

Sumário

1	ESPAÇOS NORMADOS	1
1.1	PRODUTO INTERNO	1
1.2	NORMA	1
1.3	APLICAÇÕES LINEARES CONTÍNUAS	4
1.4	LEMA DA CONTRAÇÃO	7
1.5	EXERCÍCIOS	9
2	APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS	14
2.1	DEFINIÇÃO	14
2.2	EXEMPLOS	15
2.3	INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA	21
2.4	APLICAÇÕES DE CLASSE C^1	22
2.5	EXERCÍCIOS	27
3	PROPRIEDADES DA DERIVADA	31
3.1	A REGRA DA CADEIA	31
3.2	O TEOREMA DO VALOR MÉDIO	34
3.3	DESIGUALDADE DO VALOR MÉDIO	34
3.4	CONSEQÜÊNCIAS DA DESIGUALDADE DO VALOR MÉDIO	36
3.5	DERIVADAS PARCIAIS	39
3.6	EXERCÍCIOS	43
4	APLICAÇÕES INJETORAS E SOBREJETORAS	48
4.1	DIFEOMORFISMOS	49
4.2	PERTURBAÇÕES DE APLICAÇÕES LINEARES	49
4.3	O TEOREMA DA APLICAÇÃO INJETORA	51
4.4	O TEOREMA DA APLICAÇÃO SOBREJETORA	54
4.5	O TEOREMA DA APLICAÇÃO INVERSA	55
4.6	EXERCÍCIOS	56
5	APLICAÇÕES IMPLÍCITAS	58
5.1	O TEOREMA DA APLICAÇÃO IMPLÍCITA	58
5.2	FORMA LOCAL DAS IMERSÕES	64
5.3	O TEOREMA DO POSTO	66
5.4	EXERCÍCIOS	71

6	SUPERFÍCIES NO $\mathbb{R}^n$	74
6.1	DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR	74
6.2	SUPERFÍCIES DIFERENCIÁVEIS NO $\mathbb{R}^n$	75
6.3	APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS ENTRE SUPERFÍCIES	81
6.4	SUPERFÍCIES, GRÁFICOS E IMAGENS INVERSAS	83
6.5	EXERCÍCIOS	85
7	A FÓRMULA DE TAYLOR	90
7.1	O TEOREMA DE SCHWARZ	90
7.2	A FÓRMULA DE TAYLOR COM RESTO INFINITESIMAL	92
7.3	A FÓRMULA DE TAYLOR COM RESTO INTEGRAL	95
7.4	A FÓRMULA DE TAYLOR COM RESTO DE LAGRANGE	96
7.5	MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES REAIS	97
7.6	MULTIPLICADORES DE LAGRANGE	103
7.7	EXERCÍCIOS	107
8	SUPERFÍCIES ORIENTÁVEIS E COM BORDO	108
8.1	SUPERFÍCIES ORIENTÁVEIS	108
8.2	SUPERFÍCIES COM BORDO	112
8.3	ORIENTAÇÃO EM SUPERFÍCIES COM BORDO	117
8.4	PARTIÇÕES DA UNIDADE	120
8.5	EXERCÍCIOS	120
9	MUDANÇA DE VARIÁVEIS	123
9.1	O CASO UNIDIMENSIONAL	123
9.2	O TEOREMA DE MUDANÇA DE VARIÁVEIS	123

Capítulo 1

ESPAÇOS NORMADOS

1.1 PRODUTO INTERNO

Definição 1.1 *Seja E um espaço vetorial sobre os reais. Um **produto interno** em E é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
- (ii) $\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$;
- (iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Um espaço E com produto interno é **euclidiano** se ele tem dimensão finita.¹

Exemplo 1 Se $E = \mathbb{R}^n$, o produto interno **canônico** (também chamado de produto escalar) é definido por

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y := \sum_{i=1}^n x_i y_i = (x_1 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

em que $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$. ◁

Definição 1.2 *Sejam x, y vetores do espaço com produto interno E . Esses vetores são **ortogonais** (ou **perpendiculares**) se $\langle x, y \rangle = 0$. Nesse caso escrevemos $x \perp y$.*

Posteriormente justificaremos geometricamente essa definição.

1.2 NORMA

Definição 1.3 *Seja E um espaço vetorial sobre os reais. Uma **norma** em E é uma aplicação $\| \cdot \| : E \rightarrow [0, \infty)$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

¹Essa terminologia varia de acordo com o texto consultado: em alguns, um espaço euclidiano é um espaço com produto interno, mesmo em dimensão infinita.

- (i) $\|x\| > 0$ se $x \neq 0$;
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, para $\lambda \in \mathbb{R}$;
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Se E possui uma norma, dizemos que E é um espaço **normado**. Se o espaço normado E for completo (isto é, seqüências de Cauchy em E são sempre convergentes), então E é um **espaço de Banach**.

O valor $\|x\|$ pode ser interpretado geometricamente como o comprimento do vetor x . Se $\|x\| = 1$, o vetor x é **unitário**.

Seja E um espaço com produto interno. Consideremos (com abuso de notação) $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$. Vamos mostrar que essa notação se justifica, isto é, que $\langle x, x \rangle^{1/2}$ realmente define uma norma. Começamos justificando a definição de perpendicularidade dada acima.

Teorema 1.4 (Pitágoras)

Seja E um espaço real com produto interno e $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$. Então, $x \perp y$ se, e somente se,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Demonstração: Basta desenvolver $\|x + y\|^2$:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

O afirmado decorre imediatamente das igualdades anteriores. □

Proposição 1.5 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Seja E um espaço com produto interno. Então, se $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$, temos para todos $x, y \in E$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Demonstração: A prova que apresentaremos é bem geométrica. (Interprete!)

Se $x = \lambda y$, então $|\langle x, y \rangle| = |\lambda| \langle y, y \rangle = |\lambda| \|y\|^2 = \|x\| \|y\|$. Se $x \neq \lambda y$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $|\langle y - \alpha x, x \rangle| = 0$. De fato, basta tomar $\alpha := \langle x, y \rangle / \|x\|^2$; note que $\|x\| = 0$ está incluído no caso anterior. Então, pelo Teorema de Pitágoras,

$$\|\alpha x\|^2 < \|y\|^2.$$

Substituindo o valor de α , obtemos

$$\frac{|\langle y, x \rangle|^2}{\|x\|^4} \|x\|^2 < \|y\|^2,$$

e a desigualdade de Cauchy-Schwarz segue-se imediatamente daí, pois $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$. □

Agora estamos em condições de justificar a notação $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$.

Proposição 1.6 *Todo espaço com produto interno E tem uma norma definida por $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$.*

Demonstração: A primeira propriedade de norma decorre imediatamente da definição do produto interno. Além disso,

$$\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle = |\lambda|^2 \|x\|^2.$$

Finalmente, temos que

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned} \quad \square$$

A seguinte propriedade de espaços com produto interno é imediata (desenvolva o lado esquerdo da equação):

Proposição 1.7 *Em todo espaço com produto interno vale a identidade do paralelogramo:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Observação 1.8 Seja $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base do espaço vetorial E . Um elemento $x \in E$ escreve-se então como combinação linear dos elementos da base: $x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, em que os escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são únicos. Dessa forma temos induzido um isomorfismo entre E e $\mathbb{R}^n$, por meio da associação

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Denotamos $[x]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Dessa forma, obtemos um produto interno em E ao definirmos

$$\langle x, y \rangle = [x]_{\mathcal{B}}^t [y]_{\mathcal{B}}.$$

Note que a definição desse produto interno é a generalização do Exemplo 1.

Assim, ao dizermos que um espaço vetorial de dimensão finita é euclidiano, não estamos atribuindo uma propriedade especial a esse espaço. Estamos, na verdade, especificando que naquele espaço foi escolhido um determinado produto interno, entre os vários produtos internos com que ele poderia ser considerado.

Se essa é a situação em dimensão finita, espaços de dimensão infinita são muito diferentes: mesmo quando possível, nem sempre é razoável (ou desejável) definir um produto interno nesses espaços. Em muitas situações práticas, um espaço vetorial tem uma norma que está naturalmente associada ao problema considerado, a qual pode gerar uma topologia que não é equivalente àquela gerada por um produto interno. (Veja a Definição 1.12 para o conceito de normas equivalentes.) $\triangleleft$

Lema 1.9 *Seja E um espaço real com produto interno. Então vale a identidade de polarização:*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \|x + y\|^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2.$$

Demonstração: Basta desenvolver o lado direito da igualdade. $\square$

Num espaço com produto interno, a identidade de polarização permite recuperar o produto interno, conhecida a norma. (Veja o Exercício 27.)

1.3 APLICAÇÕES LINEARES CONTÍNUAS

Se X e Y forem espaços vetoriais normados, nem toda aplicação linear $T : X \rightarrow Y$ é contínua. Para mostrarmos esse fato, começamos com a caracterização das aplicações lineares contínuas:

Teorema 1.10 *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear. São equivalentes as propriedades:*

- (i) T é contínua na origem;
- (ii) $\sup_{\|x\|=1} \|T \cdot x\| = M < \infty$ (T é limitada);
- (iii) existe $C > 0$ tal que $\|T \cdot x\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$;
- (iv) T é contínua.

Demonstração: A linearidade de T imediatamente nos garante que (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i). Para mostrar (i) $\Rightarrow$ (ii), suponhamos (ii) falsa. Então, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existe $y_n \in X$ tal que $\|y_n\| = 1$ e $\|T \cdot y_n\| \geq n$. Definindo $x_n = y_n/n$, temos que $x_n \rightarrow 0$, enquanto $\|T \cdot x_n\| \geq 1$, contradizendo (i). Finalmente, (ii) $\Rightarrow$ (iii), pois, se $x \neq 0$, então $x/\|x\|$ tem norma 1 e, portanto $\|T \cdot (x/\|x\|)\| \leq M$. Mas então $\|T \cdot x\| \leq M\|x\|$. $\square$

Corolário 1.11 *Uma aplicação linear $T : X \rightarrow Y$ **sobrejetora** é um homeomorfismo (isto é, uma bijeção contínua com inversa contínua) entre os espaços normados X e Y se existirem constantes $\kappa > 0$ e $\lambda > 0$ de modo que*

$$\kappa\|x\| \leq \|T \cdot x\| \leq \lambda\|x\|.$$

Demonstração: Basta notar que a continuidade de T^{-1} equivale à existência de uma constante $\kappa^{-1} > 0$ tal que $\|T^{-1} \cdot y\| \leq \kappa^{-1}\|y\|$ para todo $Y \ni y = T \cdot x$, com $x \in X$. $\square$

Dizemos que os espaços X e Y são **linearmente homeomorfos** se existir um homeomorfismo linear $T : X \rightarrow Y$.

Exemplo 2 Seja $\mathbb{R}[t]$ o espaço vetorial de todos os polinômios (com coeficientes em $\mathbb{R}$) na variável t . Para $p \in \mathbb{R}[t]$, definimos

$$\|p\| = \sup_{t \in [0,1]} |p(t)|.$$

O Teorema Fundamental da Álgebra garante que $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathbb{R}[t]$. Definimos agora $T : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}$ por $T \cdot p = p(2)$. Claramente T é linear. Mostraremos que T é descontínua no polinômio $p = 0$. De fato, tomando $\epsilon = 1/2$, consideremos o polinômio $p_n := (t/2)^n$. Claramente $\|p_n - 0\| = 1/2^n$, mas $|T \cdot p_n - 0| = |T \cdot p_n| = 1$. $\triangleleft$

Quando o mesmo espaço X for considerado com diferentes normas, algumas vezes empregaremos a notação $(X, \|\cdot\|)$ para ressaltarmos que X está sendo considerado com a norma $\|\cdot\|$.

Definição 1.12 Duas normas $\|\cdot\|_0$ e $\|\cdot\|_1$ num espaço X são equivalentes se a aplicação identidade $I : (X, \|\cdot\|_0) \mapsto (X, \|\cdot\|_1)$ for um homeomorfismo. Em outras palavras, se existirem constantes $\kappa > 0$ e $\lambda > 0$ de modo que

$$\kappa\|x\|_0 < \|x\|_1 \leq \lambda\|x\|_0.$$

Vamos mostrar, seguindo [13], que todas as normas num espaço normado de dimensão finita são equivalentes.

Para isso, relembramos que um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, for limitado e fechado; e também que toda função contínua definida num compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ assume máximo e mínimo em K .

Lema 1.13 Seja X um espaço vetorial normado. Considere $\mathbb{R}^n$ com a norma $\|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$. Então toda aplicação linear $T : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow X$ é contínua.

Demonstração: Se $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$, definindo $\lambda = \|T \cdot e_1\| + \dots + \|T \cdot e_n\|$, temos

$$\|T \cdot x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i T \cdot e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|T \cdot e_i\| \leq \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \sum_{i=1}^n \|T \cdot e_i\| = \lambda \|x\|_\infty.$$

□

Teorema 1.14 Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{R}$. Então X é linearmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Escolha uma base $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ em X e considere $x = \alpha_1x_1 + \dots + \alpha_nx_n \in X$. A representação $[x]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor $\alpha = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n)^t \in \mathbb{R}^n$. Consideremos o isomorfismo $T : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow X$ por $T \cdot \alpha = x$. De acordo com o Lema 1.13, T é contínua.

Definimos agora $f : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow [0, \infty)$ por $f(x) = \|T \cdot x\|$. Decorre do Exercício 18 que f é uma função contínua. Assim, f assume um mínimo no compacto $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$. Esse mínimo é positivo, pois $\|\cdot\|$ é uma norma em X . Assim, se $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$, temos $(x/\|x\|_\infty) \in S$ e

$$f\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) = \left\| \frac{T \cdot x}{\|x\|_\infty} \right\| \geq \kappa \quad \Leftrightarrow \quad \kappa \|x\|_\infty \leq \|T \cdot x\|.$$

O Corolário 1.11 garante então que T é um homeomorfismo. □

Corolário 1.15 Sejam X e Y espaços normados, $\dim X = n$. Então toda aplicação linear $T : X \rightarrow Y$ é contínua.

Demonstração: Seja $S : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ um homeomorfismo linear. Então $U = T \circ S : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$ é uma aplicação linear contínua, de acordo com o Lema 1.13. Mas então $T = U \circ S^{-1}$ é uma aplicação linear contínua. □

Corolário 1.16 Todas as normas num espaço vetorial X de dimensão finita são equivalentes.

Demonstração: Se $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ forem duas normas em X , decorre do Corolário 1.15 que as aplicações identidade $I_{12} : (X, \|\cdot\|_1) \mapsto (X, \|\cdot\|_2)$ e $I_{21} : (X, \|\cdot\|_2) \mapsto (X, \|\cdot\|_1)$ são contínuas. Isso garante a equivalência das normas consideradas. $\square$

Seja $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$ uma matriz. Identificando $\mathbb{M}_{m \times n}$ com $\mathbb{R}^{mn}$, podemos introduzir uma noção natural de norma em $\mathbb{M}_{m \times n}$ e transformá-lo num espaço normado. Contudo, seguiremos um caminho mais geral: se $T : X \rightarrow Y$ for uma aplicação linear **contínua**, definiremos diretamente a **norma de uma aplicação linear** $\|T\|$.

Definição 1.17 *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear contínua. Definimos*

$$\|T\| = \max_{\|x\| \leq 1} \|T \cdot x\|.$$

Nessa definição, note que $\|\cdot\|$ designa tanto a norma em X quanto a norma em Y . A definição nos mostra que $\|T \cdot x\| \leq \|T\| \|x\|$ para todo $x \in X$.

O próximo resultado garante que $\|\cdot\|$ é realmente uma norma no espaço vetorial $\mathcal{L}(X, Y)$ de todas as aplicações lineares **contínuas** de X em Y .

Proposição 1.18 *Sejam X, Y espaços normados e $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear contínua. Então*

(i) $\|T\|$ é uma norma;

(ii) $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$.

Demonstração: Claramente $\|T\| \geq 0$ e $\|T\| = 0$ se, e somente se, $T \cdot x = 0$ para todo $x \neq 0$. Vale

$$\|\lambda T\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|\lambda T \cdot x\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \frac{|\lambda| \|T \cdot x\|}{\|x\|} = |\lambda| \max_{x \neq 0} \frac{\|T \cdot x\|}{\|x\|} = |\lambda| \|T\|.$$

Além disso,

$$\|S + T\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|(S + T)x\|}{\|x\|} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\|Sx\| + \|T \cdot x\|}{\|x\|} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} + \max_{x \neq 0} \frac{\|T \cdot x\|}{\|x\|} = \|S\| + \|T\|.$$

(ii) $\|(ST)x\| = \|S(T \cdot x)\| \leq \|S\| \|T \cdot x\| \leq \|S\| \|T\| \|x\|$. $\square$

Observação 1.19 A norma da aplicação T depende das normas escolhidas nos espaços X e Y (veja em [11], p. 65, uma tabela relacionando a norma de uma matriz A , $m \times n$, com diferentes normas nos espaços $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$).

Consideremos então uma aplicação linear $T : X \rightarrow Y$ entre espaços normados, com $\dim X = n$ e $\dim Y = m$. A escolha de bases nos espaços X e Y gera isomorfismos entre X e $\mathbb{R}^n$ e Y e $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Esses isomorfismos não precisam ser isométricos, de forma que representações matriciais de T podem possuir normas diferentes da norma da aplicação T .

Contudo, se os espaços envolvidos forem euclidianos, a norma da aplicação T é igual à norma (como aplicação linear) de qualquer uma de suas representações matriciais referentes a bases ortonormais nos espaços X e Y , pois as matrizes mudança de base envolvidas serão sempre unitárias. (Veja o Exercício 20.) $\triangleleft$

1.4 LEMA DA CONTRAÇÃO

Definição 1.20 *Sejam X, Y espaços normados e $F \subset X$ um conjunto qualquer. Uma aplicação $\Phi : F \rightarrow Y$ é chamada **contração**, se existir um número k , com $0 < k < 1$ tal que*

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq k\|x - y\|, \quad \forall x, y \in F.$$

Exemplo 3 Consideremos uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| =: k < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então f é uma contração. Afirmamos que f tem um ponto fixo, isto é, existe um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = x_0$. Para isto, consideremos $f(0)$. Se for $f(0) > 0$, consideremos $x > 0$ suficientemente grande. Então $f(x) = f(0) + f'(h)x < f(0) + kx < x$. Isto mostra que $f(x)$ cruza a reta $y = x$, de acordo com o Teorema do Valor Intermediário. Se for $f(0) < 0$ tome $x < 0$ tal que $|x|$ seja suficientemente grande e repita o argumento. $\triangleleft$

O próximo resultado nos dá um método para encontrarmos **pontos fixos** de aplicações $f : A \subset X \rightarrow X$, isto é, pontos $x \in A$ tais que $f(x) = x$. Esses resultados são importantes, pois a procura de uma solução x da equação $f(x) = b$ reduz-se à obtenção de um ponto fixo da aplicação $\Phi(x) = f(x) + x - b$.

Lema 1.21 (Lema da Contração)

Seja X um espaço de Banach e $F \subset X$ um conjunto fechado. Toda contração $\Phi : F \rightarrow F$ possui um único ponto fixo, isto é, existe um único $x_0 \in F$ tal que $\Phi(x_0) = x_0$. Além disto, x_0 é um ponto atrator de Φ , isto é, para qualquer $y_0 \in F$, a seqüência $(\Phi^j(y_0))_{j \in \mathbb{N}}$ converge para x_0 .

Demonstração: Escolha $y_0 \in F$ e defina a seqüência $y_n = \Phi^n(y_0)$. Temos então, para $n \geq m$,

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\| &\leq \sum_{j=m+1}^n \|y_j - y_{j-1}\| \\ &= \sum_{j=m+1}^n \|\Phi^{j-1}(y_1) - \Phi^{j-1}(y_0)\| \\ &\leq \sum_{j=m+1}^n k^{j-1} \|y_1 - y_0\| \\ &\leq \frac{k^m}{1-k} \|y_1 - y_0\| \rightarrow 0 \text{ quando } m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Isto mostra que (y_n) é uma seqüência de Cauchy; como F é completo, $y_n \rightarrow x_0 \in F$. Como Φ é contínua, temos

$$\Phi(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = x_0.$$

Isto mostra que x_0 é um ponto fixo atrator. A unicidade do ponto fixo decorre imediatamente do fato de Φ ser uma contração. $\square$

Teorema 1.22 (Teorema do Ponto Fixo de Banach-Cacciopoli)

Sejam F um subconjunto fechado de um espaço de Banach X e $\Phi : F \rightarrow F$ uma aplicação tal que, para algum inteiro $n > 0$, Φ^n seja uma contração. Então o Lema da Contração é válido para o operador Φ .

Demonstração: Seja x_0 o ponto fixo de Φ^n dado pelo Lema da Contração. De $\Phi^n(x_0) = x_0$ vem $\Phi^{n+1}(x_0) = \Phi(x_0)$ e portanto $\Phi^n(\Phi(x_0)) = \Phi(x_0)$. Isso mostra que $\Phi(x_0)$ é um ponto fixo de Φ^n . Como o ponto fixo de Φ^n é único, devemos ter $\Phi(x_0) = x_0$.

Notamos agora que qualquer ponto fixo y_0 de Φ tem que ser um ponto fixo de Φ^n : $\Phi^n(y_0) = \Phi^{n-1}(\Phi(y_0)) = \Phi^{n-1}(y_0) = \dots = \Phi(y_0) = y_0$. Como Φ^n é uma contração, isso implica que o ponto fixo x_0 de Φ também é único.

Podemos dizer mais: x_0 é um ponto atrator de Φ . De fato, se $y_0 \in M$, consideremos $y_m = \Phi^m(y_0)$. Então, escrevendo $m = kn + r$, $0 \leq r < n$, temos

$$\Phi^m(y_0) = \Phi^{kn+r}(y_0) = [\Phi^n]^k(\Phi^r(y_0)).$$

Para qualquer inteiro m , apenas os elementos $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ estão no conjunto $\{\Phi^r(y_0)\}$. Como x_0 é atrator para Φ^n , temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\Phi^n]^k(\Phi^r(y_0)) = x_0.$$

Isto mostra que x_0 é um ponto atrator para Φ . □

Observe que não é necessário que $\Phi : F \rightarrow F$ seja contínua! Um exemplo simples é $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x) = -x$ se $x < 0$, $\Phi(x) = 1$ se $x \geq 0$. A função Φ é descontínua, mas $\Phi^2 \equiv 1$ é uma contração.

Exemplo 4 Suponha que tenhamos dois mapas de uma região, um sendo uma redução do outro. Suponha que o menor é colocado sobre o maior. Isso define uma contração Φ que associa a cada ponto do mapa maior a sua localização no mapa menor. O que o Lema da Contração afirma é que existirá apenas um ponto do mapa menor que estará justamente sobre o mesmo ponto do mapa maior. Este ponto pode ser encontrado por meio de iterações: quer dizer, se tivéssemos uma seqüência de mapas que reduzem na mesma escala que do maior para o menor e se obtivéssemos sucessivamente a imagem de cada mapa, essa seqüência de mapas convergiria para o ponto fixo de Φ . ◁

Exemplo 5 Contrações podem ser utilizadas para a obtenção de soluções de equações do tipo $g(x) = 0$. De fato, se definirmos $f(x) := x - \lambda g(x)$, a equação se transforma em $f(x) = x$. (A constante $\lambda > 0$ será escolhida oportunamente.)

Suponhamos que $g(a) < 0$, $g(b) > 0$ e $0 < \alpha \leq g'(x) \leq \beta$ para $x \in [a, b]$. Então existe apenas uma solução de $g(x) = 0$ em $[a, b]$. De fato, isso decorre do Teorema do Valor Intermediário (existência) e do Teorema do Valor Médio (unicidade). Mas os teoremas aplicados não nos indicam como determinar esse ponto.

Podemos abordar o mesmo problema de outra maneira: basta mostrar que $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ é uma contração, para escolha adequada de λ . Como $g(a) < 0$, temos $f(a) = a - \lambda g(a) > a$. Como $g(b) > 0$, $f(b) = b - \lambda g(b) < b$. Assim, se escolhermos $\lambda = 1/\beta$, vemos que $|f(x) - f(y)| = f'(c)|x - y|$ com c entre x e y . Como $f'(c) \geq 1 - (1/\beta)g'(c) \geq 1 - (1/\beta)\beta = 0$ e $f'(c) = 1 - (1/\beta)g'(c) < 1 - (1/\beta)\alpha < 1$, vemos que f é uma contração. Logo, a solução de $g(x) = 0$ pode ser encontrada através da obtenção do ponto fixo de f por meio de iterações dessa função. ◁

Embora o Lema da Contração seja muito útil, suas hipóteses são bastante restritivas, ao exigir que a aplicação considerada seja uma contração. Um resultado profundo da análise estabelece a existência de ponto fixo em condições menos restritivas:

Teorema 1.23 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer)

Seja $\bar{B}_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ a bola fechada de raio r e centro na origem. Toda aplicação $f : \bar{B}_r(0) \rightarrow \bar{B}_r(0)$ possui um ponto fixo.

As implicações do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer são muito importantes, mas fogem ao escopo deste texto. Também sua demonstração não é simples; contudo, no caso $n = 1$, ela é elementar (veja o Exercício 34).

1.5 EXERCÍCIOS

Os primeiros exercícios recapitulam fatos básicos da Álgebra Linear.

1. Dada uma matriz A , $n \times n$, mostre que existe no máximo uma matriz B tal que $AB = BA = I$, $I \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ sendo a matriz identidade.
2. Mostre que uma matriz quadrada A tem inversa se, e somente se, o sistema $Ax = 0$ só possui a solução trivial.
3. Sejam X e Y espaços vetoriais com a mesma dimensão (finita). Suponha que, para as aplicações lineares $T : X \rightarrow Y$ e $S : Y \rightarrow X$, seja verdadeiro $ST = I$, a identidade em X . Mostre que $S = T^{-1}$.
4. Enuncie e demonstre o Teorema do Núcleo e da Imagem.
5. Sejam $\mathbb{R}[t]$ o espaço de todos os polinômios reais na incógnita t e $\mathbb{R}_6[t]$ o subespaço de todos os polinômios de grau menor que 6. Considere $T : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}_6[t]$ definida da seguinte maneira: se $p \in \mathbb{R}[t]$, então $T \cdot p$ é o polinômio em $\mathbb{R}_6[t]$ cujos coeficientes de grau menor que 6 são iguais aos coeficientes de p . Mostre que T é linear. Ache bases para $\text{im } T$ e $\ker T$. O Teorema do Núcleo e da Imagem se aplica? Justifique.
6. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $T \cdot (x, y, z) = (x + y, x + z, y + z, x + y + z)$. Ache a representação matricial de T com relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$. Considerando a base $\mathcal{B} = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\}$ do espaço $\mathbb{R}^3$, qual a representação de T com relação às bases $\mathcal{B}$ e a base canônica do $\mathbb{R}^4$?
7. Seja $\mathbb{R}_4[t]$ o espaço de todos os polinômios (reais) de grau menor do que 4. Considere $T : \mathbb{R}_4[t] \rightarrow \mathbb{M}_{2 \times 2}$ definida por

$$T \cdot (a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0) = \begin{pmatrix} a_3 - a_2 & a_0 + a_2 - a_1 \\ a_2 + a_1 & a_1 - a_2 - a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2}.$$

- (a) Mostre que T é linear;
- (b) Obtenha $\ker T$ e $\text{im } T$;

(c) Verifique que $\mathcal{B} = \{1 + t, t, t^2, t^3\}$ e

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

são bases de $\mathbb{R}_3[t]$ e $\mathbb{M}_{2 \times 2}$, respectivamente.

(d) Obtenha a representação matricial de T com relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

8. Seja $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear invertível representada, com relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ dos espaços X e Y , respectivamente, pela matriz $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$. Mostre que a aplicação inversa T^{-1} é representada, com relação às bases $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$, pela matriz $[T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}]^{-1}$.
9. Se $T : X \rightarrow Y$ e $S : Y \rightarrow Z$ são aplicações lineares invertíveis, mostre que $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.
10. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear. Mostre que existe um único vetor $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $f \cdot x = \langle x, v \rangle$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Esse é o **Teorema de Representação de Riesz** no $\mathbb{R}^n$.
11. Seja Y um espaço normado. Mostre que toda aplicação linear $T : \mathbb{R} \rightarrow Y$ é da forma $x \mapsto xy$, em que $y \in Y$ está fixado.

Os próximos exercícios introduzem o conceito de espaço métrico e apresentam algumas de suas propriedades. A maioria dos exercícios pode ser resolvida adequando a notação da demonstração de resultado equivalente para o espaço $\mathbb{R}^n$.

12. Seja X um espaço normado. Mostre que, se $\text{dist}(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ for uma distância² gerada por uma norma (isto é, $\text{dist}(x, y) = \|x - y\|$), então ela satisfaz
 - (a) $\text{dist}(x + z, y + z) = \text{dist}(x, y)$ para todos $x, y, z \in X$ (invariância por translação);
 - (b) $\text{dist}(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \text{dist}(x, y)$ (homotetia).

Reciprocamente, se X for um espaço métrico e se dist for uma distância em X que satisfaz (a) e (b), então dist é gerada por uma norma.

13. Seja (X, dist) um espaço métrico. Mostre que qualquer conjunto compacto $K \subset X$ é um conjunto limitado e fechado. Verifique também que a imagem de um compacto por uma função contínua é um conjunto compacto.
14. Sejam X, Y espaços métricos e $K \subset X$ um conjunto compacto. Mostre que toda função contínua $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ assume máximo e mínimo.
15. Sejam X, Y espaços métricos e $K \subset X$ um conjunto compacto. Mostre que toda função contínua $f : K \rightarrow Y$ é uniformemente contínua.

²Uma **distância** é uma aplicação $\text{dist}(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfaz: i) $\text{dist}(x, y) \geq 0$ e $\text{dist}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; ii) $\text{dist}(x, y) = \text{dist}(y, x)$; iii) $\text{dist}(x, z) \leq \text{dist}(x, y) + \text{dist}(y, z)$ para todos $x, y, z \in X$. Um **espaço métrico** é um conjunto X munido de uma distância.

16. Sejam X, Y espaços métricos e $C \subset X$ um conjunto conexo. Mostre que a imagem de C por uma função contínua $f : X \rightarrow Y$ é um conjunto conexo.

Os próximos exercícios são dedicados à teoria de espaços normados. No caso de dimensão finita, muitos resultados decorrem de resultados análogos, válidos no $\mathbb{R}^n$. Outros são resolvidos considerando-se uma base do respectivo espaço.

17. Seja X um espaço normado de dimensão finita. Mostre que um conjunto $K \subset X$ é compacto se, e somente se, for limitado e fechado.
18. Seja X um espaço normado. Mostre que a aplicação $x \in X \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}^+$ é uma aplicação contínua. Mostre que, se $x_n \rightarrow x \in X$, então $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$. Mostre que as aplicações $(x, y) \in X \times X \mapsto x + y \in X$ e $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X \mapsto \lambda x \in X$ são contínuas (os espaços $X \times X$ e $\mathbb{R} \times X$ estão providos da topologia produto).
19. Mostre que todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach.
20. Seja E um espaço euclidiano e $T : E \rightarrow E$ um operador. Mostre que $\|T\|^2 = \|T^*T\| = \|TT^*\|$. Conclua que $\|U\| = 1$ para todo operador unitário (ortogonal) $U : E \rightarrow E$. Se $U^{-1}TU = S$ com U unitário (ortogonal), verifique que

$$(a) \quad \|T\| = \|S\|;$$

$$(b) \quad \|T\| = \sqrt{\lambda}, \text{ em que } \lambda \text{ é o maior autovalor de } T^*T.$$

21. Seja $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Mostre que $\ker T$ é um subespaço fechado de X .

22. Seja X um espaço real com produto interno. Mostre

$$(a) \quad x_n \rightarrow x \Rightarrow \langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle \quad \text{para todo } y \in X.$$

$$(b) \quad \text{No caso em que } X \text{ tem dimensão finita, conclua que}$$

$$\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle \quad \forall y \in X \tag{1.1}$$

implica $x_n \rightarrow x$. Interprete (1.1) em termos das coordenadas dos vetores envolvidos.

Observação: Se X tiver dimensão infinita, o item (b) nem sempre é verdadeiro.

23. Sejam X, Y espaços normados (não necessariamente de dimensão finita). Mostre:

$$(a) \quad \mathcal{L}(X, Y) \text{ é um espaço normado completo, se } Y \text{ for completo;}$$

$$(b) \quad T_n \rightarrow T \text{ em } \mathcal{L}(X, Y) \text{ implica } T_n \cdot x \rightarrow T \cdot x \text{ para todo } x \in X;$$

$$(c) \quad \text{Se } X \text{ tiver dimensão finita, então } T_n \cdot x \rightarrow T \cdot x \text{ implica } T_n \rightarrow T \text{ em } \mathcal{L}(X, Y).$$

Observação: Se X tiver dimensão infinita, o item (c) nem sempre é verdadeiro.

Contra-exemplos para os itens (b) e (c) dos Exercícios 22 e 23, respectivamente, podem ser encontrados em livros introdutórios de Análise Funcional.

24. Sejam X, Y espaços normados, com Y completo, e $T_n : X \rightarrow Y$ aplicações em $\mathcal{L}(X, Y)$. Suponha que $\sum \|T_n\|$ seja uma série convergente. Mostre que $\sum T_n$ é uma série convergente em $\mathcal{L}(X, Y)$.
25. Sejam X, Y, Z espaços normados, com Y, Z completos. Suponha que $S_n \rightarrow S$ em $\mathcal{L}(X, Y)$ e $T_n \rightarrow T$ em $\mathcal{L}(Y, Z)$. Mostre que $T_n S_n \rightarrow TS \in \mathcal{L}(X, Z)$.
26. Sejam X, Y espaços normados. Verifique que cada uma das expressões abaixo define uma norma em $X \times Y$. Mostre então que elas são equivalentes.
- (a) $\|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\};$
 - (b) $\|(x, y)\|_{\text{sum}} = \|x\| + \|y\|;$
 - (c) $\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}.$

A demonstração do próximo resultado, apesar de não ser propriamente difícil, é intrincada.

27. Suponha que, num espaço normado X , a norma $\|\cdot\|$ satisfaça a identidade do paralelogramo. Mostre que a identidade de polarização define um produto interno em X , cuja norma associada é $\|\cdot\|$.

Definição 1.24 Sejam X, Y, Z espaços normados. Uma aplicação $B : X \times Y \rightarrow Z$ é **bilinear** se ela for separadamente linear em cada uma de suas variáveis. Mais precisamente, para todos $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, vale:

- (i) $B(x + \alpha x', y) = B(x, y) + \alpha B(x', y);$
- (ii) $B(x, y + \alpha y') = B(x, y) + \alpha B(x, y');$

De maneira análoga define-se uma aplicação n -linear.

O próximo exercício generaliza para aplicações n -lineares o resultado análogo para aplicações lineares.

27. Sejam $X_1, \dots, X_n$ e Y espaços normados e $T : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ uma aplicação n -linear. Se $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$, mostre que são equivalentes as propriedades:
- (a) T é contínua;
 - (b) T é contínua na origem;
 - (c) $\sup_{\|x_1\|=\dots=\|x_n\|=1} \|T \cdot (x_1, \dots, x_n)\| = M < \infty$ (T é limitada);
 - (d) existe $C > 0$ tal que $\|T \cdot (x_1, \dots, x_n)\| \leq M \left[\|x_1\| \cdots \|x_n\| \right]$ para todo $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$;

Conclua que são contínuas tanto a função determinante como a aplicação $(\alpha, x) \mapsto \alpha u$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

28. Sejam X, Y, Z espaços normados, com X e Y de dimensão finita. Mostre que toda aplicação bilinear $B : X \times Y \rightarrow Z$ é contínua. Generalize para aplicações n -lineares.

Agora consideramos a definição do produto vetorial no $\mathbb{R}^n$.

29. Dados $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, indicaremos por $(v_1 \dots v_n)$ a matriz $n \times n$ cujas colunas são os vetores $v_1, \dots, v_n$.

Definimos o **produto vetorial** dos vetores $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ como sendo o vetor $v = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ caracterizado por

$$\langle v, x \rangle = \det(v_1 \dots v_{n-1} x).$$

(Note que estamos aplicando o Teorema de Representação de Riesz!)

Mostre:

- (a) Seja $X = \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ $(n-1)$ -vezes. Mostre que a aplicação $Y : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $Y(v_1, \dots, v_{n-1}) = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$ é $(n-1)$ -linear;
- (b) $v = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$ é perpendicular aos vetores $v_1, \dots, v_{n-1}$;
- (c) Seja V_i a matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtida da matriz $(v_1 \dots v_{n-1})$ ao se omitir sua i -ésima coluna. Então vale

$$\langle v, e_i \rangle = (-1)^{n+i} \det V_i.$$

Conclua que $v = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1} = 0$ se, e somente se, os vetores $v_1, \dots, v_{n-1}$ forem linearmente dependentes.

Os últimos exercícios lidam com pontos fixos de aplicações.

30. Sejam X um espaço de Banach e $\bar{B}_r(0) \subset X$ a bola fechada de raio r e centro 0 . Suponha que $\Phi : \bar{B}_r(0) \rightarrow X$ satisfaça:

- (a) $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq k\|x - y\|$, com $0 < k < 1$;
- (b) $\|\Phi(0)\| \leq r(1 - k)$.

Mostre que Φ possui um único ponto fixo.

- 31. Com a notação do Exercício 30, seja $g : \bar{B}_r(0) \rightarrow X$ tal que $\|g(x) - \Phi(x)\| \leq c$ para todo $x \in \bar{B}_r(0)$. Suponha que g tem um ponto fixo y e seja x o ponto fixo de Φ . Mostre que $\|x - y\| \leq c/(1 - k)$.
- 32. Dê exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ que não possui ponto fixo.
- 33. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e $f : K \rightarrow K$ tal que $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$. Mostre que f possui um ponto fixo, o qual é único.
- 34. Mostre o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer no caso $n = 1$.

Capítulo 2

APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS

2.1 DEFINIÇÃO

Definição 2.1 Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é **diferenciável** no ponto $u \in U$, se existir uma aplicação linear¹ $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que, se $u + h \in U$,

$$f(u + h) = f(u) + T \cdot h + r_u(h), \quad (2.1)$$

em que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_u(h)}{\|h\|} = 0.$$

A expressão $r_u(h) = f(u + h) - f(u) - T \cdot h$ é chamada **resto**.

A aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é **diferenciável em U** ou, simplesmente, **diferenciável**, se for diferenciável em todos os pontos de U .

Dizemos que a aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^1 , se a aplicação

$$\begin{aligned} Df : U &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ u &\mapsto Df(u) \end{aligned}$$

for contínua.

Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ for diferenciável no ponto $u \in U$, então, para todo $h \in \mathbb{R}^n$ fixo e $t \neq 0$, temos

$$T \cdot h = \frac{T \cdot (th)}{t} = \frac{f(u + th) - f(u)}{t} \pm \frac{r_u(th)}{\|th\|} \|h\|.$$

Assim,

$$T \cdot h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + th) - f(u)}{t}. \quad (2.2)$$

¹No contexto de espaços de Banach, exige-se a continuidade dessa aplicação linear.

Em particular, se existir uma aplicação linear T satisfazendo (2.1), então ela é única.² Chamamos então T de **derivada** de f em u e denotamos $T = Df(u)$ ou $T = f'(u)$. Assim, por definição, $Df(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Decorre imediatamente da definição que uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável no ponto u é contínua nesse ponto (basta escrever $r_u(h) = (r_u(h)/\|h\|)\|h\|$ e considerar $h \rightarrow 0$ em (2.1).) Note também que, denotando $u + h = v$, a condição (2.1) escreve-se como

$$f(v) = f(u) + Df(u) \cdot (v - u) + r_u(v - u), \quad (2.3)$$

em que $r_u(v - u)$ satisfaz $\lim_{v \rightarrow u} r_u(v - u)/\|v - u\| = 0$.

2.2 EXEMPLOS

Exemplo 1 (Aplicações constantes) Uma aplicação constante $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em qualquer ponto $u \in U$ e sua derivada é a aplicação linear $0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Isso segue-se imediatamente de (2.1), que é satisfeita com $Df(u) = T = 0$. $\triangleleft$

Exemplo 2 (Aplicações lineares) Uma aplicação linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável³ em todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$ e $DL(x) = L$. Também isso segue-se imediatamente de (2.1), pois $L \cdot (x + h) - L \cdot x = L \cdot h$. $\triangleleft$

Exemplo 3 (Aplicações bilineares) Consideremos em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ a norma

$$\|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Seja $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação bilinear.⁴ Afirmamos que B é diferenciável em todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e

$$DB(x, y) \cdot (h, k) = B(x, k) + B(h, y).$$

De fato, $B(x + h, y + k) = B(x, y) + B(x, k) + B(h, y) + B(h, k)$. Uma vez que $B(x, \cdot) + B(\cdot, y)$ é uma aplicação linear, basta mostrar que

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{B(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0$$

²Uma outra demonstração desse fato é a seguinte. Suponhamos $\|h\| = 1$ e t é suficientemente pequeno de modo que $u + th \in U$. Se T_1 e T_2 satisfazem (2.1) com restos r_u^1 e r_u^2 , respectivamente, então

$$\|T_1 h - T_2 h\| = \frac{\|r_u^2(th) - r_u^1(th)\|}{|t|} \leq \frac{r_u^2(th)}{\|th\|} + \frac{r_u^1(th)}{\|th\|}.$$

Tomando o limite quando t tende a zero, vem $\|(T_1 - T_2) \cdot h\| = 0$ para todo h com $\|h\| = 1$. Assim, $\|T_1 - T_2\| = 0$ e $T_1 = T_2$.

³Em contextos de espaços de Banach, exige-se a continuidade de L .

⁴Como antes, no contexto de espaços de Banach, exige-se que a aplicação bilinear seja contínua.

para garantir que $DB(x, y) \cdot (h, k) = B(x, k) + B(h, y)$. Temos

$$\frac{B(h, k)}{\|(h, k)\|} \leq \frac{c\|h\| \|k\|}{\max\{\|h\|, \|k\|\}} = c \min\{\|h\|, \|k\|\},$$

de onde decorre o afirmado.

Casos especiais de aplicações bilineares são o produto interno em $\mathbb{R}^m$ e a composição

$$\mu : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$$

definida por

$$\mu(L, M) = LM := L \circ M.$$

(Em particular, a multiplicação de números reais é bilinear). Assim, $D\mu(L, M) \cdot (H, K) = (LK)M + L(HM)$.

Também é bilinear a aplicação $\nu : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\nu(L, x) = L \cdot x$. Assim, $D\nu(L, x) \cdot (M, h) = \nu(L, h) + \nu(M, x) = L \cdot h + M \cdot x$. $\triangleleft$

Exemplo 4 (Aplicações n-lineares) O resultado anterior generaliza-se imediatamente para aplicações n -lineares definidas em produtos cartesianos $\mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_n}$ e tomando valores em $\mathbb{R}^p$. Um caso particular importante acontece quando identificamos $\mathbb{M}_{n \times n}$ com $\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ (n -vezes) e consideramos a aplicação n -linear $\det : \mathbb{M}_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$. (Veja o Exercício 4.) $\triangleleft$

Exemplo 5 (Coordenadas de uma aplicação) Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ determina m funções reais $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, chamadas **coordenadas** da função f e definidas por $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. Essas coordenadas surgem diretamente da decomposição $\mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (m -vezes).

A aplicação f é diferenciável no ponto u se, e somente se, cada uma de suas coordenadas f_i for diferenciável no ponto u . Além disso, vale

$$Df(u) = (Df_1(u), \dots, Df_m(u)),$$

se identificarmos $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ com $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times \cdots \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (m vezes).

