phi \in C_0^\infty(0,1)$, integre no intervalo $(0,1)$ e obtenha

$$\int_0^1 u' \phi' = \int_0^1 f \phi,$$

ou, o que é o mesmo,

$$\langle u', \phi' \rangle = \langle f, \phi \rangle,$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno em $L^2 = L^2([0, 1], \mathbb{R})$.

A igualdade anterior é chamada *formulação fraca* do problema (2.8) e qualquer solução dessa igualdade é chamada *solução fraca* de (2.8). Note que essa formulação faz sentido se $u \in W_0^{1,2}$ e $f \in L^2$.

(b) Defina $B: W_0^{1,2} \times W_0^{1,2} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$B(u, v) = \int_0^1 u'v'.$$

Mostre que B é uma forma bilinear, contínua e coerciva. Conclua a existência de uma única solução para o problema $B(u, v) = \langle f, v \rangle$.

(c) Mostre que u é de classe C^2 e uma solução de (2.8).

(d) Seja u a única solução de (2.8). Mostre que

$$\Gamma(u) = \min_{v \in W_0^{1,2}} \Gamma(v),$$

em que

$$\Gamma(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 |v'|^2 - \int_0^1 f v.$$

16. Considere o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} -u'' + \kappa u &= f(t), \quad t \in (0, 1) \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

em que κ é uma constante não negativa.

(a) Procedendo de maneira semelhante ao Exercício 15, obtenha a formulação fraca de (2.9):

$$\int_0^1 u' \phi' + \kappa \int_0^1 u \phi = \int_0^1 f \phi,$$

em que $\phi \in C_0^\infty(0, 1)$.

(b) Defina $B: W_0^{1,2} \times W_0^{1,2} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$B(u, v) = \int_0^1 u'v' + \kappa \int_0^1 uv,$$

de modo que a formulação fraca de (2.9) pode ser escrita como

$$B(u, \phi) = \langle u, \phi \rangle, \quad \phi \in C_0^\infty(0, 1).$$

Mostre que B é uma forma bilinear, contínua e coerciva. Conclua a existência de uma única solução para o problema $B(u, \phi) = \langle u, \phi \rangle$.

- (c) Mostre que u é de classe C^2 e uma solução de (2.9).
 (d) Seja u a única solução de (2.9). Mostre que

$$\Gamma(u) = \min_{v \in W_0^{1,2}} \Gamma(v),$$

em que

$$\Gamma(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left((v')^2 + \kappa v^2 \right) - \int_0^1 f v.$$

17. Consideremos o problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} -(pu')' + qu &= f(t), \quad t \in (0, 1) \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

em que $p: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 e $q, f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, com

$$p(t) \geq \alpha > 0 \quad \forall t \in [0, 1].$$

- (a) Obtenha a formulação fraca de (2.10):

$$\int_0^1 pu'\phi' + \int_0^1 qu\phi = \int_0^1 f\phi,$$

em que $\phi \in C_0^\infty(0, 1)$.

- (b) Defina $B: W_0^{1,2} \times W_0^{1,2} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$B(u, v) = \int_0^1 pu'v' + \kappa \int_0^1 uv,$$

de modo que a formulação fraca de (2.10) pode ser escrita como

$$B(u, \phi) = \langle u, \phi \rangle, \quad \phi \in C_0^\infty(0, 1).$$

Mostre que B é uma forma bilinear, contínua e coerciva. Conclua a existência de uma única solução para o problema $B(u, \phi) = \langle u, \phi \rangle$.

- (c) Mostre que u é de classe C^2 e uma solução de (2.9).
 (d) Seja u a única solução de (2.9). Mostre que

$$\Gamma(u) = \min_{v \in W_0^{1,2}} \Gamma(v),$$

em que

$$\Gamma(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(p(v')^2 + qv^2 \right) - \int_0^1 f v.$$

18. Considere, com as mesmas hipóteses do Exercício 17, o problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} -(pu')' + ru' + qu &= f(t), \quad t \in (0, 1) \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

em que $r: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

- (a) Repita a argumentação do Exercício 17 e mostre que só obtemos uma forma bilinear não é simétrica ou coerciva. (A coercividade pode ser obtida com condições adicionais sobre q e r .)
- (b) Para obter uma solução de modo semelhante ao Exercício 17, defina R como uma primitiva de r/p e $\zeta = e^{-R}$. Multiplique a equação em (2.11) por ζ e chegue à equação

$$-(\zeta pu') + \zeta qu = \zeta f.$$

Proceda como no Exercício 17 e obtenha uma única solução u de classe C^2 para o problema (2.11), obtida como

$$\min_{v \in W_0^{1,2}} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 (\zeta p(v')^2 + \zeta qv^2) - \int_0^1 \zeta f v \right\}.$$