De fato, toda aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ pode ser escrita de maneira única como $T = (T_1, \dots, T_m)$, sendo $T_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear. A expressão dada para $Df(u)$ decorre imediatamente de

$$f(x+h) = f(x) + T \cdot h + r(h) \quad \Leftrightarrow \quad f_i(x+h) = f_i(x) + T_i \cdot h + r_i(h),$$

em que r_i são as coordenadas do resto r e do fato que $(r(h)/\|h\|) \rightarrow 0$ se, e somente se, $(r_i(h)/\|h\|) \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$, para $i = 1, \dots, n$.

Em virtude da identificação do espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ com o espaço $\mathbb{M}_{m \times n}$ das matrizes $m \times n$, é usual representar a derivada $Df(u) \cdot h$ como um vetor coluna:

$$Df(u) \cdot h = \begin{pmatrix} Df_1(u) \cdot h \\ \vdots \\ Df_m(u) \cdot h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Resultado análogo a essa decomposição em coordenadas é válido para aplicações

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow E_1 \oplus E_2,$$

em que U é um aberto e $E_1 \oplus E_2$ uma decomposição qualquer de $\mathbb{R}^m$ em subespaços que se interceptam apenas na origem: $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Veja mais a respeito na Seção 3.5. $\triangleleft$

Exemplo 6 (Matriz jacobiana) Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável no ponto $u \in U$. Como a derivada $Df(u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear, escolhidas bases dos espaços $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, ela pode ser representada por uma matriz. Quando as bases escolhidas são as bases canônicas dos respectivos espaços, essa representação matricial é usualmente chamada de **matriz jacobiana de f em u** e denotada $Jf(u)$. Assim,

$$Jf(u) = (Df(u) \cdot e_1 \quad Df(u) \cdot e_2 \quad \cdots \quad Df(u) \cdot e_n),$$

em que os vetores $Df(u) \cdot e_i \in \mathbb{R}^m$ são vetores coluna.

O limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + te_i) - f(u)}{t} = Df(u) \cdot e_i$$

é chamado i -ésima derivada parcial de f no ponto $u \in U$ e denotado

$$Df(u) \cdot e_i =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(u).$$

De acordo com o exemplo 5,

$$Df(u) \cdot e_i = \begin{pmatrix} Df_1(u) \cdot e_i \\ \vdots \\ Df_m(u) \cdot e_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(u) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

de modo que a matriz jacobiana de f é a matriz $m \times n$

$$Jf(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(u) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(u) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(u) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(u) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(u) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(u) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(u) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(u) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m \times n}.$$

Uma vez que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é isomorfo a $\mathbb{M}_{m \times n}$, decorre imediatamente dessa expressão que a função **diferenciável** $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^1 se, e somente se, para todo $u \in U$, as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(u)$ forem contínuas. $\triangleleft$

Exemplo 7 (Caminhos) Sendo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, uma aplicação $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ é chamada **caminho** (ou **curva**) no $\mathbb{R}^m$.

Definimos o vetor velocidade v de γ no ponto t como sendo o limite

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h},$$

desde que esse limite exista. Escrevemos então $v = \gamma'(t)$. Se o vetor velocidade existir para todo $t \in I$, dizemos que γ é um caminho diferenciável.

O vetor velocidade $\gamma'(t)$ existe se, e somente se, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ for diferenciável no ponto $t \in I$. Além disso, esse vetor velocidade identifica-se naturalmente com a derivada $D\gamma(t)$.

De fato, o espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ é isomorfo, de maneira natural, ao espaço $\mathbb{R}^m$: basta associar a cada transformação linear $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ o vetor $a = T \cdot 1$, imagem do vetor 1 (base de $\mathbb{R}$) pela aplicação T . Como $T \cdot h = hT \cdot 1 = ha$, vemos que $T \cdot h$ é identificado com a multiplicação do escalar h pelo vetor a . (Note que estamos associando diretamente $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ ao espaço $\mathbb{R}^m$, ao invés de associar $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ ao espaço de matriz $m \times 1$, como feito no caso da matriz jacobiana.)

Assim, dado $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $t \in I$, quando tomamos h suficientemente pequeno (de modo que $t + h \in I$), temos que $\gamma(t + h) = \gamma(t) + D\gamma(t) \cdot h + r_t(h)$ é o mesmo que $\gamma(t + h) = \gamma(t) + hw + r_t(h)$, em que $w = D\gamma(t) \cdot 1$. Portanto,

$$\frac{r_t(h)}{|h|} = \pm \left[\frac{\gamma(t + h) - \gamma(t)}{h} - w \right].$$

Assim,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_t(h)}{|h|} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = w.$$

Em particular, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em t se, e somente se, tem derivada $\gamma'(t)$ no sentido clássico:

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t + h) - \gamma(t)}{h} = \gamma'(t).$$

Nesse caso, v é um número que está sendo identificado com a aplicação linear $h \mapsto hv$. (Dada a possibilidade de dividir por um número complexo h , essa situação generaliza-se para funções $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, conforme o Exercício 18.)

Note que podemos expressar o vetor velocidade em termos de suas coordenadas:

$$\gamma(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_m(t)),$$

de acordo com o Exemplo 5. ◁

Exemplo 8 (Funções reais) No caso particular de $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (em que U é um aberto), o espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ é, muitas vezes, denotado por $(\mathbb{R}^n)^*$ e chamado **dual** do espaço $\mathbb{R}^n$. Os elementos de $(\mathbb{R}^n)^*$ são chamados de **funcionais lineares**. Nesse caso, a matriz jacobiana $Jf(u)$ é usualmente denotada por $df(u)$:

$$df(u) = \left(\frac{\partial f(u)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f(u)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f(u)}{\partial x_n} \right),$$

uma matriz com uma linha e n colunas. Em particular,

$$df(u) \cdot h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(u)}{\partial x_i} h_i,$$

em que $h = (h_1, \dots, h_n)$.

Contudo, o espaço $(\mathbb{R}^n)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tem uma base "natural" $\{e^1, \dots, e^n\}$, chamada base dual (da base canônica do $\mathbb{R}^n$); se $v = (v_1, \dots, v_n) = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$, os elementos da base dual são caracterizados por

$$e^i \cdot v = v_i.$$

(Se você está estranhando a notação $e^i \cdot v$, lembre-se que e^i é um funcional linear!) Frequentemente os funcionais e^i são denotados por dx^i . (Veremos, posteriormente, uma justificativa para essa notação.)

Podemos, portanto, usar essa base dual para representar $df(u)$:

$$df(u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(u) dx^i. \quad (2.4)$$

Se f for de classe C^1 , podemos simplificar ainda mais essa igualdade e escrever

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i,$$

já que ela é válida para todo ponto $u \in U$.

Note que (2.4) é uma igualdade de funcionais lineares. Assim, para cada $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$df(x) \cdot h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) (dx^i \cdot h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i,$$

que é a expressão obtida anteriormente. ◁

Necessitaremos, para o próximo exemplo, de um resultado auxiliar, que tem consequências importantes e é útil por si só.

Lema 2.2 *Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tal que $\|T\| < 1$. Então $I - T$ possui inversa, dada pela série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k = I + T + T^2 + \dots + T^k + \dots$$

*Assim, $I - T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo linear.*⁵

Demonstração: De fato, se considerarmos a série numérica $s_\ell = \sum_{k=0}^{\ell-1} \|T\|^k$, verificamos que

$$s_\ell = \frac{1 - \|T\|^\ell}{1 - \|T\|},$$

expressão que implica a convergência da série⁶ $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Uma vez que

$$(I - T)(I + T + T^2 + \dots + T^k) = (I + T + T^2 + \dots + T^k)(I - T) = I - T^{k+1},$$

⁵Isto é, uma aplicação linear contínua com inversa contínua. Como estamos num contexto de dimensão finita, poderíamos dizer apenas que $I - T$ é um isomorfismo.

⁶Verificamos que a série converge "absolutamente" (ou "normalmente"), o que implica a convergência da série. Veja [10], Exemplo 13, p. 170.

tomando o limite com k tendendo a infinito, vemos que a inversa de $I - T$ é dada pela série $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$. (Observe que essa série é o limite da sequência de operadores $S_\ell = \sum_{k=0}^{\ell-1} T^k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Assim, também a série está em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, pois esse espaço é completo.) $\square$

O Teorema do Núcleo e da Imagem implica que $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ são isomorfos apenas quando $m = n$. Nesse caso, uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é representada por uma matriz $n \times n$, uma vez escolhidas bases para o domínio e o contradomínio de T . Sabemos que uma matriz possui inversa se, e somente se, seu determinante for não-nulo. Se denotarmos por $GL(\mathbb{R}^n)$ o subconjunto de $\mathbb{M}_{n \times n}$ formado por todas as matrizes invertíveis, a continuidade do determinante garante então que $GL(\mathbb{R}^n)$ é um aberto em $\mathbb{M}_{n \times n}$. No caso do conjunto $\mathcal{U}$ dos homeomorfismos lineares $T : X \rightarrow Y$ entre espaços de Banach de dimensão infinita, também pode-se provar que $\mathcal{U}$ é um aberto em $\mathcal{L}(X, Y)$ (veja [5] ou [7]).

Exemplo 9 (Diferenciabilidade da Aplicação Inversa) A aplicação $\Psi : GL(\mathbb{R}^n) \rightarrow GL(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\Psi(U) = U^{-1}$$

é de classe C^1 em $GL(\mathbb{R}^n)$ e

$$D\Psi(U) \cdot H = -U^{-1}LU^{-1}.$$

De fato, o "candidato" a derivada pode ser obtido facilmente:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi(U + tH) - \Psi(U)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[U(I + tU^{-1}H)]^{-1} - U^{-1}}{t} = \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(I + tU^{-1}H)^{-1} - I}{t} \right) U^{-1}.$$

Se t for tomado suficientemente pequeno, o Lema 2.2 garante que

$$(I + tU^{-1}H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k (U^{-1}H)^k,$$

concluimos que o "candidato" tem a expressão afirmada e deduzimos que o resto $r_U(H)$ é dado por

$$r_U(H) = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k (U^{-1}H)^k U^{-1},$$

desde que H seja suficientemente pequeno para que $U^{-1}H$ possua inversa. Consequentemente,

$$\|r_U(H)\| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \|U^{-1}\|^k \|H\|^k \|U\|$$

mostrando que $\frac{r_U(H)}{\|H\|} \rightarrow 0$ quando $H \rightarrow 0$. Concluimos que Ψ é diferenciável em $U \in GL(\mathbb{R}^n)$ e $D\Psi(U) \cdot H = -U^{-1}HU^{-1}$. Como $D\Psi(U)$ é a composta de aplicações lineares contínuas, temos que $D\Psi(U)$ é contínua, mostrando que Ψ é de classe C^1 . $\triangleleft$

Observação 2.3 Note que a aplicação $\Psi : GL(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{M}_{n \times n} \rightarrow GL(\mathbb{R}^n)$ não está, *strictu sensu*, no contexto em que foi definida a aplicação derivada. Contudo, podemos identificar $\mathbb{M}_{n \times n}$ com o espaço $\mathbb{R}^{n^2}$ e, desse modo, identificar Ψ com uma aplicação $\tilde{\Psi} : U \subset \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$, para a qual faz sentido o conceito de derivada, tal qual exposto na Definição 2.1.

Essas dificuldades são superadas quando, ao invés de considerarmos espaços $\mathbb{R}^n$, passamos ao contexto mais geral de espaços de Banach. A apresentação pode ser feita seguindo a mesma linha escolhida para este texto – que evita, em todos os resultados válidos também para espaços de dimensão infinita, a utilização de bases –, apenas levando em conta que uma aplicação linear entre espaços de Banach não é, necessariamente, contínua. Para essa abordagem mais geral, veja, por exemplo, as referências [5]–[8] e [14]. $\triangleleft$

2.3 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA

Dado um ponto $u_0 \in U$ e $h \in X$ arbitrário, temos que $u_0 + th \in U$ desde que $|t|$ seja suficientemente pequeno, digamos $|t| < \epsilon$. Está assim definida um caminho $\xi : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow X$, dado por

$$\xi(t) = u_0 + th \in U.$$

Este caminho descreve o segmento de reta passando por u_0 , com a direção h .

Uma vez que

$$(f \circ \xi)'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f \circ \xi)(t) - (f \circ \xi)(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + th) - f(u_0)}{t},$$

vemos que a derivada $Df(u_0)$ avaliada no ponto h é justamente o vetor velocidade $(f \circ \xi)'(0)$.

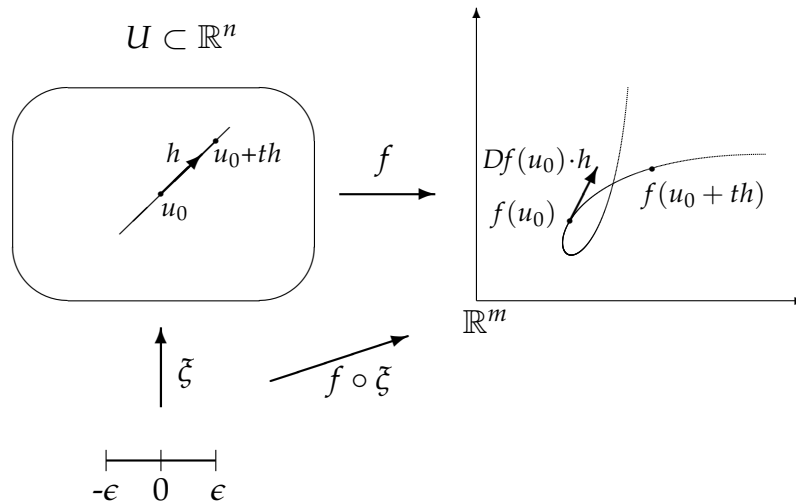


Figura 2.1: A derivada $Df(u_0) \cdot h$ é o vetor velocidade $(f \circ \xi)'(0)$.

Veremos posteriormente que não é necessário considerar o caminho que descreve a reta passando por u_0 tendo como direção o vetor h : qualquer caminho ξ tal que $\xi(0) = u_0$ e $\xi'(0) = h$ cumprirá o mesmo papel.

Observação 2.4 (O espaço tangente) Uma outra interpretação da derivada $Df(u_0)$ tem papel fundamental: se uma superfície S é dada como o gráfico de uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, seu espaço tangente $T_p S$ no ponto $p = (u_0, f(u_0))$ é o gráfico da derivada $Df(u_0)$. Mais precisamente, definindo $\varphi : U \rightarrow S$ por $\varphi(u) = (u, f(u))$, temos que $T_p S$ é $D\varphi \cdot \mathbb{R}^n$, isto é, $D\varphi(u_0) \cdot v = (v, Df(u_0) \cdot v)$. Algumas vezes trabalhamos com o "espaço tangente afim", em que o espaço tangente é transladado para o ponto p . A equação do espaço tangente afim é dada por (veja a equação (2.3))

$$\{(v, f(u_0) + Df(u_0) \cdot (v - u_0)) : v \in \mathbb{R}^m\}.$$

(Uma vez que ainda não estudamos superfícies, as noções aqui apresentadas serão precisadas posteriormente. Veja, contudo, o Exercício 12.)

Por exemplo, suponhamos que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ seja dada por $f(u, v) = u^2 + v$. Se $h = (x \ y)^t$, então

$$Df(u, v) \cdot h = (2u \ 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

de modo que a equação do plano tangente no ponto $(1, 2)$ é

$$((x, y), 2x + y),$$

expressão que usualmente escrevemos como $z = 2x + y$. Como não podia deixar de ser, essa é a equação de um plano passando pela origem. Nos cursos de Cálculo trabalhamos com o plano tangente afim:

$$\left((x, y), f(1, 2) + (2 \ 1) \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix} \right) = ((x, y), 3 + 2(x - 1) + y - 2) = ((x, y), 2x + y - 1),$$

expressão que usualmente escrevemos como $2x + y - z = 1$. ◁

2.4 APLICAÇÕES DE CLASSE C^1

Fixados $u \in U$ e $h \in \mathbb{R}^n$, faz sentido considerarmos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + th) - f(u)}{t},$$

já que, se f for diferenciável, esse limite será igual a $Df(u) \cdot h$.

Definição 2.5 A derivada direcional de f no ponto $u \in U$ na direção do vetor $h \in \mathbb{R}^n$ é

$$\frac{\partial f}{\partial h}(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + th) - f(u)}{t},$$

se tal limite existe.

Note que, se $h = e_i$, então $\frac{\partial f}{\partial h}(u) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(u)$.

Nosso objetivo nessa Seção é investigar a relação entre funções diferenciáveis e a existência das derivadas direcionais. Claro, a existência de $Df(u)$ acarreta a existência de derivadas direcionais para todo $h \in \mathbb{R}^n$, pois $Df(u) \cdot h = \frac{\partial f}{\partial h}(u)$. Mas a existência de derivadas direcionais para todo $h \in \mathbb{R}^n$ implica a existência de $Df(u)$?

A resposta para essa questão é negativa. Na verdade, uma função f pode possuir derivadas direcionais para todo $h \in \mathbb{R}^n$ e mesmo assim não ser contínua. Isso é mostrado no seguinte exemplo:

Exemplo 10 Consideremos a função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{e} \quad g(0, 0) = 0.$$

Tomando $y = x^2$, verificamos facilmente que g não é contínua na origem. Portanto, g não é diferenciável nesse ponto.

Como

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t(h_1, h_2))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_1^2 h_2}{t^2 h_1^4 + h_2^2} = \begin{cases} 0, & \text{se } h_2 = 0 \\ \frac{h_1^2}{h_2}, & \text{se } h_2 \neq 0, \end{cases}$$

mostramos a existência das derivadas direcionais de g na origem para todo vetor $h \in \mathbb{R}^2$. (Veja a Figura 2.2.) $\triangleleft$

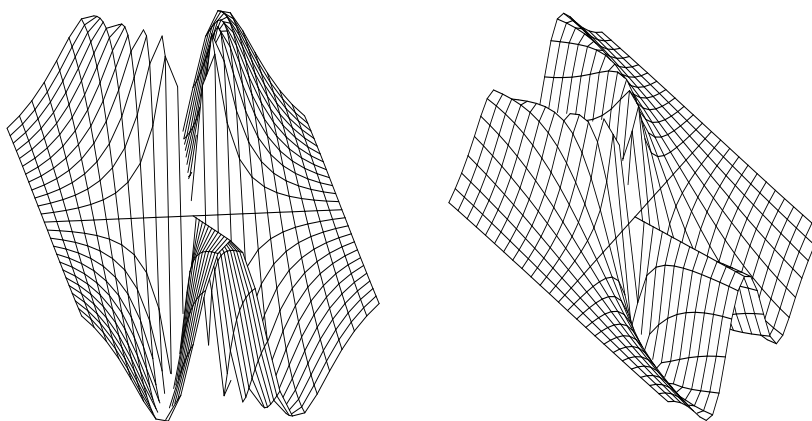


Figura 2.2: Duas perspectivas do gráfico de $g = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, $(x, y) \neq 0$ e $g(0, 0) = 0$. A função g é descontínua na origem, mas possui todas as derivadas direcionais nesse ponto.

Se exigirmos a continuidade da função, mesmo assim a existência de derivadas parciais em todas as direções não é suficiente para garantir que a função é diferenciável. Vejamos dois exemplos.

Exemplo 11 Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{e} \quad g(0, 0) = 0.$$

A continuidade da função g em $(0, 0)$ é imediata, se notarmos que $g(x, y) = x \cos \theta \sin \theta$ (em que $\cos \theta = x / \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\sin \theta = y / \sqrt{x^2 + y^2}$). Assim,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x \cos \theta \sin \theta = 0 = g(0, 0),$$

mostrando a continuidade de g .

Calculamos imediatamente a derivada direcional em $(0, 0)$ na direção do vetor arbitrário $h = (h_1, h_2)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t(h_1, h_2)) - g(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 h_1^2 h_2}{t^3 (h_1^2 + h_2^2)} = \frac{h_1^2 h_2}{h_1^2 + h_2^2}.$$

Assim, existem todas as derivadas direcionais na origem. Entretanto, o "candidato" natural a derivada de $g(0, 0)$ é uma aplicação que não é linear em h . Assim, g não é diferenciável na origem. (Veja a Figura 2.3. Note que o resto, nesse caso, é identicamente nulo!) $\triangleleft$

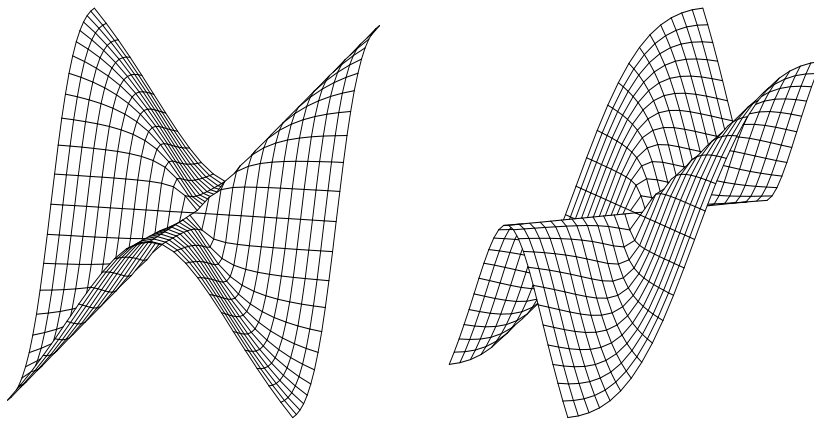


Figura 2.3: Duas perspectivas diferentes do gráfico de $g = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq 0$ e $g(0, 0) = 0$.

O exemplo anterior falhou por causa da não-linearidade do "candidato" a derivada da função. Contudo, mesmo se esse "candidato" for linear, a derivada pode não existir.

Exemplo 12 Considere agora $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) = x^3 y / (x^4 + y^2), \quad (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{e} \quad g(0, 0) = 0.$$

Então

$$g(x, y) = x \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + y^2}} \frac{y}{\sqrt{x^4 + y^2}} = x \frac{1}{\sqrt{1 + y^2/x^4}} \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + x^4/y^2}}.$$

Note que $1 + x^4/y^2 \geq 1$ e $1 + y^2/x^4$, de modo que

$$|g(x, y)| \leq |x|.$$

Decorre daí imediatamente que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0$, mostrando que g é contínua.

Além disso,

$$\frac{\partial g}{\partial h}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(th_1, th_2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{th_1^3 h_2}{t^2 h_1^4 + h_2^2} = 0.$$

Assim, existem todas as derivadas direcionais na origem e são nulas (e, portanto, são lineares). Entretanto, g não é diferenciável na origem. De fato,

$$\frac{r_{(0,0)}(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{h_1^3 h_2}{(h_1^4 + h_2^2) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$$

Em particular, se $h_1 = h_2$, vemos que não existe

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{h_1^4}{\sqrt{2}|h_1|(h_1^4 + h_1^2)} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2}|h_1|(1 + 1/h_1^2)},$$

mostrando que g não é diferenciável na origem. (Veja a Figura 2.4.)

◁

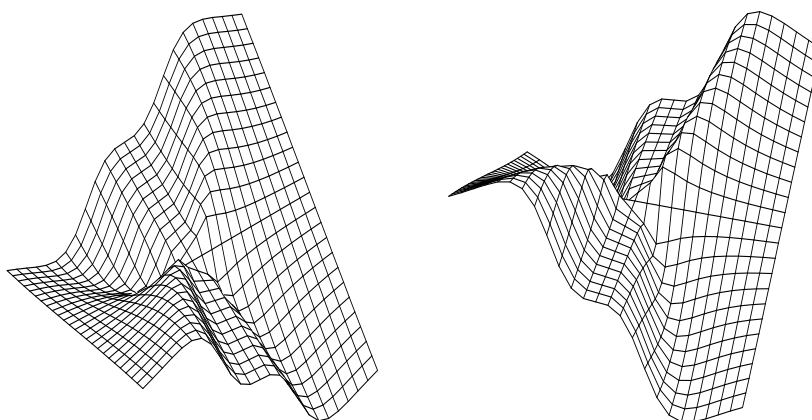


Figura 2.4: Duas perspectivas diferentes do gráfico de $g = \frac{x^3 y}{x^3 + y^2}$, $(x, y) \neq 0$ e $g(0, 0) = 0$.

Sabemos que, se uma função **diferenciável** $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ for de classe C^1 , então existem e são contínuas todas as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(u)$, para todo $u \in U$ (veja o Exemplo 6). Não é difícil concluir que todas as derivadas direcionais também devem ser contínuas. (Veja o Exercício 11.)

Estamos interessados na recíproca desse resultado. Mais geralmente, suponhamos que todas as derivadas parciais sejam **contínuas** numa vizinhança aberta do ponto $u \in U$. Podemos concluir que f é diferenciável no ponto u ? Vamos mostrar que sim. Note que, então, poderemos concluir que uma função f é de classe C^1 se, e somente se, todas as derivadas parciais forem contínuas.

Proposição 2.6 *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Suponhamos que todas as derivadas parciais da aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ existam e sejam contínuas numa vizinhança do ponto $u \in U$. Então f é diferenciável no ponto u .*

Demonstração: Uma vez que podemos passar às coordenadas f_i da função f , podemos supor, sem perda de generalidade, que $m = 1$, isto é, $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se $u = (u_1, \dots, u_n) \in U$ e $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} f(u_1 + h_1, \dots, u_n + h_n) - f(u_1, \dots, u_n) &= \\ &= f(u_1 + h_1, u_2 + h_2, \dots, u_n + h_n) - f(u_1, u_2 + h_2, \dots, u_n + h_n) \\ &\quad + f(u_1, u_2 + h_2, \dots, u_n + h_n) - f(u_1, u_2, \dots, u_n + h_n) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + f(u_1, u_2, \dots, u_n + h_n) - f(u_1, u_2, \dots, u_n). \end{aligned}$$

Para $j \in \{1, \dots, n\}$, aplicando o Teorema do Valor Médio a cada uma das funções reais envolvidas, obtemos que

$$f(\dots, u_j + h_j, \dots) - f(\dots, u_j, \dots) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\dots, c_j, \dots)h_j,$$

em que $c_j \in (u + h_j, u) \in \mathbb{R}$. Pela continuidade das derivadas parciais no ponto u , para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ existe uma função $\psi_j(h)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(c_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(u) + \psi_j(h),$$

em que $\lim_{h \rightarrow 0} \psi_j(h) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} f(u_1 + h_1, \dots, u_n + h_n) - f(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(u)h_j + \sum_{j=1}^n \psi_j(h)h_j \\ &= df(u) \cdot h + \sum_{j=1}^n \psi_j(h)h_j. \end{aligned}$$

Claramente

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \psi_j(h)h_j = 0,$$

mostrando que f é diferenciável no ponto u (compare com o Exemplo 8). $\square$

A demonstração apresentada é simples, mas utiliza a base canônica do espaço $\mathbb{R}^n$. Dentro do propósito desse texto, mostraremos posteriormente o mesmo resultado num contexto mais geral, que independe da existência de bases para os espaços envolvidos.

Observação 2.7 Note que a continuidade das derivadas parciais em um ponto assegura a existência da derivada nesse ponto. Contudo, existem funções diferenciáveis num ponto, cujas derivadas parciais não são contínuas nesse ponto. Veja o Exercício 1. $\triangleleft$

2.5 EXERCÍCIOS

Os primeiros exercícios envolvem o cálculo da derivada de uma aplicação. Alguns deles requerem conhecimentos de Álgebra Linear.

1. Seja $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$G(x, y) = (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right), \text{ se } (x, y) \neq (0, 0), \text{ e } G(0, 0) = 0.$$

Mostre que G é diferenciável, mas não possui derivadas direcionais contínuas na origem.

2. Mostre que as seguintes aplicações são diferenciáveis e calcule suas derivadas:

- (a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x + y, 2x - 3y)$;
- (b) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $g(x, y) = (x^2 + y, x + y^2)$;
- (c) $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = \ell(x)m(x)$, em que $\ell, m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funcionais lineares;
- (d) $\xi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\xi(u) = \langle r(u), s(u) \rangle$, em que $r, s : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ são aplicações diferenciáveis e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno no $\mathbb{R}^m$.

Exiba a matriz jacobiana de cada uma das derivadas dessas aplicações. No item (d), suponha que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ seja o produto interno usual do $\mathbb{R}^n$.

3. Seja $\Gamma : \mathbb{M}_{n \times n} \rightarrow \mathbb{M}_{n \times n}$ definida por $\Gamma(X) = X^3$. Mostre que Γ é diferenciável e calcule sua derivada.
4. Considere a aplicação $f : \mathbb{M}_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(X) = \det X$.
- (a) Mostre que f é diferenciável e calcule $Df(X) \cdot H$;
 - (b) Mostre que $Df(I) \cdot H = \operatorname{tr} H$;
 - (c) Mostre que $Df(X) = 0$ se, e somente se, $\operatorname{posto}(X) \leq n - 2$.
5. Considere a aplicação $Y(v_1, \dots, v_{n-1}) = v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$ tratada no Exercício 29 do Capítulo 1. Mostre que Y é diferenciável e calcule sua derivada.
6. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $0 \in \mathbb{R}^n$. Se $f(tx) = tf(x)$ para todo $t > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$, mostre que f é linear. Conclua que $\xi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\xi(x, y) = x^3/(x^2 + y^2)$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $\xi(0, 0) = 0$, não é diferenciável na origem.
7. Seja $\mathbb{M}_{n \times n}$ o espaço das matrizes $n \times n$. Denotaremos X^t a transposta da matriz X . Considere a aplicação $f : \mathbb{M}_{n \times n} \rightarrow \mathbb{M}_{n \times n}$ definida por $f(X) = XX^t$. Calcule a derivada de f . Mostre que $f'(X) \cdot H$ é simétrica para toda $H \in \mathbb{M}_{n \times n}$ e, se X for ortogonal (isto é, $X^t = X^{-1}$), então existe pelo menos uma matriz H tal que $f'(X) \cdot H = S$, para toda matriz simétrica S .

A teoria de aplicações diferenciáveis pode ser generalizada para o contexto mais geral de aplicações $f : U \subset X \rightarrow Y$, em que X, Y são espaços de Banach e $U \subset X$ é um conjunto aberto. Os primeiros exercícios lidam com essa generalização: vamos supor que os espaços envolvidos sejam **espaços de Banach** e que os conjuntos considerados nesses espaços sejam **abertos**.

8. Defina a diferenciabilidade de uma função $f : U \subset X \rightarrow Y$ no ponto $u \in U$. Seja f diferenciável no ponto $u \in U$.
 - (a) Mostre que a continuidade de f em u é equivalente à continuidade da aplicação linear $Df(u) : X \rightarrow Y$;
 - (b) explicita o significado de f ser de classe C^1 ;
 - (c) verifique que os resultados sobre as derivadas de uma aplicação constante e de uma aplicação linear **contínua** são os mesmos.
 - (d) Considere uma aplicação bilinear **contínua** $B : X \times Y \rightarrow Z$. Calcule sua derivada. Generalize para aplicações n -lineares contínuas.
9. Considere um produto cartesiano $Y_1 \times \cdots \times Y_n$ de espaços de Banach e $f : U \subset X \rightarrow Y_1 \times \cdots \times Y_n$. Generalize o resultado sobre a derivada de f em termos de suas coordenadas.
10. Generalize o resultado sobre a derivada de uma curva para aplicações $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow Y$, em que I é um intervalo aberto. (Note que não faz sentido, em geral, expressar o vetor derivada em termos de suas coordenadas.)

Os próximos exercícios apresentam conseqüências interessantes da diferenciabilidade das aplicações envolvidas.

11. Mostre que uma função **diferenciável** $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^1 se, e somente se, todas as derivadas direcionais $\frac{\partial f}{\partial h}$ existirem e forem contínuas.
12. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável. Defina $\varphi : U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ e $F : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\varphi(u) = (u, f(u))$ e $F(u, y) = f(u) - y$. Mostre que φ e F são diferenciáveis, conclua que $\varphi'(u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é injetora em U e que o núcleo de $F'(u, y) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ coincide com a imagem de $\varphi'(u)$. A imagem $\varphi(U) \subset U \times \mathbb{R}^n$ é o **gráfico** e o espaço vetorial $\varphi'(u) \cdot \mathbb{R}^m$ é o **espaço tangente** a $\varphi(U)$ no ponto $(u, f(u))$.
13. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável no ponto $u_0 \in U$. Então existem $\delta > 0$ e $K > 0$ tais que

$$\|u - u_0\| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(u) - f(u_0)\| \leq K\|u - u_0\|.$$

Assim, se f for diferenciável no ponto $u_0 \in U$, então f é lipschitziana numa bola aberta em torno de u_0 .

14. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável no ponto $u_0 \in U$. Tome $\delta > 0$ tal que $B_\delta(u_0) \subset U$. Mostre que a aplicação $r : B_\delta(u_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $r(h) = f(u_0 + h) - f(u_0) - Df(u_0) \cdot h$ é diferenciável no ponto $h = 0$.

15. Sejam $V, U \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos abertos, com $V \subset U$. Suponha a existência de $\delta > 0$ tal que $v \in V$ e $\|h\| < \delta$ impliquem $v + h \in U$. Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ for diferenciável em todos os pontos de U e $v_0 \in V$ estiver fixado, mostre que a aplicação $r : V \times B_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$r(v, h) = f(v + h) - f(v) - Df(v_0) \cdot h$$

é diferenciável em todos os pontos de $V \times B_\delta(0)$.

16. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Mostre que, se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ atinge um máximo (ou mínimo) relativo no ponto $u \in U$, então $f'(u) = 0$.
17. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Suponha que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ seja diferenciável em U e que, para todo $p \in \bar{U} \setminus U$, tenha-se $\lim_{u \rightarrow p} f(u) = 0$. Mostre que existe $u \in U$ tal que $f'(u) = 0$.
Dê exemplos mostrando que U precisa ser limitado (acho que não precisa!) e que não basta que f seja contínua.

18. Seja $U \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto. Uma função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é **holomorfa** se, para todo $z \in U$, existe

$$A(z) := \lim_{\mathbb{C} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Identificando $a + bi$ com $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, podemos interpretar f como sendo uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

- (a) Justifique: $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa se, e somente se, $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ for diferenciável em U e $f'(z) = A(z)$.
- (b) Assim, $Df(z) \cdot h = (\alpha + \beta i)h$ (multiplicação de números complexos). Obtenha a forma da matriz jacobiana de $f(z)$ em termos de α e β .
- (c) Se $z = (x, y)$ e $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, obtenha, em termos de derivadas parciais de u e v , outra expressão para a matriz jacobiana de $f(z)$. Deduza, comparando as expressões obtidas, as equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

19. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Considere a aplicação linear $T = Df(3, \pi/6)$ e os vetores $h = (1, 0)$ e $k = (1, 1)$. Obtenha o ângulo entre os vetores $T^{100} \cdot h$ e $T^{101} \cdot k$.

Os últimos exercícios tratam do espaço $\mathcal{L}(X, Y)$.

20. Seja $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, em que X, Y são espaços de Banach. Mostre que

$$\|T\| = \inf \{c > 0 : \|T \cdot x\| \leq c\|x\| \ \forall x \in X\}.$$

21. Considere o produto interno usual do $\mathbb{R}^n$. A **adjunta** da aplicação linear $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é a aplicação linear caracterizada por

$$\langle T \cdot x, w \rangle = \langle x, T^* \cdot w \rangle.$$

- (a) Se A for a representação de T com relação às bases canônicas do $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, mostre que a representação de T^* com relação às bases canônicas do $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ é a transposta da matriz A .
- (b) Se $\text{tr}(R)$ denota o traço da aplicação linear R , mostre que

$$\langle T, S \rangle = \text{tr}(T^*S)$$

é um produto interno em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

- (c) Conclua que $\|T\| = \sqrt{\text{tr}(T^*T)}$ é uma norma em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, diferenciável exceto no ponto 0.

Capítulo 3

PROPRIEDADES DA DERIVADA

3.1 A REGRA DA CADEIA

Proposição 3.1 (Regra da cadeia)

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos abertos e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável no ponto u . Suponhamos que $f(U) \subset V$ e que $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ seja diferenciável no ponto $v = f(u)$. Então a aplicação composta $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ é diferenciável no ponto u e

$$D(g \circ f)(u) = Dg(f(u)) \circ Df(u).$$

Demonstração: Por hipótese,

$$f(u+h) = f(u) + Df(u) \cdot h + r(h), \quad \text{com} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

e

$$g(v+k) = g(v) + Dg(v) \cdot k + \rho(k), \quad \text{com} \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\rho(k)}{\|k\|} = 0.$$

Assim, $(g \circ f)(u+h) = g[f(u) + Df(u) \cdot h + r(h)]$. Chamando $k = Df(u) \cdot h + r(h)$, vem

$$\begin{aligned} (g \circ f)(u+h) &= g(v+k) = g(v) + Dg(v) \cdot k + \rho(k) \\ &= g(v) + Dg(v) \cdot [Df(u) \cdot h + r(h)] + \rho(Df(u) \cdot h + r(h)) \\ &= g(v) + [Dg(v) \circ Df(u)] \cdot h + \tau(h), \end{aligned}$$

em que $\tau(h) = Dg(v) \cdot r(h) + \rho(Df(u) \cdot h + r(h))$.

Para h numa vizinhança da origem,

$$\frac{\|Df(u) \cdot h + r(h)\|}{\|h\|} \leq \left(\|Df(u)\| + \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \right) \leq M$$

para alguma constante positiva M e

$$\|Dg(v) \cdot r(h)\| \leq \|Dg(v)\| \|r(h)\|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\|\rho(Df(u) \cdot h + r(h))\|}{\|h\|} &= \frac{\|\rho(k)\|}{\|k\|} \frac{\|Df(u) \cdot h + r(h)\|}{\|h\|} \\ &\leq M \frac{\|\rho(k)\|}{\|k\|} \end{aligned}$$

Uma vez que $h \rightarrow 0$ implica $k \rightarrow 0$, isso significa que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tau(h)}{\|h\|} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Dg(v) \cdot r(h) + \rho(Df(u) \cdot h + r(h))}{\|h\|} \\ &\leq \|Dg(v)\| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} + M \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\rho(k)\|}{\|k\|} = 0 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$D(g \circ f)(u) \cdot h = [Dg(f(u)) \circ Df(u)] \cdot h,$$

como queríamos mostrar. $\square$

Podemos agora generalizar a interpretação geométrica da derivada apresentada na Seção 2.3. Lá, consideramos o caminho linear $\xi(t) = u_0 + th$ e mostramos que $Df(u_0) \cdot h$ é o vetor velocidade da aplicação composta $f \circ \xi$ no ponto 0. Na verdade, qualquer caminho $\xi(t)$ tal que $\xi(0) = u_0$ e $\xi'(0) = h$ cumpre o mesmo papel:

Corolário 3.2 (Interpretação geométrica da derivada)

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável no ponto $u_0 \in U$. Seja $\xi : (-\delta, \delta) \rightarrow U$ um caminho tal que $\xi(0) = u_0$ e $\xi'(0) = h$. Então

$$Df(u_0) \cdot h = (f \circ \xi)'(0).$$

Demonstração: Decorre imediatamente da Regra da Cadeia que

$$(f \circ \xi)'(0) = Df(\xi(0)) \cdot \xi'(0) = Df(u_0) \cdot h. \quad \square$$

Corolário 3.3 (Regras elementares de derivação)

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Se $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ forem diferenciáveis no ponto u e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $f + g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\lambda f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ são diferenciáveis no ponto u , com

$$D(f + g) = Df + Dg \quad \text{e} \quad D(\lambda f) = \lambda Df.$$

Se $m = 1$ e $f(u) \neq 0$ para todo $u \in U$, então $\frac{1}{f} : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto u e

$$D\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{[f(u)]^2} Df(u).$$

Finalmente, se $h : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ também for diferenciável em $u \in U$ e $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ for uma aplicação bilinear, então $B(f(u), h(u))$ é diferenciável em u e

$$DB(f(u), h(u)) \cdot k = B(Df(u) \cdot k, g(u)) + B(f(u), Dg(u) \cdot k).$$

Demonstração: Seja $\Phi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $\Phi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ e $\Psi : U \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ dada por $\Psi(u) = (f(u), g(u))$. Então $f(u) + g(u) = (\Phi \circ \Psi)(u)$. Como Φ é linear e Ψ tem coordenadas diferenciáveis, $\Phi \circ \Psi$ é diferenciável em $u \in U$. Pela Regra da Cadeia,

$$D(f(u) + g(u)) = D(\Phi \circ \Psi)(u) = \Phi \circ D\Psi(u) = \Phi(Df(u), Dg(u)) = Df(u) + Dg(u).$$

Também temos que $\Gamma : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\Gamma(u) = \lambda u$ é uma aplicação linear, de modo que

$$D(\lambda f)(u) = D[\Gamma \circ f](u) = \Gamma \circ Df(u) = \lambda Df(u).$$

Seja agora $i : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $i(t) = 1/t$. Então

$$D(1/f)(u) = D(i \circ f)(u) = Di(f(u)) \circ Df(u) = -\frac{1}{[f(u)]^2} Df(u),$$

pois $i'(t) = -1/t^2$.

Finalmente, se $\psi(u) = (f(u), h(u))$,

$$\begin{aligned} D[B(f(u), h(u))] \cdot k &= D[(B \circ \psi)(u)] \cdot k = DB(\psi(u)) \circ D\psi(u) \cdot k \\ &= DB(f(u), h(u)) \circ (Df(u) \cdot k, Dh(u) \cdot k) \\ &= B(Df(u) \cdot k, h(u)) + B(f(u), Dh(u) \cdot k). \end{aligned}$$

□

Observação 3.4 Claramente muitas dessas regras de derivação são conseqüências imediatas da definição de aplicação diferenciável, de modo que a prova apresentada apenas dá um tratamento sofisticado a fatos elementares.

Casos particulares da aplicação bilinear B são bastante importantes. Por exemplo, se $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ denotar a multiplicação de números reais e $f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ forem diferenciáveis,

$$D[B(f(t), g(t))] = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$$

é a regra de derivação do produto de funções reais.

Se $B = \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ for um produto interno no $\mathbb{R}^n$ e $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ forem diferenciáveis, temos que

$$D\langle f(u), g(u) \rangle = \langle Df(u), g(u) \rangle + \langle f(u), Dg(u) \rangle.$$

A última expressão significa que $D\langle f(u), g(u) \rangle \cdot h = \langle Df(u) \cdot h, g(u) \rangle + \langle f(u), Dg(u) \cdot h \rangle$. Em particular, se $f = g$, vemos que $\|f(u)\|^2$ é diferenciável no ponto $u \in U$ e

$$D\|f(u)\|^2 = 2\langle Df(u), f(u) \rangle.$$

Ainda pela Regra da Cadeia, como a aplicação real $t \rightarrow t^{1/2}$ é diferenciável para $t > 0$, temos que $u \mapsto \langle f(u), f(u) \rangle^{1/2}$ é diferenciável em u toda vez que $f(u) \neq 0$ e sua derivada é o funcional linear

$$h \mapsto \frac{\langle Df(u) \cdot h, f(u) \rangle}{\langle f(u), f(u) \rangle^{1/2}}.$$

Em particular, a norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2}$ é diferenciável para todo $x \neq 0$ e sua derivada é o funcional linear $h \mapsto (x \cdot h)/\|x\|$, em que $x \cdot h$ denota o produto interno usual do $\mathbb{R}^m$.

Entretanto, não é verdade que toda norma no $\mathbb{R}^m$ é diferenciável exceto na origem. Por exemplo, consideremos a norma do máximo em $\mathbb{R}^2$. Para $x = y = 1$, vale

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|(x + th_1, y + th_2)\| - \|(x, y)\|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\max\{|1 + th_1|, |1 + th_2|\} - 1}{t}.$$

Ora, esse limite não existe. De fato, se $t > 0$ e $(h_1, h_2) = (1, 0)$, o limite vale 1. Mas, se $t < 0$ e $(h_1, h_2) = (1, 0)$, o limite vale 0, o que prova a inexistência daquele limite. Claro, esse resultado é geometricamente óbvio se considerarmos o gráfico da função $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Esse é uma pirâmide retangular invertida, com vértice na origem.

Não é difícil verificar, de maneira análoga, que a norma da soma no $\mathbb{R}^2$ também não é diferenciável em pontos $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. $\triangleleft$

3.2 O TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Para $a, b \in \mathbb{R}^n$, denotaremos $[a, b] = \{a + t(b - a) : 0 \leq t \leq 1\}$ e $(a, b) = \{a + t(b - a) : 0 < t < 1\}$.

O Teorema do Valor Médio pode ser generalizado para funções reais $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

Teorema 3.5 (Teorema do Valor Médio)

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ for diferenciável em U e $[a, a + h] \subset U$, então existe $t \in (0, 1)$ tal que

$$f(a + h) - f(a) = Df(a + th) \cdot h.$$

Demonstração: Considere $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Phi(t) = f(a + th)$. Podemos aplicar a versão real do Teorema do Valor Médio à função Φ e concluir que existe $t \in (0, 1)$ tal que $\Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(t)$. Mas, pela Regra da Cadeia, isso quer dizer que

$$f(a + h) - f(a) = Df(a + th) \cdot h. \quad \square$$

O exemplo a seguir mostra que não é possível esperar que o Teorema do Valor Médio continue válido quando f não for uma função real.

Exemplo 1 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Então $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$ nunca se anula, pois $|f'(t)| = 1$. Mas $f(2\pi) - f(0) = 0$, mostrando que não existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $f(2\pi) - f(0) = f'(\theta) \cdot 2\pi$. $\triangleleft$

3.3 DESIGUALDADE DO VALOR MÉDIO

A generalização do Teorema do Valor Médio para funções diferenciáveis $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma desigualdade:

$$\|f(a + h) - f(a)\| \leq \|h\| \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(a + th)\|.$$

Essa forma fica evidente ao tentarmos aplicar o Teorema do Valor Médio a cada uma das funções coordenadas $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$. De fato, podemos concluir daquele teorema que

$$f_i(a+h) - f_i(a) = Df_i(a+t_ih) \cdot h,$$

em que $0 < t_i < 1$ depende da função f_i . Se consideramos em $\mathbb{R}^m$ a norma $\|\cdot\|_\infty$, então

$$\begin{aligned} \|f(a+h) - f(a)\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(a+h) - f_i(a)| = \max_{1 \leq i \leq n} |Df_i(a+t_ih) \cdot h| \\ &\leq \|h\| \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(a+th)\|. \end{aligned}$$

Se quisermos voltar para a norma original do espaço $\mathbb{R}^m$ chegaremos a um resultado menos preciso do que a desigualdade afirmada anteriormente:

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leq c \|h\| \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(a+th)\|,$$

em que $c > 0$.

Mostraremos a Desigualdade do Valor Médio com hipóteses mais fracas do que aquelas usadas para demonstrar o Teorema do Valor Médio. No enunciado de nosso próximo resultado, estamos admitindo a possibilidade de

$$\sup_{0 < t < 1} \|Df(a+th)\|$$

ser infinito.

Teorema 3.6 (Desigualdade do Valor Médio) *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação contínua. Suponha que $[a, a+h] \subset U$ e que f seja diferenciável em $(a, a+h) \subset U$. Então*

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leq \|h\| \sup_{0 < t < 1} \|Df(a+th)\|.$$

Demonstração: Suponhamos inicialmente que f seja diferenciável no ponto a . Seja $\Phi : [0, 1] \rightarrow X$ definida por $\Phi(t) = f(a+th)$. Então Φ é contínua em $[0, 1]$ e diferenciável em $[0, 1)$. Como $\Phi(0) = f(a)$, $\Phi(1) = f(a+h)$ e $\Phi'(t) = f'(a+th) \cdot h$, basta mostrar que¹ $\|\Phi(1) - \Phi(0)\| \leq M := \sup_{0 \leq t < 1} \|\Phi'(t)\| < \infty$.

Para isso, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, vamos mostrar que $\|\Phi(1) - \Phi(0)\| \leq M + \epsilon$. Consideremos o conjunto

$$F := \{t \in [0, 1] : \|\Phi(s) - \Phi(0)\| \leq (M + \epsilon)s \text{ para todo } s \in [0, t]\}.$$

Queremos mostrar que $F = [0, 1]$. Claramente F é um intervalo fechado da forma $[0, \alpha]$. Suponhamos $\alpha < 1$. Então existe $\delta > 0$ tal que $\alpha + \delta < 1$ e $0 \leq h < \delta$ implica $\Phi(\alpha+h) = \Phi(\alpha) + \Phi'(\alpha) \cdot h + r(h)$, em que $r(h) \leq \epsilon \|h\|$. Mas dessa última expressão (que expressa a diferenciabilidade de Φ em α) vem

$$\|\Phi(\alpha+h) - \Phi(\alpha)\| \leq (M + \epsilon)h, \quad \text{para } 0 \leq h \leq \delta.$$

¹Note que o caso em que $M = \infty$ torna a desigualdade trivial.

Como $\alpha \in F$, $\|\Phi(\alpha) - \Phi(0)\| \leq (M + \epsilon)\alpha$. Portanto,

$$\begin{aligned} \|\Phi(\alpha + h) - \Phi(0)\| &\leq \|\Phi(\alpha + h) - \Phi(\alpha)\| + \|\Phi(\alpha) - \Phi(0)\| \\ &\leq (M + \epsilon)h + (M + \epsilon)\alpha = (M + \epsilon)(\alpha + h), \end{aligned}$$

mostrando que $\alpha + h \in F$. Isso garante que $\alpha = 1$, como queríamos.

Da mesma maneira, mostraríamos o caso em que f é diferenciável em $(a, b]$. Finalmente, observamos que se a Desigualdade do Valor Médio vale para $[a, b]$ e $[b, c]$, então ela vale para $[a, c]$. $\square$

A Desigualdade do Valor Médio pode ser bastante generalizada, de modo a permitir que a função f não seja diferenciável em um subconjunto enumerável do intervalo $[a, a + h]$. Veja, a esse respeito, o livro de Dieudonné [7].

3.4 CONSEQUÊNCIAS DA DESIGUALDADE DO VALOR MÉDIO

Compare o resultado abaixo com o Exercício 13 do Capítulo 2.

Corolário 3.7 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto convexo e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável em U . Se $\|f'(u)\| \leq M$ para todo $u \in U$, então f é uniformemente Lipschitziana em U :*

$$\|f(u) - f(v)\| \leq M\|u - v\|.$$

Demonstração: Basta notar que podemos aplicar a Desigualdade do Valor Médio a cada segmento de reta $[u, v] \subset U$. $\square$

A recíproca do corolário anterior também é válida. Veja o Exercício 16.

Corolário 3.8 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável, com $f'(u) = 0$ para todo $u \in U$. Então f é constante.*

Demonstração: Fixemos $a \in U$ e consideremos os conjuntos $A := \{u \in U : f(u) = f(a)\}$ e $B := \{u \in U : f(u) \neq f(a)\}$. Como f é contínua, B é aberto. Afirmamos que A também é aberto. De fato, se $u_0 \in A$, tome $\delta > 0$ tal que $B_\delta(u_0) \subset U$. Então $\|h\| < \delta$ implica que $[u_0, u_0 + h] \subset U$. Assim, decorre do Corolário 3.7 (com $M = 0$) que $\|f(u_0 + h) - f(u_0)\| = 0$ e, portanto, $f(u_0 + h) = f(u_0)$ para todo h com $\|h\| < \delta$. Isso mostra que A é aberto. Como U é conexo e $a \in A$, temos que $B = \emptyset$, ou seja, $f(u) = f(a)$ para todo $u \in U$. $\square$

O próximo resultado é muito útil, ainda que seja uma consequência imediata da Desigualdade do Valor Médio. (Como antes, não estamos excluindo a hipótese do supremo ser infinito.)

Proposição 3.9 *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação contínua no aberto U . Suponhamos que $[u, u + h] \subset U$ e que f seja diferenciável no segmento de reta $(u, u + h)$. Então, para toda aplicação linear contínua $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vale*

$$\|f(u + h) - f(u) - T \cdot h\| \leq \sup_{0 < t < 1} \|f'(u + th) - T\| \|h\|.$$

Demonstração: Basta aplicar a Desigualdade do Valor Médio à aplicação $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $g(u) = f(u) - T \cdot u$. $\square$

No caso de aplicações C^1 , a Proposição 3.9 nos fornece uma estimativa para o resto, ao considerarmos $T = Df(u)$. Então temos

$$\|r(u, h)\| = \|f(u + h) - f(u) - Df(u) \cdot h\| \leq \sup_{0 < t < 1} \|Df(u + th) - Df(u)\| \|h\|.$$

A dependência do resto r com relação ao ponto u pode ser eliminada por meio de alguma hipótese que garanta continuidade uniforme. Para isso, definimos:

Definição 3.10 Uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é **uniformemente diferenciável** em um subconjunto $\Omega \subset U$ se, para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$\|r(u, h)\| = \|f(u + h) - f(u) - f'(u) \cdot h\| \leq \epsilon \|h\|, \quad \forall u \in \Omega \text{ e } \|h\| < \delta, \text{ com } u + h \in U.$$

Corolário 3.11 Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1 . Então f é uniformemente diferenciável em cada subconjunto compacto $K \subset U$.

Demonstração: Considere $\text{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus U)$. Como $K \subset U$ é compacto e $\mathbb{R}^n \setminus U$ é fechado, essa distância é positiva². Assim, existe $\delta > 0$ tal que $u + h \in U$ para qualquer $u \in K$ e $\|h\| < \delta$. Em particular, $[u, u + h] \subset U$. Aplicando a Proposição 3.9 (com $T = f'(u)$), obtemos

$$\frac{\|r(u, h)\|}{\|h\|} \leq \sup_{0 < t < 1} \|f'(u + th) - f'(u)\|$$

para todo $u \in K$ e $\|h\| < \delta$. Como f' é contínua e K é compacto, dado $\epsilon > 0$, obtemos³ (reduzindo δ se necessário) $\|f'(u + h) - f'(u)\| < \epsilon$ para todo $u \in K$ e $\|h\| < \delta$. Isso prova o afirmado. $\square$

Corolário 3.12 Sejam $c \in U$ e $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação contínua, diferenciável em $U \setminus \{c\}$. Se existe $\lim_{u \rightarrow c} f'(u) = T \in \mathcal{L}(X, Y)$, então f é diferenciável em c e $f'(c) = T$.

Demonstração: Tome $\delta > 0$ tal que $c + h \in U$ se $\|h\| < \delta$. Pela Proposição 3.9 temos

$$\frac{\|r(c, h)\|}{\|h\|} = \frac{\|f(c + h) - f(c) - T \cdot h\|}{\|h\|} \leq \sup_{0 < t < 1} \|f'(c + th) - T\|.$$

Assim, $\lim_{h \rightarrow 0} \|r(c, h)\| / \|h\| = 0$, mostrando que f é diferenciável em c e $f'(c) = T$. $\square$

²Veja o Exercício 1.

³Estamos fazendo uso do seguinte

Teorema: Sejam M e N espaços métricos, $f : M \rightarrow N$ contínua e $K \subset M$ compacto. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\text{dist}(f(x), f(y)) < \epsilon$ para todo $x \in K$ e $y \in M$, com $\text{dist}(x, y) < \delta$.

Demonstração: Caso contrário, existiriam seqüências $x_n \in K$ e $y_n \in M$, com $\text{dist}(x_n, y_n) < 1/n$ e $\text{dist}(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$. Como K é compacto, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que $x_n \rightarrow x \in K$. Como $\text{dist}(x_n, y_n) \rightarrow 0$, vemos que $y_n \rightarrow x$. A continuidade de f em x garante então que $\text{dist}(f(x_n), f(x)) \rightarrow 0$ e $\text{dist}(f(y_n), f(x)) \rightarrow 0$, de onde se segue que $\text{dist}(f(x_n), f(y_n)) \rightarrow 0$, o que contradiz a nossa hipótese. $\square$

Exemplo 2 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \exp(-1/x^2)$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Então $f \in C^\infty$. De fato, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ mostra que f é contínua. Se $x \neq 0$, $f'(x) = 2x^{-3} \exp(-1/x^2)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$. O Corolário 3.12 garante que f é diferenciável em 0 e $f'(0) = 0$. Analogamente para cada $k \in \mathbb{N}$, a derivada $f^{(k)}(x) = P(1/x) \exp(-1/x^2)$ (em que $P(z)$ denota um polinômio) e $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(k)}(x) = 0$. Assim, a derivada $f^{(k)}(0)$ existe e é igual a 0. $\triangleleft$

Teorema 3.13 (Seqüências de aplicações diferenciáveis)

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto convexo e limitado. Se a seqüência de aplicações diferenciáveis $f_k : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ converge num ponto $c \in U$ e se, para todo ponto $u \in U$, existem $r = r(u) > 0$ e uma bola $B_r(u) \subset U$ na qual a seqüência de derivadas $f'_k : B_r(u) \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ converge uniformemente, então a seqüência f_k converge uniformemente em $B_r(u)$. Se $f(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(u)$ e $g = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(u)$, então $f' = g$.

Demonstração: Sejam $A \subset U$ e $B \subset U$ as uniões de todas as bolas $B_r(u)$ (com $r = r(u)$) nas quais f converge no ponto u e nas quais f não converge em u , respectivamente. Claramente $A \cap B = \emptyset$.

Consideremos agora $u_0 \in A$ e $r = r(u_0) > 0$, com f'_k convergindo uniformemente para g em $B_r(u_0)$. Então, de acordo com a Desigualdade do Valor Médio, para todo $u \in B_r(u_0)$ vale

$$\begin{aligned} \|f_n(u) - f_m(u) - (f_n(u_0) - f_m(u_0))\| &\leq \|u - u_0\| \sup_{z \in B_r(u_0)} \|f'_n(z) - f'_m(z)\| \\ &\leq r \sup_{z \in B_r(u_0)} \|f'_n(z) - f'_m(z)\|. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Esse desigualdade mostra que A é aberto, pois se f converge no ponto u_0 , então f converge uniformemente em todos os pontos de $B_r(u_0)$. Trocando u_0 por um ponto arbitrário $v_0 \in B_r(u_0)$, vemos que se f converge em qualquer ponto de $v_0 \in B_r(u_0)$, então f converge uniformemente em todos os pontos de $B_r(u_0)$. Isso mostra que B é aberto. Como U é conexo e $A \neq \emptyset$ (pois f converge no ponto c), temos $U = A$, mostrando que converge uniformemente em cada bola $B_r(u)$.

Agora mostraremos que g é a derivada de f . Dado $\epsilon > 0$, por hipótese existe n_0 tal que $m, n \geq n_0$ implica tanto que $\|f'_m(u) - f'_n(u)\| \leq \epsilon/r$ para todo $u \in B_r(u_0)$ como também $\|g(u_0) - f'_n(u_0)\| \leq \epsilon$. Fazendo $m \rightarrow \infty$ em (3.1), obtemos

$$\|f(u) - f(u_0) - [f_n(u) - f_n(u_0)]\| \leq \epsilon \|u - u_0\|.$$

Por outro lado, para todo $n \geq n_0$, existe $r' \leq r$ tal que

$$\|u - u_0\| \leq r' \quad \Rightarrow \quad \|f_n(u) - f_n(u_0) - f'_n(u_0) \cdot (u - u_0)\| \leq \epsilon \|u - u_0\|.$$

Portanto,

$$\|f(u) - f(u_0) - g(u_0) \cdot (u - u_0)\| \leq 3\epsilon \|u - u_0\|,$$

provando que $f'(u_0)$ existe e é igual a $g(u_0)$. $\square$

Observação 3.14 A hipótese de f' convergir uniformemente em $B_r(u)$ não pode ser muito estendida. Por exemplo, se supusermos que f' converge uniformemente num aberto conexo não-limitado U e que f convirja num ponto, não podemos concluir que f converge uniformemente em U , como se pode ver no seguinte exemplo: $U = \mathbb{R}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(u) = u/n$. A seqüência de derivadas $f'_n = 1/n$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$, f converge em todos os pontos de $\mathbb{R}$ para 0, mas não converge uniformemente em $\mathbb{R}$. $\triangleleft$

Corolário 3.15 Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo e $f_n : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma seqüência de aplicações diferenciáveis. Se, para todo $u \in U$, existem $r = r(u) > 0$ e uma bola $B_r(u) \subset U$ na qual a série $\sum f'_n$ converge uniformemente e se existe um ponto u_0 no qual a série $\sum f_n(u_0)$ converge, então a série $\sum f_n$ converge uniformemente em $B_r(u)$ e sua soma tem derivada $\sum f'_n$ em todo ponto $u \in U$.

3.5 DERIVADAS PARCIAIS

Consideremos o produto $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ de espaços normados de dimensão finita. Escrevemos um elemento $x \in X_1 \times \cdots \times X_n$ em termos de suas "coordenadas", isto é, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Seja $U \subset X$ aberto e $f : U \subset X \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação. Podemos definir derivadas direcionais de maneira semelhante ao caso em que $X = \mathbb{R}^n$ e $X_i = \mathbb{R}$. De fato, se $u = (u_1, \dots, u_n) \in U$, fixando as coordenadas $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n$, podemos considerar a aplicação

$$u_i \mapsto f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n),$$

definida em um aberto $U_i \subset X_i$ e tomando valores em $\mathbb{R}^m$. Se essa aplicação for diferenciável, chamamos sua derivada de **derivada parcial** de f no ponto u e a denotamos por $D_i f(u)$. Assim, se esse for o caso, existe uma **única** (veja o Exercício ???) aplicação linear⁴

$$D_i f(u) : X_i \rightarrow Y$$

tal que

$$f(u_1, \dots, u_i + h, \dots, u_n) - f(u_1, \dots, u_n) = D_i f(u) \cdot h + r_i(h),$$

em que $\lim_{h \rightarrow 0} r_i(h)/\|h\| = 0$, em que $h \in X_i$ é pequeno o suficiente para que o lado esquerdo da igualdade esteja definido. Uma função f pode possuir todas, algumas ou nenhuma de suas derivadas parciais $D_i f(u)$ num ponto $u \in U$.

Para simplificar a notação, consideraremos nesta seção apenas o caso do produto cartesiano de dois espaços normados de dimensão finita.

Proposição 3.16 Sejam $U \subset X = X_1 \times X_2$ aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável no ponto $u = (u_1, u_2) \in U$. Então existem ambas as derivadas parciais de f em $u = (u_1, u_2)$ e

$$Df(u_1, u_2) \cdot (h_1, h_2) = D_1 f(u_1, u_2) \cdot h_1 + D_2 f(u_1, u_2) \cdot h_2.$$

Demonstração: Seja $h = (h_1, h_2) \in X_1 \times X_2$. Como f é diferenciável em $u \in U$,

$$f(u_1 + h_1, u_2) = f(u_1, u_2) + Df(u_1, u_2) \cdot (h_1, 0) + r(h_1), \quad \text{com } \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{r(h_1)}{\|h_1\|} = 0$$

⁴Se os espaços X_i têm dimensão finita, exige-se a continuidade de $D_i f(u)$.

e

$$f(u_1, u_2 + h_2) = f(u_1, u_2) + Df(u_1, u_2) \cdot (0, h_2) + r(h_2), \quad \text{com } \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{r(h_2)}{\|h_2\|} = 0.$$

A unicidade das derivadas parciais implica que $Df(u_1, u_2)|_{X_i} = D_i f(u_1, u_2)$ para $i = 1, 2$. Da linearidade de $Df(u_1, u_2)$ decorre a expressão da derivada em termos das derivadas parciais. $\square$

Decorre da Proposição 3.16 que uma aplicação diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sempre possui derivadas parciais com respeito a qualquer decomposição $E \oplus F$ do espaço $\mathbb{R}^n$.

Note, por outro lado, que a recíproca da Proposição 3.16 não é verdadeira, de acordo com os Exemplos 11 e 12.

Corolário 3.17 *Seja $U \subset X = X_1 \times X_2$ um aberto. Se $f : U \subset X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ for de classe C^1 , então são contínuas as derivadas parciais $D_1 f : U \rightarrow \mathcal{L}(X_1, \mathbb{R}^m)$ e $D_2 f : U \rightarrow \mathcal{L}(X_2, \mathbb{R}^m)$.*

Demonstração: Isso é imediato, pois $D_1 f = Df|_{X_1}$ e $D_2 f = Df|_{X_2}$. $\square$

O próximo resultado dá condições que asseguram a diferenciabilidade da função f . Ele fornece uma versão intrínseca da Proposição 2.6.

Proposição 3.18 *Sejam $U \subset X = X_1 \times X_2$ aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação. Se existem e são contínuas as derivadas parciais $D_1 f(u_1, u_2) \in \mathcal{L}(X_1, \mathbb{R}^m)$ e $D_2 f(u_1, u_2) \in \mathcal{L}(X_2, \mathbb{R}^m)$ numa vizinhança do ponto (u_1, u_2) , então f é uma aplicação diferenciável em (u_1, u_2) . Em particular, se as derivadas parciais forem contínuas, então $f \in C^1$.*

Demonstração: Basta notar que, se $(u_1 + h, u_2 + k)$ pertence à vizinhança de (u_1, u_2) em que ambas as derivadas parciais são contínuas, então

$$\begin{aligned} & \|f(u_1 + h, u_2 + k) - f(u_1, u_2) - D_1 f(u_1, u_2) \cdot h - D_2 f(u_1, u_2) \cdot k\| \\ & \leq \|f(u_1 + h, u_2 + k) - f(u_1, u_2 + k) - D_1 f(u_1, u_2) \cdot h\| \\ & \quad + \|f(u_1, u_2 + k) - f(u_1, u_2) - D_2 f(u_1, u_2) \cdot k\| \\ & \leq \|h\| \sup_{0 \leq t \leq 1} \|D_1 f(u_1 + th, u_2 + k) - D_1 f(u_1, u_2)\| \\ & \quad + \|k\| \sup_{0 \leq s \leq 1} \|D_2 f(u_1, u_2 + sk) - D_2 f(u_1, u_2)\|, \end{aligned}$$

de acordo com a Proposição 3.9 da Desigualdade do Valor Médio. A continuidade das derivadas parciais em uma vizinhança de (u_1, u_2) garante que f é diferenciável nesse ponto.

Se as derivadas parciais forem contínuas, como $Df(u) \cdot (h, k) = D_1 f(u) \cdot h + D_2 f(u) \cdot k$, decorre que $Df(u)$ é contínua, mostrando que $f \in C^1$. $\square$

Observação 3.19 A demonstração apresentada mostra, em particular, que a continuidade da primeira derivada parcial e a simples existência da segunda derivada parcial asseguram que f é diferenciável, pois a expressão $\|f(u_1, u_2 + k) - f(u_1, u_2) - D_2 f(u_1, u_2) \cdot k\|$ tende a zero quando k tende a zero. Veja o Exercício 20. $\triangleleft$

Exemplo 3 Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x^2y, \sin z)$. Se considerarmos o espaço $\mathbb{R}^3$ como sendo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, então a matriz jacobiana de $D_2f(x, y, z) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é

$$JD_2f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & \cos z \end{pmatrix},$$

pois $D_2f(x, y, z)$ é tomada no espaço das duas últimas coordenadas.

Se, por outro lado, considerarmos $\mathbb{R}^3$ como sendo $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, então a matriz jacobiana de $D_2f(x, y, z) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por

$$JD_2f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos z \end{pmatrix}.$$

◁

Também é interessante ter uma notação apropriada para aplicações lineares definidas e tomando valores em produtos cartesianos de espaços. Consideremos uma aplicação **linear**

$$T : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2,$$

em que X_1, X_2, Y_1, Y_2 são espaços normados de dimensão finita. Dado um ponto $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, podemos representá-lo como um "vetor" coluna

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Se $T = (T_1, T_2)^t$ são as "coordenadas" de T , definimos

$$T_{11} : X_1 \rightarrow Y_1 \quad \text{por} \quad T_{11}x_1 = T_1(x_1, 0).$$

Analogamente, definimos $T_{12}x_2 = T_1(0, x_2)$, $T_{21}x_1 = T_2(x_1, 0)$ e $T_{22}x_2 = T_2(0, x_2)$.

Com essa notação, a aplicação T é representada por uma "matriz" cujas entradas são aplicações lineares:

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}x_1 + T_{12}x_2 \\ T_{21}x_1 + T_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(x_1, x_2) \\ T_2(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

que resulta na aplicação de T ao "vetor" (x_1, x_2) .

Enunciamos esse resultado, que é consequência imediata da Proposição 3.16 e da notação que acabamos de introduzir.

Corolário 3.20 *Sejam X_1, X_2, Y_1, Y_2 espaços de Banach. Seja $U \subset X_1 \times X_2$ aberto e $f : U \rightarrow Y_1 \times Y_2$ uma aplicação diferenciável, com*

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

representada por suas aplicações coordenadas $f_1 : U \rightarrow Y_1$ e $f_2 : U \rightarrow Y_2$. Então a derivada $Df(u)$ é dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} D_1f_1(u) & D_2f_1(u) \\ D_1f_2(u) & D_2f_2(u) \end{pmatrix}.$$

Os conceitos que introduzimos são válidos para o produto cartesiano de um número arbitrário de espaços normados de dimensão finita⁵, tanto no domínio quanto na imagem. Assim, para tais decomposições, vale uma versão intrínseca da representação matricial de uma aplicação linear.

Além disso, também podemos considerar decomposições em somas diretas (e.g., $\mathbb{R}^n = X_1 \oplus X_2$) ao invés de produtos cartesianos. O fundamental é que cada elemento do espaço seja representado de maneira única em termos de suas "coordenadas".

Ao considerarmos uma aplicação linear L , a decomposição de um espaço em soma direta de subespaços é usualmente feita considerando dois subespaços especiais: $\ker L$ e $\operatorname{im} L$. Escreve-se o domínio como soma direta de $\ker L$ e de um subespaço que é levado isomorficamente por L em sua imagem (no caso de dimensão infinita, isso nem sempre é possível); do mesmo modo, escreve-se o contradomínio como soma direta de $\operatorname{im} L$ e de um subespaço que lhe complementa (de novo, isso nem sempre é possível no caso de dimensão infinita). É o que veremos no nosso próximo exemplo.

Exemplo 4 Considere $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x, y, z, w) = (\sin x, e^x \cos y, \sin y).$$

Então sua matriz jacobiana é dada pela matriz $Jf(x, y, z, w)$:

$$Jf(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & 0 & 0 \\ e^x \cos y & -e^x \sin y & 0 & 0 \\ 0 & \cos y & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que

$$Jf(0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usaremos a matriz $L = Jf(0, 0, 0, 0)$ para decompor o domínio e a imagem de f . Claramente $\ker L$ é o espaço gerado pelos vetores $(0 \ 0 \ 1 \ 0)^t$ e $(0 \ 0 \ 0 \ 1)^t$. Um complementar a esse espaço identifica-se naturalmente com $\mathbb{R}^2$: é o subespaço gerado pelos vetores $(1 \ 0 \ 0 \ 0)^t$ e $(0 \ 1 \ 0 \ 0)^t$, que será denotado por E . Assim,

$$\mathbb{R}^4 = \ker L \oplus E.$$

(Note que escolhemos E igual a $(\ker L)^\perp$ com relação ao produto interno usual do $\mathbb{R}^4$.)

A imagem de L é o espaço gerado pelas colunas de L . Assim, $\operatorname{im} L$ tem como base os vetores $(1 \ 1 \ 0)^t$ e $(0 \ 0 \ 1)^t$. Para obtermos uma base de $\mathbb{R}^3$ basta, então, escolhermos um vetor linearmente independente com esses. Vamos escolher o vetor $(1 \ -1 \ 0)^t$, que é perpendicular (em relação ao produto interno usual do $\mathbb{R}^3$) aos vetores de $\operatorname{im} L$. Se F é o espaço gerado por esse vetor, então $F = (\operatorname{im} L)^\perp$ e temos a decomposição

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus \operatorname{im} L.$$

⁵A exigência das dimensões serem finitas é supérflua

(Note que E é levado em $\text{im } L$ isomorficamente por L .)

Assim, a decomposição gerada por L implica em considerarmos

$$f : \ker L \oplus E \rightarrow F \oplus \text{im } L.$$

Assim, $f_1 : \ker L \oplus E \rightarrow F$ e $f_2 : \ker L \oplus E \rightarrow \text{im } L$.

Denotando $(0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$ por 0 , as aplicações parciais $D_1 f_1(0) : \ker L \rightarrow F$, $D_2 f_1(0) : E \rightarrow F$, $D_1 f_2(0) : \ker L \rightarrow \text{im } L$ e $D_2 f_2(0) : E \rightarrow \text{im } L$ podem ser representadas de modo simples ao escolhermos as bases $\mathcal{B} = \{(0 \ 0 \ 1 \ 0), (0 \ 0 \ 0 \ 1)^t, (1 \ 0 \ 0 \ 0)^t, (0 \ 1 \ 0 \ 0)^t\} \subset \mathbb{R}^4$ e $\mathcal{C} = \{(1 \ -1 \ 0)^t, (1 \ 1 \ 0)^t, (0 \ 0 \ 1)^t\} \subset \mathbb{R}^3$:

$$[Df(0)]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Se denotamos por $(u, v) \in \ker Df(0) \oplus (\ker Df(0))^{\perp}$, então $[Df(0)]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(u, v) = (0, v)$. Quer dizer, $[Df(0)]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ pode ser identificada com a aplicação linear $\pi_2 : \ker Df(0) \oplus (\ker Df(0))^{\perp} \rightarrow \text{im } Df(0)$, $\pi_2(u, v) = v$. Assim, com mudanças de base adequadas no domínio e na imagem, a derivada $Df(0)$ assume a forma de uma projeção. O teorema do posto, que veremos no próximo capítulo, garante que f , a menos de difeomorfismos no domínio e na imagem, tem esse mesmo comportamento numa vizinhança do ponto 0 .

A decomposição apresentada usou bases escolhidas arbitrariamente no $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$. Entretanto, os subespaços $\ker L$ e $\text{im } L$ independem da escolha de bases.

A escolha dos subespaços que complementam $\ker L$ e $\text{im } L$ é completamente arbitrária. (Em espaços com produto interno – como no exemplo que estamos tratando –, é costumeiro usar o complementar ortogonal e considerar as somas diretas $\ker L \oplus (\ker L)^{\perp}$ e $(\text{im } L)^{\perp} \oplus \text{im } L$, o que facilita os cálculos.) Assim, existem muitas escolhas distintas para os subespaços E e F , todas elas cumprindo o mesmo papel: $Df(0)$ estabelece um isomorfismo entre E e $\text{im } Df(0)$. $\triangleleft$

Em algumas situações, as coordenadas usuais do domínio da aplicação f não são úteis na decomposição gerada por $Df(x)$. Nesse caso, devemos fazer uma mudança de base para conseguir expressar as coordenadas de um ponto do $\mathbb{R}^n$. Veremos esse caso no próximo capítulo.

3.6 EXERCÍCIOS

1. Sejam $K, F \subset X$, em que X é um espaço métrico, K um compacto e F um fechado. Defina $\text{dist}(K, F) = \inf\{d(k, f) : k \in K, f \in F\}$. Mostre que, se $K \cap F = \emptyset$, então $\text{dist}(K, F) > 0$.
2. Seja $A : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma matriz sobrejetora. Mostre que, escolhendo bases adequadas no domínio e na imagem, A assume a forma $(0 \ I)$, em que I denota a identidade no $\mathbb{R}^n$.
3. Seja S um subconjunto denso de um espaço métrico X e $f : S \rightarrow Y$ uma função uniformemente contínua, sendo Y um espaço métrico completo. Mostre que existe uma única extensão contínua $F : X \rightarrow Y$ de f , a qual é uniformemente contínua.

4. Considere o Exercício 30 do Capítulo 1. Dê um exemplo mostrando que não podemos concluir que Φ tenha um ponto fixo na bola aberta $B_r(0)$. Mostre, entretanto, que se substituirmos a segunda condição por $\|\Phi(0)\| < r(1 - k)$, então Φ tem um ponto fixo em $B_r(0)$.
5. Seja $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação identidade. Mostre que $B_1(I) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ está contido em $GL(\mathbb{R}^n)$.
6. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável, com $f(0) = 0$. Se 1 não for autovalor de $Df(0)$, mostre que existe uma vizinhança $V \ni 0$ no $\mathbb{R}^n$ tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in V \setminus \{0\}$.
7. Dada $A : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ diferenciável, tome $x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ e defina $\varphi : (0, 1) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ por $\varphi(t) = A(tx)$. Qual interpretação para a expressão $\varphi'(t) = A'(tx) \cdot x$ é verdadeira: $\varphi'(t) \cdot h = (A'(tx) \cdot x) \cdot h$ ou $\varphi'(t) \cdot h = (A'(tx) \cdot h) \cdot x$?
8. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Dada $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, mostre que se f' for uniformemente contínua, então f é uniformemente diferenciável em U .
9. Fixe $0 < a < 1$ e defina $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} ax + x^2 \sin(1/x), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Mostre

- (a) que f é diferenciável e, em particular, $f'(0) = a$;
 - (b) que f' não é contínua em 0;
 - (c) que f não é bijeção em nenhuma vizinhança de 0, embora $f'(0)$ seja injetiva.
10. **(Integração de caminhos)** Dada $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínua, defina $\int_a^b g(t)dt$ como o vetor obtido ao integrar cada uma das funções coordenadas de g no intervalo $[a, b]$. Seja $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação linear. Mostre que

$$\int_a^b (T \circ g)(t)dt = T \cdot \left(\int_a^b g(t)dt \right) \quad \text{e} \quad \left\| \int_a^b g(t)dt \right\| \leq (b - a) \sup_{a \leq t \leq b} \|g(t)\|.$$

Conclua então que, se $T : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ for contínuo, então

$$\int_a^b T(t) \cdot h dt = \left(\int_a^b T(t)dt \right) \cdot h.$$

Sugestão: para a primeira parte, use somas parciais. Para a segunda, considere $g = T$ e, para o papel de T , a aplicação linear $F : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}^p$ dada por $F(S) = S \cdot h$.

11. **(Regra de Leibniz)** Considere um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e uma função contínua $f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal que $D_1 f : U \times [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ seja contínua. Defina $\Psi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ por

$$\Psi(u) = \int_a^b f(u, t)dt.$$

Mostre que Ψ é de classe C^1 e

$$\Psi'(u) = \int_a^b D_1 f(u, t) dt.$$

12. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em $\mathbb{R}^n$. Definimos o **gradiente** de f (com relação a esse produto interno) no ponto $u \in U$ como sendo o vetor $\nabla f(u)$ caracterizado por⁶

$$\langle \nabla f(u), h \rangle = Df(u) \cdot h, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Fixado $c \in \mathbb{R}$, uma **superfície de nível** de f é o conjunto $f^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^n$.

- (a) Se $\langle x, y \rangle = x \cdot y$ é o produto interno usual do $\mathbb{R}^n$, obtenha $\nabla f(u)$;
 (b) considere a base $\mathcal{B} = \{f_1, \dots, f_n\} = \{e_1, e_1 + e_2, \dots, e_1 + e_2 + \dots + e_n\}$ do $\mathbb{R}^n$. Defina $g_{ij} = f_i \cdot f_j$. Se $x = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$ e $y = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_n f_n$, mostre que

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \alpha_i \beta_j$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^n$. (A matriz $G = (g_{ij})$ é a matriz de Gram desse produto interno.) Encontre a expressão de $\nabla f(u)$ na base canônica com relação a esse produto interno.

- (c) se $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ for diferenciável, com $\lambda(0) = u$ e $\lambda'(t) = \nabla f(u)$, então $f \circ \lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ é crescente, desde que ϵ seja suficientemente pequeno;
 (d) se $\|v\| = \|\nabla f(u)\|$, então $Df(u) \cdot v \leq Df(u) \cdot \nabla f(u)$. Isto é, dentre todas as direções em que f cresce, a direção do gradiente é a de maior crescimento;
 (e) Se a imagem do caminho diferenciável $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ estiver toda contida na mesma superfície de nível $f^{-1}(c)$, então o vetor velocidade $\gamma'(t)$ é perpendicular ao gradiente de f no ponto $\gamma(t)$.
13. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Suponha que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ seja uma aplicação de classe C^1 . Dados $u_0 \in U$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que,

$$u, v \in B_\delta(u_0) \Rightarrow u, v \in U \quad \text{e} \quad \|f(u) - f(v) - Df(u_0) \cdot (u - v)\| \leq \epsilon \|u - v\|.$$

(Compare esse exercício com a definição de aplicação uniformemente diferenciável.)

14. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 . Suponha que, para um compacto $K \subset U$, tenhamos $Df(u)$ injetiva para todo $u \in K$. Mostre que existem $c, \delta > 0$ de modo que $\|f(u+h) - f(u)\| \geq c\|h\|$ para todo $u \in K$ e $\|h\| < \delta$.

⁶Observe que estamos usando o Teorema de Representação de Riesz.

15. Seja $Y = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ com sua norma usual $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$, em que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ e $x \in \mathbb{R}^2$. Considere em $\mathbb{R}^2$ a norma do máximo (isto é, $\|(a, b)\| = \max\{|a|, |b|\}$) e defina $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow Y$ da seguinte maneira: se $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, então $f(u) = T$, em que a aplicação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por $T(x, y) = (ax, by)$. Mostre que f é uma **imersão isométrica** de $\mathbb{R}^2$ em Y , isto é, $\|f(u)\| = \|u\|$. Conclua que a norma usual de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ não é diferenciável. (Note que essa conclusão independe da norma considerada em $\mathbb{R}^2$!) Generalize: mostre que a norma usual de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ não é diferenciável.

16. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável no aberto U . Se

$$\|f(u) - f(v)\| \leq M\|u - v\|,$$

para quaisquer $u, v \in U$ (sendo M uma constante) então $\|f'(u)\| \leq M$ para todo $u \in U$.

17. Uma linha poligonal P de vértices $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ é uma união de segmentos de retas $[x_i, x_{i+1}]$, $i \in \{1, \dots, k-1\}$. O comprimento $\ell(P)$ dessa poligonal é, por definição,

$$\sum_{i=1}^{k-1} \|x_{i+1} - x_i\|.$$

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo.

- Mostre que, dados dois pontos $a, b \in U$, existe uma poligonal contida em U cujo primeiro vértice é a e o último é b .
- Seja $d_U(a, b)$ o ínfimo dos comprimentos de todas as poligonais contidas em U ligando os pontos a e b . Chamamos d_U de **distância geodésica** em U . Mostre que d_U é uma métrica em U , a qual coincide com a métrica euclidiana $\|a - b\| = \langle a - b, a - b \rangle^{1/2}$ quando U for convexo.
- Mostre que d_U é equivalente à métrica euclidiana.
- Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável. Se $\|f'(u)\| \leq M$ para todo $u \in U$, mostre que $\|f(u) - f(v)\| \leq Md_U(u, v)$ para todos $u, v \in U$.
- Se U for convexo e $f(U) \subset V$, em que V é um aberto conexo, mostre que

$$d_V(f(u), f(v)) \leq M\|u - v\|,$$

se $\|f'(u)\| \leq M$ para todo $u \in U$.

- Sejam U um convexo, $D \subset U$ um conjunto fechado enumerável e $A = U \setminus D$. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável em A , com $\|f'(u)\| \leq M$ para todo $u \in A$. Mostre que $d_A(u, v) = \|u - v\|$ e conclua que f possui extensão uniformemente contínua $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$.
18. Sejam $F \subset \mathbb{R}^m$ um fechado e $T \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto qualquer. Suponha que uma aplicação $\varphi : F \times T \rightarrow F$ seja contínua com relação à segunda variável e que exista λ , com $0 < \lambda < 1$, tal que $\|\varphi(x, t) - \varphi(y, t)\| \leq \lambda\|x - y\|$ para todos $x, y \in F$ e $t \in T$. Mostre que existe uma aplicação **contínua** $\alpha : T \rightarrow F$ tal que $\varphi(\alpha(t), t) = \alpha(t)$ para todo $t \in T$.
Sugestão: procuram-se pontos fixos da aplicação φ .

19. Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ a bola aberta ou fechada de centro x_0 e raio $r > 0$. Mostre que se $\varphi : B \times T \rightarrow \mathbb{R}^m$ for contínua em $T \subset \mathbb{R}$ e se existir λ , com $0 < \lambda < 1$ tal que $\|\varphi(x, t) - \varphi(y, t)\| \leq \lambda \|x - y\|$ para todos $x, y \in B$ e $t \in T$, e se $\|\varphi(x_0, t) - x_0\| < (1 - \lambda)r$, então existe uma **única** aplicação contínua $\alpha : T \rightarrow B$ tal que $\varphi(\alpha(t), t) = \alpha(t)$ para todo $t \in T$.
20. A Observação 3.19 garante que se a segunda derivada parcial $D_2f(u_1, u_2)$ de $f : U \subset X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ existir e se a primeira derivada parcial $D_1f(u_1, u_2)$ for contínua, então f é diferenciável em (u_1, u_2) . Mostre que podemos supor a continuidade de $D_2f(u_1, u_2)$ e a existência de $D_1f(u_1, u_2)$ para termos o mesmo resultado. Generalize então para decomposições arbitrárias $X_1 \times \dots \times X_n$.

Capítulo 4

APLICAÇÕES INJETORAS E SOBREJETORAS

O objetivo deste Capítulo e do seguinte é mostrar como propriedades locais de uma função são obtidas por meio de informações sobre a derivada dessa função. Assim, mostraremos que, se a derivada $Df(u)$ de uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, de classe C^1 , for injetora, então a aplicação f será injetora numa vizinhança do ponto u . Do mesmo modo, se $Df(u)$ for sobrejetora, então f será sobrejetora numa vizinhança do ponto u . Unindo esses dois resultados, mostraremos o Teorema da Aplicação Inversa: se $Df(u)$ for um isomorfismo,¹ então f possuirá inversa g , diferenciável numa vizinhança do ponto $f(u)$. Deste último resultado, deduziremos o Teorema da Aplicação Implícita e outras formas locais.

Façamos uma análise heurística do Teorema da Aplicação Inversa. Suponhamos que, num ponto $u \in U \subset \mathbb{R}^n$, tenhamos $Df(u)$ invertível. Como $Df(u)$ aproxima f numa vizinhança de u , é natural tentar verificar se f é invertível numa vizinhança de u . Mais ainda, como $Df(u)$ aproxima f , essa inversa, se existir, deve ser aproximada numa vizinhança de $y = f(u)$ por $[Df(u)]^{-1}$. O Teorema da Aplicação Inversa nos diz que, sob hipóteses adicionais, isso é verdade.

Analisemos o caso particular de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para ver a necessidade de hipóteses adicionais. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, se $x \neq 0$, e $f(0) = 0$. Temos que f é diferenciável em 0 e $f'(0) \neq 0$. Quer dizer, a derivada é invertível no ponto 0. Mas f não é injetiva em qualquer vizinhança de 0.

As hipóteses adicionais do Teorema da Aplicação Inversa são as seguintes: f deve ser diferenciável numa vizinhança de u , e não somente em u ; além disso, f deve ser de classe C^1 numa vizinhança de u .

Com essas hipóteses adicionais, se soubermos que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável numa vizinhança de um ponto a , com f' contínua numa vizinhança de a e $f'(a) \neq 0$, então podemos deduzir que f é crescente ou decrescente numa vizinhança de a . Ou seja, f tem inversa nessa vizinhança de a .

¹Em espaços de Banach, f deve ser um homeomorfismo linear.