19. Considere no problema (2.1) a não linearidade

$$f(s) = |s|^{q-2}s, \quad 1 < q < 2.$$

- (a) Mostre que existem constantes $0 < a < 1$ e $b > 0$ tais que $|f(s)| \leq a|s| + b$ para todo $u \in \mathbb{R}$.
- (b) Encontre a expressão para o Funcional Energia Γ associado a não linearidade $f(u)$.
- (c) Mostre que Γ assume valores negativos e conclua que a solução de (7.1) dada como um ponto de mínimo de Γ não pode ser identicamente nula.
20. Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável e $F: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$ uma função contínua e convexa. Suponha que $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} F(x) = \infty$. Mostre que F é limitada inferiormente e que existe $x_0 \in H$ tal que

$$F(x_0) = \inf_{x \in H} F(x).$$

Para demonstrar esse resultado,

- (a) Suponha que F não seja limitada inferiormente e obtenha uma sequência (x_n) tal que $F(x_n) \rightarrow -\infty$. Fixe $\mathbb{R} \ni a < F(x)$ e conclua $x_n \rightharpoonup x$, com x em um conjunto limitado. Defina $C = F^{-1}(-\infty, a]$. Mostre que C é fechado e convexo. Verifique que $x \notin C$. Aplique o Teorema de Separação de Hahn-Banach 1.18 e o Teorema de Representação de Riesz e chegue a um absurdo, mostrando que F é limitada inferiormente.

- (b) Seja m o ínfimo de $F(x)$ e tome uma seqüência (x_n) com $F(x_n) \rightarrow m$. Passando a uma subsequência, obtenha $x_n \rightharpoonup x_0$. Mostre que $m = F(x_0)$ supondo o resultado falso e chegando a uma contradição utilizando novamente o Teorema de Separação de Hahn-Banach.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] N.I. Akhiezer e I.M. Glazman: *Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces*, Dover, New York, 1993.
- [2] H.W. Alt: *Lineare Funktionalanalysis*, 2. Auflage, Springer, Berlin, 1992.
- [3] J.F. Andrade: *Um exemplo (simples) de um operador auto-adjunto sem autovalores e outros exemplos*, *Matemática Universitária* **37** (2004), 9-14.
- [4] G. Bachman e L. Narici: *Functional analysis*, Academic Press, New York, 1966.
- [5] H. Brezis: *Analyse fonctionnelle - théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [6] H.P. Bueno, G. Ercole e A. Zumpano: *Introdução à Análise Funcional*, em preparação.
- [7] L. Debnath e P. Mikusiński: *Introduction to Hilbert spaces with applications*, Academic Press, Boston, 1990.
- [8] K. Deimling: *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [9] D.G. de Figueiredo: *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, *Lecture Notes in Mathematics* **957** (1982), Springer-Verlag, Berlin, 34-87.
- [10] S. Goldberg: *Unbounded Linear Operators*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [11] Halmos, *Naïve Set Theory*. (CORRIGIR)
- [12] G. Helmberg: *Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space*, North-Holland, Amsterdam, 1969.
- [13] C.S. Hönig: *Análise Funcional e o Problema de Sturm-Liouville*, Ed. Edgard Blücher-Ed. da USP, São Paulo, 1978.
- [14] C.S. Hönig: *Análise Funcional e Aplicações*, IME-USP, São Paulo, 1970.
- [15] C. A. Isnard e B. F. Svaiter: *On Zorn's Lemma*, *Informes de Matemática* **146**, Impa, Rio de Janeiro, 1997.
- [16] L. Jantscher: *Hilberträume*, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1977.

- [17] A. N. Kolmogorov e S. V. Fomin: Elementos de la Teoria de Funciones y del Analysis Funcional, Editorial Mir, Moscu, 1978.
- [18] S. Lang: Real and Functional Analysis, 3rd. Edition, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [19] P.D. Lax: Linear Algebra, Wiley-Interscience Publication, New York, 1997.
- [20] P.D. Lax: Functional Analysis, Wiley-Interscience Publication, New York, 2002.
- [21] E.L. Lima: Análise no Espaço $\mathbb{R}^n$, Editora Universidade de Brasília/Editora Edgar Blücher Ltda, 1970.
- [22] E.L. Lima: Curso de Análise, volume 1, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.
- [23] E.L. Lima: Curso de Análise, volume 2, IMPA, Rio de Janeiro, 1981.
- [24] E.L. Lima: Espaços Métricos, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.
- [25] :M. Reed and B. Simon: Methods of Modern Mathematical Physics, v. 1, Academic Press, New York, 1972.
- [26] H. L. Royden: Real Analysis, 2nd. Edition, Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 1968.
- [27] W. Rudin: Real and Complex Analysis, 3rd. Edition, McGraw-Hill International Editions, New York, 1987.
- [28] W. Rudin: Functional Analysis, 2nd. Edition, McGraw-Hill, New York, 1991.
- [29] R. J. Santos: Álgebra Linear e Aplicações, Departamento de Matemática da UFMG, Belo Horizonte, 2004.
- [30] I. Stakgold: Green's Functions and Boundary Value Problems, Wiley, New York, 1979.
- [31] A.E. Taylor e Lay: Introduction to Functional Analysis xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
- [32] H.F. Weinberger: A first course in partial differential equations with complex variables and transform methods, Blaisdell, New York, 1965.
- [33] A. Wilansky: Functional Analysis, Blaisdell, New York, 1964.
- [34] R.L. Wheeden e A. Zygmund: Measure and Integral, Marcel Dekker, New York, 1977.