4.1 DIFEOMORFISMOS

Definição 4.1 Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abertos. Um **difeomorfismo** $f : U \rightarrow V$ é uma bijeção diferenciável cuja inversa também é diferenciável. Se f e f^{-1} forem ambas de classe C^1 , dizemos que f é um difeomorfismo C^1 .

A aplicação $f : U \rightarrow V$ é um **difeomorfismo local** de classe C^1 se, para cada $u \in U$, existe uma vizinhança aberta U_u de u tal que $f(U_u)$ é um aberto e $f : U_u \rightarrow f(U_u)$ é um difeomorfismo C^1 .

Para contrastar com o caso local, chamamos um difeomorfismo $f : U \rightarrow V$ de **difeomorfismo global**.

Note que todo difeomorfismo f é, em particular um homeomorfismo entre **abertos**. Contudo, existem homeomorfismos $f : U \rightarrow V$ de classe C^1 (com U, V abertos) que não possuem inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ diferenciável. Por exemplo, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ é um homeomorfismo e f é infinitamente diferenciável, mas não é um difeomorfismo. Mostraremos posteriormente que, se $f \in C^1$ for um homeomorfismo e f^{-1} for diferenciável, então $f^{-1} \in C^1$, isto é, f é um difeomorfismo C^1 .

Observação 4.2 Nas definições anteriores, exigimos que os abertos U, V estivessem ambos no $\mathbb{R}^n$. Poderíamos nos perguntar se não seria possível considerar abertos $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ na definição de um difeomorfismo. Contudo, se $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ for um difeomorfismo local e $f(u) = v$, como $f \circ f^{-1} = I$, decorre da Regra da Cadeia $Df(u) \cdot Df^{-1}(v) = I$, de modo que $Df^{-1}(v) = [Df(u)]^{-1}$ (veja o Exercício 3 do Capítulo 1).

Um resultado importante da análise matemática, o Teorema da Invariância do Domínio (de Brouwer), estabelece que, se $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ for um **homeomorfismo** entre os abertos U e V , então $m = n$. A demonstração não é simples. $\triangleleft$

Definição 4.3 Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é **aberta** se, para todo aberto $G \subset U$, $f(G)$ for um aberto.

Um difeomorfismo global $f : U \rightarrow V$ sempre é uma aplicação aberta. De fato, a restrição $f : U' \subset U \rightarrow f(U') \subset V$ é um difeomorfismo entre os abertos $U' \subset U$ e $f(U') \subset V$, para todo aberto $U' \subset U$. Mas um homeomorfismo nem sempre é uma aplicação aberta. Por exemplo, $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = (x, 0)$ é um homeomorfismo, mas a imagem de f não é um conjunto aberto. O Exercício 2 pede que se mostre que todo difeomorfismo local $f : U \rightarrow V$ é uma aplicação aberta. Assim, um difeomorfismo local é um difeomorfismo global se, e somente se, for bijetor.

4.2 PERTURBAÇÕES DE APLICAÇÕES LINEARES

O próximo resultado deve ser comparado com o Lema 2.2:

Proposição 4.4 (Perturbação da Identidade)

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma contração e $f = I \pm \Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Então f é um homeomorfismo de U no aberto $f(U)$ e f^{-1} é lipschitziana.

Demonstração: Suponhamos que $\|\Phi(u) - \Phi(v)\| \leq \lambda\|u - v\|$, com $\lambda < 1$. Então temos

$$\|f(u) - f(v)\| \geq \left| \|u - v\| \pm \|\Phi(u) - \Phi(v)\| \right| \geq \|u - v\| - \lambda\|u - v\| = (1 - \lambda)\|u - v\|.$$

Dessa expressão decorre imediatamente que f é injetora e, portanto, $f : U \rightarrow f(U)$ tem inversa f^{-1} . A mesma expressão mostra que f^{-1} é lipschitziana.

Agora vamos mostrar que $f(U)$ é um conjunto aberto. Para isso, considere $b \in f(U)$. Então $b = a \pm \Phi(a)$ para algum $a \in U$. Queremos mostrar que podemos tomar $\alpha > 0$ de modo que, para todo $y \in B_\alpha(b)$, existe $x \in U$ com $f(x) = y$. Ora, isso quer dizer que $y = x \pm \Phi(x)$, ou seja $y \mp \Phi(x) = x$. Definindo $\xi(x) = y \mp \Phi(x)$, vemos que ξ é uma contração com constante de Lipschitz λ . Se encontrarmos um ponto fixo para ξ , então teremos encontrado x tal que $f(x) = y$. Para isso, vamos tentar aplicar o Lema da Contração a uma bola fechada $\bar{B}_r(a) \subset U$. Precisamos mostrar que $\xi(\bar{B}_r(a)) \subset \bar{B}_r(a)$. Se $x \in \bar{B}_r(a)$, temos

$$\|\xi(x) - a\| \leq \|\xi(x) - \xi(a)\| + \|\xi(a) - a\| \leq \lambda r + \|\xi(a) - a\|.$$

Mas

$$\|\xi(a) - a\| = \|y - (a \pm \Phi(a))\| = \|y - b\| < \alpha.$$

Logo, para que $\xi(\bar{B}_r(a)) \subset \bar{B}_r(a)$ basta termos $\lambda r + \alpha \leq r$. Assim, escolhendo $\alpha = (1 - \lambda)r$, vemos que $\xi : \bar{B}_r(a) \rightarrow \bar{B}_r(a)$ é uma contração e tem, portanto, um ponto fixo. $\square$

Observação 4.5 A demonstração apresentada nos mostra que existe um ponto fixo de ξ desde que possamos tomar r suficientemente grande de modo que $\|\xi(a) - a\| =: \alpha$ satisfaça a equação $\lambda r + \alpha \leq r$, com $\bar{B}_r(a) \subset U$. Isso sempre é possível no caso em que $U = \mathbb{R}^n$. Ou seja, quando $U = \mathbb{R}^n$, então $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, de modo que f é um homeomorfismo sobrejetor. Repetimos essa demonstração: dado $y \in \mathbb{R}^n$ qualquer, a aplicação $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\xi(x) = y \mp \Phi(x)$ é uma contração. Pelo Lema da Contração, existe um único $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x = \xi(x)$, isto é, $x = y \mp \Phi(x)$. Mas então $x \pm \Phi(x) = y$, o que é o mesmo que $f(x) = y$. $\triangleleft$

Corolário 4.6 Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $g(u) = L \cdot u + \Phi(u)$, em que a aplicação linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tem inversa à esquerda (linear) M e Φ satisfaz $\|\Phi(u) - \Phi(v)\| \leq \lambda\|u - v\|$, com $\lambda\|M\| < 1$. Então g é um homeomorfismo de U em $g(U)$ com inversa g^{-1} lipschitziana. Se M for a inversa de L (e, portanto, $n = m$), então $g(U)$ é aberto.

Demonstração: Considerando a base canônica $\{e_1, \dots, e_n\}$ do $\mathbb{R}^n$, defina $Le_i =: v_i \in \mathbb{R}^m$. Como L é injetora, os vetores $v_1, \dots, v_n$ são linearmente independentes. Obtenha uma base $\{v_1, \dots, v_n, w_{n+1}, \dots, w_m\}$ do $\mathbb{R}^m$ e defina $Mv_i = e_i$ para $i = 1, \dots, n$ e $Mw_i = 0$ para $i = n + 1, \dots, m$. Note que, se $\bar{M}$ é outra inversa à esquerda de L , então $\|M\| \leq \|\bar{M}\|$. Assim, tomando $f = M \circ g$, decorre imediatamente da Proposição 4.4 que f é um homeomorfismo de U no aberto $f(U)$. Como $f = M \circ g$, concluímos que g é injetora e possui, portanto, inversa g^{-1} definida em $g(U)$.

Seja Z o espaço gerado por $\{v_1, \dots, v_n\}$. Como $f = M \circ g : U \rightarrow f(U) = [M(g(U))]$ tem inversa, deduzimos que $g(U) \subset Z$. Mas $(L \circ M)z = z$ para todo $z \in Z$, o que implica que $(L \circ M)(g(u)) = g(u)$ para todo $u \in U$. Daí segue-se que $(g^{-1} \circ L) \circ (M \circ g)(u) = u$ para

todo $u \in U$. Isso quer dizer que $g^{-1} \circ L$ é a inversa de $f = M \circ g$. Como a inversa de f é lipschitziana, temos que

$$\|(g^{-1} \circ L)(z) - (g^{-1} \circ L)(w)\| \leq C\|z - w\|, \quad \forall z, w \in f(U) = M(g(U)).$$

Para mostrarmos que g^{-1} é lipschitziana, consideremos $\|g^{-1}(x) - g^{-1}(y)\|$, para $x, y \in g(U)$. Como $g(U) \subset Z$, temos que $(L \circ M) \cdot v = v$ para todo $v \in g(U)$. Portanto,

$$\|g^{-1}(x) - g^{-1}(y)\| = \|(g^{-1} \circ L)(M \cdot x) - (g^{-1} \circ L)(M \cdot y)\|.$$

Definindo $M \cdot x = z$ e $M \cdot y = w$, temos que

$$\|g^{-1}(x) - g^{-1}(y)\| \leq C\|z - w\| = C\|M \cdot x - M \cdot y\| \leq C\|M\| \|x - y\|,$$

mostrando que g^{-1} é lipschitziana.

Mas não podemos garantir que $g(U)$ seja aberto. Contudo, se M for a inversa de L , então $L[f(U)] = g(U)$ é um aberto, pois L é um isomorfismo. $\square$

4.3 O TEOREMA DA APLICAÇÃO INJETORA

Proposição 4.7 *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Suponha que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ seja uma aplicação de classe C^1 . Dados $u_0 \in U$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que,*

$$u, v \in B_\delta(u_0) \Rightarrow u, v \in U \quad e \quad \|f(u) - f(v) - Df(u_0) \cdot (u - v)\| \leq \epsilon \|u - v\|.$$

Demonstração: Uma vez que a aplicação $u \mapsto Df(u)$ é uma aplicação contínua de U em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|u - u_0\| \leq \delta \Rightarrow u \in U \quad e \quad \|Df(u) - Df(u_0)\| \leq \epsilon.$$

Suponhamos que $u, v \in B_\delta(u_0)$. Então o segmento de reta unindo u e v está inteiramente contido em U . Aplicando a Desigualdade do Valor Médio à função $g(u) = f(u) - Df(u_0) \cdot u$ (ou utilizando diretamente a Proposição 3.9), obtemos

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(v) - Df(u_0) \cdot (u - v)\| &= \|g(u) - g(v)\| \leq \left\| \sup_{0 \leq t \leq 1} Dg(u + t(v - u)) \cdot (u - v) \right\| \\ &= \left\| \sup_{0 \leq t \leq 1} Df(u + t(v - u)) - Df(u_0) \right\| \|u - v\| \leq \epsilon \|u - v\|. \end{aligned}$$

$\square$

Lembramos que uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é injetora se, e somente se, $\dim \ker T = 0$. Assim, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, $n \leq m$ e T é injetora se, e somente se, $\text{posto}(T) = n$. Como a imagem $T(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^m$, a aplicação linear injetora $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um homeomorfismo do $\mathbb{R}^n$ no subespaço normado $T(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$.

Teorema 4.8 (Teorema da Aplicação Injetora)

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1 . Suponha que, para algum $u_0 \in U$, $Df(u_0)$ seja injetora. Então existe $\delta > 0$ tal que a restrição de f a $B_\delta(u_0)$ é injetora. Além disso, a função inversa de $f|_{B_\delta(u_0)}$ é lipschitziana.

Observação 4.9 Note que $f(u_0)$ não precisa ser um ponto interior de $f(B_\delta(u_0))$. Por exemplo, considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = (x, 0)$. Neste caso, $Df(x)$ é injetora para qualquer $x \in \mathbb{R}$, mas todo ponto de $f(\mathbb{R})$ é um ponto de fronteira. Por esse motivo, nada podemos afirmar sobre a diferenciabilidade de g . Sob hipóteses adicionais, obteremos posteriormente um resultado mais forte: o Teorema da Aplicação Inversa. $\triangleleft$

Demonstração: Como $Df(u_0)$ é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ em $Df(u_0)(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$, o Corolário 1.11 garante a existência de $\lambda > 0$ tal que²

$$\lambda \|h\| \leq \|Df(u_0) \cdot h\|, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n. \quad (4.1)$$

Agora aplicamos a Proposição 4.7 com $\epsilon = \lambda/2$, de forma que obtemos $\delta > 0$ tal que, se $u, v \in B_\delta(u_0) \subset U$, então

$$\|f(u) - f(v) - Df(u_0) \cdot (u - v)\| \leq \frac{\lambda}{2} \|u - v\|.$$

Tendo em vista (4.1), decorre daí

$$\|f(u) - f(v)\| \geq \|Df(u_0) \cdot (u - v)\| - \frac{\lambda}{2} \|u - v\| \geq \frac{\lambda}{2} \|u - v\|, \quad (4.2)$$

garantindo que f restrita a $B_\delta(u_0)$ é injetora. Denotemos a inversa dessa restrição por g . Se $y, z \in f(B_\delta(u_0))$, então existem únicos $u, v \in B_\delta(u_0)$ tais que $f(u) = y$ e $f(v) = z$. Substituindo em (4.2), obtemos

$$\|g(y) - g(z)\| \leq \frac{2}{\lambda} \|y - z\|,$$

provando que $g = (f|_{B_\delta(u_0)})^{-1}$ é lipschitziana. $\square$

A demonstração do Teorema 4.8 nos indica como a aplicação f separa pontos. Apresentaremos esse resultado como um corolário, cuja prova é consequência imediata de combinarmos a demonstração do Teorema 4.8 com o Exercício 4.

Corolário 4.10 Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Suponha que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ seja uma aplicação de classe C^1 tal que $Df(u_0)$ seja injetora. Denote por M uma inversa à esquerda de $Df(u_0)$. Então

$$\|f(u) - f(v)\| \geq \frac{1}{2\|M\|} \|u - v\| \quad \forall u, v \in B_\delta(u_0).$$

Apresentaremos uma segunda prova do Teorema 4.8, aplicando o Corolário 4.6. A demonstração que apresentaremos depende da continuidade da inversa à esquerda da aplicação $Df(u_0)$, fato que nem sempre é verdadeiro em espaços normados de dimensão infinita.

²O Exercício 4 pede que se estime λ em termos da norma de uma inversa à esquerda de $Df(u_0)$.

Observação 4.11 Utilizando um argumento que aplicaremos repetidamente neste texto, na segunda demonstração do Teorema 4.8 assumiremos que $u_0 = 0$ e $f(0) = 0$, o que simplifica a notação. Vejamos detalhadamente como o caso geral pode ser obtido deste caso particular.

Suponhamos, portanto, que a função $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tenha derivada $Df(u_0)$ injetora. Considere o aberto $\tilde{U} = \{u - u_0 \mid u \in U\}$ e a translação $t : \tilde{U} \rightarrow U$ definida por $t(\tilde{u}) = \tilde{u} + u_0$. Então $t(0) = u_0$ e $Dt(\tilde{u}) = I$ para todo $\tilde{u} \in \tilde{U}$. Considere também a translação $T : f(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $T(y) = y - f(u_0)$. Note que $T(f(U)) = f(U) - f(u_0) \subset \mathbb{R}^m$ e $DT(y) = I$ para todo $y \in f(U)$.

Claramente $g = T \circ f \circ t$ satisfaz $g(0) = 0$ e $Dg(0) = DT(f \circ t(0))Df(t(0))Dt(0) = IDf(u_0)I = Df(u_0)$. Assim, a aplicação g satisfaz as hipóteses do teorema no caso particular do ponto 0; podemos, portanto, concluir que existe $\delta > 0$ tal que $g : B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é injetora. Como T e t são difeomorfismos C^1 e $g = T \circ f \circ t$, decorre que $f : B_\delta(u_0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é injetora. $\triangleleft$

2a. demonstração do Teorema 4.8: Sem perda de generalidade, podemos supor que $u_0 = 0$ e $f(0) = 0$. Denotando $L = Df(0)$, temos que L possui uma inversa à esquerda linear M . Como estamos em dimensão finita, essa inversa é contínua.

Claramente vale $f(x) = L \cdot x + r(x)$, em que o resto r é uma função de classe C^1 . Nosso objetivo é aplicar o Corolário 4.6, considerando a aplicação $g : M \circ f = I + M \circ r$.

Vamos verificar que $M \circ r$ é uma contração quando definida em $B_\delta(0)$, desde que tomemos $\delta > 0$ adequadamente. Notamos que $r(0) = 0 = r'(0)$. Assim, a continuidade de r' no ponto 0 garante que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|r'(\xi)\| = \|r'(\xi) - r'(0)\| \leq \epsilon, \quad \forall \xi \in B_\delta(0).$$

Então, se $x, y \in B_\delta(0)$, a Desigualdade do Valor Médio implica

$$\|M \circ r(x) - M \circ r(y)\| \leq \|M\| \|r(x) - r(y)\| < \|M\| \|r'(\xi)\| \|x - y\| < \|M\| \epsilon \|x - y\|.$$

Escolhendo $\epsilon < 1/\|M\|$, obtemos uma contração.

Aplicando então o Corolário 4.6, concluímos que f possui inversa f^{-1} lipschitziana. $\triangleleft$

Enunciamos um resultado provado na demonstração anterior:

Lema 4.12 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $r : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1 tal que $r(0) = 0$ e $r'(0) = 0$. Se $M : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ for uma aplicação linear não-nula, então existe $\delta > 0$ tal que $M \circ r : B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ é uma contração.*

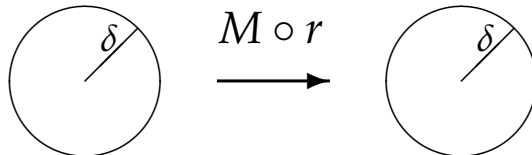


Figura 4.1: A aplicação $M \circ r : B_\delta(0) \rightarrow B_\delta(0)$ é uma contração, desde que $\|M\|\epsilon < 1$, em que $\|r'(\xi)\| \leq \epsilon$ para todo $\xi \in B_\delta(0)$.

4.4 O TEOREMA DA APLICAÇÃO SOBREJETORA

Lembramos que uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é sobrejetora se, e somente se, a imagem $T(\mathbb{R}^n)$ tiver dimensão m . Assim, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, $m \leq n$ e T é sobrejetora se, e somente se, $\text{posto}(T) = m = \dim T(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 4.13 (Teorema da Aplicação Sobrejetora)

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1 . Suponha que, para algum $u_0 \in U$, $Df(u_0)$ seja sobrejetora. Então existe $\alpha > 0$ tal que $B_\alpha(f(u_0)) \subset f(U)$.

Demonstração: De acordo com a Observação 4.11, podemos supor $u_0 = 0$ e $f(0) = 0$. Denotaremos $L = Df(0)$. Como L é sobrejetora, existe uma aplicação linear $M : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $LM = L \circ M = I$, a aplicação identidade do $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^m$. Ou seja, M é uma inversa à direita linear de L .

Mostraremos que existe $\alpha > 0$ tal que $B_\alpha(0) \subset f(U) \subset \mathbb{R}^m$. Temos que $f(u) = L \cdot u + r(u)$, em que r denota o resto de f da definição de diferenciabilidade no ponto 0. (Note que, uma vez que M é a inversa à direita de L , não podemos proceder como na prova do Teorema 4.8.)

Seja $y \in B_\alpha(0)$ ($\alpha > 0$ será explicitado oportunamente). Queremos provar que existe $u \in U$ tal que $y - r(u) = L \cdot u$, pois $L \cdot u + r(u) = f(u)$. Já vimos (Lema 4.12) que existe $\delta > 0$ tal que $M \circ r$ é uma contração. Assim, é claro que $g(u) := M \cdot (y - r(u))$ também é uma contração, já que essa aplicação é apenas de uma translação de $M \circ r$.

Se g tiver um ponto fixo, esse nos fornecerá a solução de nosso problema: nesse ponto valerá $u = g(u) = M \cdot [y - r(u)]$, donde poderemos concluir (aplicando L) que $L \cdot u = y - r(u)$ e, portanto $y = L \cdot u + r(u) = f(u)$.

A continuidade de r' garante que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\xi \in B_\delta(0)$ implica $\|r'(\xi)\| \leq \epsilon$. Para garantirmos que g tem um ponto fixo, basta escolhermos α e ϵ adequadamente: da Desigualdade do Valor Médio decorre que $\|M \circ r(x) - M \circ r(y)\| \leq \|M\| \epsilon \|x - y\|$. Como $\|My\| \leq \|M\| \|y\| < \|M\| \alpha$, temos que $\|g(y)\| \leq \|M\| \alpha + \|M\| \epsilon \delta$ satisfará as hipóteses do Lema da Contração se, por exemplo, $\alpha < \delta / (2\|M\|)$ e $\epsilon < 1 / (2\|M\|)$. $\square$

A demonstração apresentada do Teorema 4.13 depende fortemente de estarmos em dimensão finita. Entretanto, o resultado continua válido no contexto de espaços de Banach: veja [6] ou [?].

Corolário 4.14 (Teorema da Aplicação Aberta)

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1 . Se, para cada $u \in U$, a aplicação $Df(u)$ for sobrejetora, então f é uma aplicação aberta.

Demonstração: Sejam $G \subset U$ um conjunto aberto e $y_0 \in f(G)$. Então existe $u_0 \in G$ tal que $f(u_0) = y_0$. Aplicando o Teorema da Aplicação Sobrejetora à função $f : G \rightarrow f(G)$, para todo $y \in B_\alpha(y_0)$, existe $u \in G$ tal que $f(u) = y$. Isso mostra que $f(G)$ é aberto. $\square$

O corolário anterior exige que a aplicação $Df(u)$ seja sobrejetora em todos os pontos $u \in U$. Se soubermos que $Df(u_0)$ é sobrejetora, podemos garantir a existência de uma vizinhança aberta V de u_0 tal que $Df(u)$ seja sobrejetora para todo $u \in V$. Mostraremos esse fato posteriormente. (Veja o XXXXX)

4.5 O TEOREMA DA APLICAÇÃO INVERSA

O Teorema da Aplicação Inversa é um dos resultados mais importantes no estudo de superfícies e variedades diferenciáveis. Dele pode ser deduzido o Teorema da Aplicação Implícita, que também tem papel destacado na mesma área.

Relembramos que, de acordo com o Teorema do Núcleo e da Imagem, uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ pode possuir inversa apenas quando $n = m$. Por sua vez, uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo se, e somente se, $\det T \neq 0$.

Teorema 4.15 (Teorema da Aplicação Inversa)

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 . Suponha que, no ponto $u_0 \in U$, $Df(u_0)$ seja um isomorfismo.³ Então f é um difeomorfismo de classe C^1 de uma vizinhança aberta V de u_0 sobre uma vizinhança aberta W de $f(u_0)$.

Demonstração: Uma vez que $\det Df(u_0) \neq 0$ e $\det$ é uma função contínua, existe uma vizinhança aberta U_0 de u_0 na qual $\det Df(u) \neq 0$ para todo $u \in U_0$.

Pelo Teorema da Aplicação Injetora, existe $\delta > 0$ tal que $V := B_\delta(u_0) \subset U_0$ e $f : V \rightarrow f(V)$ tem inversa $g : f(V) \rightarrow V$. Como $\det Df(u) \neq 0$ para todo $u \in U_0$, podemos então aplicar o Corolário 4.14 e concluir que $W := f(V) \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.⁴

Assim, basta mostrar que $g : W \rightarrow V$ é diferenciável. Se $\xi \in W$, então $\xi = f(u)$ para $u \in V$. Então, como f é diferenciável em u , temos

$$f(u_1) - f(u) = Df(u) \cdot (u_1 - u) + r(h),$$

em que $u_1 - u = h$ e $r(h)/\|h\| \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$. Multiplicando a última igualdade por $[Df(u)]^{-1}$, obtemos

$$u_1 - u = [Df(u)]^{-1} \cdot Df(u) \cdot (u_1 - u) = [Df(u)]^{-1} [f(u_1) - f(u) - r(h)].$$

Como $u_1 = g(\xi + k)$ para algum $k \in \mathbb{R}^n$, decorre daí que

$$g(\xi + k) - g(\xi) = [Df(u)]^{-1} \cdot k - [Df(u)]^{-1} \cdot r(h).$$

Mas

$$\frac{[Df(u)]^{-1} \cdot r(h)}{\|k\|} = \frac{\|h\|}{\|k\|} \left\{ [Df(u)]^{-1} \cdot \frac{r(h)}{\|h\|} \right\}.$$

Uma vez que $k \rightarrow 0$ se, e somente se, $h \rightarrow 0$, para concluir nossa demonstração basta mostrar que $\|h\|/\|k\|$ permanece limitado quando $k \rightarrow 0$. Mas

$$\frac{\|h\|}{\|k\|} \leq C \Leftrightarrow \|k\| \geq \frac{1}{C} \|h\| \Leftrightarrow \|f(u+h) - f(u)\| \geq C \|h\|,$$

a última desigualdade tendo sido provada no Corolário 4.10.

Para completarmos a prova, basta mostrarmos que $g = f^{-1}$ é de classe C^1 . Mas $Dg(\xi) = [Df(g(\xi))]^{-1}$. Como as aplicações $\xi \mapsto g(\xi)$, $u \mapsto Df(u)$ e $Df(u) \mapsto [Df(u)]^{-1}$ são todas contínuas, o resultado é imediato. $\square$

³Em espaços de Banach, um homeomorfismo linear.

⁴Uma maneira alternativa de provar que $f(V)$ é aberto é aplicar o Corolário 4.6.

Corolário 4.16 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação C^1 . Então f é um difeomorfismo local se, e somente se, $\det Jf(u) \neq 0$ para todo $u \in U$.*

4.6 EXERCÍCIOS

1. Na Observação 4.2 mostramos que uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ só pode ser um difeomorfismo (local ou global) se $n = m$. Sejam agora X, Y espaços normados de dimensão finita. Se $f : U \subset X \rightarrow V \subset Y$ for um difeomorfismo, conclua que $\dim X = \dim Y$. E se soubermos apenas que um desses espaços tem dimensão finita? Podemos chegar à mesma conclusão?
2. Mostre que todo difeomorfismo local $f : U \rightarrow V$ entre o aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e o conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação aberta. Conclua que um difeomorfismo local é um difeomorfismo global se, e somente se, for bijetor.
3. Interprete a Proposição 4.7 em termos da definição de f ser diferenciável no ponto u .
4. Demonstre o Corolário 4.10.
5. Seja $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$ uma matriz positiva definida (isto é, A é simétrica e $\langle Ax, x \rangle > 0$ para todo $\mathbb{R}^n \ni x \neq 0$).
 - (a) Mostre que A define um produto interno no $\mathbb{R}^n$.
 - ** (b) Seja B outra matriz simétrica. Mostre que existe uma matriz M tal que $M^t A M = I$ e $M^t B M = D$, em que D é uma matriz diagonal. (Em alguns textos exprime-se esse fato dizendo que as formas bilineares (associadas às matrizes) A e B são simultaneamente diagonalizáveis. Contudo, é bom ressaltar que esse não é o significado usual de diagonalização simultânea de matrizes, que procura uma mudança de base P tal que $P^{-1}AP$ e $P^{-1}BP$ sejam ambas matrizes diagonais.)
6. Seja $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$ uma matriz de posto r . Mostre que r é o maior número natural tal que A possui uma submatriz A_r com $\det A_r \neq 0$.
7. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tal que $\|f'(x) - I\| \leq k < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que f é sobrejetora.
8. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável no ponto $u_0 \in U$. Mostre que, se a derivada $f'(u_0)$ for injetora, então existem $\delta > 0$ e $c > 0$ de modo que $\|h\| < \delta$ implica $u_0 + h \in U$ e $\|f(u_0 + h) - f(u_0)\| \geq c\|h\|$. Isso significa, em particular, que $f(u) \neq f(u_0)$ nessa vizinhança de u_0 . (Compare com o Teorema da Aplicação Injetora!)
9. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável. Se $f^{-1}(0)$ contiver um ponto de acumulação $a \in \mathbb{R}^n$, então $f'(a)$ não é sobrejetora.
10. Seja $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 tal que $\|g'(x)\| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(x) = x + g(x)$ é um difeomorfismo de classe C^1 sobre um aberto do $\mathbb{R}^n$. Mostre, através de um contra-exemplo, que a condição

$\|g'(x)\| \leq \lambda < 1$ não pode ser dispensada, se quisermos concluir que f é um difeomorfismo sobre $\mathbb{R}^n$. (Cuidado! A aplicação g pode não ser uma contração!)

11. Defina o subconjunto das aplicações lineares simétricas por $\mathcal{S} = \{T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : T^* = T\}$, em que T^* denota a adjunta da aplicação T .

- (a) Mostre que $\mathcal{S}$ é um subespaço de dimensão $n(n+1)/2$.
- (b) Seja $U \subset \mathcal{S}$ o subconjunto das aplicações positivas definidas. Mostre que U é um aberto convexo.
- (c) Mostre que $f : U \rightarrow U$ dada por $f(X) = X^2$ é um difeomorfismo de U sobre si mesmo.
- (d) Generalize o resultado anterior. Mais precisamente, mostre que $f(X) = X^k$ é um difeomorfismo C^1 de U sobre U , para todo $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$.

12. Seja $f : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dada por $f(X) = X^2$. Mostre que f é um difeomorfismo de uma vizinhança da identidade sobre outra vizinhança da identidade, mas que essa aplicação não é um difeomorfismo local no espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e também não é sobrejetora.

13. Seja $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$ uma matriz qualquer. Defina a matriz exponencial de A por

$$\exp(A) = e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}, \quad \text{em que } A^0 = I.$$

- (a) Mostre que e^A está bem definida, isto é, que a série converge.
- (b) Se $f(A) = e^A$, mostre que $f'(0) = I$.
- (c) Mostre que f é um difeomorfismo de uma vizinhança de 0 sobre uma vizinhança da identidade.

14. Sejam $\alpha > 1$ e c números reais. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo. Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfizer

$$\|f(u) - f(v)\| \leq c\|u - v\|^\alpha, \quad \forall u, v \in U,$$

mostre que f é constante em U .

15. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável. Suponha que $\|f(u)\| = \langle f(u), f(u) \rangle^{1/2}$ é constante para todo $u \in U$. Mostre então que $\det Jf(u) \equiv 0$ em U .

16. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável. Mostre que

$$\sup_{x \neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} = \sup_{\mathbb{R}^n} \|f'(x)\|.$$

Capítulo 5

APLICAÇÕES IMPLÍCITAS

5.1 O TEOREMA DA APLICAÇÃO IMPLÍCITA

Desde os cursos de cálculo sabemos que, dada uma equação do tipo $f(x, y) = 0$, temos y dado como uma função diferenciável da variável x numa vizinhança de um ponto (x_0, y_0) , se $f(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) \neq 0$. Sendo mais preciso, dado um ponto (x_0, y_0) tal que $f(x_0, y_0) = 0$, existe uma vizinhança V de x_0 e uma vizinhança W de y_0 tal que, para todo $x \in V$, existe um único $y \in W$ satisfazendo $f(x, y) = 0$. A função $g : V \rightarrow W$ que associa a cada $x \in V$ tal $y \in W$ satisfazendo $f(x, y) = 0$ é diferenciável e $g'(x) = -f_x(x, y)/f_y(x, y)$. Para se obter essa conclusão, era necessária a hipótese de $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existirem e serem contínuas numa vizinhança de (x_0, y_0) .

Vamos agora estudar essa questão num contexto mais geral: queremos saber quando um sistema de equações em várias variáveis

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

define, localmente, um grupo delas como função das outras. Observe que um sistema desse tipo pode ser escrito como $f(x) = 0$, em que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dada por $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Observação 5.1 É importante notar que o Teorema da Aplicação Inversa trata de um caso particular do tipo de problema considerado pelo Teorema da Aplicação Implícita: dada uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 definida no aberto U , se $Df(u_0)$ for invertível, então f será invertível numa vizinhança de u_0 . Quer dizer, existe uma vizinhança aberta W de $y_0 = f(u_0)$ e uma vizinhança aberta V de u_0 tal que, para todo $y \in W$, existe um único $x \in V$ tal que $f(x) = y$.

Ou seja, consideremos $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $g(x, y) = f(x) - y$ ou, o que é o

mesmo, o sistema

$$\begin{array}{ccccccc} f_1(x_1, \dots, x_n) - y_1 & 0 & \cdots & 0 & = & 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) & -y_2 & \cdots & 0 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) & 0 & \cdots & -y_n & = & 0. \end{array}$$

Pelo Teorema da Aplicação Inversa temos que, numa vizinhança de um ponto (u_0, y_0) satisfazendo $g(u_0, y_0) = 0$ (isto é, um ponto (u_0, y_0) que é solução do sistema anterior), se $g_x(u_0, y_0)$ for invertível, a equação $g(u, y) = 0$ define u como função diferenciável de y . Estamos denotando por $g_x(u_0, y_0)$ a derivada da função g considerada apenas como função da primeira variável, isto é, a aplicação linear cuja matriz com relação à base canônica é dada por

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(u_0, y_0) \right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Tal matriz corresponde à matriz jacobiana de f . ◁

Consideremos, inicialmente, um sistema $L \cdot x = 0$, com $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ **linear**. Nesse caso, o sistema pode ser escrito como

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0. \end{array}$$

Como o Teorema do Núcleo e da Imagem é o principal resultado a respeito de tais sistemas, vamos supor que $m = \dim(\text{im } L)$. Assim, em particular, uma forma escalonada daquele sistema deve possuir exatamente m pivôs, e m é o posto da matriz associada ao sistema.

De acordo com o Teorema do Núcleo e da Imagem, temos

$$m + \dim \ker f = n,$$

quer dizer, $n = m + k$, em que $k \geq 0$ é a dimensão do espaço-solução do sistema. (Com a linguagem de escalonamento de uma matriz, estamos dizendo que o número de graus de liberdade – isto é, o número de variáveis que não correspondem a pivôs – é igual a k .)

Vamos supor que as m primeiras variáveis sejam todas pivôs. (Essa hipótese corresponde a um possível reordenamento das variáveis.) Nesse caso, a forma escalonada reduzida por linhas do sistema tem o seguinte formato:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & + & a_{1(m+1)}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ & x_2 & & + & a_{2(m+1)}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ & & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ & & & x_m & + & a_{m(m+1)}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0. \end{array}$$

Concluimos que temos $x_1, \dots, x_m$ como função das variáveis livres, que são as variáveis restantes. Observe que a condição das m primeiras variáveis serem pivôs significa que a

matriz jacobiana (a_{ij}) de L tem sua submatriz $(a_{k\ell})$ invertível, $k, \ell \in \{1, \dots, m\}$. Podemos então descrever o caso linear da seguinte maneira: dada $L : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear, tal que

$$\det \left(\frac{\partial L_i}{\partial x_j} \right)_{i,j \in \{1, \dots, m\}} = \det(a_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, m\}} \neq 0,$$

então as soluções do sistema $f(x) = 0$ são dadas por $f(g(x), x) = 0$, em que $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$.

O Teorema da Aplicação Implícita garante que um sistema da forma $f(x) = 0$, em que $f : U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^1 , se comporta localmente, na vizinhança de um ponto $X = (x_0, y_0) \in U$, como o sistema linear $L \cdot X = 0$, em que $L = Df(x_0, y_0)$, desde que $L_1 = D_1 f(x_0, y_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ seja invertível.

Ao invés de mostrarmos o Teorema da Aplicação Implícita, mostraremos um resultado mais forte. Para motivarmos esse resultado, começamos estudando um exemplo particular.

Exemplo 1 Consideremos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y - x^2$. Então $f^{-1}(0) = \{(x, y) : y - x^2 = 0\} = \{(x, y) : y = x^2\}$. Da mesma forma, $f^{-1}(1) = \{(x, y) : y = x^2 + 1\}$, $f^{-1}(-1) = \{(x, y) : y = x^2 - 1\}$ etc.

As imagens inversas dos pontos do contradomínio estabelecem **fibras** no domínio. No caso, as fibras correspondem a parábolas.

Gostaríamos de "endireitar" essas fibras, isto é, transformá-las em retas horizontais. Ora, é possível projetar um ponto de cada fibra injetivamente no eixo x . Para determinarmos a coordenada y , escolheremos sempre o vértice da respectiva parábola. Assim, somos levados à função

$$\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi(x, y) = (x, y - x^2).$$

Através do difeomorfismo ψ , transformamos as fibras definidas no domínio de f em retas horizontais no plano $\mathbb{R}^2$. Agora consideremos a inversa ϕ do difeomorfismo ψ . A aplicação ϕ é dada por $\phi(x, z) = (x, x^2 + z)$. Ela transforma as retas horizontais nas fibras determinadas por f , isto é, nas imagens inversas de valores do contradomínio. Assim, a composta $f \circ \phi$ transforma as retas horizontais nas respectivas imagens das fibras de f . Mais precisamente,

$$(f \circ \phi)(x, z) = f(x, x^2 + z) = z.$$

Em outras palavras, temos que $f \circ \phi = \Pi_2$, em que Π_2 é a projeção definida por $\Pi_2(x, z) = z$. Veja a Figura 5.1. $\triangleleft$

Nosso objetivo é mostrar que o comportamento descrito para a aplicação f do exemplo anterior pode ser estendido para uma classe grande de aplicações $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Notamos algumas características da aplicação f do Exemplo 1: f é uma aplicação C^1 e sua derivada $Df(x, y) = (2x \ 1)^t$ é uma aplicação linear sobrejetora. Nossa meta é mostrar que, sob essas hipóteses, o resultado do Exemplo 1 pode ser estendido para aplicações arbitrárias $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Definição 5.2 Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma **submersão** se, para todo $u \in U$, a derivada $Df(u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ for sobrejetora.

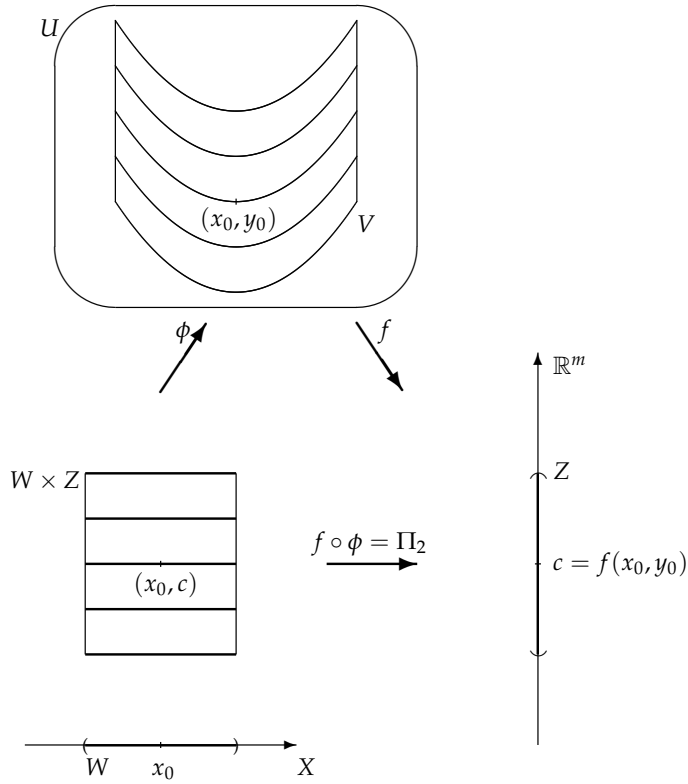


Figura 5.1: O difeomorfismo $\psi = \phi^{-1}$ retifica as fibras de f , de modo que $(f \circ \phi)(x, z) = z$ para todo $(x, z) \in W \times Z$.

Note que, de acordo com a Regra da Cadeia, a composta de duas submersões ainda é uma submersão.

Exemplo 2 Seja $\Pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ a projeção definida por $\Pi_2(x, y) = y$. Como $\Pi_2(x, y) = y$, Π_2 é uma submersão.

A Forma Local das Submersões mostra que toda submersão comporta-se localmente como uma projeção. Mais exatamente, toda submersão comporta-se localmente como a projeção apresentada no Exemplo 2.

Teorema 5.3 (Forma Local das Submersões)

Sejam $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^1 . Suponha que, para algum $u_0 \in U$, $f'(u_0) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ seja sobrejetora.

Então, para toda decomposição¹ $\mathbb{R}^{m+n} = X \oplus Y$ (com $u_0 = (x_0, y_0)$) tal que $D_2f(x_0, y_0) : Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ seja um isomorfismo, existe um difeomorfismo $\phi : W \times Z \rightarrow V$ tal que $(f \circ \phi)(x, z) = \Pi_2(x, z) = z$ para todo $(x, z) \in W \times Z$, em que $W \ni x_0$ é um aberto em X , $Z \ni f(x_0, y_0)$ é um aberto no $\mathbb{R}^m$ e $V \ni (x_0, y_0)$ é um aberto contido em U . (Veja a Figura 5.1.)

Demonstração: Defina $S = D_1f(x_0, y_0) : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $T = D_2f(x_0, y_0) : Y \rightarrow \mathbb{R}^m$. Considere então a aplicação $\psi : U \subset X \times Y \rightarrow X \times \mathbb{R}^m$ dada por

$$\psi(x, y) = (x, f(x, y)).$$

¹Também podemos escrever $\mathbb{R}^m = X \times Y$.

Afirmamos que ψ é um difeomorfismo local numa vizinhança de $u_0 = (x_0, y_0)$. Ora, a representação "matricial" da derivada dessa função é

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ S & T \end{pmatrix},$$

a qual tem inversa²

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -T^{-1}S & T^{-1} \end{pmatrix},$$

como podemos verificar facilmente.³ Assim, $\psi'(x_0, y_0)$ é um isomorfismo.

De acordo com o Teorema da Aplicação Inversa, ψ é um difeomorfismo de uma vizinhança de $u_0 = (x_0, y_0)$ contida em U em uma vizinhança aberta de (x_0, c) . Escolhemos a vizinhança de (x_0, c) na forma $W \times Z$, com $W \subset X$ aberto contendo x_0 e $Z \subset \mathbb{R}^m$ aberto contendo c . Definimos então $V = \psi^{-1}(W \times Z)$ e $\phi = \psi^{-1} : W \times Z \rightarrow V$. Afirmamos que $f \circ \phi = \Pi_2|_{V \times W}$, em que $\Pi_2 : X \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dada por $\Pi_2(w, z) = z$. De fato, seja $\phi(w, z) = (\phi_1(w, z), \phi_2(w, z))$. Como

$$(w, z) = (\psi \circ \phi)(w, z) = \psi(\phi_1(w, z), \phi_2(w, z)) = (\phi_1(w, z), f(\phi_1(w, z), \phi_2(w, z))),$$

vemos que $\phi_1(w, z) = w$ e, portanto,

$$\phi(w, z) = (w, \phi_2(w, z)) \Rightarrow (w, z) = (w, f(w, \phi_2(w, z)))$$

e, aplicando Π_2 na segunda igualdade, obtemos

$$z = f(w, \phi_2(w, z)), \quad \text{para } (w, z) \in W \times Z, \quad (5.1)$$

e também que $f \circ \phi : W \times Z \rightarrow Z$ é igual a $\Pi_2|_{W \times Z}$, pois

$$(f \circ \phi)(w, z) = f(w, \phi_2(w, z)) = z.$$

□

Enunciamos agora duas conseqüências imediatas da Forma Local das Submersões:

Corolário 5.4 *Toda submersão de classe C^1 é uma aplicação aberta.*

Corolário 5.5 *Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tiver $f'(u_0)$ sobrejetora, então $f'(z)$ é sobrejetora numa vizinhança de u_0 .*

O próximo corolário é o Teorema da Aplicação Implícita. Note que, mudando de notação utilizada na introdução, estamos colocando as últimas coordenadas em função das primeiras.

²Basta também notar que essa matriz tem determinante não nulo.

³Uma outra maneira de comprovar o mesmo fato: $\Phi \cdot (h, k) = \psi'(x_0, y_0) \cdot (h, k) = (h, S \cdot h + T \cdot k)$, cuja inversa é a aplicação linear Φ^{-1} dada por $\Phi^{-1}(\alpha, \beta) = (\alpha, T^{-1} \cdot (\beta - S \cdot \alpha))$, pois $\Phi^{-1}(h, S \cdot h + T \cdot k) = (h, T^{-1}(S \cdot h + T \cdot k - S \cdot h)) = (h, k)$ e $\Phi(\alpha, T^{-1} \cdot (\beta - S \cdot \alpha)) = (\alpha, S \cdot \alpha + T \cdot (T^{-1} \cdot (\beta - S \cdot \alpha))) = (\alpha, \beta)$.

Corolário 5.6 (Teorema da Aplicação Implícita)

Sejam $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1 . Suponha que $\mathbb{R}^{n+m} = X \oplus Y$ é uma decomposição em soma direta tal que, para $u_0 = (x_0, y_0) \in U$, tenhamos um isomorfismo $D_2f(x_0, y_0) : Y \rightarrow \mathbb{R}^m$. Denote $f(u_0) = c \in \mathbb{R}^m$. Então existem abertos $W \subset X$ contendo x_0 e $V \subset U$ contendo u_0 tais que, para todo $x \in W$, existe um único $\xi(x) \in Y$ tal que $(x, \xi(x)) \in V$ e $f(x, \xi(x)) = c$.

A aplicação $\xi : W \rightarrow Y$ assim definida é de classe C^1 e sua derivada é dada por

$$\xi'(x) = -[D_2f(x, \xi(x))]^{-1} \circ D_1f(x, \xi(x)).$$

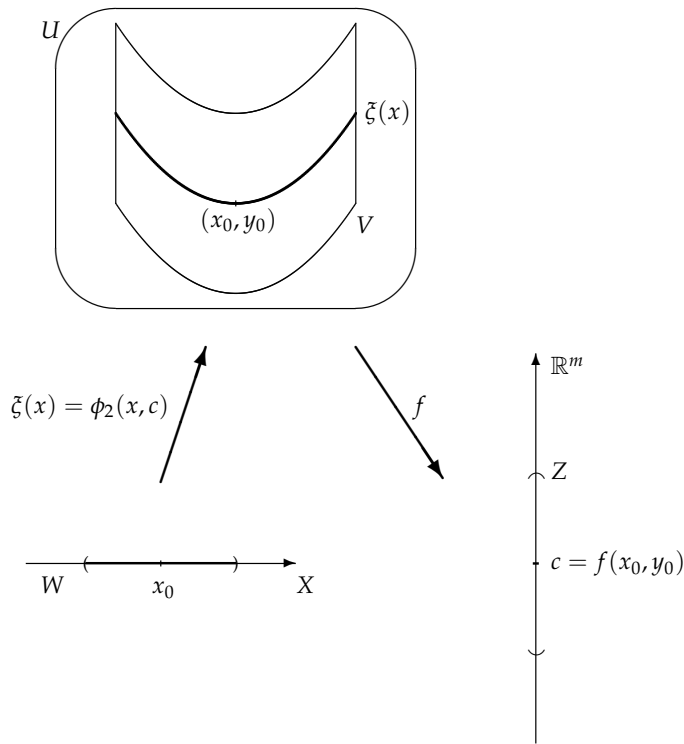


Figura 5.2: A aplicação $\xi : W \rightarrow Y$ transforma W na fibra $f^{-1}(c)$. Compare com a Figura 5.1.

Demonstração: Considere o difeomorfismo $\phi : W \times Z \rightarrow V$ dado pela Forma Local das Submersões, entre os abertos $W \times Z \subset X \times \mathbb{R}^m$ e $V \subset U$, difeomorfismo esse que satisfaz $f \circ \phi = \Pi_2$. Como $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, temos $\phi_2(w, z) \in V$ e $f(w, \phi_2(w, z)) = z$, para qualquer $(w, z) \in W \times Z$, de acordo com a equação (5.1).

Definimos agora $\xi : W \rightarrow Y$ por $\xi(x) = \phi_2(x, c)$. Então, se $x \in W$, claramente vale $f(x, \xi(x)) = f(x, \phi_2(x, c)) = c$. Para mostrarmos a unicidade de $\xi(x)$, suponha que $(x, y) \in V$ satisfaça $f(x, y) = c$. Então $(x, y) = (\phi \circ \psi)(x, y) = \phi(x, f(x, y)) = \phi(x, c) = (x, \phi_2(x, c)) = (x, \xi(x))$, de onde segue-se que $y = \xi(x)$. Finalmente, derivando $f(x, \xi(x)) = c$, obtemos $D_1f(x, \xi(x)) + D_2f(x, \xi(x)) \cdot \xi'(x) = 0$, ou seja,

$$\xi'(x) = -[D_2f(x, \xi(x))]^{-1} \cdot D_1f(x, \xi(x)).$$

□

Observação 5.7 Podemos explicitar a unicidade de ζ de maneira distinta: ζ é a *única* aplicação contínua $\zeta : W \rightarrow Y$ tal que $\zeta(x_0) = y_0$ e $f(x, \zeta(x)) = c$. De fato, podemos supor que W seja conexo.⁴ Suponhamos que a aplicação contínua $\lambda : W \rightarrow Y$ também satisfaça $\lambda(x_0) = y_0$ e $f(x, \lambda(x)) = c$ para todo $x \in W$. Definimos $F = \{x \in W : \zeta(x) = \lambda(x)\}$. Claramente F é fechado em W . Mas, como na prova de unicidade de ζ , também temos que $F = \{x \in W : (x, \lambda(x)) \in V\}$, de modo que F é aberto em W . Como W é conexo e $x_0 \in F$, temos $W = F$. $\triangleleft$

Exemplo 3 Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponhamos que $(0, 0) \in U$ e que, para todo $(x, y) \in U$, tenhamos

$$(x^4 + y^6)f(x, y) + [f(x, y)]^9 = 1.$$

Afirmamos que existe uma vizinhança aberta $V \ni (0, 0)$ na qual $f \in C^1$.

De fato, considere $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x, y, z) = (x^4 + y^6)z + z^9$. Então $F(0, 0, 1) = 1$ e $\partial F / \partial z = x^4 + y^6 + 9z^8$, derivada parcial que é nula apenas quando $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Pelo Teorema da Aplicação Implícita, existem uma vizinhança aberta $V \ni (0, 0)$ e uma única função contínua $\zeta : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\zeta(0, 0) = 1$ e $F(x, y, z) = F(x, y, \zeta(x, y)) = F(0, 0, 1) = 1$. A unicidade de ζ nos garante que $f = \zeta$ em V . Mas o Teorema da Aplicação Implícita também garante que $\zeta \in C^1$. Isso prova o afirmado. $\triangleleft$

5.2 FORMA LOCAL DAS IMERSÕES

Definição 5.8 Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma *imersão* se, para todo $u \in U$, $Df(u)$ for injetora.

Decorre da Regra da Cadeia que a composta de imersões é uma imersão.

Exemplo 4 Seja $i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ a aplicação *inclusão*, isto é, $i(x) = (x, 0)$. Então $i'(x) = i$, de modo que i é uma imersão. $\triangleleft$

Exemplo 5 Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (t, t^2)$. Então f transforma a reta na parábola $y = x^2$. Gostaríamos de "endireitar" essa parábola no espaço $\mathbb{R}^2$, isto é, transformá-la numa reta horizontal em $\mathbb{R}^2$. Vamos proceder como no Exemplo 1, de modo que somos levados ao difeomorfismo⁵ $\zeta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\zeta(x, y) = (x, x^2 - y)$. Note que ζ estabelece, em particular, um difeomorfismo entre a parábola $y = x^2$ e a reta horizontal $(x, 0) \subset \mathbb{R}^2$.

Se considerarmos a composta $\zeta \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, vemos que $(\zeta \circ f)(t) = \zeta(t, t^2) = (t, 0)$. Ou seja, mostramos que f comporta-se como no Exemplo 4. $\triangleleft$

A Forma Local das Imersões assegura que toda imersão C^1 comporta-se localmente como a inclusão apresentada no Exemplo 4.

⁴Se esse não fosse o caso, reduziríamos a vizinhança $W \ni x_0$ de modo a obter um conexo.

⁵Comparando esse exemplo com o Exemplo 1, notamos que foi "natural" obter o difeomorfismo ψ , enquanto o difeomorfismo ζ foi conseguido mediante comparação com aquele exemplo. Isso deve-se ao fato de que a projeção $\Pi_1(x, y) = x$ também retifica a parábola $y = x^2$, de modo que existem várias aplicações que produzem o mesmo resultado. Mas η é um difeomorfismo, enquanto Π_1 não é. Para estabelecermos uma semelhança entre os dois exemplos, devemos considerar a família de parábolas $f_C(t) = (t, t^2 + C)$ e então obter ζ .

Lema 5.9 *Seja $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ um subespaço de dimensão n . Então existe um espaço $\mathbb{R}^m$, gerado por vetores da base canônica de $\mathbb{R}^{n+m}$, tal que $E \oplus \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$.*

Demonstração: Considere uma base $\{u_1, \dots, u_m\}$ de E . Se E for um subespaço próprio do $\mathbb{R}^{m+p}$, existe um vetor e_j da base canônica do $\mathbb{R}^{m+p}$ tal que $e_{j_1} \notin E$. Considere agora $E_1 = \langle u_1, \dots, u_m, e_{j_1} \rangle$, o subespaço gerado pelos vetores $\{u_1, \dots, u_m, e_{j_1}\}$. Como esse subespaço têm dimensão $m+1$, se $p > 1$, então podemos repetir o processo. Dessa maneira, encontramos uma base $\{u_1, \dots, u_m, e_{j_1}, \dots, e_{j_p}\}$ de $\mathbb{R}^{m+p}$, sendo $e_{j_1}, \dots, e_{j_p}$ vetores da base canônica do $\mathbb{R}^{m+p}$. Essa base gera a decomposição $\mathbb{R}^{m+p} = E \oplus \mathbb{R}^p$. $\square$

Teorema 5.10 (Forma Local das Imersões)

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ uma aplicação C^1 . Suponha que, para $u_0 \in U$, $Df(u_0)$ seja injetora. Então existe um difeomorfismo $\zeta : Z \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow V \times W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, definido no aberto $Z \ni f(u_0)$ e tomando valores no aberto $V \times W$, em que $V \subset U$ é um aberto contendo u_0 , tal que

$$(\zeta \circ f)(u) = (u, 0), \quad \forall u \in V.$$

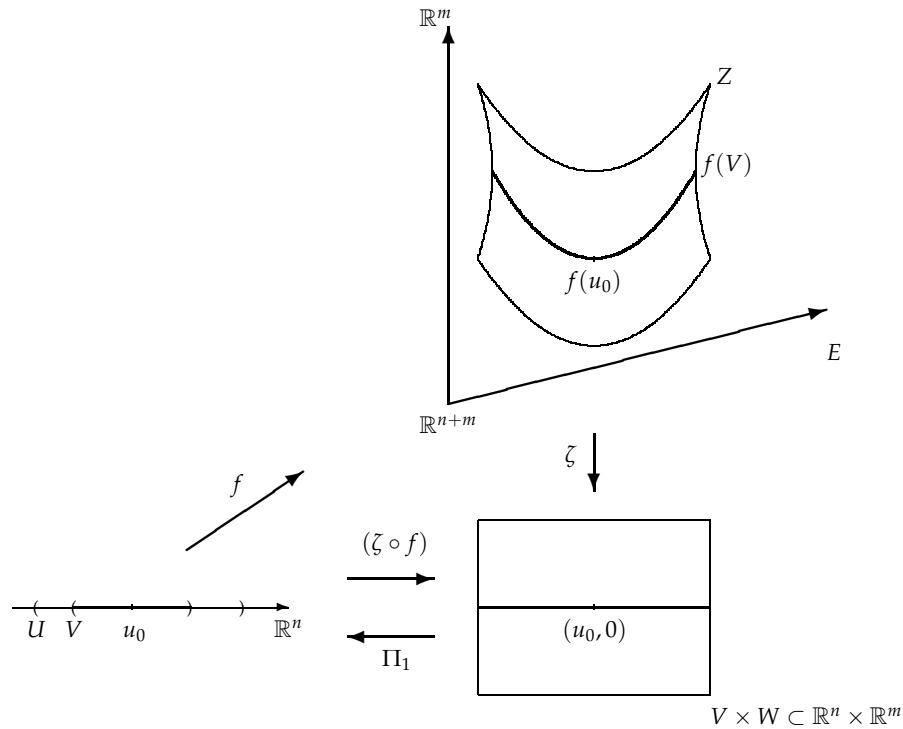


Figura 5.3: O difeomorfismo ζ é tal que $(f \circ \zeta)(u) = (u, 0)$ para todo $u \in V$. A composta $\Pi_1 \circ \zeta|_{f(V)}$ é a inversa de f .

Demonstração: Seja $E = f(u_0) \cdot \mathbb{R}^n$. Considere o espaço $\mathbb{R}^m$ gerado por vetores da base canônica do $\mathbb{R}^{n+m}$ tal que $\mathbb{R}^{m+n} = E \oplus \mathbb{R}^m$, dado pelo Lema 5.9. A derivada $Df(u_0)$ é um isomorfismo de $\mathbb{R}^n$ em E .

Defina $\eta : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ por $\eta(u, y) = f(u) + y$. Então η é uma aplicação C^1 , $\eta(u_0, 0) = f(u_0)$ e $D\eta(u_0, 0) \cdot (h, k) = (Df(u_0) \cdot h, k)$. Logo, $D\eta(u_0, 0) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow E \times \mathbb{R}^m$ é um

isomorfismo. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, η é um difeomorfismo de uma vizinhança de $(u_0, 0)$ (que podemos escolher na forma $V \times W$, com $V \subset U$ aberto e $W \subset \mathbb{R}^m$ aberto) numa vizinhança aberta $Z \subset \mathbb{R}^{n+m} = E \oplus \mathbb{R}^m$. Seja $\zeta : Z \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow V \times W$ o difeomorfismo inverso de η . Como $\eta(u, 0) = f(u)$, temos $(\zeta \circ f)(u) = (\zeta \circ \eta)(u, 0) = (u, 0)$. $\square$

Corolário 5.11 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ uma aplicação de classe C^1 . Se $f'(u_0)$ for injetora para algum $u_0 \in U$, então existe um aberto $V \ni u_0$ tal que $f : V \rightarrow f(V)$ é um homeomorfismo cujo inverso $f^{-1} : f(V) \rightarrow V$ é a restrição de uma aplicação $\xi : Z \rightarrow V$ de classe C^1 .*

Demonstração: Tome V e Z como na Forma Local das Imersões e defina $\xi = \Pi_1 \circ \zeta$, em que $\Pi_1 : V \times W \rightarrow V$ é a primeira projeção. Vale $(\xi \circ f)(x) = (\Pi_1 \circ \zeta \circ f)(x) = \Pi_1(x, 0) = x$ para $x \in V$, mostrando que $\xi|_f(V) = f^{-1}$. Já vimos que $\xi \in C^1$, completando a demonstração. (Veja a Figura 5.3.) $\square$

Observação 5.12 Decorre imediatamente do Corolário que, se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ for de classe C^1 com $f'(u_0)$ injetora, então $f'(u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ é injetora para todo $u \in V \ni u_0$, em que $V \subset U$ é um aberto. De fato, o Corolário 5.11 garante que $(\xi \circ f)(u) = x$ para $u \in V$; pela Regra da Cadeia, $\xi'(f(u)) \cdot f'(u) = I$ para todo $u \in V$. $\triangleleft$

5.3 O TEOREMA DO POSTO

Definição 5.13 *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. O posto de uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ no ponto $u \in U$ é o posto da derivada $Df(u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.*

Em geral, o posto de uma aplicação diferenciável varia de ponto a ponto. A função que associa a cada aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 o seu posto no ponto $u \in U$ é **semi-contínua inferiormente**. Isso quer dizer que, se f tem posto m no ponto $u \in U$, então existe uma bola aberta $B_r(u) \subset U$ tal que o posto de $Df(u)$ é maior ou igual a m em todos os pontos de $B_r(u)$. De fato, existe uma submatriz $m \times m$ de $Jf(u)$ com determinante não-nulo. (Veja o Exercício 6 do Capítulo 4.) Por continuidade, esse determinante é não-nulo em toda uma bola aberta $B_r(u)$ em torno de u . Nesses pontos, o posto de f é, no mínimo, igual a m .

Lema 5.14 *Para todo subespaço m -dimensional $E \subset \mathbb{R}^{m+p}$ existe uma decomposição⁶ $\mathbb{R}^{m+p} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^p$ tal que a projeção $\Pi_1 : \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ (dada por $\Pi_1(u, v) = u$) é um isomorfismo de E no $\mathbb{R}^m$.*

Demonstração: Como na demonstração do Lema 5.9, considere uma decomposição $\mathbb{R}^{n+m} = E \oplus \mathbb{R}^m$, em que $\mathbb{R}^m$ é um espaço gerado pela base canônica de $\mathbb{R}^{n+m}$.

Consideremos agora a primeira projeção $\Pi_1 = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^p$, em que $\mathbb{R}^p$ é, como antes, o espaço gerado por $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_p}\}$ e $\mathbb{R}^m$ o espaço gerado pelos demais vetores da base canônica do $\mathbb{R}^{m+p}$. A primeira projeção $\Pi_1 : \mathbb{R}^{m+p} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ leva todos os vetores de $\mathbb{R}^p$ no vetor 0. Dado $x \in \mathbb{R}^m$, como $x \in E \oplus \mathbb{R}^p$, temos que $x = x_1 + y \in E \oplus \mathbb{R}^p$. Mas $x = \Pi_1(x) = \Pi_1(x_1 + y) = \Pi_1(x_1)$, mostrando que $\Pi_1|_E : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ é sobrejetora. Como E e $\mathbb{R}^m$ têm a mesma dimensão, concluímos que Π_1 leva E isomorficamente em $\mathbb{R}^m$. $\square$

⁶Como antes, essa decomposição está sendo gerada pelos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^{m+p}$.

Definição 5.15 Um subconjunto $A \subset E \times F$ é **verticalmente convexo**, se todo segmento de reta unindo os pontos $P = (x, y')$ e $Q = (x, y'')$, com $P, Q \in A$, está inteiramente contido em A .

Lema 5.16 Seja $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ um aberto verticalmente convexo. Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ é tal que $D_2 f(u) \equiv 0$ em U , então f independe da segunda variável, isto é, $f(x, y) = f(x, y')$ para quaisquer $(x, y), (x, y') \in U$.

Demonstração: Dados $P = (x, y)$ e $Q = (x, y')$ em U , o caminho $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^p$ definido por $\varphi(t) = f(x, (1-t)y + ty')$ está bem definido e é diferenciável. Como

$$\varphi'(t) = D_2 f(x, (1-t)y + ty') \cdot (y - y') \equiv 0,$$

concluimos que φ é constante. Logo $\varphi(0) = \varphi(1)$, isto é, $f(x, y) = f(x, y')$. $\square$

Teorema 5.17 (Teorema do Posto)

Sejam $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+p}$ uma aplicação de classe C^1 . Suponhamos que f tenha posto m em cada ponto de U . Então, para todo $u_0 \in U$, existem difeomorfismos $\alpha : W \times Z \subset \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset U$ e $\beta : f(V) \subset \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^p$ tais que

$$\begin{aligned} (\beta \circ f \circ \alpha) : W \times Z \subset \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n &\rightarrow W \times Z' \subset \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^p \\ (x, y) &\mapsto (x, 0). \end{aligned}$$

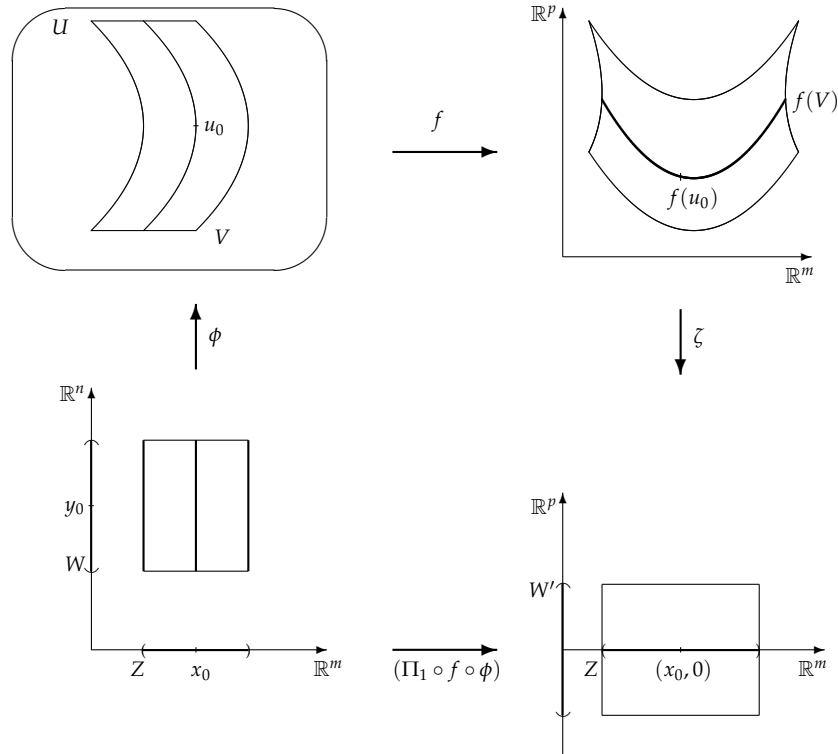


Figura 5.4: Para cada $u \in V$, as imagem inversas $f^{-1}(f(u))$, constituem fibras no domínio de f . O difeomorfismo ϕ^{-1} retifica essas fibras de f , enquanto o difeomorfismo ζ transforma $f(V)$ em $Z \times \{0\}$. O diagrama é comutativo: cada uma das retas verticais no domínio de ϕ é levada por $\Pi_1 \circ f \circ \zeta$ num único ponto em $Z \times \{0\}$, assim como cada uma das fibras de f em V é levada em um único ponto de $f(V)$.

Demonstração: Defina $E = Df(u_0) \cdot \mathbb{R}^{m+n} \subset \mathbb{R}^{m+p}$. Como $\dim E = m$, o Lema 5.14 mostra que existe uma decomposição $\mathbb{R}^{m+p} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^p$, tal que a projeção $\Pi_1 : \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$, dada por $\Pi_1(z, w) = z$, aplica E isomorficamente em $\mathbb{R}^m$. Isso quer dizer que $D(\Pi_1 \circ f)(u_0) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dada por $\Pi_1 \circ Df(u_0)$, concluímos que $D(\Pi_1 \circ f)(u_0)$ é sobrejetora. Se $u_0 \in U \subset \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$, a Forma Local das Submersões⁷ garante a existência de um difeomorfismo ϕ de classe C^1 , definido no aberto $Z_0 \times W \ni (x_0, f(u_0))$ e tomando valores no aberto $V' \subset U$, com $u_0 \in V'$, tal que $((\Pi_1 \circ f) \circ \phi)(x, y) = x$ para todo $(x, y) \in Z_0 \times W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Daí deduzimos que $(f \circ \phi)(x, y) = (x, \lambda(x, z))$, em que $\lambda : Z_0 \times W \rightarrow \mathbb{R}^p$ é uma aplicação de classe C^1 .

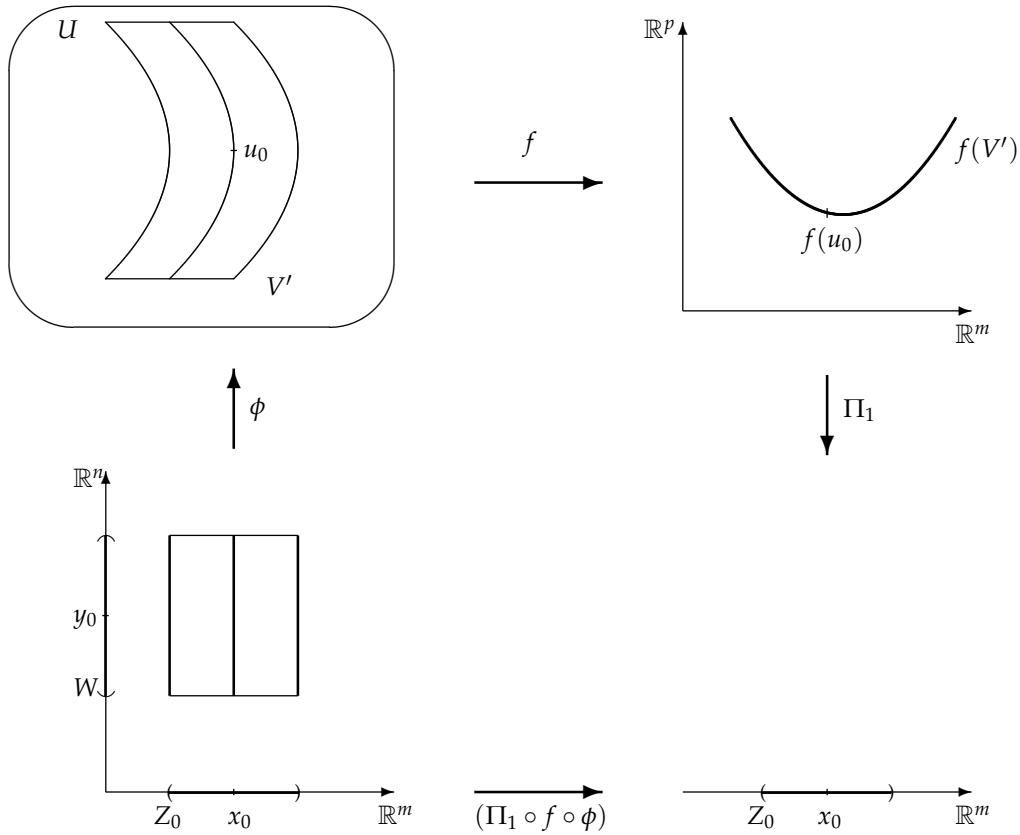


Figura 5.5: A aplicação $\Pi_1 \circ f$ é uma submersão. O difeomorfismo ϕ retifica as fibras de f .

Afirmamos que $D_2\lambda(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in W \times Z$. De fato, a matriz jacobiana de $D(f \circ \phi)$ tem a forma

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & B \end{pmatrix},$$

em que $B = D_2\lambda(x, y)$. Examinando a colunas dessa matriz, percebemos que se fosse $B \neq 0$, então $D(f \circ \phi)$ teria posto maior do que m , pois o posto de I é igual a m .⁸ Como o aberto

⁷Note que, no presente caso, a primeira variável está desempenhando o papel da segunda variável na Figura 5.1.

⁸Note que o posto de $f \circ \phi$ é igual ao posto de f . Observe que o mesmo argumento implica que as linhas de A são combinações lineares das linhas de I , o que é óbvio.

$Z \subset \mathbb{R}^n$ pode ser tomado convexo, podemos aplicar o Lema 5.16 e concluir que $\lambda(x, y)$ não depende de y .

Suponhamos que $\phi(x_0, y_0) = u_0$. Agora consideramos a injeção $i : Z_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow Z_0 \times W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ dada por $i(x) = (x, y_0)$ e a composta $f \circ \phi \circ i : Z_0 \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$. Essa é a aplicação de classe C^1 tal que $(f \circ \phi \circ i)(x) = (f \circ \phi)(x, y_0) = f(x, \lambda(x, y_0))$. Note que $(f \circ \phi \circ i)(x) = f(x, \lambda(x, y_0)) = f(x, \lambda(x, y))$ para todo $y \in Z$, pois λ não depende de y . Além disso, a derivada de $f \circ \phi \circ i$ tem posto m no ponto x_0 , sendo, portanto, injetora. De acordo com a Forma Local das Imersões, existe um difeomorfismo ζ definido numa vizinhança aberta de $f(u_0)$ e tomando valores num aberto de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, de forma que $\zeta \circ f \circ \phi \circ i(x) = (x, 0)$ para todo $x \in Z \subset Z_0$.

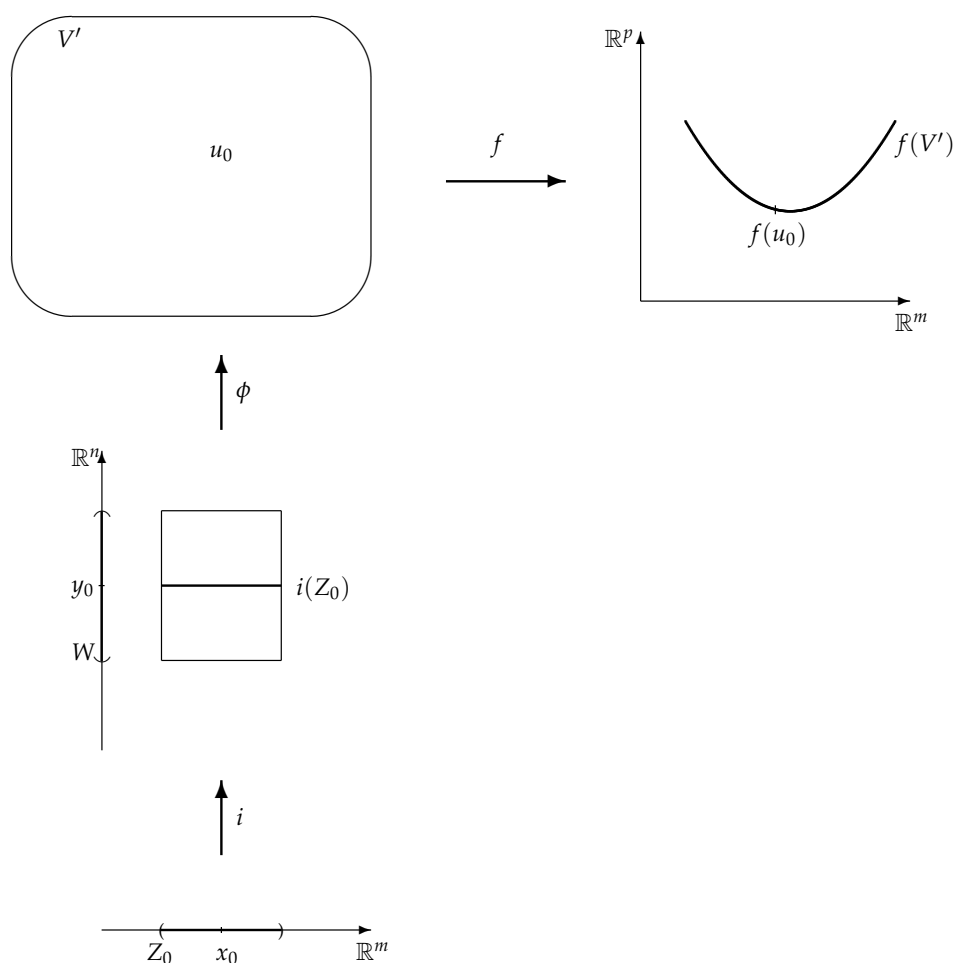


Figura 5.6: A aplicação $f \circ \phi \circ i$ é uma imersão.

Como $(f \circ \phi \circ i)(x) = f \circ \phi(x, y)$ para todo $y \in Z$, concluímos que $(\zeta \circ f \circ \phi)(x, y) = (x, 0)$ para todo $(x, y) \in W \times Z$. $\square$

Corolário 5.18 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação C^1 com posto constante em U . Então:*

- (i) *a aplicação f é localmente injetora se, e somente se, for uma imersão;*

(ii) a aplicação f é aberta se, e somente se, for uma submersão.

Demonstração: (i) Se f for uma imersão, o resultado é consequência imediata da Forma Local das Imersões. Suponhamos que o posto de f fosse igual a p , com $p < n$. Pelo Teorema do Posto, a aplicação $(\phi \circ f \circ \zeta)(x, y) = (x, 0)$ definida no aberto $Z \times W \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ não seria injetora e, portanto, f não seria injetora. Logo, se f for injetora, devemos ter $n - p = 0$, ou seja, $p = n$.

(ii) O Corolário 5.4 garante que toda submersão é uma aplicação aberta. Suponhamos que o posto de f fosse $p < m$. Pelo Teorema do Posto, a aplicação $(\phi \circ f \circ \zeta)(x, y) = (x, 0)$ definida no aberto $Z \times W \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, teria a imagem de $V = \phi(Z \times W) = Z \times \{0\}$ não-aberta, o que implica que $f(V)$ não é aberto. Contradição. $\square$

Proposição 5.19 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1 . Defina A_r como o interior do conjunto dos pontos de U nos quais f tem posto r , para $r = 0, 1, \dots, p = \min\{m, n\}$. Então, o conjunto*

$$A = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_p$$

é um aberto denso em U .

Demonstração: Queremos provar que, para todo aberto não-vazio $V \subset U$, vale $V \cap A \neq \emptyset$. Considere um aberto V arbitrário. Como o posto de f em V só assume um número finito de valores, existe um ponto $a \in V$ no qual $f'(x) \leq f'(a)$ para todo $x \in V$. Como o posto é uma função semi-contínua inferiormente, existe uma bola aberta $B_r(a)$ no qual f tem posto maior ou igual ao posto de $f'(a)$ em todos os pontos dessa bola. Escolhendo r suficientemente pequeno, temos $B_r(a) \subset V$. Temos então que $f'(x)$ tem posto exatamente igual a $f'(a)$ para todo $x \in B_r(a) \subset V$. Isso mostra que $B_r(a) \subset A_r$ e, portanto, $\emptyset \neq B_r(a) \subset V \cap A$. $\square$

Em geral, vários conjuntos A_r da Proposição anterior são vazios. Por outro lado, o conjunto A_p (que pode ser o conjunto vazio) é um conjunto aberto mesmo se, em sua definição, não tomarmos o interior.

Corolário 5.20 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1 . Então existe um conjunto $A \subset U$, aberto e denso, no qual f tem posto constante em cada componente conexa de A .*

Demonstração: Basta tomar $A = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_p$ como na Proposição 5.19. Cada componente conexa de A está contida em algum A_i (pois $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$). Nessa componente conexa (se não-vazia) o posto de f é igual a i . $\square$

Corolário 5.21 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ localmente injetora e de classe C^1 . Então o conjunto dos pontos $u \in U$, nos quais $f'(u)$ é injetora, é um conjunto aberto e denso em U .*

Demonstração: Suponhamos que $A_i \neq \emptyset$. Por hipótese, f é localmente injetora nesse conjunto. Por outro lado, o Corolário 5.18 garante que f é uma imersão. Isso quer dizer que $i = m$ e, portanto $A = A_m$. Como A é denso em U , o resultado está provado. (Note que, em particular, $n \leq m$.) $\square$

O argumento utilizado na última demonstração também mostra o seguinte resultado:

Corolário 5.22 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação aberta de classe C^1 . Então o conjunto dos pontos $u \in U$, nos quais $f'(u)$ é sobrejetora, é um conjunto aberto e denso em U .*

5.4 EXERCÍCIOS

1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma contração de classe C^1 . Mostre que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(u) = u + \Phi(u)$ é um difeomorfismo de U sobre o aberto $f(U)$.
2. Seja $f : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dada por $f(X) = X^k$. Mostre que existem abertos $U, V \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tais que toda matriz $Y \in V$ possui uma única raiz k -ésima $X \in U$, isto é, $X^k = Y$.
3. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto (com $n > 1$) e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 . Se o determinante da matriz jacobiana de f apenas se anula num conjunto de pontos isolados, mostre que f é uma aplicação aberta.
4. Utilizando o exercício anterior, mostre o Teorema Fundamental da Álgebra.
5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (x^2, y^2, (x + y)^2)$. Mostre que $Df(x, y)$ tem posto 2 se, e somente se, $(x, y) \neq (0, 0)$.
6. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, zy)$. Mostre que $Df(x, y, z)$ é injetora, exceto quando $x = y = 0$. Determine a imagem de $Df(0, 0, z)$.
7. Mostre o Corolário 5.4.
8. Mostre o Corolário 5.5.
9. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1 . Se $f_1, \dots, f_n$ são as coordenadas de f , mostre que f é uma submersão se, e somente se, os vetores $\nabla f_1(u), \dots, \nabla f_n(u)$ forem linearmente independentes em todo ponto $u \in U$.
10. Mostre que, tanto na Forma Local das Submersões quanto no Teorema da Aplicação Implícita, podemos sempre tomar a decomposição $\mathbb{R}^{m+n} = X \oplus Y$ com $X = \mathbb{R}^m$ e $Y = \mathbb{R}^n$. Quer dizer, sempre podemos tomar X e Y gerados pelos eixos coordenados.
11. Seja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(w_1, \dots, w_n, x) = x^n + w_1 x^{n-1} + \dots + w_{n-1} x + w_n$. Suponha que x_0 seja raiz simples do polinômio $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$. Mostre que existem vizinhanças $V \subset \mathbb{R}^n$ de $(a_1, \dots, a_n)$, $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset \mathbb{R}$ de x_0 e uma função $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que, para todo $(w_1, \dots, w_n) \in V$, $\xi(w_1, \dots, w_n)$ é a única raiz da equação $x^n + w_1 x^{n-1} + \dots + w_n = 0$ contida no intervalo $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$.
12. Seja $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Defina, para $x \in \mathbb{R}^m$ fixo, $f_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $f_x(y) = f(x, y)$. Suponha que existam $x_0 \in \mathbb{R}^m$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tais que $f_{x_0}(y_0) = y_0$ e que $D_2 f(x_0, y_0)$ não possua autovalor igual a 1. Mostre que existem vizinhanças abertas $U \ni x_0$ e $V \ni y_0$ e uma aplicação $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tal que, se $x \in U$, então $\xi(x) \in V$ é o único ponto fixo de f_x em V .

13. Supondo provado o Teorema da Aplicação Implícita, use esse resultado para mostrar o Teorema da Aplicação Inversa.

Sugestão: Suponha que $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja um difeomorfismo e defina $F : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $F(x, y) = f(y) - x$. Então $D_2F(x, y) = f'(y)$ é um isomorfismo, de modo que podemos aplicar o Teorema da Aplicação Implícita.

14. Considere $\mathbb{R}^2$ com a norma euclidiana e $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear cuja representação na base canônica do $\mathbb{R}^2$ é dada por

$$T_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe C^1 tal que $\|D\Phi(x, y)\| \leq k < 1$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(z) = Tz + \phi(z)$ é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}^2$.

15. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação C^1 tal que $\|f'(x) \cdot h\| \geq \alpha \|h\|$ para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}^n$, em que $\alpha > 0$. Mostre que f é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$. (Cuidado! Não é difícil mostrar que f é localmente injetora. Mas é necessário mostrar que f é globalmente injetora.)
16. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Suponha que $\varphi : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ tenha derivada $D_1\varphi : U \times [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ contínua. Sejam $\alpha, \beta : U \rightarrow [a, b]$ aplicações de classe C^1 e considere a aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \varphi(x, t) dt.$$

Prove que $f \in C^1$ e calcule $Df(x) \cdot h$ para $x \in U$ e $h \in \mathbb{R}^n$ arbitrários.

17. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva, com $\int_0^1 f(t) dt = 3$. Mostre que, para cada $x \in [0, \delta]$ (em que δ deve ser determinado), existe um único $\xi(x) \in [0, 1]$ tal que $\int_x^{\xi(x)} f(t) dt = 2$. Mostre que a função $\xi : [0, \delta] \rightarrow [0, 1]$ assim definida é de classe C^1 e calcule $\xi'(x)$.
18. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $K \subset U$ um conjunto compacto. Suponha que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ tenha derivada $Df(u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sobrejetora para todo $u \in U$. Mostre que $\|f\|_K : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ não pode assumir máximo no interior de K .
19. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Mostre que a restrição de f a qualquer aberto não é injetiva.
20. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe C^1 . Para $x_0 \in \mathbb{R}$, mostre que a restrição $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow B_\epsilon(f(x_0))$ não é sobrejetora, quaisquer que sejam os valores de $\delta, \epsilon > 0$.

21. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1 . Suponha que f tenha posto constante igual a r em U . Então, se $u_0 \in U$, mostre que existem abertos $V \subset U$ e $W \subset \mathbb{R}^r$ e aplicações $\lambda : V \rightarrow W$ e $\theta : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ tais que $f(u) = (\theta \circ \lambda)(u)$. Podemos obter λ e θ de classe C^1 ?

Capítulo 6

SUPERFÍCIES NO $\mathbb{R}^n$

6.1 DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Como $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ pode ser identificado com o espaço $\mathbb{R}^{nm}$ (ou, mais precisamente, porque $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é um espaço de Banach), faz sentido perguntar se $Df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é diferenciável no ponto $u \in U$. Se esse for o caso, dizemos que f é duas vezes diferenciável; teremos então que $D[Df](u)$, que denotaremos por $D^2f(u)$, é uma aplicação que associa, a cada elemento $h \in \mathbb{R}^n$, o elemento de $D^2f(u) \cdot h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, ou seja $D^2f(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$.

Vamos agora mostrar que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ pode ser identificado com um espaço cujos elementos podem ser mais facilmente reconhecíveis.

Proposição 6.1 Para $i \in \{1, \dots, n\}$, sejam $X_i = \mathbb{R}^{i_i}$. Se $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; \mathbb{R}^m)$ denota o espaço das aplicações n -lineares

$$\Phi : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

então existem isomorfismos que preservam norma

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; \mathbb{R}^m) \simeq \mathcal{L}(X_1, \mathcal{L}(X_2, \dots, X_n; \mathbb{R}^m)) \simeq \dots \simeq \mathcal{L}(X_1, \dots, X_{n-1}; \mathcal{L}(X_n, \mathbb{R}^m)).$$

Demonstração: Para $T \in \mathcal{L}(X_1, \mathcal{L}(X_2, \dots, X_n; \mathbb{R}^m))$, defina $T' \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; \mathbb{R}^m)$ por

$$T'(x_1, \dots, x_n) = T(x_1)(x_2, \dots, x_n). \quad (6.1)$$

A associação $T \mapsto T'$ é claramente linear e $\|T'\| \leq \|T\|$.

Por outro lado, (6.1) também define uma aplicação linear $T' \mapsto T$, que é a inversa da aplicação linear $T \mapsto T'$. Como $T' \mapsto T$ implica $\|T\| \leq \|T'\|$, vemos que $\|T\| = \|T'\|$.

Os outros isomorfismos são verificados analogamente. $\square$

Observação 6.2 No caso em que $X_1 = \dots = X_n = X$, denotamos $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Y)$ por $\mathcal{L}_n(X, Y)$. $\triangleleft$

De acordo com o que vimos, a aplicação $D^2f(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ pode ser identificada com a aplicação bilinear $D^2f(u) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Dizemos que uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é **de classe C^2** , se a aplicação $D^2f : U \rightarrow \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ for contínua.

Também podemos nos perguntar se D^2f é uma aplicação diferenciável. Se esse for o caso, diremos que f é três vezes diferenciável e denotaremos a derivada de D^2f por D^3f . E assim sucessivamente.

Suponhamos que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ seja $n - 1$ vezes diferenciável. Então sua $(n - 1)$ -ésima derivada é uma aplicação $D^{n-1}f : U \rightarrow \mathcal{L}_{n-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Se $D^{n-1}f$ for diferenciável no ponto $u \in U$, dizemos que f é n vezes diferenciável no ponto u e identificaremos sua n -ésima derivada com a aplicação n -linear $Df(u) \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Quando $D^n f$ existir em todo ponto $u \in U$, diremos que f é n -vezes diferenciável em U e teremos então definida a aplicação $D^n : U \rightarrow \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Se essa aplicação for contínua, diremos que f é **de classe C^n** . Diremos que f é **de classe C^∞** , se $f \in C^n$ para todo n . Por conveniência, diremos que f é **de classe C^0** , se f for contínua em U .

Para $i, j \in \{1, \dots, n\}$, estendemos a notação de derivadas parciais para derivadas de ordem maior do que um ao definir

$$D^2f(u) \cdot (e_i, e_j) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(u) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(u), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(u) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(u)$$

e de maneira análoga para derivadas de ordem superior a dois.

Exemplo 1 Toda aplicação linear contínua $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^∞ . De fato, $DT(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é a aplicação constante T e, portanto, $D^2T(x) = 0 = D^nT$ para todo $n \geq 2$. $\triangleleft$

Exemplo 2 Toda aplicação bilinear contínua $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow Z$ é de classe C^∞ . De fato, sabemos que $DB(x, y) \cdot (h, k) = B(x, k) + B(h, y)$ é uma aplicação linear contínua. O resultado então decorre do exemplo anterior. $\triangleleft$

Exemplo 3 Generalizando o Exemplo 5, consideremos $f : U \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ (n vezes) definida por

$$f(u) = (f_1(u), \dots, f_n(u)).$$

É imediato que $f \in C^k$ se, e somente se, $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^k . $\triangleleft$

6.2 SUPERFÍCIES DIFERENCIÁVEIS NO $\mathbb{R}^n$

No decorrer de nossos estudos de Matemática, três tipos de objetos nos foram apresentados como sendo superfícies:

- (a) gráficos de funções diferenciáveis. Por exemplo, o gráfico de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$ foi introduzido quando estudamos superfícies quádricas;
- (b) imagens inversas de valores regulares¹ de funções $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Por exemplo, se $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, então $f^{-1}(1)$ é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

¹Conceito que definiremos precisamente mais adiante.

- (c) superfícies parametrizadas $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Por exemplo, se $P_0 \in \mathbb{R}^3$ é um ponto fixo e $u, v \in \mathbb{R}^3$ dois vetores linearmente independentes, então

$$f(s, t) = P_0 + su + tv$$

é a descrição paramétrica do plano gerado pelos vetores u, v e passando pelo ponto P_0 .

Em alguns casos, essas descrições são intercambiáveis. Não é difícil perceber que podemos representar um plano no $\mathbb{R}^3$ em qualquer uma das formas descritas acima; se considerarmos a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, a expressão $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ descreve a semi-esfera $z \geq 0$ tanto como gráfico de função como parametricamente. Mas não é possível descrever *toda* a esfera como gráfico de uma *única* função ou por meio de uma *única* parametrização.

Nosso objetivo neste Capítulo é definir precisamente o que é uma superfície e elucidar a diferença entre essas três representações de superfícies já apresentadas. Queremos estudar condições em que elas são intercambiáveis e, sobretudo, ressaltar as vantagens da representação paramétrica de uma superfície. Como não há vantagem essencial em limitar nosso estudo às superfícies em $\mathbb{R}^3$, definiremos abstratamente uma superfície no $\mathbb{R}^n$. Começamos com

Definição 6.3 *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Uma **parametrização** (m -dimensional) de classe C^k de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k tal que:*

- (i) *a aplicação φ é um homeomorfismo de U em $\Omega = \varphi(U)$;*
- (ii) *a derivada $D\varphi(u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetora para todo $u \in U$.²*

Os elementos $u \in U$ são chamados **parâmetros**. Os homeomorfismos inversos $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U$ são chamados **cartas** ou **sistemas de coordenadas**. Quando referirmos a uma parametrização C^k , **convencionaremos** que $k \geq 1$.

Intuitivamente, a definição apresentada estabelece que um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ foi deformado de tal maneira que seria possível desfazer continuamente essa deformação. Por exemplo, o conjunto $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ pode ser deformado na semi-esfera Ω dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0$. Essa deformação é reversível, no sentido de que a semi-esfera pode ser transformada novamente no aberto U . Estamos dizendo que a deformação do aberto U no conjunto Ω é de classe C^k e gostaríamos que fosse possível reverter essa deformação também através de uma aplicação de classe C^k . Entretanto, não sabemos (ainda) como definir esse conceito, pois Ω não é, em geral, um aberto do $\mathbb{R}^n$. Um dos objetivos desta Seção será justamente esse: mostrar que há como se dizer que a inversa do homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \Omega$ é de classe C^k . Para isso, faremos uso do Corolário 5.11: a inversa φ^{-1} de uma parametrização é a restrição de uma aplicação de classe C^k definida num aberto $V \subset \mathbb{R}^n$. (Veja o Exercício 5.)

Observe que, apesar de Ω ser um conjunto no espaço $\mathbb{R}^n$, necessitamos apenas de m coordenadas para explicitar a posição de um elemento de Ω . Nesse sentido, dizemos que Ω é um conjunto m -dimensional,³ descrito pelas m coordenadas de um ponto de U . Note também que, quando $m < n$, a Forma Local das Imersões nos garante que $\Omega = \varphi(U)$ é um conjunto com interior vazio.

²Mais sinteticamente, o homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ é uma imersão de classe C^k . Note que existem imersões injetoras que não são homeomorfismos. Compare com o Teorema da Aplicação Injetora!

³Veja o Exercício 18.

Definição 6.4 Uma **superfície** m -dimensional no $\mathbb{R}^n$ de classe C^k é um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ para o qual existe uma cobertura $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ formada por uma família de abertos do $\mathbb{R}^n$, tal que cada conjunto $S_\alpha = V_\alpha \cap S$ admite uma parametrização $\varphi : U_\alpha \rightarrow S_\alpha$ definida num aberto $U_\alpha \subset \mathbb{R}^m$. (Os abertos U_α estão todos no mesmo espaço $\mathbb{R}^m$.) Cada conjunto S_α é uma **vizinhança parametrizada** dos pontos $p \in \varphi(U_\alpha)$. (Como antes, se S for uma superfície C^k , **convencionaremos** que $k \geq 1$.)

O **espaço vetorial tangente** $T_p S$ no ponto $p \in S$ é a imagem $D\varphi(u) \cdot \mathbb{R}^m$ de uma parametrização de uma vizinhança do ponto p , tal que $\varphi(u) = p$. Os elementos de $T_p S$ são os **vetores tangentes** de S no ponto p .

Observe que não estamos exigindo que $S \neq \emptyset$. Assim, $\emptyset$ é uma superfície de classe C^∞ e dimensão m , para todo $m \in \mathbb{N}$. (É claro que esse é um exemplo patológico.)

Algumas vezes, para ressaltar o espaço euclidiano do qual a superfície é um subconjunto, dizemos que a superfície S (de dimensão m) tem **codimensão** $n - m$.

Não é claro que o espaço tangente $T_p S$ esteja bem definido. Afinal, podem existir parametrizações φ, ψ de vizinhanças de p (com $\varphi(u) = p = \psi(v)$) e não é óbvio que $D\varphi(u) \cdot \mathbb{R}^m = D\psi(v) \cdot \mathbb{R}^m$. Vamos mostrar esse fato posteriormente. Note que, então, cada parametrização φ de uma vizinhança aberta do ponto $p \in S$ nos fornecerá uma base de $T_p S$: aquela formada pelos vetores

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \varphi'(u) \cdot e_1, \quad \dots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} = \varphi'(u) \cdot e_m.$$

Se compararmos a definição de superfície com a de *caminho*, apresentada no Capítulo 2, notamos uma diferença fundamental. O caminho (ou curva) é definido como uma *aplicação*, enquanto a superfície é definida como um *conjunto de pontos* no $\mathbb{R}^n$. Contudo, a definição de superfície foi apresentada através de parametrizações, que descrevem S numa vizinhança de cada um de seus pontos. Essa descrição *local* permite que caminhos e superfícies possam ter um tratamento unificado.⁴ Essas parametrizações nos permitirão transpor as noções de cálculo diferencial, já definidas para os abertos $U \subset \mathbb{R}^m$, para as superfícies $S \subset \mathbb{R}^n$.

Observação 6.5 Lembramos que um aberto no conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é a interseção de um aberto do $\mathbb{R}^n$ com S . Assim, comparando as Definições 6.3 e 6.4, estamos exigindo, ao definir uma superfície S , que a imagem de uma parametrização seja um conjunto aberto em S . Sabemos que a imagem $\varphi(U_\alpha)$ de um homeomorfismo $\varphi : U_\alpha \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto *em si mesmo*, mas não necessariamente em S . $\triangleleft$

Exemplo 4 Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k . O gráfico de f ,

$$Gr(f) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : u \in U, v = f(u)\}$$

é uma superfície de classe C^k . (Assim, com respeito à introdução desta seção, toda superfície que for gráfico de função é uma superfície parametrizada. Note que o conceito de parametrização foi a base da definição de superfície apresentada.)

De fato, considere $\varphi : U \rightarrow Gr(f)$ dada por $\varphi(u) = (u, f(u))$. Afirmamos que φ é uma parametrização C^k de todo o conjunto $Gr(f)$. De fato, se Π_1 denota a primeira projeção,

⁴Note que a definição de superfície impede que a superfície cruze a si mesmo, enquanto essas são permitidas para caminhos. (Justifique!)

claramente $\Pi_1 \circ \varphi = I|_U$, mostrando que φ é um homeomorfismo, cuja inverso é $\Pi_1|_{Gr(f)}$. A Regra da Cadeia nos garante que $\Pi_1 \cdot \varphi'(u) = I$ e, portanto φ' é injetora e φ uma imersão. O espaço tangente $T_p Gr(f)$ no ponto $p = f(u)$ é a imagem $\varphi'(u) \cdot \mathbb{R}^m$. Ou seja, $T_p Gr(f) = \{(h, f'(u) \cdot h) : h \in \mathbb{R}^m\}$, resultado apresentado na Observação 2.4. $\triangleleft$

Exemplo 5 O caráter *local* da definição de superfície nos permite decidir rapidamente se um determinado conjunto é ou não uma superfície. Assim, se para todo ponto $p \in S$ existir um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $S \cap V$ for o gráfico de uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k , então S é uma superfície de dimensão m e classe C^k .

Em particular, a esfera $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ e o círculo $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ são superfícies de classe C^∞ e dimensões $n-1$ e 1 , respectivamente. $\triangleleft$

Exemplo 6 Considere $\varphi : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(t) = (t^3 - t, t^2)$. Claramente φ é injetora, de forma que φ é uma bijeção de $(-1, \infty)$ em $\varphi(-1, \infty) \subset \mathbb{R}^2$. (Veja a Figura 6.1.)

A imersão φ não é um homeomorfismo: tomando uma sequência decrescente $t_n \rightarrow -1$, verificamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n) = (0, 1) = \varphi(1)$. Portanto, φ^{-1} não é contínua.

Mas $\varphi(-1, \infty)$ é uma superfície? A resposta a essa questão é negativa, conclusão a que chegamos ao examinar uma bola aberta $B_r(z_0)$ com raio $r > 0$ e centro no ponto $z_0 = (0, 1) \in \varphi(-1, \infty)$: a interseção dessa bola com $\varphi(-1, \infty)$ não admite parametrização (justifique!). $\triangleleft$

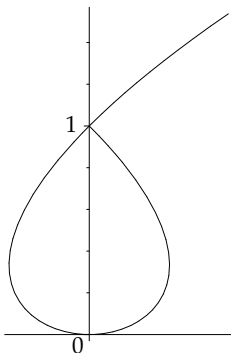


Figura 6.1: Qualquer vizinhança de $(0, 1)$ não pode ser parametrizada por um homeomorfismo.

Exemplo 7 Sejam $S_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$ e $S_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ superfícies de classe C^k , com dimensões m_1 e m_2 , respectivamente. Então o **produto cartesiano** $S_1 \times S_2$ é uma superfície de classe C^k e dimensão $m_1 + m_2$. De fato, se $\varphi_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^{m_1} \rightarrow S_1$ e $\varphi_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^{m_2} \rightarrow S_2$ são parametrizações de vizinhanças dos pontos $p_1 \in S_1$ e $p_2 \in S_2$, então $\varphi_1 \times \varphi_2 : U_1 \times U_2 \rightarrow S_1 \times S_2$, definida por $(\varphi_1 \times \varphi_2)(x, y) = (\varphi_1(x), \varphi_2(y))$ é uma parametrização de uma vizinhança de (p_1, p_2) .

Podemos considerar o produto cartesiano de um número finito de superfícies e obter uma superfície. Em particular, o *toro bidimensional* $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$ e o *toro n-dimensional* $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1 \subset \mathbb{R}^{2n}$ são superfícies de classe C^∞ e dimensões 2 e n , respectivamente. $\triangleleft$

Vamos agora mostrar que o espaço tangente $T_p S$ num ponto $p \in S$ está bem definido, isto é, que a definição de $T_p S$ independe da parametrização escolhida da vizinhança de $p \in S$. Para isso, começamos mostrando o

Teorema 6.6 *Sejam $S \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície e $\phi : U \subset \mathbb{R}^m$ uma parametrização do aberto $\Omega \subset S$. Se $V \subset \mathbb{R}^p$ for um aberto e $f : V \rightarrow f(V) \subset \Omega$ uma aplicação diferenciável no ponto $a \in V$, então a aplicação composta $\phi^{-1} \circ f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável no ponto $a \in V$. Se f for uma aplicação de classe C^k , então $\phi^{-1} \circ f$ é de classe C^k .*

Demonstração: Uma vez que ϕ^{-1} não está definida num aberto, não podemos aplicar a Regra da Cadeia para provar o resultado.

Mas, de acordo com a Forma Local das Imersões ou, mais exatamente, pelo Corolário 5.11, ϕ^{-1} é a restrição da aplicação $\Pi_1 \circ \zeta$, de classe C^k , definida num aberto $Z \subset \mathbb{R}^n$. Tomando um aberto $V_1 \subset V$ com $a \in V_1$ e $f(V_1) \subset Z$, temos que $(\Pi_1 \circ \zeta \circ f)(x) = \phi^{-1} \circ f(x)$ para todo $x \in V_1$. Aplicando a Regra da Cadeia à aplicação $(\Pi_1 \circ \zeta \circ f)$, concluímos que $\phi^{-1} \circ f(x)$ é diferenciável no ponto a . Se f for de classe C^k , esse procedimento pode ser aplicado em cada ponto de V ; como $\Pi_1 \circ \zeta$ é de classe C^k , temos o afirmado. $\square$

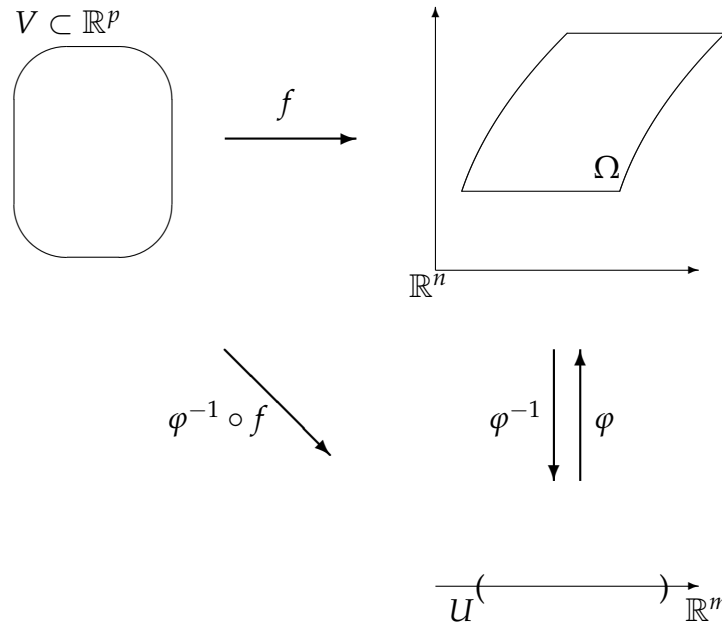


Figura 6.2: A inversa de uma parametrização ϕ é a restrição de uma aplicação definida num aberto $Z \subset \mathbb{R}^n$, de modo que $\phi^{-1} \circ f$ é diferenciável.

Corolário 6.7 *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de dimensão m e classe C^k . Então*

$$T_p S = \{\lambda'(0) : \lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S, \lambda(0) = p, \lambda \text{ diferenciável em } 0\}.$$

Em particular, $T_p S$ está bem definido.

Demonstração: Seja $\phi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização de uma vizinhança aberta $\Omega_p \subset S$, com $\phi(u) = p$ e $p \in \Omega_p$. Por definição, $T_p S = \phi'(u) \cdot \mathbb{R}^m$.

Temos que $T_p S \subset \{\lambda'(0) : \lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S, \lambda(0) = p, \lambda \text{ diferenciável em } 0\}$. De fato, se $w = \phi'(u) \cdot h$, defina $\lambda(t) = \phi(u + th)$, para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Claramente $\lambda'(0) = \phi'(u) \cdot h$.

Para a inclusão contrária, tomamos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, de modo que $\lambda(t) \in \Omega_p$. Aplicando o Teorema 6.6, concluímos que $\mu = \varphi^{-1} \circ \lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável no ponto 0. Como $\varphi \circ \mu = \lambda$, a Regra da Cadeia nos mostra que $\lambda'(0) = \varphi'(u) \cdot \mu'(0)$, de onde concluímos que $\lambda'(0) = \varphi'(u) \cdot h$, em que $h = \mu'(0) \in \mathbb{R}^m$. $\square$

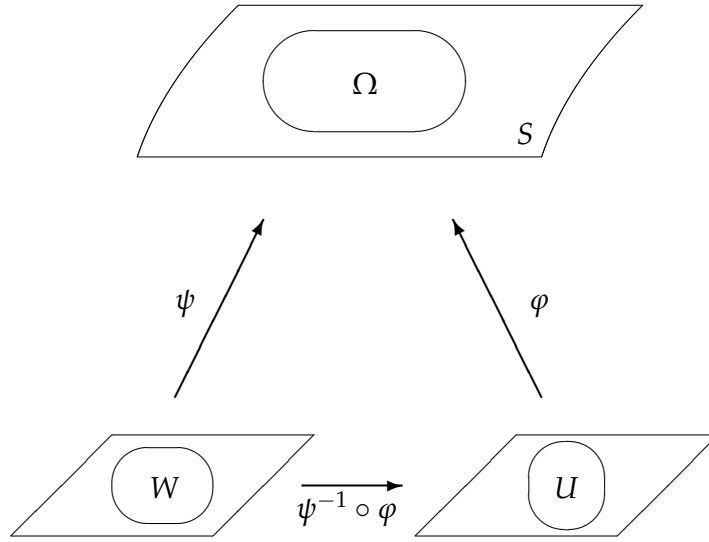


Figura 6.3: A mudança de parametrização $\psi^{-1} \circ \varphi$ é um difeomorfismo entre abertos do $\mathbb{R}^m$.

Teorema 6.8 (Mudança de Parametrização)

Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $W \subset \mathbb{R}^p$ conjuntos abertos. Considere uma parametrização $\varphi : U \rightarrow \Omega$ m -dimensional de classe C^k do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Uma aplicação $\psi : W \rightarrow \Omega$ de classe C^k é uma parametrização de Ω se, e somente se, $\psi = \varphi \circ \xi$, em que $\xi : U \rightarrow W$ é um difeomorfismo de classe C^k . Em particular, $m = p$, de modo que ψ também é uma parametrização m -dimensional.

Demonstração: Se $\psi = \varphi \circ \xi$, em que ξ é um difeomorfismo entre os abertos U e W (o que implica $q = m$), é claro que ψ é uma parametrização m -dimensional de Ω .

Por outro lado, se ψ for uma parametrização, o Teorema 6.6 garante que $\xi := \varphi^{-1} \circ \psi : W \rightarrow U$ e $\beta := \psi^{-1} \circ \varphi : U \rightarrow W$ são aplicações de classe C^k . Como $\xi \circ \beta = I : U \rightarrow U$ e $\beta \circ \xi = I : W \rightarrow W$, temos que $\xi = \beta^{-1}$, de modo que ξ é um difeomorfismo; finalmente, temos que $\varphi \circ \xi = \psi$, completando a prova. $\square$

Note que, como consequência desse Teorema, temos que a dimensão de uma superfície está bem definida.

Observação 6.9 Em geral, o Teorema 6.8 é aplicado na seguinte situação: temos duas parametrizações $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega \subset S$ e $\psi : U' \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega' \subset S$. Se $\Omega \cap \Omega' \neq \emptyset$, cada ponto $p \in \Omega \cap \Omega'$ pode ser simultaneamente caracterizado pelos parâmetros $u = (u_1, \dots, u_n) \in U$ e $v = (v_1, \dots, v_n) \in V$. A mudança de parâmetros (ou coordenadas) $v \mapsto u$ é dada pelo difeomorfismo $\xi = \varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(\Omega \cap \Omega') \rightarrow \varphi^{-1}(\Omega \cap \Omega')$. $\triangleleft$

6.3 APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS ENTRE SUPERFÍCIES

Sejam S_1 e S_2 superfícies. Nesta Seção vamos definir em que condições uma aplicação $f : S_1 \rightarrow S_2$ é diferenciável. Como consequência, vamos estender o conceito de derivada, antes definido apenas para aplicações definidas em *abertos* de um espaço euclidiano.

Definição 6.10 *Sejam $S_1 \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de classe C^k e dimensão m e $S_2 \subset \mathbb{R}^p$ outra superfície. Uma aplicação $f : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^p$ é **diferenciável** no ponto $p \in S$, se existir uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \Omega$, em que Ω é uma vizinhança aberta de p em S_1 , tal que $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ é diferenciável no ponto $u = \varphi^{-1}(p)$.*

A aplicação $f : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^p$ é de classe C^r (para $0 \leq r \leq k$), se a composta $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ for de classe C^r .

*A aplicação $f : S_1 \rightarrow S_2$ é **diferenciável** no ponto $p \in S_1$, se a aplicação $f : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^p$ for diferenciável.*

Analogamente, $f : S_1 \rightarrow S_2$ é de classe C^r (com $0 \leq r \leq k$), se $f : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^p$ for de classe C^r .

Para mostrarmos que essa definição independe da parametrização de uma vizinhança de p em S , consideremos uma parametrização $\psi : W \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \Omega'$, definida no aberto W e tomando valores na vizinhança Ω' de p em S_1 . Como consequência do Teorema 6.6, uma vez que $f \circ \psi = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)$, vemos que $f \circ \psi$ é diferenciável no ponto $\psi^{-1}(p)$ (respectivamente, de classe C^r) se, e somente se, $f \circ \varphi$ for diferenciável no ponto $\varphi^{-1}(p)$ (respectivamente, de classe C^r).

Definimos, assim, uma aplicação diferenciável entre duas superfícies. Mas ainda não definimos a *derivada* da aplicação $f : S_1 \rightarrow S_2$. É o que faremos a seguir.

Definição 6.11 *Sejam S_1, S_2 superfícies e $f : S_1 \rightarrow S_2$ uma aplicação diferenciável no ponto $p \in S_1$. Seja $f(p) = q$. A **derivada** de f no ponto p é a aplicação*

$$Df(p) : T_p S_1 \rightarrow T_q S_2,$$

definida da seguinte maneira: seja $\Omega \subset S_1$ uma vizinhança aberta de p e $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \Omega$ uma parametrização, com $\varphi(u) = p$. Se $v \in T_p S_1$, temos $v = \varphi'(u) \cdot h$ para algum $h \in \mathbb{R}^m$. Definimos então

$$Df(p) \cdot v = (f \circ \varphi)'(u) \cdot h.$$

Como antes, precisamos mostrar que a definição não depende da parametrização φ . Além disso, não é claro que $(f \circ \varphi)'(u) \cdot h$ esteja em $T_q S_2$. Vamos mostrar esses fatos. Para isso, como antes, consideremos uma parametrização $\psi : W \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \Omega'$ de classe C^k , definida no aberto W e tomando valores na vizinhança Ω' de p em S_1 . Suponhamos que $\psi(w) = p$ e que $v = \psi'(w) \cdot k$ para algum $k \in \mathbb{R}^m$. Queremos mostrar que $(f \circ \varphi)'(u) \cdot h = (f \circ \psi)'(w) \cdot k$. De acordo com o Teorema de Mudança de Parametrização 6.8, temos que $\psi = \varphi \circ \xi$, em que $\xi : \psi^{-1}(\Omega \cap \Omega') \rightarrow \varphi^{-1}(\Omega \cap \Omega')$ é um difeomorfismo de classe C^k entre abertos do $\mathbb{R}^m$, com $\xi(w) = u$. Logo,

$$\varphi'(u) \cdot h = v = \psi'(w) \cdot k = (\varphi \circ \xi)'(w) \cdot k = \varphi'(u) \cdot (\xi'(w) \cdot k).$$

Como φ' é injetora, deduzimos da última igualdade que $h = \xi'(w) \cdot k$. Temos, portanto,

$$(f \circ \psi)'(w) \cdot k = (f \circ \varphi \circ \xi)'(w) \cdot k = (f \circ \varphi)'(u) \cdot (\xi'(w) \cdot k) = (f \circ \varphi)'(u) \cdot h,$$

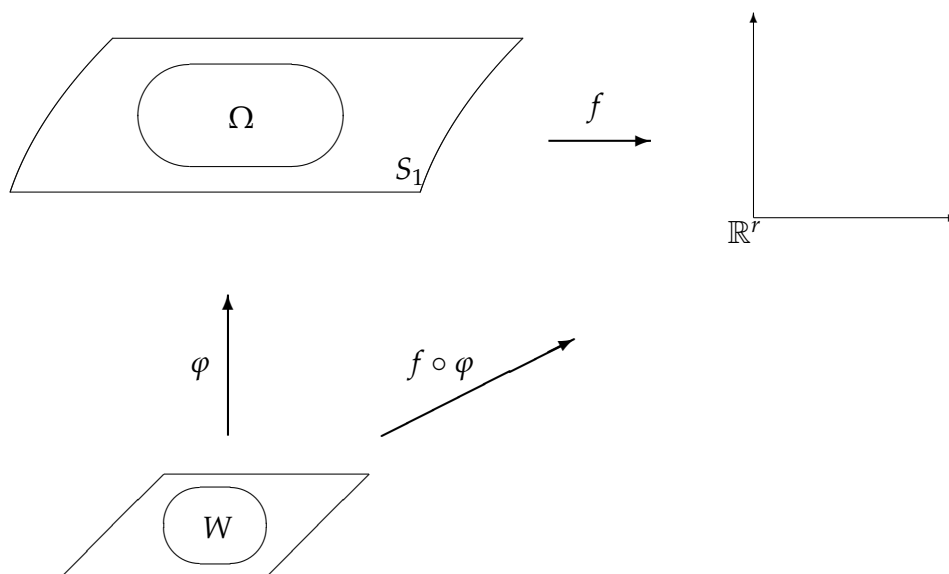


Figura 6.4: A derivada de f é definida como a derivada da composta com uma parametrização, de modo que derivamos uma aplicação definida num aberto do $\mathbb{R}^m$.

mostrando que a definição da derivada de f independe da parametrização escolhida de uma vizinhança de $p \in S_1$. Mas ainda resta uma dúvida: temos que $(f \circ \varphi)'(u) \cdot h \in T_q S_2$? Como os vetores tangentes a $T_q S_2$ são vetores velocidades (no instante $t = 0$) de caminhos tomando valores em S_2 , tomando um caminho λ com vetor velocidade $\lambda'(0) = v$, ao considerarmos a composta $f \circ \lambda$ obtemos um caminho em S_2 . Mas como mostrar que $(f \circ \lambda)'(0) = Df(p) \cdot \lambda'(0)$? (É claro que esse resultado é natural! O Exercício 25 pede que você o demonstre.)

Vamos seguir um caminho alternativo. Sejam precisos: consideremos $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ uma caminho com $\lambda(0) = u$ e vetor velocidade $\lambda'(0) = h \in \mathbb{R}^m$. (Estamos mantendo a notação! Quer dizer, $\varphi(u) = p$ e $\varphi'(u) \cdot h = v$.) Considerando a composta $[(f \circ \varphi) \circ \lambda](t)$, as funções $f \circ \varphi$ e λ são funções definidas em conjuntos abertos de espaços euclidianos. Assim, podemos aplicar a Regra da Cadeia, que nos dá $(f \circ \varphi)'(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t) = Df(p) \cdot v$. Como a composta estabelece um caminho na superfície S_2 , mostramos que a derivada $Df(p) \cdot v$ pertence a $T_q S_2$.

Observação 6.12 O ponto fundamental na definição de $f : S_1 \rightarrow S_2$ ser diferenciável consiste no fato da parametrização $\varphi : U \rightarrow \Omega \subset S_1$ permitir que trabalhemos no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ ao invés de trabalharmos na superfície S . $\triangleleft$

Sejam $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m$ e $\psi : V \subset \mathbb{R}^k$ parametrizações de vizinhanças abertas de $p \in S_1$ e $q \in S_2$. Considere uma aplicação $f : S_1 \rightarrow S_2$, com $f(p) = q$. Não é difícil verificar que f é diferenciável no ponto p se, e somente se, a aplicação $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \rightarrow V$ for diferenciável no ponto $\varphi^{-1}(p)$. (Veja a Figura 6.5 e o Exercício 26). Como consequência imediata desse resultado, temos que vale a Regra da Cadeia para aplicações definidas em superfícies (veja o Exercício 27).

Definição 6.13 Sejam S_1, S_2 superfícies de classe C^k . Um **difeomorfismo** $f : S_1 \rightarrow S_2$ de classe C^k é uma bijeção de classe C^k cuja inversa também é de classe C^k .

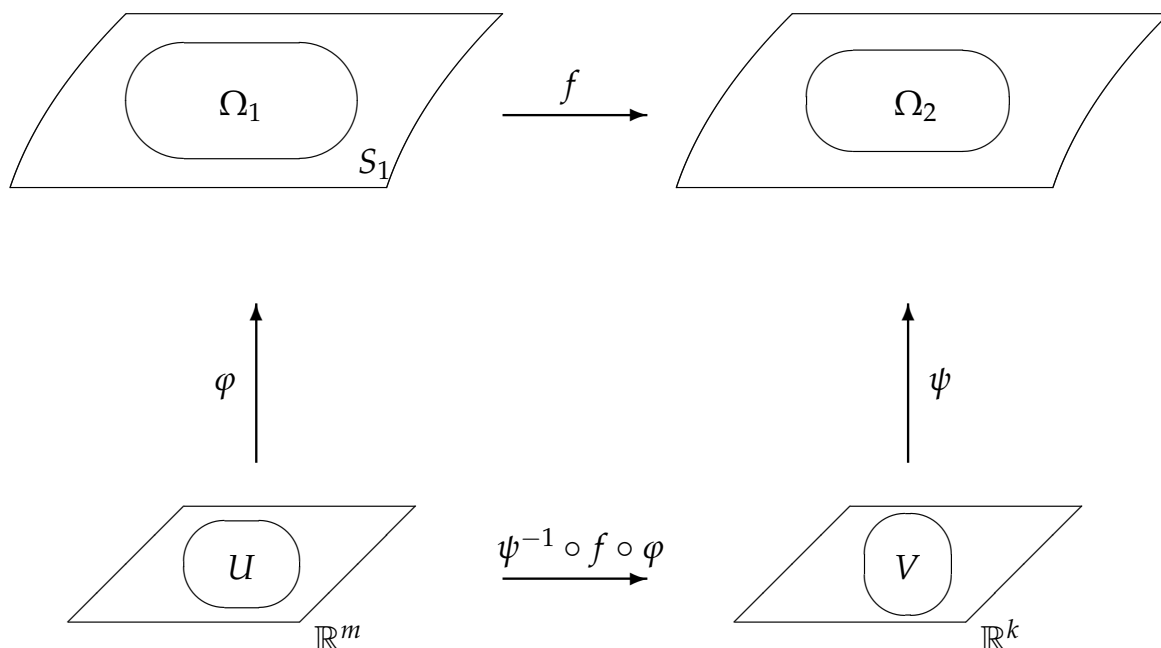


Figura 6.5: A derivada de f é definida como a derivada da composta com uma parametrização, de modo que derivamos uma aplicação definida num aberto do $\mathbb{R}^m$.

Pela Regra da Cadeia (para aplicações entre superfícies), a derivada $Df(p) : T_p S_1 \rightarrow T_q S_2$ é um isomorfismo, em que $p \in S_1$ e $q = f(p) \in S_2$.

Observação 6.14 Uma vez mostrado que a definição de $Df(p) \cdot v$ é consistente, temos uma outra questão para enfrentar: a definição apresenta a derivada como sendo uma aplicação definida no espaço tangente de uma superfície. Como essa situação se relaciona com a derivada de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$?

Ora, os conjuntos abertos são justamente as superfícies de dimensão n no $\mathbb{R}^n$! De fato, em virtude do Teorema da Aplicação Inversa, a imagem de uma parametrização de dimensão n no $\mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.

Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ (ou seja, dada uma superfície n -dimensional no $\mathbb{R}^n$), uma parametrização de U é dada pela aplicação $I|_U : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Como o espaço tangente a U num ponto $u \in U$ independe da parametrização escolhida, temos que $T_u U = DI(u) \cdot \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$. Portanto, ao considerarmos uma função $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, a derivada $Df(u)$ está definida no espaço tangente à superfície U . Assim, a definição da derivada de $f : S_1 \rightarrow S_2$ é uma extensão da definição da derivada de $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. $\triangleleft$

6.4 SUPERFÍCIES, GRÁFICOS E IMAGENS INVERSAS

Nesta Seção vamos comparar superfícies definidas nas formas (a), (b) e (c) da Seção 6.2. Como já vimos, toda superfície na forma (a) é facilmente colocada na forma (c), isto é, (a) $\subset$ (c).

Passamos a tratar da forma (b).

Definição 6.15 Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável. Um ponto $c \in \mathbb{R}^n$ é um **valor regular** de f se, para todo ponto $u \in U$ tal que $f(u) = c$, a derivada $f'(u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ for uma aplicação linear sobrejetora.

Um ponto $u \in U$ é um **ponto crítico** (ou singular) de f , se a derivada $f'(u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ não for sobrejetora.

Agora podemos concluir imediatamente que (a) $\subset$ (b). De fato, se S for o gráfico $\{(x, f(x))\}$ de uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^k (com $k \geq 1$), então $S = g^{-1}(0)$, em que $g : U \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ é dada por $g(x, y) = y - f(x)$. É fácil constatar que $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$ é valor regular de g .

O nosso próximo resultado mostra que imagens inversas de valores regulares são superfícies. Assim, com respeito à introdução desta seção, estamos mostrando que toda superfície definida na forma (b) pode ser colocada na forma (c).

Proposição 6.16 Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ uma aplicação de classe C^k . Se $c \in \mathbb{R}^{n-m}$ for valor regular de f , então $f^{-1}(c)$ é uma superfície de classe C^k e dimensão m no espaço $\mathbb{R}^n$. Em cada ponto $p \in f^{-1}(c)$ o espaço tangente $T_p[f^{-1}(c)]$ é o núcleo da derivada $Df(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$.

Demonstração: De acordo com o Teorema da Aplicação Implícita, para cada ponto $p \in S = f^{-1}(c)$ existe um aberto $V \subset U$, com $p \in V$ tal que $V \cap S$ é o gráfico de uma aplicação ξ de classe C^k definida num aberto do $\mathbb{R}^m$. De acordo com o Exemplo 5, $f^{-1}(c)$ é uma superfície de dimensão m e classe C^k .

Dado $v \in T_p S$, existe um caminho $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ com $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$. Pela Regra da Cadeia 3.1, $Df(p) \cdot v = (f \circ \lambda)'(0)$. Como $(f \circ \lambda)(t) = c$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, temos que $(f \circ \lambda)'(0) = 0$. Isso quer dizer que $T_p S \subset \ker Df(p)$. Como ambos esses espaços tem dimensão m , concluímos que $\ker Df(p) = T_p S$. $\square$

Exemplo 8 O hiperbolóide de duas folhas $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ é uma superfície S de dimensão 2 no $\mathbb{R}^3$, pois 0 é valor regular da função $f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2 - 1$. De fato,

$$Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (-2x \quad -2y \quad 2z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y = z = 0.$$

Como $0 \in \mathbb{R}$, $\dim S = 3 - 1 = 2$. Note que S não é conexo. Assim, a imagem inversa de um valor regular não é, necessariamente, uma superfície conexa. $\triangleleft$

Quer dizer, mostramos que a inversa de um valor regular é sempre uma superfície. Em termos da introdução da Seção 6.2, mostramos que (b) $\subset$ (c). Mas mostramos mais: a prova da proposição anterior garante que toda superfície na forma (b) tem, localmente, a forma (a). Em palavras, a imagem inversa de valor regular é, localmente, o gráfico de uma aplicação. Vamos mostrar, mais geralmente, que toda superfície (isto é, toda superfície na forma (c)) é localmente o gráfico de uma aplicação.

Proposição 6.17 Toda superfície de classe C^k é, localmente, o gráfico de uma aplicação de classe C^k .

Demonstração: Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de classe C^k e dimensão m . Consideremos uma parametrização arbitrária $\psi : W \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \Omega_0 \subset S$ uma parametrização da vizinhança aberta W_0 do ponto $p \in S$, com $\psi(w) = p$. Vamos mostrar que existe uma parametrização φ definida num aberto do $\mathbb{R}^m$ tal que $\varphi(x) = (x, f(x))$ para uma certa aplicação f de classe C^k . Ou seja, que S é, localmente, dada como o gráfico da função f .

Temos que $T_p S = \psi'(w) \cdot \mathbb{R}^m$. Pelo Lema 5.14, existe uma decomposição $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ do espaço $\mathbb{R}^n$ tal que a primeira projeção $\Pi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo entre $T_p S$ e $\mathbb{R}^m$. Isso implica que $\Pi_1 \circ \psi'(w) = (\Pi_1 \circ \psi)'(w)$ é um isomorfismo. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, existe um aberto $W_1 \subset \mathbb{R}^m$, com $w \in W_1 \subset W$ tal que $\Pi_1 \circ \psi : W_1 \rightarrow W_2$ é um difeomorfismo entre os abertos W_1 e $W_2 = (\Pi_1 \circ \psi)(W_1)$. Note que $\psi(W_1) \subset \Omega_0 \subset S$. Seja $\Omega = \psi(W_1) \subset S$. Então Ω é uma vizinhança aberta de p (justifique!) e a aplicação $\varphi := \psi \circ [\Pi_1 \circ \psi]^{-1} : W_2 \rightarrow \Omega$ é uma parametrização C^k de Ω . Se $x \in W_2$, então $(\Pi_1 \circ \varphi)(x) = x$, pois $\Pi_1 \circ (\psi \circ [\Pi_1 \circ \psi]^{-1}) = (\Pi_1 \circ \psi) \circ (\Pi_1 \circ \psi)^{-1} = I_{W_2}$. Isso garante que $\varphi(x) = (x, f(x))$ para alguma aplicação $f(x)$ de classe C^k , o que completa a demonstração. $\square$

O mesmo argumento usado para provar que (a) $\subset$ (b) nos fornece então o seguinte

Corolário 6.18 *Toda superfície $S \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão m e classe C^k é localmente a inversa de um valor regular por uma aplicação de classe C^k .*

Voltando à introdução da Seção 6.2, mostramos que (a) $\subset$ (b) $\subset$ (c). A primeira inclusão é estrita: (b) $\not\subset$ (a). De fato, na classe (b) estão incluídas as superfícies compactas (como a esfera); como nenhum conjunto aberto não-vazio é compacto e o gráfico de uma função contínua é sempre homeomorfo ao seu domínio, vemos que as superfícies compactas não pertencem à classe (a). Em outro capítulo daremos uma caracterização das superfícies contidas na classe (b): elas são as superfícies orientáveis. Provaremos também a existência de superfícies não-orientáveis, o que implicará (c) $\not\subset$ (b).

6.5 EXERCÍCIOS

1. Mostre que a aplicação $\Psi : GL(\mathbb{R}^n) \rightarrow GL(\mathbb{R}^n)$ dada por $\Psi(U) = U^{-1}$ é de classe C^∞ .
2. Mostre que, no Teorema da Aplicação Inversa, que se o difeomorfismo $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow f(U)$ for de classe C^k , então $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ é uma aplicação de classe C^k .
3. Na Forma Local das Submersões, mostre que se a aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ for de classe C^k , então podemos tomar o difeomorfismo ϕ de classe C^k .
4. No Teorema da Aplicação Implícita, mostre que se $f : U \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ for de classe C^k , então podemos tomar ξ de classe C^k .
5. Na Forma Local das Imersões, mostre que se $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ for de classe C^k , então o difeomorfismo ζ pode ser tomado de classe C^k .
6. No Teorema do Posto, mostre que se $f : U \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^{m+p}$ for de classe C^k , então podemos tomar ambos os difeomorfismos ϕ e ζ também de classe C^k . (Note que esse exercício engloba os anteriores.)

7. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função três vezes diferenciável no ponto $u \in U$. Obtenha $f'''(u)$.
8. Considere a Regra da Cadeia $(g \circ f)'(u) = g'(f(u)) \cdot f'(u)$. Supondo que as funções envolvidas sejam duas vezes diferenciáveis, obtenha $(g \circ f)''(u)$. Solucione a questão justificando cuidadosamente as passagens utilizadas.
9. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ duas vezes diferenciável. Dado $h \in \mathbb{R}^n$, mostre que a aplicação $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $\varphi(u) = f'(u) \cdot h$ é diferenciável e calcule sua derivada.
10. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação duas vezes diferenciável tal que $f(tx) = t^2 f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e todo $t \in \mathbb{R}$. Mostre que $f(x)$ é uma aplicação quadrática, isto é, que existe uma aplicação bilinear $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $f(x) = B(x, x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Observação: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$ satisfaz $f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$ mas não é uma função quadrática. Justifique!
11. Uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^k que satisfaz $f(tx) = t^k f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e todo $t \in \mathbb{R}$ é chamada **k-homogênea**. Mostre que cada uma de suas derivadas $f^{(i)}$ é $(k-i)$ -homogênea, se $0 \leq i < k$ e que $f^{(k)}$ é constante. Mostre também que $f^{(i)}(x) = \frac{f^{(k)}(0)}{(k-i)!} x^{(k-i)}$, o que significa

$$f^{(i)}(x) \cdot (h_1, \dots, h_i) = \frac{1}{(k-i)!} f^{(k)}(0) \cdot (x, \dots, x, h_1, \dots, h_i),$$

em que do lado direito aparecem $k-1$ elementos iguais a x . Aplique o resultado para $f : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dada por $f(X) = X^k$ e conclua que

$$\|f^{(i)}(X)\| \leq \frac{k!}{(k-i)!} \|X\|^{k-i}.$$

12. Seja $A : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação p -linear. Defina $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ por $f(x) = \frac{1}{p!} A(x, \dots, x)$. Calcule as derivadas $f^{(j)}(x)$ para $j \in \mathbb{N}$.
13. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 . Suponha que $f(0) = f'(0) = 0$ e que exista $f''(0) = 0$. Mostre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\|x\|^2} = 0.$$

14. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^2 . Mostre que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{1}{2} f''(a) \cdot (h, h) + r(h), \quad \text{com} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|^2} = 0.$$

15. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Suponha que $\varphi : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ possui derivadas parciais $D_1^{(i)} \varphi(x, t)$ contínuas para $0 \leq i \leq k$. Mostre que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por

$$f(x) = \int_0^1 \varphi(x, t) dt$$

é de classe C^k .

16. Considere a bola $B = B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^n$, com $\delta > 0$. Considere $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^k ($k \geq 1$), com $f(0) = 0$.

(a) Mostre que existe $A : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ de classe C^{k-1} tal que $f(x) = A(x) \cdot x$, para todo $x \in B$.

(b) Defina $F : B \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^m$ por

$$F(x, t) = \frac{f(tx)}{t}.$$

Mostre que F é de classe C^{k-1} .

(c) Se, adicionalmente, $f'(0) = 0$, mostre que existe uma aplicação bilinear $M : B \rightarrow \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, de classe C^{k-2} , tal que $f(x) = M(x) \cdot (x, x)$ para todo $x \in B$. Conclua que $G : B \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $G(x) = f(tx)/t^2$ é de classe C^{k-2} .

17. Verdadeiro ou falso. Se verdadeiro, prove; se falso, dê um contra-exemplo.

(a) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ tal que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (incluindo 0). Se 0 não é zero isolado de f , então existe uma vizinhança $V \ni 0$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in V$;

(b) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável, com $\|f'(u) \cdot h\| \geq \|h\|$ para $u \in U$ e $h \in \mathbb{R}^n$ arbitrários. Então f é uma aplicação bijetora.

(c) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^1 , com $f'(0) \neq 0$. Então existe uma vizinhança $V \ni 0$ tal que $f|_V$ é injetora.

(d) Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto conexo. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $\partial f / \partial x = 0$ em U . Então $f(x_1, y) = f(x_2, y)$ para quaisquer pontos $(x_1, y), (x_2, y) \in U$.

(e) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $f' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é constante. Então f é uma aplicação afim.

18. Verifique que dizermos que um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é m -dimensional só faz sentido se pudermos garantir que uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \varphi(U) = \Omega$ é uma imersão.

19. **(Matrizes de Posto Constante)** Seja $\mathbb{M}_{m \times n}$ o espaço vetorial das matrizes reais $m \times n$ e $\mathbb{M}_{m \times n}[k]$ o subconjunto formado pelas matrizes de posto k . Mostre que $\mathbb{M}_{m \times n}[k]$ é uma superfície de classe C^∞ e dimensão $k(m + n - k)$ em $\mathbb{M}_{m \times n}$ (que pode ser identificado com $\mathbb{R}^{mn}$). Para isso, escreva uma matriz $X \in \mathbb{M}_{m \times n}$ na forma

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

em que A é uma submatriz $k \times k$, B é $k \times (n - k)$, C é $(m - k) \times k$ e D é $(m - k) \times (n - k)$ e defina $W = \{X \in \mathbb{M}_{m \times n} : \det A \neq 0\}$. Mostre então que

$$W \cap \mathbb{M}_{m \times n}[k] = \{X \in W : D = CA^{-1}B\}$$

examinando o produto

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

Parametrize então os elementos de $W \cap \mathbb{M}_{m \times n}[k]$ e verifique que cada elemento de $\mathbb{M}_{m \times n}[k]$ pode ser difeomorficamente levado para um elemento de $W \cap \mathbb{M}_{m \times n}[k]$.

20. **(O grupo linear geral e o grupo unimodular)** Identificando $\mathbb{M}_{n \times n}$ com $\mathbb{R}^{n^2}$, mostre que o conjunto

$$SL(\mathbb{R}^n) = \{X \in GL(\mathbb{R}^n) : \det X = 1\}$$

é uma superfície de dimensão $n^2 - 1$ e classe C^∞ em $\mathbb{R}^{n^2}$. Obtenha o espaço tangente a $SL(\mathbb{R}^n)$ em I . Verifique que $SL(\mathbb{R}^n)$ é um grupo.

21. **(O grupo ortogonal)** O grupo ortogonal $O(\mathbb{R}^n)$ é o subconjunto de $\mathbb{M}_{n \times n}$ formado por todas as matrizes (reais) tais que $XX^* = I$. Verifique que esse é um subgrupo de $GL(\mathbb{R}^n)$. Ele é formado pelas aplicações lineares $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que preservam distância. (Consulte, a esse respeito, um texto de Álgebra Linear.) Mostre que $O(\mathbb{R}^n)$ é uma superfície compacta de dimensão $n(n-1)/2$ e classe C^∞ em $\mathbb{R}^{n^2}$. Para isso, considere a aplicação $f(X) = XX^*$ e mostre que I é valor regular de f . Obtenha o espaço tangente a $O(\mathbb{R}^n)$ em I .

22. Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ um caminho contínuo numa superfície $S \subset \mathbb{R}^n$, de dimensão m e classe C^k , $k \geq 1$. Dada uma base ortonormal $\{w_1, \dots, w_m\}$ em $T_{\alpha(a)}S$, então existem aplicações contínuas $v_1, \dots, v_m : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que $\{v_1(t), \dots, v_m(t)\}$ é uma base ortogonal de $T_{\alpha(t)}S$ e $v_i(a) = w_i$, para $i = 1, \dots, m$.

23. Uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ do espaço $\mathbb{R}^n$ é **positiva** se $\det(v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) > 0$, em que v_i é interpretado como vetor coluna.

Sejam $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_n\}$ bases ortonormais positivas. Mostre que existem m aplicações contínuas $\alpha_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que $\alpha_i(0) = v_i$, $\alpha_i(1) = w_i$ e $\{\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\}$ é uma base ortonormal positiva para todo $t \in (0, 1)$.

24. Mostre que $O(\mathbb{R}^n)$ tem duas componentes conexas.

25. Sejam $S \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de dimensão m e classe C^k e $p \in S$ um ponto arbitrário. Seja $f : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma função diferenciável no ponto p . Considere $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ tal que $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v \in T_p S$. Mostre que $Df(p) \cdot v = (f \circ \lambda)'(0)$.

26. Sejam $\varphi : U \subset \mathbb{R}^\ell$ e $\psi : V \subset \mathbb{R}^m$ parametrizações de vizinhanças abertas de $p \in S_1$ e $q \in S_2$. Considere uma aplicação $f : S_1 \rightarrow S_2$, com $f(p) = q$. Mostre que f é diferenciável no ponto p se, e somente se, a aplicação $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \rightarrow V$ for diferenciável no ponto $\varphi^{-1}(p)$.

27. Enuncie e demonstre a Regra da Cadeia para aplicações definidas em superfícies.

28. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k e $a \in \mathbb{R}$ um valor regular de f . Considere a superfície $S = f^{-1}(a)$ e $u \in S$. Mostre que $\nabla f(u)$ é um vetor perpendicular ao espaço tangente $T_u S$. Considere $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e $S = f^{-1}(1)$. Calcule a equação do plano tangente $T_p S$ no ponto $p \in S$.

Capítulo 7

A FÓRMULA DE TAYLOR

7.1 O TEOREMA DE SCHWARZ

Teorema 7.1 (Teorema de Schwarz)

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação duas vezes diferenciável no ponto $u_0 \in U$. Então a aplicação bilinear $(h, k) \mapsto D^2f(u_0) \cdot (h, k)$ é simétrica:

$$D^2f(u_0) \cdot (h, k) = D^2f(u_0) \cdot (k, h).$$

Demonstração: Consideremos a função $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$g(\xi) = f(x_0 + \xi h + k) - f(x_0 + \xi h).$$

Tome $r > 0$, tal que $B_r(x_0) \subset U$, e $h, k \in \mathbb{R}^n$, com $\|h\|, \|k\| \leq r/2$. Do Corolário 3.9 segue-se que

$$\|g(1) - g(0) - g'(0)\| \leq \sup_{0 < \xi < 1} \|g'(\xi) - g'(0)\|.$$

Mas

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= \{f'(x_0 + \xi h + k) - f'(x_0 + \xi h)\} \cdot h \\ &= \{[f'(x_0 + \xi h + k) - f'(x_0)] - [f'(x_0 + \xi h) - f'(x_0)]\} \cdot h. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Por hipótese, dado $\epsilon > 0$, existe $0 < r' < r$ tal que, para $\|h\| < r'/2$ e $\|k\| < r'/2$, vale

$$\|f'(x_0 + \xi h + k) - f'(x_0) - f''(x_0) \cdot (\xi h + k)\| \leq \epsilon(\|\xi h + k\|) \leq \epsilon(\|h\| + \|k\|)$$

e

$$\|f'(x_0 + \xi h) - f'(x_0) - f''(x_0) \cdot \xi h\| \leq \epsilon\|h\|.$$

Uma vez que $-f''(x_0) \cdot k = -f''(x_0) \cdot (\xi h + k) + f''(x_0) \cdot \xi h$, decorre de (7.1) que, para todo $\xi \in [0, 1]$, vale

$$\|g'(\xi) - (f''(x_0) \cdot k) \cdot h\| \leq 2\epsilon(\|h\| + \|k\|)\|h\|.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|g(1) - g(0) - (f''(x_0) \cdot k) \cdot h\| &\leq \|g(1) - g(0) - g'(0)\| + \|g'(0) - (f''(x_0) \cdot k) \cdot h\| \\
&\leq \sup_{0 < \xi < 1} \|g'(\xi) - g'(0)\| + \|g'(0) - (f''(x_0) \cdot k) \cdot h\| \\
&\leq \sup_{0 < \xi < 1} \{ \|g'(\xi) - (f''(x_0) \cdot k) \cdot h\| + \|(f''(x_0) \cdot k) \cdot h - g'(0)\| \} \\
&\quad + \|g'(0) - (f''(x_0) \cdot k) \cdot h\| \\
&\leq 6\epsilon(\|h\| + \|k\|)\|h\|.
\end{aligned}$$

Mas

$$g(1) - g(0) = [f(x_0 + h + k) - f(x_0)] - [f(x_0 + k) - f(x_0)]$$

é simétrica com relação a h e k , de modo que estimativa semelhante é válida ao se trocar h por k :

$$\|g(1) - g(0) - (f''(x_0) \cdot h) \cdot k\| \leq 6\epsilon(\|h\| + \|k\|)\|k\|.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|(f''(x_0) \cdot k) \cdot h - (f''(x_0) \cdot h) \cdot k\| &\leq \|(f''(x_0) \cdot k) \cdot h - g(1) + g(0)\| + \|g(1) - g(0) - (f''(x_0) \cdot h) \cdot k\| \\
&\leq 6\epsilon(\|h\| + \|k\|)\|h\| + 6\epsilon(\|h\| + \|k\|)\|k\| \\
&= 6\epsilon(\|h\| + \|k\|)^2.
\end{aligned}$$

Essa última desigualdade vale quando $\|h\|, \|k\| \leq r'/2$. Entretanto, se substituirmos h e k por λh e λk (com $\lambda \in \mathbb{R}$), ambos os lados ficarão multiplicados por λ^2 , o que garante que o resultado é válido para quaisquer $h, k \in X$. Em particular, vale quando $\|h\| = 1 = \|k\|$. Logo,

$$\|(f''(x_0) \cdot k) \cdot h - (f''(x_0) \cdot h) \cdot k\| \leq 24\epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, o resultado decorre daí. $\square$

Corolário 7.2 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^k , com $k \geq 2$. Então $Df^{(k)}(u) \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é uma aplicação k -linear simétrica.*

A demonstração desse resultado é simples, porém difícil de ser formalizada. Ao invés de prová-lo em sua generalidade, vamos apenas mostrar, por exemplo, que a terceira derivada de uma aplicação C^3 é simétrica.

Consideremos, portanto, $f'''(u) \cdot (h, k, \ell)$. Queremos mostrar que podemos alterar, arbitrariamente, a ordem dos vetores h, k e ℓ . Por exemplo,

$$f'''(u) \cdot (h, k, \ell) = [f'''(u) \cdot h] \cdot (k, \ell) = [f'''(u) \cdot h] \cdot (\ell, k) = f'''(u) \cdot (h, \ell, k).$$

(Nesses cálculos, aplicamos o Teorema de Schwarz: a aplicação bilinear $f'''(u) \cdot h$ é simétrica, de forma que $[f'''(u) \cdot h] \cdot (k, \ell) = [f'''(u) \cdot h] \cdot (\ell, k)$.)

Mas

$$f'''(u) \cdot (h, \ell, k) = [f'''(u) \cdot (h, \ell)] \cdot k = [f'''(u) \cdot (\ell, k)] \cdot k = f'''(u) \cdot (\ell, h, k).$$

(Aqui estamos usando que $f'''(u)$ é uma aplicação bilinear simétrica cujo valor no vetor $(w, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear.)

Procedendo dessa maneira, conseguimos obter qualquer permutação do vetor $(h, k, \ell) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Corolário 7.3 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^k , com $k \geq 2$. As derivadas parciais mistas de ordem α , $2 \leq \alpha \leq k$,*

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\alpha}}, \quad \text{com } 1 \leq i_j \leq n \text{ e } 1 \leq j \leq \alpha$$

independem da ordem da derivação.

Quer dizer, em particular, se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ for de classe C^2 , então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \text{para quaisquer } 1 \leq i, j \leq n.$$

Do mesmo modo, se f for de classe C^3 ,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1^2}.$$

A demonstração do resultado é imediata, pois

$$f^{(\alpha)}(u)(e_{i_1}, \dots, e_{i_\alpha}) = \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_{i_\alpha} \dots \partial x_{i_1}}.$$

7.2 A FÓRMULA DE TAYLOR COM RESTO INFINITESIMAL

Dado um vetor $h \in \mathbb{R}^n$, escreveremos

$$h^j = (h, h, \dots, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \quad (j\text{-vezes}).$$

Apresentaremos diferentes versões da Fórmula de Taylor. A primeira delas é aquela que generaliza a derivada como a aproximação linear que melhor aproxima a função: ao invés de considerarmos uma aplicação linear, tomamos um polinômio (em n variáveis) de grau s .

Essa versão da Fórmula de Taylor baseia-se no seguinte resultado:

Lema 7.4 *Suponhamos que $\xi : B_r(0) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ seja s vezes diferenciável e $s + 1$ vezes diferenciável no ponto 0, com $\xi^{(j)}(0) = 0$ para $j = 0, \dots, s + 1$. Então vale*

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\xi(u)}{\|u\|^{s+1}} = 0.$$

Demonstração: Para $s = 0$ o resultado decorre da definição de aplicação diferenciável. Suponhamos o resultado válido para $s = k$ e consideremos $k + 1 = s + 1$. A hipótese de indução aplicada a $\tilde{\zeta}'$ garante que, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $\|y\| < \delta$ implica $\|\tilde{\zeta}'(y)\| \leq \epsilon \|y\|^k$.

Por outro lado, a Desigualdade do Valor Médio garante que

$$\|\tilde{\zeta}(u)\| \leq M\|u\|, \quad \text{em que } M = \sup\{\|r'(y)\| : y \in [0, u] \subset B_r(0)\}.$$

Como $\|y\| \leq \|u\|$, temos que $M \leq \epsilon \|u\|^k$, de onde segue-se que $\|r(u)\| \leq \epsilon \|u\|^{k+1}$, o que prova o lema. $\square$

Teorema 7.5 (Fórmula de Taylor com Resto Infinitesimal)

Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ for s vezes diferenciável no aberto U e se no ponto $a \in U$ existir a derivada $f^{(s+1)}(a)$, então

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{1}{2!} f''(a) \cdot h^2 + \dots + \frac{1}{(s+1)!} f^{(s+1)}(a) \cdot h^{s+1} + r(h),$$

em que $r(h)$ satisfaz

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|^{s+1}} = 0.$$

Demonstração: Para $r > 0$ suficientemente pequeno, a aplicação $r : B_r(0) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida por

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h - \frac{1}{2!} f''(a) \cdot h^2 - \dots - \frac{1}{(s+1)!} f^{(s+1)}(a) \cdot h^{s+1},$$

é s vezes diferenciável em $B_r(0)$. De fato, $f(a+h)$ é s vezes diferenciável (na variável h) em $B_r(0)$, enquanto as outras parcelas na definição de r são infinitamente diferenciáveis na variável h .

Não é difícil verificar que

$$\begin{aligned} r'(h) &= f'(a+h) - f'(a) - f''(a) \cdot h - \dots - \frac{1}{s!} f^{(s+1)}(a) \cdot h^s \\ r''(h) &= f''(a+h) - f''(a) - f'''(a) \cdot h - \dots - \frac{1}{(s-1)!} f^{(s+1)}(a) \cdot h^{s-1} \\ &\vdots \\ r^{(s)}(h) &= f^{(s)}(a+h) - f^{(s)}(a) - f^{(s+1)}(a) \cdot h. \end{aligned}$$

Em particular, obtemos que $r(0) = r'(0) = \dots = r^{(s)}(0) = 0$. Daí também decorre que

$$\frac{r^{(s)}(h) - r^{(s)}(0) - 0 \cdot h}{\|h\|} = \frac{f^{(s)}(a+h) - f^{(s)}(a) - f^{(s+1)}(a) \cdot h}{\|h\|} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } h \rightarrow 0,$$

mostrando que r é $(s+1)$ vezes diferenciável no ponto $h = 0$, com $r^{(s+1)}(0) = 0$. O resultado decorre, então, do Lema 7.4. $\square$

Observação 7.6 Podemos colocar o resultado mostrado nos seguintes termos: se temos uma aplicação s vezes diferenciável, a existência de $f^{(s+1)}(a)$ garante a existência de um polinômio de grau $s + 1$ que aproxima s numa vizinhança de a , com $r_a(h)/\|h\|^{s+1}$ tendendo a zero quando h tende a zero, em que $r_a(h)$ denota o resto nessa aproximação polinomial.

Em particular, no caso em que $s = 0$, temos a definição básica de nosso curso: se f for diferenciável no ponto a , então existe um polinômio de grau 1 (o polinômio $f(a) + f'(a) \cdot h$) que é uma boa aproximação linear para f . Nesse caso, temos uma recíproca: a existência de uma boa aproximação linear para f numa vizinhança do ponto a garante – por definição – que f é derivável no ponto a .

Podemos nos perguntar se esse resultado continua válido para $s > 0$. Mais precisamente, a existência de uma aproximação polinomial de grau $s + 1$ numa vizinhança do ponto a , com $r_a(h)/\|h\|^{s+1}$ tendendo a zero quando $h \rightarrow 0$, garante a existência de $f^{(s+1)}(a)$?

A resposta para essa pergunta é negativa, mesmo no caso $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. De fato, considere a função definida por $f(x) = x^3 \sin(1/x)$, se $x \neq 0$, e $f(0) = 0$. Para cada ponto $x \in \mathbb{R}$ existe um polinômio em h , $p_x(h)$, de grau menor do que ou igual a 2, tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|r_x(h)|}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - p_x(h)|}{h^2} = 0.$$

De fato, como $f|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ é uma aplicação de classe C^2 , esse polinômio é dado, quando $x \neq 0$, pela Fórmula de Taylor usual, apresentada nos cursos de Cálculo. No caso $x = 0$, basta tomarmos $p_0(h) \equiv 0$. Nesse caso, vale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|r_0(h)|}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(0+h) - f(0) - p_0(h)|}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin\left(\frac{1}{h^3}\right) = 0.$$

Consequentemente, f pode ser aproximada, na vizinhança de todo $x \in \mathbb{R}$ por um polinômio de grau menor do que ou igual a 2, com resto $r_x(h)$ tal que $r_x(h)/h^2 \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$. No entanto, é fácil verificar que $f''(0)$ não existe. $\triangleleft$

O Exercício 1 pede que se mostre um resultado de unicidade para a expansão polinomial que melhor aproxima f na vizinhança de um ponto.

Observação 7.7 Uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida no aberto U é **analítica** em U , se $f \in C^\infty$ e, para cada $u \in U$, existir $\delta > 0$ tal que $\|h\| < \delta$ implica $u + h \in U$ e

$$f(u+h) = f(u) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(u) \cdot h^j.$$

Em palavras, quando a *série de Taylor* de f (isto é, o lado direito da igualdade anterior) convergir, numa vizinhança $B_\delta(u)$ de cada ponto $u \in U$, para o valor da aplicação $f(u+h)$, com $h \in B_\delta(u)$.

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-1/x^2}$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ é o exemplo clássico de uma função C^∞ que não é analítica.

Com efeito, se $x \neq 0$, então $f'(x) = 2x^{-3}e^{-1/x^2}$ e $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$. Pelo Corolário 3.12, $f'(0)$ existe e é igual a 0. Aplicando o mesmo procedimento para as derivadas sucessivas

$f^{(k)}(x)$ (para $x \neq 0$), obtemos que elas têm a forma $f^{(k)}(x) = P(1/x)e^{-1/x^2}$ para $k \geq 1$, em que P é um polinômio em $1/x$. Como $\lim_{x \rightarrow 0} P(1/x)e^{-1/x^2} = 0$ para qualquer polinômio P , o Corolário 3.12 garante que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo k . Isso prova que $f \in C^\infty$.

Contudo, f não é analítica, pois a sua expansão em série de Taylor no ponto $x = 0$ é identicamente nula, já que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e, por outro lado, $f(x) = e^{-1/x^2} \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\triangleleft$

7.3 A FÓRMULA DE TAYLOR COM RESTO INTEGRAL

Para a demonstração do próximo resultado, faremos uso do Teorema Fundamental do Cálculo para caminhos: seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 . Então vale:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

Teorema 7.8 (Fórmula de Taylor com Resto Integral)

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^{s+1} , com $s \in \mathbb{N}$. Se o segmento de reta $[u, u+h]$ estiver contido em U , então

$$f(u+h) = f(u) + f'(u) \cdot h + \frac{1}{2} f''(u) \cdot h^2 + \dots + \frac{1}{s!} f^{(s)}(u) \cdot h^s + r(h),$$

em que

$$r(h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^s}{s!} f^{(s+1)}(u+th) \cdot h^{s+1} dt.$$

Demonstração: Consideremos um caminho arbitrário $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^{s+1} . Como sabemos, as derivadas $\varphi^{(j)}(t)$ são naturalmente identificadas com vetores do $\mathbb{R}^m$.

Definimos então o caminho $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ por

$$p(t) = \varphi(t) + (1-t)\varphi'(t) + \dots + \frac{(1-t)^s}{s!} \varphi^{(s)}(t).$$

É imediato que p é um caminho de classe C^1 . Derivando, obtemos

$$p'(t) = \frac{(1-t)^s}{s!} \varphi^{(s+1)}(t),$$

como podemos verificar facilmente. Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo ao caminho p , obtemos

$$\varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(0) - \dots - \frac{1}{s!} \varphi^{(s)}(0) = \int_0^1 \frac{(1-t)^s}{s!} \varphi^{(s+1)}(t) dt.$$

Para obtemos o resultado, basta então considerarmos o caminho $\varphi(t) = f(u+th)$, com h suficientemente pequeno para que tenhamos $[u, u+h] \subset U$. $\square$

Comparando as expressões da Fórmula de Taylor com Resto Infinitesimal e com Resto Integral, vemos que a última é muito mais precisa, pois ela nos dá exatamente o valor de $r(h)$. Em compensação, para aplicá-la, necessitamos que a aplicação f possua $s + 1$ derivadas contínuas no intervalo $[u, u + h] \subset U$, uma exigência que estende aquela descrita no enunciado dado.

Observação 7.9 A Fórmula de Taylor com Resto Integral pode ser entendida como uma generalização do Teorema Fundamental do Cálculo.

7.4 A FÓRMULA DE TAYLOR COM RESTO DE LAGRANGE

A terceira expressão para a Fórmula de Taylor, que deduziremos como uma consequência daquela com resto integral, pode ser vista como uma generalização da Desigualdade do Valor Médio:

Teorema 7.10 (Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange)

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^{s+1} , com $s \in \mathbb{N}$. Se o segmento de reta $[u, u + h]$ estiver contido em U e se $\|f^{(s+1)}(x)\| \leq M$ para todo $x \in [u, u + h]$, então

$$f(u + h) = f(u) + f'(u) \cdot h + \dots + \frac{1}{s!} f^{(s)}(u) \cdot h^{(s)} + r(h),$$

em que

$$\|r(h)\| \leq \frac{M}{(s+1)!} \|h\|^{s+1}.$$

Demonstração: Aplicando a Fórmula de Taylor com Resto Integral, obtemos

$$r(h) = \frac{M}{s!} \|h\|^{s+1} \int_0^1 (1-t)^s dt = \frac{M}{(s+1)!} \|h\|^{s+1}.$$

□

Observação 7.11 A Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange vale em condições mais gerais do que aquelas estabelecidas no teorema anterior: basta que f seja $s + 1$ vezes diferenciável em U . ◁

Proposição 7.12 Sob as mesmas hipóteses do Teorema 7.10, vale

$$f(u + h) = f(u) + f'(u) \cdot h + \dots + \frac{1}{s!} f^{(s)}(u) \cdot h^s + R(h),$$

em que

$$R(h) \leq \left[\sup_{0 \leq t \leq 1} \|f^{(s+1)}(u + th) - f^{(s+1)}(u)\| \right] \frac{\|h\|^{s+1}}{(s+1)!}.$$

Demonstração: Considerando $R(h) = r(h) - \frac{1}{(s+1)!} f^{(s+1)}(u) \cdot h^{s+1}$, uma vez que

$$\frac{1}{(s+1)!} = \int_0^1 \frac{(1-t)^s}{s!} dt,$$

decorre da Fórmula de Taylor com Resto Integral que

$$R(h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^s}{s!} \left[f^{(s+1)}(u+th) - f^{(s+1)}(u) \right] \cdot h^{s+1} dt,$$

e daí segue-se imediatamente o resultado. $\square$

Resultado análogo é obtido substituindo-se $f^{(s+1)}(u)$ por qualquer aplicação $(s+1)$ -linear T , como na Proposição 3.9.

7.5 MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES REAIS

Definição 7.13 Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ possui um **máximo local** no ponto $u_0 \in U$ se existir uma bola aberta $B_\delta(u_0)$ tal que $f(u) \leq f(u_0)$ para todo $u \in B_\delta(u_0)$. Quando $f(u) < f(u_0)$ para todo $u \in B_\delta(u_0)$, dizemos que u_0 é um **máximo local estrito**.

Invertendo as desigualdades anteriores, definimos um ponto de **mínimo local** e **mínimo local estrito**.

Um ponto u_0 é um ponto de **máximo absoluto** se $f(u) \leq f(u_0)$ para todo $u \in U$. Com a desigualdade invertida, temos um **mínimo absoluto**. Analogamente, definimos **máximo absoluto estrito** e **mínimo absoluto estrito**.

Se f for diferenciável num ponto de máximo (ou mínimo) $u_0 \in U$, então $f'(u_0) = 0$. Com efeito, suponhamos que $f(u_0)$ seja um ponto de máximo local. Então existe $\delta > 0$ tal que $f(u_0) \geq f(u)$ para todo $u \in B_\delta(u_0)$. Consideramos então a função diferenciável $\varphi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = f(u_0 + th)$, em que $h \in \mathbb{R}^n$ satisfaz $\|h\| < \delta$. É claro que u_0 é ponto de máximo de f se, e somente se, 0 for ponto de máximo de φ . Mas, como sabemos, se 0 for ponto de máximo de φ , então $\varphi'(0) = 0$.¹ Como $\varphi'(0) = f'(u_0) \cdot h$ e h foi escolhido arbitrariamente em $B_\delta(0)$, concluímos que $f'(u_0) = 0$. O mesmo procedimento é válido quando u_0 for um ponto de mínimo.

Exemplo 1 Pontos críticos não são, necessariamente, pontos de máximo ou mínimo. Por exemplo, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 - y^2$ tem a origem como único ponto crítico. Mas $(0, 0)$ não é nem um ponto de máximo nem de mínimo, pois f assume valores positivos e negativos em qualquer vizinhança da origem. $\triangleleft$

¹A demonstração do caso real não é difícil: considerando o quociente

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$$

o fato de 0 ser ponto de máximo garante que o numerador é não-positivo. Se considerarmos $t > 0$, o quociente é não-positivo. Assim, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \leq 0$; se tomarmos $t < 0$, o quociente passa a ser não-negativo e $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \geq 0$. Concluímos daí que $\varphi'(0) = 0$.

Tal qual no estudo de cálculo a uma variável, a análise dos pontos críticos u de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é feita por meio do estudo da Fórmula de Taylor da função f .

Começamos com o caso de $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Nesse caso, a Fórmula de Taylor no ponto $u_0 \in U$ nos dá

$$f(u_0 + h) = f(u_0) + f'(u_0) \cdot h + \frac{1}{2} D^2 f(u_0) \cdot h^2 + r(h), \quad \text{em que} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|^2} = 0.$$

Se u_0 for um ponto crítico de f , então $f'(u_0) = 0$; procedendo formalmente, uma vez que $r(h)$ deve ser bem pequeno se h for suficientemente pequeno, é natural esperar que

$$f(u_0 + h) - f(u_0) \approx \frac{1}{2} D^2 f(u_0) \cdot h^2.$$

Conseqüentemente, se $D^2 f(u_0) \cdot h^2 > 0$ para todo h suficientemente pequeno, teremos que $f(u_0 + h) - f(u_0) > 0$, o que implica que u_0 é um ponto de mínimo local. Por outro lado, se $D^2 f(u_0) \cdot h^2 < 0$ para todo h suficientemente pequeno, o mesmo raciocínio nos mostra que u_0 é um ponto de máximo local. Finalmente, se $D^2 f(u_0) \cdot h^2$ assumir tanto valores positivos quanto negativos para h suficientemente pequeno, então u_0 não será nem ponto de máximo, nem ponto de mínimo de f , pois teremos $f(u_0 + h) > f(u_0)$ para alguns valores de h e $f(u_0 + h) < f(u_0)$ para outros valores de h . Mostramos assim o relacionamento de $D^2 f(u_0)$ com os pontos de máximo e mínimo de f .

Quer dizer, somos levados a analisar a derivada $D^2 f(u_0)$, que é uma aplicação bilinear simétrica definida em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e tomando valores em $\mathbb{R}$. Como sabemos da Álgebra Linear, a toda aplicação bilinear $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ está associada uma matriz, que representa essa aplicação bilinear. No caso de $D^2 f(u_0)$, essa matriz é chamada **hessiana** da função f , denotada $H(u_0)$ e caracterizada pela relação

$$D^2 f(u_0) \cdot (h, k) = h^t H(u_0) k.$$

Para obtermos $H(u_0)$ basta aplicarmos $D^2 f(u_0)$ nos pares de vetores (e_i, e_j) , $\{e_1, \dots, e_n\}$ sendo a base canônica do $\mathbb{R}^n$. Se $H(u_0) = (H_{ij})$, então as entradas H_{ij} da matriz $H(u_0)$ são dadas por

$$H_{ij} = D^2 f(u_0)(e_i, e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(u_0).$$

Assim,

$$H(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(u_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(u_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(u_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(u_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(u_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(u_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(u_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(u_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(u_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(u_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(u_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(u_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(u_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(u_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(u_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(u_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(u_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(u_0) \end{pmatrix}.$$

Como vimos, para verificarmos que um ponto crítico $u_0 \in U$ de uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 é um ponto de máximo ou mínimo, somos levados ao estudo de $D^2 f(u_0) \cdot h^2 =$

$h^t H(u) h$. Em outras palavras, se $H(u) = (H_{ij})$, estamos estudando a expressão

$$\sum_{i,j=1}^n H_{ij} h_i h_j,$$

chamada **forma quadrática** associada à matriz simétrica $H(u) = (H_{ij})$. É usual denotar $q(h) = H_{ij} h_i h_j$. Note que $q(th) = (th)^t H(u) (th) = t^2 [h^t H(u) h] = t^2 q(h)$. Temos:

Teorema 7.14 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e $H(u_0)$ a matriz hessiana de f no ponto crítico $u_0 \in U$. Seja $q(h) = h^t H(u_0) h$ a forma quadrática associada à $H(u_0)$. Então vale:*

- (i) *se a forma quadrática q for **positiva definida** (isto é, $q(h) > 0$ para todo $h \neq 0$), então u_0 é um ponto de mínimo local estrito;*
- (ii) *se a forma quadrática q for **negativa definida** (isto é, $q(h) < 0$ para todo $h \neq 0$), então u_0 é um ponto de máximo local estrito;*
- (iii) *se a forma quadrática q for **indefinida** (isto é, se existirem pontos h_1 e h_2 tais que $q(h_1) < 0$ e $q(h_2) > 0$), então u_0 não é ponto de máximo ou mínimo;*
- (iv) *se a forma quadrática $q(h)$ for **positiva semidefinida** (isto é, $q(h) \geq 0$ para todo $h \neq 0$) ou **negativa semidefinida** (isto é, $q(h) \leq 0$ para todo $h \neq 0$), então não podemos afirmar que u_0 é um ponto de máximo (respectivamente, um ponto de mínimo);*

Reciprocamente, temos

- (v) *se u_0 for um ponto de mínimo de f , então a forma quadrática $q(h)$ é positiva semidefinida;*
- (vi) *se u_0 for um ponto de máximo de f , então a forma quadrática $q(h)$ é negativa semidefinida.*

Demonstração: (i) Consideremos o conjunto compacto $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$. A forma quadrática $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ assume um valor mínimo, que denotaremos $2c$, no compacto S^{n-1} . Como q é positiva definida, temos $c > 0$. Em outras palavras, temos que $q(h) = h^t H(u_0) h > 2c$ para todo $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|h\| = 1$. Analisando a fórmula de Taylor de f no ponto u_0 , temos, para todo $h \in \mathbb{R}^n$,

$$f(u_0 + h) - f(u_0) = \frac{1}{2} q(h) + \rho(h) \|h\|^2, \quad \text{com } \lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0.$$

Como $h / \|h\| \in S^{n-1}$, temos

$$\frac{1}{2} q(h) = \frac{\|h\|^2}{2} q\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \geq \frac{\|h\|^2}{2} 2c = \|h\|^2 c.$$

Assim, para todo $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$ temos

$$f(u_0 + h) - f(u_0) \geq \|h\|^2 (c + \rho(h)).$$

Tome $\delta > 0$ tal que $\|h\| < \delta$ implica $\|\rho(h)\| < c$. Assim, $\|h\| < \delta$ implica $f(u_0 + h) - f(u_0) > 0$, o que garante que u_0 é um mínimo local.

A demonstração de (ii) é similar à de (i).

Uma vez que $q(th) = t^2q(h)$, a fórmula de Taylor nos garante que

$$f(u_0 + th) - f(u_0) = t^2\|h\|^2 \left[q\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + \rho(th) \right], \quad \text{com } \lim_{t \rightarrow 0} \rho(th) = 0.$$

Como antes, dessa expressão concluímos que, para t suficientemente pequeno, $f(u_0 + th) - f(u_0)$ tem o mesmo sinal que $q(h/\|h\|)$. Se supusermos que q é indefinida, em toda bola $B_\delta(u_0)$ existem pontos $u_0 + tv$ e $u_0 + tw$ tais que $q(v/\|v\|) > 0$ e $q(w/\|w\|) < 0$. Isso implica que $f(u_0 + tv) > f(u_0)$ e $f(u_0 + tw) < f(u_0)$, o que prova (iii).

A prova de (v) decorre daí imediatamente: suponhamos que $q(h) < 0$ para $h \in \mathbb{R}^n$. Obtemos então, como antes, $f(u_0 + h) - f(u_0) < 0$ para h suficientemente pequeno, o que contradiz u_0 ser um ponto de mínimo.

A demonstração de (vi) é análoga.

Para verificarmos (iv), basta exibirmos uma forma quadrática positiva semidefinida e um ponto crítico que não é mínimo local ou máximo local. Assim, consideremos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^3$. A origem é um ponto crítico de f (pois $\nabla f(x, y) = (2x \ 3y^2)^t$) e a matriz hessiana $H(0, 0)$ é dada por

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daí deduzimos imediatamente que $q(h) = 2h_1^2$. Logo, $q(h) \geq 0$ para todo $h \neq 0$. Note que $(0, 0)$ não é um mínimo local para f , pois $f(0, y)$ assume tanto valores positivos quanto negativos numa vizinhança de $y = 0$. Análise semelhante é feita para $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = -(x^2 + y^3)$. Nesse caso, a forma quadrática é negativa semidefinida na origem (que é um ponto crítico), mas $(0, 0)$ não é um ponto de máximo. $\square$

O Teorema 7.14 transforma a análise do ponto crítico u_0 na análise da matriz hessiana $H(u_0)$. Existem diversas maneiras para determinar se a forma quadrática $q(h) = h^t H(u_0) h$ é positiva definida ou negativa definida. Relembramos alguns resultados da Álgebra Linear.

- (a) Se os autovalores de $H(u)$ forem todos positivos, então $q(h)$ é positiva definida; se forem todos negativos, $q(h)$ é negativa definida; se forem todos não-negativos, $q(h)$ é positiva semidefinida; se forem todos não-positivos, $q(h)$ é negativa semidefinida; se existirem autovalores com sinal contrário, $q(h)$ é indefinida.²
- (b) Se, na "diagonalização" da forma quadrática $q(h)$ (isto é, com uma mudança de coordenadas linear $v = Th$ de modo a escrever $q(v) = a_1 v_1^2 + \dots + a_n v_n^2$) tivermos todos os coeficientes a_i positivos, então $q(h)$ é positiva definida; se tivermos todos a_i negativos,

²Como $H(u_0)$ é simétrica, essa matriz é ortogonalmente diagonalizável. Isso implica que, numa base ortogonal, q terá a forma $q(v) = \lambda_1 v_1^2 + \dots + \lambda_n v_n^2$.

$q(h)$ é negativa definida; se os a_i forem todos não-negativos, então $q(h)$ é positiva semi-definida; se os a_i forem todos não-positivos, $q(h)$ é negativa semidefinida; se existirem a_i e a_j com sinal contrário, $q(h)$ é indefinida.³

(c) Se os determinantes menores principais forem todos positivos, então $q(h)$ é positiva definida; se forem todos não-negativos, $q(h)$ é positiva semidefinida. Se os menores de ordem ímpar forem negativos (respectivamente, não-negativos) e os de ordem par forem positivos (respectivamente, não-positivos), $q(h)$ é negativa definida (respectivamente, negativa semidefinida); nos demais casos, $q(h)$ é indefinida.

(d) Na Decomposição de Cholesky, se todos os elementos da matriz diagonal forem positivos, $q(h)$ é positiva definida; se forem negativos, $q(h)$ é negativa definida etc.

Exemplo 2 Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^3 - y^3 + 9xy$. Uma vez que

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 9y & -3y^2 + 9x \end{pmatrix}^t,$$

vemos que $\nabla f(x, y) = (0 \ 0)^t$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} 3x^2 + 9y &= 0, \\ -3x^2 + 9x &= 0. \end{aligned}$$

Como a primeira equação garante que $y = -x^2/3$, levando na segunda equação e simplificando, obtemos $27x - x^4 = 0$, cujas soluções são $x = 0$ e $x = 3$. Assim, os pontos críticos de f são $(0, 0)$ e $(3, -3)$.

Para analisarmos esses pontos críticos, consideramos a matriz hessiana de f :

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 9 \\ 9 & -6y \end{pmatrix}.$$

No ponto crítico $(0, 0)$, temos

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow q(h) = 18h_1h_2.$$

Claramente q é uma forma indefinida, pois assume tanto valores positivos quanto negativos. Assim, $(0, 0)$ não é ponto de máximo ou mínimo.

No ponto crítico $(3, -3)$, temos

$$H(3, -3) = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ 9 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow q(h) = 18h_1^2 + 18h_1h_2 + 18h_2^2.$$

Para analisarmos o sinal da forma quadrática $q(h)$, usaremos o método de Lagrange, que consiste, em última instância, em completar quadrados:

$$q(h) = 18[h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2] = 18 \left[\left(h_1 + \frac{h_2}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}h_2^2 \right].$$

³Esse resultado decorre do processo de "diagonalização" de Lagrange e da Lei da Inércia. Os coeficientes a_i obtidos não são, necessariamente, autovalores da matriz $H(u_0)$.

Dessa expressão deduzimos imediatamente que $q(h) > 0$ para todo $h \neq 0$. Isso quer dizer que $(3, -3)$ é um ponto de mínimo local estrito.

É fácil verificar que $(3, -3)$ não é um ponto de mínimo absoluto. $\triangleleft$

Observação 7.15 Existem funções analíticas $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que possuem um único ponto crítico, o qual é um mínimo local, mas não possuem ponto de mínimo global. (EXEMPLO DO Moacir, citado por Humberto na p. 405-408)

Em certas condições, entretanto, podemos determinar se um ponto de mínimo local é um ponto de mínimo absoluto.

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. A função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é **convexa** se, para quaisquer $u, v \in U$, tivermos

$$f((1-t)u + tv) \leq (1-t)f(u) + tf(v).$$

Pode-se mostrar que, se f for C^2 , então f é convexa se, e somente se, sua forma quadrática $q(h) = h^t H(u) h$ for não-negativa em todos os pontos de U . Esse resultado implica que todo ponto de mínimo de uma função convexa de classe C^2 é um ponto de mínimo absoluto. Veja, a esse respeito, [12]. $\triangleleft$

Definição 7.16 Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^2 . Um ponto crítico u_0 de f é **não-degenerado**, se a matriz hessiana $H(u_0)$ for invertível.

Um importante resultado a respeito de pontos críticos não-degenerados é o Lema de Morse, que estabelece a existência de um sistema de coordenadas numa vizinhança de um ponto crítico não-degenerado tal que, nessa vizinhança, f se exprime como uma forma quadrática com coeficientes constantes: $f(y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j$.

Seja u_0 um ponto crítico de $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Se f for suficientemente diferenciável no aberto U e a matriz hessiana $H(u_0)$ for igual a 0, podemos utilizar derivadas de ordem superior para determinar se u_0 é um ponto de máximo ou mínimo. O próximo resultado é uma generalização do Teorema 7.14:

Teorema 7.17 Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suficientemente diferenciável e u_0 um ponto crítico de f . Seja $D^k f(u_0)$, com $k \geq 2$, a primeira derivada de f não-nula no ponto u_0 . Então:

- (i) se k for par e $D^k f(u_0) \cdot h^k > 0$ para todo $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$, então u_0 é um ponto de mínimo local estrito;
- (ii) se k for par e $D^k f(u_0) \cdot h^k < 0$ para todo $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$, então u_0 é um ponto de máximo local estrito;
- (iii) se $D^k f(u_0)$ assumir tanto valores positivos quanto negativos quando aplicado em h^k , então u_0 não é ponto de máximo ou mínimo;
- (iv) se k for par e $D^k f(u_0) \cdot h^k \leq 0$ ou $D^k f(u_0) \cdot h^k \geq 0$ para todo $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$, nada podemos afirmar.
- (v) se u_0 for um ponto de mínimo, então k é par e $D^k f(u_0) \cdot h^k \geq 0$ para todo $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$;

(vi) se u_0 for um ponto de máximo, então k é par e $D^k f(u_0) \cdot h^k \leq 0$ para todo $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$.

(vii) se k for ímpar, então u_0 não é ponto de máximo ou mínimo;

Demonstração: Os casos (i) – (vi) têm demonstração semelhante à do Teorema 7.14. (Veja o Exercício 4.) A demonstração de (vii) decorre de (iii) pois, se k for ímpar,

$$D^k f(u_0) \cdot (-h)^k = (-1)^k D^k f(u_0) \cdot h^k = -D^k f(u_0) \cdot h^k.$$

Assim, $D^k f(u_0)$ assume tanto valores positivos quanto negativos quando aplicado em h^k . $\square$

7.6 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Definição 7.18 Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável. Suponhamos que S seja uma superfície de classe C^k e dimensão m no $\mathbb{R}^n$. Denotaremos $F|_S$ por f . Dizemos que $p \in S$ é um ponto crítico de f se $Df(p) : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ for nula em p .

Se $v \in T_p S$, sabemos que $Df(p) \cdot v = (f \circ \lambda)'(0)$, em que $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ é um caminho diferenciável em 0, com $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$, de acordo com o Exercício 25 do Capítulo 6. Como $f = F|_S$, isto quer dizer (veja o Corolário 3.2 do Capítulo 3) que $Df(p)$ é a restrição de $DF(p)$ a $T_p S$. Ou seja, $Df(p) \cdot v = \langle \nabla F(p), v \rangle$ para todo $v \in T_p S$. Assim, p é um ponto crítico de f se, e somente se, $\nabla F(p)$ for um vetor normal a S em p , quer dizer, $\nabla F(p) \perp T_p S$.

Entre os pontos críticos p de $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ encontram-se os pontos de máximo e mínimo de f , pois esses são pontos de máximo ou mínimo da função real $f \circ \lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, em que λ é um caminho diferenciável no ponto 0, com $\lambda(0) = p$.

Suponhamos que a superfície S seja dada como imagem inversa $g^{-1}(c)$ do valor regular $c \in \mathbb{R}^{n-m}$, em que $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ é uma aplicação de classe C^k , $k \geq 1$. Sejam $(g_1, \dots, g_{n-m})$ as funções coordenadas de g . Como sabemos (veja o Exercício 28 do Capítulo 6), temos que $\nabla g_i(p) \perp T_p S$ para todo $p \in S$, com $i = 1, \dots, (n-m)$. Afirmamos que os vetores $\nabla g_i(p)$ são linearmente independentes. De fato, esses vetores são as linhas da matriz jacobiana $Dg(p)$; como essa matriz tem posto $(n-m)$, nossa afirmação está provada.

Em particular, temos que $\nabla g_1(p), \dots, \nabla g_{n-m}(p)$ é uma base do espaço vetorial $(T_p S)^\perp$, pois $T_p S$ é um espaço vetorial de dimensão m .

Ora, se $v \in T_p S$, vimos que $Df(p) \cdot v = \langle \nabla F(p), v \rangle = \langle \nabla f(p), v \rangle$ e que p é ponto crítico de f se, e somente se, $\nabla F(p) \perp T_p S$. Logo, se S for dada como imagem inversa do valor regular c da aplicação $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^1 , p é ponto crítico de f se, e somente se, $\nabla F(p)$ for combinação linear dos vetores $\nabla g_1(p), \dots, \nabla g_{n-m}(p)$, isto é,

$$\nabla F(p) = \lambda_1 \nabla g_1(p) + \dots + \lambda_{n-m} \nabla g_{n-m}(p).$$

Os números $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m}$ são chamados **multiplicadores de Lagrange**. O resultado que acabamos de mostrar é o seguinte:

Teorema 7.19 (Multiplicadores de Lagrange)

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Seja $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^k , com funções coordenadas $(g_1, \dots, g_{n-m})$, para $m < n$.

Suponhamos que $c \in \mathbb{R}^{n-m}$ seja um valor regular de g e que $p \in S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = c\}$. Então, p é um ponto crítico de $f := F|_S$ se, e somente se, existirem números reais $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m}$ tais que

$$\nabla F(p) = \lambda_1 \nabla g_1(p) + \dots + \lambda_m \nabla g_{n-m}(p).$$

Exemplo 3 Vamos encontrar o máximo de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 y$ restrito ao conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 = 3\}$.

Começamos notando que f e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x, y) = 2x^2 + y^2$ são ambas funções de classe C^1 (na verdade, C^∞). Afirmamos que 3 é valor regular de g . De fato, $\nabla g(x, y) = (4x \ 2y)^t$. Como temos $\nabla g(x, y) = (0 \ 0)^t$ se, e somente se $(x, y) = (0, 0)$, $S = g^{-1}(3)$ é imagem inversa de um valor regular de g . Note que S é uma elipse e, portanto, uma superfície compacta.

Se $(x, y) \in S$, a igualdade vetorial

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

escreve-se como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y),$$

ou seja, somos levados ao sistema

$$2xy = 4\lambda x, \tag{7.2}$$

$$x^2 = 2\lambda y, \tag{7.3}$$

$$2x^2 + y^2 = 3. \tag{7.4}$$

Da equação (7.2) obtemos $x(y - 2\lambda) = 0$. Logo, $x = 0$ ou $y = 2\lambda$.

Se for $x = 0$, concluímos de (7.2) que $y = \pm\sqrt{3}$. Isso implica, de acordo com (7.3), que $\lambda = 0$. Portanto, os ternos (x, y, λ) dados por $(0, \sqrt{3}, 0)$ e $(0, -\sqrt{3}, 0)$ são soluções do sistema (7.2) – (7.4).

Por sua vez, se $y = 2\lambda$, então $y^2 = 4\lambda^2$ e decorre então de (7.3) que $x^2 = 4\lambda^2$. Substituindo em (7.4), vem $8\lambda^2 + 4\lambda^2 = 3$, o que implica $\lambda = \pm(1/2)$. Se $\lambda = 1/2$, temos $y = 1$ e $x = \pm 1$; se $\lambda = -(1/2)$, então $y = -1$ e $x = \pm 1$. Quer dizer, nesse caso, os ternos (x, y, λ) dados por $(-1, +1, 1/2)$, $(1, 1, 1/2)$, $(-1, -1, -1/2)$ e $(1, -1, -1/2)$ são soluções do sistema.

Como S é uma superfície compacta $f|_S$ assume máximo e mínimo. Para obtermos os pontos de máximo e mínimo de $f|_S$ basta analisar os valores assumidos por f nos pontos que solucionam o sistema. Temos

$$\begin{aligned} f(0, -\sqrt{3}) &= f(0, \sqrt{3}) = 0, \\ f(-1, -1) &= f(1, -1) = -1, \\ f(1, 1) &= f(-1, 1) = 1. \end{aligned}$$

Assim, $(1, 1)$ e $(-1, 1)$ são pontos de máximo, enquanto $(-1, -1)$ e $(1, -1)$ são pontos de mínimo de $f|_S$. $\triangleleft$

Exemplo 4 Vamos analisar os pontos críticos de $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = xyz$ quando restrita a $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, x + z = 1\}$.

As funções f e $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $g(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)) = (x^2 + y^2, x + z)$, são ambas de classe C^1 . Uma vez que

$$Dg(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

vemos que $Dg(x, y, z)$ tem posto 2 para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (verifique!). Assim, $(1, 1)$ é um valor regular de g e $S = g^{-1}$ é uma superfície compacta. Se $(x, y, z) \in S$, a igualdade vetorial

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda_1 \nabla g_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla g_2(x, y, z)$$

escreve-se como

$$yz - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0, \quad (7.5)$$

$$xz - 2\lambda_1 y = 0, \quad (7.6)$$

$$xy - \lambda_2 = 0, \quad (7.7)$$

$$x^2 + y^2 = 1, \quad (7.8)$$

$$x + z = 1. \quad (7.9)$$

Se $y = 0$ em (7.6), então $xz = 0$ e, por causa de (7.7), temos $\lambda_2 = 0$. Mas (7.8) então implica $x = \pm 1$. Se for $x = -1$, então (7.9) implica $z = 2$, o que contradiz $xz = 0$. Se for $x = 1$, então (7.9) implica $z = 0$. Como $\lambda_2 = 0$ e $x = 1$, (7.5) implica $\lambda_1 = 0$. Concluimos assim que, se $y = 0$, então a única solução do sistema é o ponto

$$(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = (1, 0, 0, 0, 0).$$

Suponhamos agora que $y \neq 0$. Decorre de (7.6) e (7.7) que

$$\lambda_1 = \frac{xz}{2y} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = xy.$$

Substituindo esses valores em (7.5), obtemos que

$$y^2 z - x^2 z - xy^2 = 0.$$

Mas (7.8) mostra que $y^2 = 1 - x^2$, enquanto (7.9) implica $z = 1 - x$. Substituindo na expressão anterior, concluimos que

$$(1 - x)(1 - x - 3x^2) = 0.$$

Portanto, devemos ter $x = 1$ ou então $1 - x - 3x^2 = 0$, que nos fornece os valores $x = (-1 - \sqrt{13})/6$ e $x = (-1 + \sqrt{13})/6$. Substituindo esses valores possíveis de x e empregando as equações

$$y^2 = 1 - x^2, \quad z = 1 - x, \quad \lambda_1 = \frac{xz}{2y} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = xy,$$

obtemos quatro possíveis soluções no caso $y \neq 0$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{6}, -\frac{\sqrt{22 - 2\sqrt{13}}}{6}, \frac{7 + \sqrt{13}}{6}, +\frac{\sqrt{82 + 22\sqrt{13}}}{12}, +\frac{\sqrt{16 + \sqrt{13}}}{9} \right), \\ & \left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{6}, +\frac{\sqrt{22 - 2\sqrt{13}}}{6}, \frac{7 + \sqrt{13}}{6}, -\frac{\sqrt{82 + 22\sqrt{13}}}{12}, -\frac{\sqrt{16 + \sqrt{13}}}{9} \right), \\ & \left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{6}, -\frac{\sqrt{22 - 2\sqrt{13}}}{6}, \frac{7 + \sqrt{13}}{6}, -\frac{\sqrt{82 + 22\sqrt{13}}}{12}, -\frac{\sqrt{16 + \sqrt{13}}}{9} \right), \\ & \left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{6}, +\frac{\sqrt{22 - 2\sqrt{13}}}{6}, \frac{7 + \sqrt{13}}{6}, +\frac{\sqrt{82 + 22\sqrt{13}}}{12}, +\frac{\sqrt{16 + \sqrt{13}}}{9} \right). \end{aligned}$$

Como S é uma superfície compacta (é uma elipse, resultante da interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + z = 1$), $f|_S$ possui máximo e mínimo. Para analisar os pontos críticos, calculamos o valor de f em cada um dos pontos obtidos. Temos

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{6}, -\frac{\sqrt{22 - 2\sqrt{13}}}{6}, \frac{7 + \sqrt{13}}{6}\right) &= +0,869..., \\ f\left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{6}, +\frac{\sqrt{22 - 2\sqrt{13}}}{6}, \frac{7 + \sqrt{13}}{6}\right) &= -0,869..., \\ f\left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{6}, -\frac{\sqrt{22 - 2\sqrt{13}}}{6}, \frac{7 + \sqrt{13}}{6}\right) &= -0,221..., \\ f\left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{6}, +\frac{\sqrt{22 - 2\sqrt{13}}}{6}, \frac{7 + \sqrt{13}}{6}\right) &= +0,221..., \\ f(1, 0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, o ponto

$$\left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{6}, -\frac{\sqrt{22 - 2\sqrt{13}}}{6}, \frac{7 + \sqrt{13}}{6} \right)$$

é o máximo absoluto de $f|_S$, enquanto

$$\left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{6}, +\frac{\sqrt{22 - 2\sqrt{13}}}{6}, \frac{7 + \sqrt{13}}{6} \right)$$

é o mínimo absoluto de $f|_S$. Os dois pontos seguintes são pontos de mínimo e máximo locais (verifique!), enquanto $(1, 0, 0)$ não é ponto de máximo ou mínimo. $\triangleleft$

Observação 7.20 Problemas de otimização são tratados com detalhes no ótimo livro de H. Bortolossi [3], do qual extraímos os dois exemplos anteriores. $\triangleleft$

7.7 EXERCÍCIOS

1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação s vezes diferenciável. Para $j = 1, \dots, s$, considere aplicações simétricas $\lambda_j \in \mathcal{L}_j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tais que

$$f(a+h) = f(a) + \lambda_1 \cdot h + \dots + \lambda_s \cdot h^s + \rho(h) \|h\|^s,$$

em que $\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0$. Mostre que

$$\lambda_j = \frac{f^{(j)}(a)}{j!}.$$

2. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função arbitrária. Mostre que o conjunto dos pontos de máximo (ou mínimo) local *estrito* de f é enumerável.
3. Para $x_1, \dots, x_n > 0$, mostre que

$$x_1 \dots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^n,$$

ou seja,

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n},$$

desigualdade que prova que a média geométrica de $x_1, \dots, x_n$ é menor do que ou igual a média aritmética dos mesmos números.

4. Demonstre o Teorema 7.17.
5. Determine os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \langle x, y \rangle$ quando restrita à esfera unitária $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$. Conclua daí a desigualdade de Cauchy-Schwarz.
6. Estude os pontos críticos de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$, restrita a $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.
7. Estude os pontos críticos de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = x^2 + y$ restrita a $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.
8. Estude os pontos críticos de $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x, y, z) = xy + yz + xz$, restrita a $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 3\}$. Mostre que $f|_S$ não possui máximos ou mínimos absolutos.

Capítulo 8

SUPERFÍCIES ORIENTÁVEIS E COM BORDO

8.1 SUPERFÍCIES ORIENTÁVEIS

Definição 8.1 Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de dimensão m e classe C^k . Um **atlas** $\mathcal{A}$ de classe C^k em S é um conjunto de parametrizações $\varphi : U_\alpha \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \Omega_\alpha \subset S$ de classe C^k (em que Ω_α é um aberto em S), cujas imagens cobrem S .

Duas parametrizações $\varphi : U \rightarrow \Omega$ e $\psi : U' \rightarrow \Omega'$ são **compatíveis** se, ou $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$, ou $\varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(\Omega \cap \Omega') \rightarrow \varphi^{-1}(\Omega \cap \Omega')$ tiver matriz jacobiana com determinante positivo em todos os pontos $u \in \varphi^{-1}(\Omega \cap \Omega')$.

Um atlas $\mathcal{A}$ na superfície S é **coerente**, se quaisquer de suas parametrizações forem compatíveis.

Uma superfície S de classe C^k é **orientável**, se possuir um atlas $\mathcal{A}$ coerente de classe C^k . Uma **superfície orientada** é uma superfície orientável na qual foi escolhida um atlas coerente $\mathcal{A}$. Mais precisamente, uma superfície orientável de classe C^k é um par $(S, \mathcal{A})$, em que $\mathcal{A}$ é um atlas coerente de classe C^k . As parametrizações em $\mathcal{A}$ são chamadas **positivas**.

Note que a definição de superfície garante a existência de um atlas $\mathcal{A}$ de classe C^k em S .

Exemplo 1 Toda superfície que é a imagem de uma única parametrização é orientável, pois essa parametrização constitui um atlas coerente. Em particular, toda superfície dada como gráfico de uma aplicação C^k ($k \geq 1$) e todos os conjuntos abertos do $\mathbb{R}^n$ são orientáveis. $\triangleleft$

Exemplo 2 Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de dimensão m e classe C^k . Então S é localmente orientável, isto é, todo ponto $p \in S$ admite uma vizinhança Ω tal que $S \cap \Omega = \Omega$ é orientável. Isso resulta imediatamente do exemplo anterior: basta considerar uma parametrização $\varphi : U \rightarrow \Omega \subset S$ de uma vizinhança de $\Omega \ni p$. $\triangleleft$

Exemplo 3 Se uma superfície S de dimensão m e classe C^k admitir um atlas formado por duas parametrizações, $\varphi : U \rightarrow \Omega$ e $\psi : U' \rightarrow \Omega'$, com $\Omega \cap \Omega'$ conexo, então S é orientável. (Veja o Exercício 13.) De fato, como o domínio $\psi^{-1}(\Omega \cap \Omega')$ da parametrização $\varphi^{-1} \circ \psi$ é conexo, **ou** $\det(\varphi^{-1} \circ \psi) > 0$ (caso em que o atlas é coerente), **ou** $\det(\varphi^{-1} \circ \psi) < 0$ em todos os pontos do domínio. Nesse caso, existe uma outra parametrização $\underline{\psi}$, com a mesma imagem de ψ , tal

que $\det(\varphi^{-1} \circ \psi) > 0$. De fato, defina o aberto $\underline{U}' = \{(-u_1, u_2, \dots, u_m) : (u_1, \dots, u_m) \in U'\}$ e a parametrização $\underline{\psi} : \underline{U}' \rightarrow S$ por $\underline{\psi}(-u_1, u_2, \dots, u_m) = \psi(u_1, u_2, \dots, u_m)$. A Regra da Cadeia aplicada a $\varphi^{-1} \circ \underline{\psi}$ produz o afirmado. Ao obter $\underline{\psi}$, dizemos que **mudamos o sinal** de ψ . $\triangleleft$

Se temos três ou mais parametrizações, em geral não é possível simplesmente mudar o sinal de uma delas para obter um atlas coerente. Veja, contudo, o Exercício 4.

Observação 8.2 Dadas duas parametrizações de uma vizinhança $\Omega \cap \Omega'$ do ponto $p \in S$, com $p = \varphi(u_0) = \psi(u'_0)$, sabemos que $\xi = \varphi^{-1} \circ \psi$ é um difeomorfismo. Os conjuntos

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(u_0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(u_0) \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(u'_0), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_n}(u'_0) \right\}$$

são ambas bases do espaço tangente $T_p S$. A relação entre essas bases é obtida ao diferenciarmos a igualdade $\varphi \circ \xi = \psi$.

$$D\psi(u'_0) \cdot e_i = D\varphi(\xi(u'_0)) \cdot D\xi(u'_0) \cdot e_i = D\varphi(u_0) \cdot c_i,$$

em que c_i é a i -ésima coluna da matriz $J\xi(u'_0)$. Logo, a matriz jacobiana $J\xi(u'_0)$ é a matriz mudança da base¹ $\mathcal{C}$ para a base $\mathcal{B}$.

As parametrizações φ e ψ são compatíveis, se $\det J\xi(u'_0) > 0$. Como o determinante é uma função contínua, seu sinal é constante em cada componente conexa do aberto $\psi^{-1}(\Omega \cap \Omega')$; assim, se esse aberto for conexo, o sinal do determinante será o mesmo em todos os pontos desse aberto. Contudo, não podemos garantir, *a priori*, que $\psi^{-1}(\Omega \cap \Omega')$ seja conexo. $\triangleleft$

Definição 8.3 Um **campo** de classe C^k , $k \in \mathbb{N}$, de **vetores normais** a uma superfície $S \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $v : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k tal que, para todo $p \in S$, temos $v(p) \in (T_p S)^\perp$.

Lembramos que, se $S \subset \mathbb{R}^n$ for uma superfície de dimensão m , então $(T_p S)^\perp$ tem dimensão $n - m$ para todo $p \in S$.

Teorema 8.4 Se uma superfície $S \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão m e classe C^k possuir $n - m$ campos contínuos $v_1, \dots, v_{n-m} : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ de vetores normais a S , linearmente independentes em cada ponto $p \in S$, então S é uma superfície orientável. Mais precisamente, se os campos contínuos $v_1, \dots, v_{n-m}$ formarem uma base de $(T_p S)^\perp$ em cada ponto $p \in S$, então S é orientável.

Demonstração: Seja $\mathcal{A}'$ o atlas C^k dado pela definição de S . Seja $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ o subconjunto de todas as parametrizações $\varphi : U_\alpha \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \Omega_\alpha \subset S$ de classe C^k , em que U_α é conexo e, para todo $u \in U_\alpha$, a matriz (dada por suas colunas)

$$O_\varphi(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(u) & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}(u) & v_1(\varphi(u)) & \dots & v_{n-m}(\varphi(u)) \end{pmatrix}$$

tem determinante positivo. Note que as colunas de $O_\varphi(u)$ formam uma base do $\mathbb{R}^n$ em cada ponto u , de forma que $O_\varphi(u)$ é invertível para todo $u \in U$. Além disso, como as colunas

¹Note que os vetores da base $\mathcal{C}$ estão sendo escritos como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{B}$.

de O_φ variam continuamente com u , o seu determinante não muda de sinal no conexo U_α , domínio de φ .

Queremos mostrar que $\mathcal{A}$ é um atlas em S . Em primeiro lugar, pela definição de superfície, todo ponto $p \in S$ pertence a uma vizinhança aberta $\Omega \subset S$, que é imagem de uma parametrização $\varphi : U \rightarrow \Omega$. Para obtermos uma parametrização definida num conexo, basta restringirmos φ à componente conexa que contém $u = \varphi^{-1}(p)$. Quer dizer, podemos supor que todos os domínios das parametrizações em $\mathcal{A}'$ sejam conexos, ao restringir os domínios de suas parametrizações a componentes conexas. É o que faremos de agora em diante.

Para que uma parametrização $\mathcal{A}' \ni \varphi : U_\alpha \rightarrow \Omega_\alpha \subset S$ esteja em $\mathcal{A}$, basta que $\det O_\varphi(u) > 0$ para algum $u \in U_\alpha$, pois U_α é conexo. Suponhamos que, $O_\varphi(u) < 0$ para algum (e, portanto, para todo) $u \in U_\alpha$. Nesse caso, mudamos o sinal de φ e obtemos uma parametrização $\underline{\varphi}$ com a mesma imagem de φ , mas com $\det O_{\underline{\varphi}} > 0$. Isto mostra que $\mathcal{A}$ é um atlas C^k em S . (Mas agora, em geral, $\mathcal{A} \not\subset \mathcal{A}'$.)

Agora vamos mostrar que $\mathcal{A}$ é coerente. Para isso, suponhamos que $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ sejam parametrizações do mesmo aberto² $\Omega \subset S$ e que $\varphi(u_0) = \psi(u'_0) = p \in S$. Examinemos $O_\psi(u'_0)$:

$$O_\psi(u'_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(u'_0) & \dots & \frac{\partial \psi}{\partial x_m}(u'_0) & v_1(\psi(u'_0)) & \dots & v_{n-m}(\psi(u'_0)) \end{pmatrix}.$$

As m primeiras colunas dessa matriz são uma base de $T_p S$, enquanto as colunas restantes fornecem uma base de $(T_p S)^\perp$. Denotaremos por $\mathcal{C}$ a base do $\mathbb{R}^n$ formada pelas colunas de $O_\psi(u'_0)$. Da mesma forma, denotaremos por $\mathcal{B}$ a base do $\mathbb{R}^n$ dada pelas colunas de $O_\varphi(u)$. Se considerarmos a matriz de mudança de base $\mathcal{C}$ para a base $\mathcal{B}$, vemos que ela tem a forma

$$P = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Mais precisamente,

$$O_\psi(u'_0) = O_\varphi(u_0) P,$$

de onde deduzimos que

$$\det O_\psi(u'_0) = \det O_\varphi(u_0) \det C. \quad (8.1)$$

Uma vez que C corresponde à matriz jacobiana de $\xi(u'_0) = \varphi^{-1} \circ \psi(u'_0)$, concluímos que $\det D\xi(u'_0) > 0$, o que mostra que as parametrizações ψ e φ são compatíveis. $\square$

Corolário 8.5 *Se a superfície $S \subset \mathbb{R}^n$, de dimensão n e classe C^k , for a imagem inversa de um valor regular da aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$, então S é orientável.*

Demonstração: Suponhamos que $S = f^{-1}(c)$. Para $p \in S$, consideremos a matriz jacobiana $Jf(p)$. Se $f = (f_1, \dots, f_{n-m})$ são as funções coordenadas de f , as linhas de $Jf(p)$ correspondem aos vetores $\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_{n-m}(p)$. Como $Jf(p)$ tem posto $n - m$ (pois c é valor regular de f), mostramos que os vetores

$$\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_{n-m}(p)$$

²Veja a Observação 6.9.

são linearmente independentes.

Afirmamos agora que $\nabla f_i(p) \in (T_p S)^\perp$ para $i = 1, \dots, n - m$. De fato, se $c = (c_1, \dots, c_{n-m})$ são as coordenadas de c , cada função $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é constante em S e igual a c_i . Como todo vetor $v \in T_p S$ é o vetor velocidade $\lambda'(0)$ de um caminho $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ satisfazendo $\lambda(0) = p$, temos $(f_i \circ \lambda)(t) = c_i$ para $i = 1, \dots, n - m$. Derivando essa igualdade, obtemos $Df_i(p) \circ \lambda'(0) = 0$, ou seja, $Df(p) \cdot v = \langle \nabla f_i(p), v \rangle = 0$, mostrando que $\nabla f_i(p) \perp T_p S$.

Isso mostra que $\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_{n-m}(p)$ são $n - m$ campos contínuos que formam uma base de $(T_p S)^\perp$. $\square$

O Exercício 1 pede que você demonstre o seguinte resultado:

Corolário 8.6 *Toda superfície S de dimensão m e classe C^k admite, localmente, um campo de vetores normais de classe C^{k-1} .*

Pode-se mostrar (veja [9], Proposição 7, p. 118) que uma superfície $S \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão m admite $n - m$ campos contínuos linearmente independentes de vetores normais se, e somente se, S for a imagem inversa de um valor regular. A demonstração desse fato foge ao escopo deste texto.

Contudo, é fácil verificar que a recíproca do Teorema 8.4 é válida no caso em que a superfície S tiver codimensão 1. Para mostrar esse fato, começamos provando um resultado simples sobre o produto vetorial no espaço $\mathbb{R}^n$ (veja o Exercício 29 do Capítulo 1).

Lema 8.7 *Sejam $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_{n-1}\}$ bases do espaço $E \subset \mathbb{R}^n$. Se P denotar a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$, então*

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} = \det P \, w_1 \wedge \dots \wedge w_{n-1}.$$

Demonstração: Definimos duas formas $(n - 1)$ -lineares alternadas $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ por³

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} = f(v_1, \dots, v_{n-1}) \, w_1 \wedge \dots \wedge w_{n-1}$$

e

$$g(v_1, \dots, v_{n-1}) = \det P = \det(p_{ij}), \quad \text{em que} \quad v_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} w_i, \quad j = 1, \dots, n - 1.$$

Como o espaço das formas $(n - 1)$ -lineares alternadas tem dimensão 1, devemos ter $f = cg$. Mas $f(w_1, \dots, w_{n-1}) = 1$ e $g(w_1, \dots, w_{n-1}) = 1$, o que significa que $c = 1$. Isso prova que

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} = \det P \, w_1 \wedge \dots \wedge w_{n-1}. \quad \square$$

Proposição 8.8 *Toda superfície orientável de codimensão 1 admite um campo contínuo de vetores normais não-nulos.*

³Note que, como E tem dimensão $n - 1$, $v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$ deve ser igual a um múltiplo de $w_1 \wedge \dots \wedge w_{n-1}$, pois ambos esses vetores são perpendiculares a E .

Demonstração: Seja $\mathcal{A}$ um atlas coerente na superfície S e $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$ uma parametrização em $\mathcal{A}$. Se $\varphi(u) = p \in S$, definimos

$$v(p) = \frac{w(p)}{\|w(p)\|}, \quad \text{em que} \quad w(p) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(u) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(u).$$

Se ψ for uma outra parametrização de uma vizinhança aberta de p , com $\psi(v) = p$, então

$$z(p) = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(v) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \psi}{\partial x_{n-1}}(v)$$

satisfaz $z(p) = \det P w(p)$, em que P é a matriz de mudança da base $\{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}\}$ para a base $\{\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_{n-1}}\}$, de acordo com o Lema 8.7. Como essa matriz é positiva, temos que

$$\frac{z(p)}{\|z(p)\|} = \frac{w(p)}{\|w(p)\|} = v(p).$$

Isso mostra que o campo unitário normal $v : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ está bem definido. Como v é contínuo, o resultado está provado. $\square$

Exemplo 4 (A faixa de Moebius) A faixa de Moebius é o exemplo mais simples de uma superfície não-orientável no $\mathbb{R}^3$. Ela é obtida da seguinte maneira: considere um círculo de raio 1 e um segmento de reta $(-1/2, 1/2)$, cujo ponto central pertence ao círculo. Enquanto esse ponto central percorre inteiramente o círculo, giramos o segmento de π radianos.

Para parametrizar a faixa de Moebius M , consideramos a aplicação $f : (0, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$f(s, t) = \gamma(t) + (s - 1/2)\delta(t),$$

em que

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0) \quad \text{e} \quad \delta(t) = \left(\cos \frac{t}{2} \cos t, \cos \frac{t}{2} \sin t, \sin \frac{t}{2} \right).$$

$\triangleleft$

FALTA CONCLUIR O EXEMPLO. FALTA CONCLUIR A COMPARAÇÃO ENTRE TIPOS DE SUPERFÍCIES, INICIADA NO CAP. 6. Talvez incluir o Exercício 3 no texto.

8.2 SUPERFÍCIES COM BORDO

Definição 8.9 Um *semiespaço* no $\mathbb{R}^n$ é um conjunto do tipo

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \ell(x) \leq 0\}$$

em que $\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear não-nulo.

O **bordo** do semiespaço H é o conjunto $\partial H = \{x \in \mathbb{R}^n : \ell(x) = 0\}$.

Notamos que, se $v \in \mathbb{R}^n$ for um vetor arbitrário, então ou $v \in H$ ou $-v \in H$. Assim, dada uma base arbitrária $\{v_1, \dots, v_n\}$ do $\mathbb{R}^n$, obtemos uma base do $\mathbb{R}^n$ com vetores em H substituindo os vetores $v_i \notin H$ por $-v_i$, para $i = 1, \dots, n$.

Como consequência do Teorema do Núcleo e da Imagem, o bordo ∂H é um subespaço de dimensão $n - 1$ no $\mathbb{R}^n$ e, portanto, uma superfície de codimensão 1 no $\mathbb{R}^n$. Um conjunto aberto em H é a interseção de um aberto do $\mathbb{R}^n$ com H . Assim, os subconjuntos $U \subset H$ abertos podem ser de dois tipos: aqueles contidos no interior de H (e que são, portanto, abertos do $\mathbb{R}^n$) e aqueles cuja interseção com ∂H é não-vazia.

Seja $U \subset H$ um aberto. Queremos definir a derivada de $f : U \subset H \rightarrow \mathbb{R}^m$. Se u for um ponto interior de H , a definição usual é suficiente. Mas o que fazer quando $u \in \partial H$?

Definição 8.10 *Sejam $U \subset H$ um conjunto aberto. Uma aplicação $f : U \subset H \rightarrow \mathbb{R}^m$ é **diferenciável** se ela for a restrição de uma aplicação diferenciável $F : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. A aplicação f é C^k se F for C^k .*

A **derivada** de f em $u \in U$ é definida como a derivada de F no ponto u .

Naturalmente, precisamos verificar que a derivada de $f : U \subset H \rightarrow \mathbb{R}^m$ está bem definida, isto é, que $f'(u)$ independe da extensão de f considerada. Se u for um ponto interior de H , a derivada de f no ponto u deve coincidir com a derivada de qualquer extensão de f a um aberto do $\mathbb{R}^n$. Assim, podemos nos ater ao caso em que $u \in \partial H$. Suponhamos, então, que a restrição a U da aplicação $F : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (em que V é um aberto do $\mathbb{R}^n$) seja igual a f e tomemos uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ do $\mathbb{R}^n$ com vetores em H . Consideremos $F'(u) \cdot v_i$. Temos

$$F'(u) \cdot v_i = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(u + tv_i) - F(u)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(u + tv_i) - f(u)}{t},$$

pois $u + tv_i \in U$, desde que tomemos t suficientemente pequeno. Isso mostra que $F'(u) \cdot v_i$ está determinado de maneira única nos elementos da base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de H . Portanto, a derivada de f independe da extensão F considerada.

A definição da derivada de $f : U \subset H \rightarrow \mathbb{R}^m$ implica imediatamente que a Regra da Cadeia continua válida. Mais precisamente, sejam $U \subset H_1$ e $V \subset H_2$ abertos nos semiespaços $H_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $H_2 \subset \mathbb{R}^m$. Se as aplicações $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ forem diferenciáveis nos pontos $u \in U$ e $v = f(u) \in V$, respectivamente, então $(g \circ f)(u) = g'(f(u)) \cdot f'(u)$. Esse fato decorre imediatamente da Regra da Cadeia aplicada às extensões de f e g .

Um **difeomorfismo** (respectivamente, difeomorfismo C^k) entre abertos $U \subset H_1$ e $V \subset H_2$ dos semiespaços $H_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $H_2 \subset \mathbb{R}^m$ é uma bijeção diferenciável (respectivamente, C^k), cuja inversa também é diferenciável (respectivamente, C^k). Como antes, a Regra da Cadeia implica imediatamente que devemos ter $m = n$.

Definição 8.11 *Seja H um semiespaço. O **bordo** de um aberto $U \subset H$ é o conjunto*

$$\partial U = U \cap \partial H.$$

O bordo de um aberto $U \subset H$ é uma superfície de codimensão 1 no $\mathbb{R}^n$. De fato, como U é um aberto em H , existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $U = V \cap H$. Portanto,

$$V \cap \partial H = V \cap (H \cap \partial H) = (V \cap H) \cap \partial H = U \cap \partial H = \partial U.$$

O afirmado decorre imediatamente de $V \cap \partial H$ ser um aberto na superfície ∂H .

O próximo resultado mostra que o bordo de um aberto $U \subset H$ é invariante por difeomorfismos.

Proposição 8.12 *Sejam $U \subset H_1$ e $V \subset H_2$ abertos nos semiespaços $H_1, H_2 \subset \mathbb{R}^n$. Se $f : U \rightarrow V$ for um difeomorfismo de classe C^1 , então $f(\partial U) = \partial V$. Em particular, a restrição $f|_{\partial U}$ é um difeomorfismo entre as superfícies ∂U e ∂V .*

Demonstração: Suponhamos que $u \in U$ seja um ponto interior. Isso quer dizer que existe um aberto $A \subset U$, com $u \in A$. A restrição $f|_A$ é um difeomorfismo de classe C^1 do aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ sobre sua imagem $f(A)$. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, $f(A)$ é um aberto. Como $f(A) \subset V$, concluímos que $f(u)$ é um ponto interior de V . Isso quer dizer que $f(\text{int } U) = \text{int } V$ e, portanto, $f^{-1}(\partial V) \subset \partial U$. Analogamente, $f(\partial U) \subset \partial V$, o que conclui a prova. $\square$

Observação 8.13 O mesmo resultado pode ser provado sob condições mais gerais: basta supor que f seja um homeomorfismo de U em V . Para isso, é necessário recorrer ao Teorema de Invariância do Domínio. $\triangleleft$

As próximas definições estendem o conceito de parametrização e superfície:

Definição 8.14 *Seja $U \subset H$ um aberto do semiespaço $H \subset \mathbb{R}^m$. Uma **parametrização** (m -dimensional) de classe C^k de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k tal que:*

- (i) *a aplicação φ é um homeomorfismo de U em $\Omega = \varphi(U)$;*
- (ii) *a derivada $D\varphi(u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetora para todo $u \in U$.*

Definição 8.15 *Uma **superfície com bordo** de dimensão m e classe C^k é um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ tal que todo elemento $p \in S$ pertence a um aberto $\Omega \subset S$, o qual é a imagem de uma parametrização $\varphi : U \subset H \rightarrow \mathbb{R}^n$, em que U é um aberto do semiespaço $H \subset \mathbb{R}^m$.*

Como no caso de superfícies,⁴ mudanças de parametrização são dadas por difeomorfismos.

Proposição 8.16 *Sejam S uma superfície com bordo de dimensão m e $\Omega \subset S$ um aberto. Se $\varphi : U \subset H_1 \rightarrow \Omega$ e $\psi : V \subset H_2 \rightarrow \Omega$ são parametrizações C^k de Ω , então $\psi^{-1} \circ \varphi : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo C^k entre os abertos $U \subset H_1$ e $V \subset H_2$ dos semiespaços $H_1, H_2 \subset \mathbb{R}^m$.*

Demonstração: Dado $p \in S$, suponhamos que $\varphi(u) = p = \psi(v)$. Como ψ é diferenciável, existe uma extensão $\Psi : W \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de ψ , de classe C^k , definida num aberto $W \subset \mathbb{R}^m$. Pela Forma Local das Imersões (restringindo W , se necessário), Ψ é um homeomorfismo entre $W \ni v$ e $\Psi(W)$, cuja inversa Ψ^{-1} é a restrição a $\Psi(W)$ de uma aplicação Γ definida num aberto do $\mathbb{R}^n$. Logo, definindo $A = \varphi^{-1}(\Psi(W))$, vemos que $A \ni u$ é um aberto em H_1 . Além disso, $(\psi^{-1} \circ \varphi)|_A = (\Psi^{-1} \circ \varphi)|_A$ é uma aplicação de classe C^k , como composta de aplicações C^k . Isso prova que $\psi^{-1} \circ \varphi$ é uma aplicação C^k numa vizinhança aberta do ponto u e completa a demonstração. $\square$

⁴Como definida no Capítulo 6.

Observação 8.17 Não é necessário trabalharmos com parametrizações definidas em semiespaços distintos; basta considerarmos o semiespaço $H_0 = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1 \leq 0\}$. Dado qualquer semiespaço $H \subset \mathbb{R}^m$, existe um isomorfismo linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $T(H_0) = H$ (veja o Exercício 16). Dada uma parametrização de classe C^k , $\psi : V \subset H \rightarrow S$, definimos $U = T^{-1}(V)$ e $\varphi : U \rightarrow S$ por $\varphi = \psi \circ T$. A parametrização φ é de classe C^k e tem a mesma imagem de ψ . $\triangleleft$

Definição 8.18 Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície com bordo. O **bordo** é o conjunto ∂S formado por todos os pontos $p \in S$ tais que, para toda parametrização $\varphi : U \subset H \rightarrow \Omega$ do aberto $\Omega \ni p$ de S , com $\varphi(u) = p$, temos $u \in \partial U$.

A definição apresentada do bordo ∂S torna difícil verificar se um ponto $p \in S$ pertence a ∂S . Combinando as Proposições 8.12 e 8.16 temos uma caracterização muito mais simples do bordo de uma superfície. Se existir uma parametrização $\varphi : U \subset H_1 \rightarrow S$ tal que $\varphi(u) = p$ e $u \in \partial U$, podemos concluir que $p \in \partial S$. De fato, suponhamos que $\psi : V \subset H_2 \rightarrow S$ seja outra parametrização do ponto p , com $\psi(v) = p$. Como $\psi^{-1} \circ \varphi$ é um difeomorfismo, $(\psi^{-1} \circ \varphi)(u) = v \in \partial V$, pois $u \in \partial U$.

Observação 8.19 Se S for uma superfície com bordo de dimensão m e classe C^k , então ∂S é uma superfície de dimensão $m - 1$ e classe C^k . É claro que o bordo ∂S é parametrizado pelas restrições de parametrizações $\varphi : U \subset H \subset \mathbb{R}^m \rightarrow S$, em que $\partial U \neq \emptyset$. Contudo, essas não são definidas em abertos do espaço $\mathbb{R}^{m-1}$ e não caracterizam, portanto, ∂S como uma superfície de dimensão $m - 1$. Temos duas maneiras simples de obter parametrizações de ∂S . A primeira consiste em tomar uma base de ∂H e representar cada elemento de ∂H como combinação linear dos $m - 1$ vetores da base de ∂H . Os elementos de ∂S dados por φ são as imagens dos elementos $u \in U \cap \partial H$, e u é representado pelas $m - 1$ coordenadas dadas por essa base de ∂H .

A segunda solução também é simples e elucidativa: consideramos uma parametrização $\varphi : U \subset H_0 \rightarrow S$ (em que H_0 é o semiespaço definido anteriormente) tal que $\partial U \neq \emptyset$. Se identificarmos ∂H_0 com $\mathbb{R}^{m-1}$ por meio da correspondência $(0, x_2, \dots, x_m) \mapsto (x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$, então $U \cap \partial H_0$ é identificado com um aberto do espaço $\mathbb{R}^{m-1}$, de modo que $\varphi : \partial U \rightarrow S$ é parametrização de uma vizinhança aberta de ∂S . $\triangleleft$

Teorema 8.20 Sejam S uma superfície de dimensão m e classe C^k e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k . Se $a \in \mathbb{R}$ for valor regular de f , então o conjunto $N = \{x \in S : f(x) \leq a\}$ é uma superfície com bordo, de dimensão m e classe C^k . O bordo de N é

$$\partial N = f^{-1}(a).$$

Demonstração: O conjunto $A = \{x \in S : f(x) < a\}$ é aberto em S ; logo, é uma superfície de dimensão m e classe C^k (veja o Exercício 15). Para completar a demonstração, precisamos apenas parametrizar as vizinhanças dos pontos $x \in N$ tais que $f(x) = a$.

Para $x \in S$, considere uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \Omega$ de uma vizinhança aberta de x , com $\varphi(u) = x$. Uma vez que a é valor regular de f , resulta da Definição 6.11 que a também é valor regular da função $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$\frac{\partial f \circ \varphi}{\partial x_m}(u) > 0.$$

Considerando a decomposição $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$, decorre da Forma Local das Submersões que existem um aberto $W \subset \mathbb{R}^{m-1}$ contendo $u^* = (u_1, \dots, u_{m-1})$ e um intervalo $I = (a - \epsilon, a + \epsilon)$, bem como um difeomorfismo $\phi : W \times I \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $f \circ \phi \circ \phi = \Pi_2$, isto é,⁵

$$(f \circ \phi \circ \phi)(u^*, t) = t \quad \forall t \in I.$$

Em $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$ considere o semiespaço formado pelos pontos cuja última coordenada é menor do que ou igual a a . Defina $V = (W \times I) \cap H$, $\psi = \phi \circ \phi$ e $\Omega = \psi(V)$. Então $\psi : V \rightarrow N$ é uma parametrização do aberto $\Omega \subset N$. $\square$

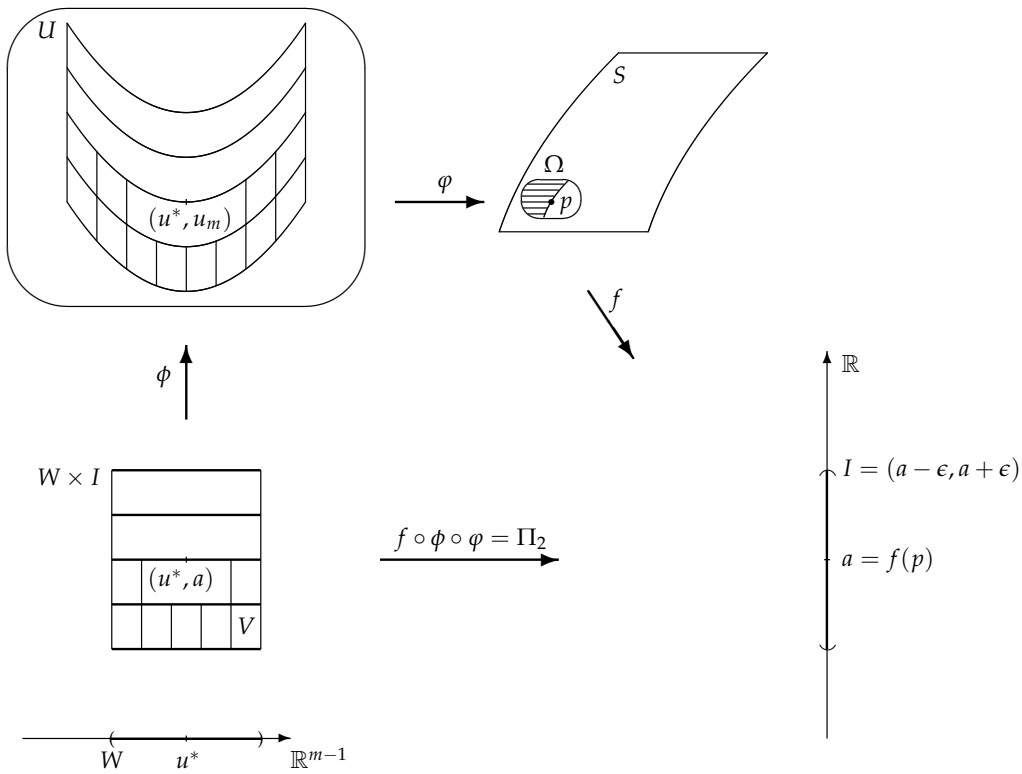


Figura 8.1: A composta $\psi = \phi \circ \phi$ é uma parametrização do aberto $\Omega \subset N$.

Exemplo 5 Considerando $S = \mathbb{R}^m$, a bola fechada $\overline{B}_r(x_0) \subset \mathbb{R}^m$ é uma superfície com bordo, de dimensão m e classe C^∞ , cujo bordo é a esfera $\mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$. De fato, considere $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \langle x - x_0, x - x_0 \rangle = \|x - x_0\|^2.$$

Então $\nabla f(x) = 2(x - x_0)$, de forma que todo $r \neq 0$ é valor regular de f . A bola fechada $\overline{B}_r(x_0)$ é caracterizada por $f(x) \leq r$, e seu bordo é dado por $f(x) = r$. $\triangleleft$

⁵Veja a Figura 8.1.

Definição 8.21 *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície com bordo de dimensão m e classe C^k . Dado $p \in S$, seja $\varphi : U \subset H \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \Omega \subset S$ uma parametrização do aberto $\Omega \ni p$, com $\varphi(u) = p$. Definimos o **espaço tangente** à superfície com bordo S , denotado $T_p S$, por*

$$T_p S = \varphi'(u) \cdot \mathbb{R}^m.$$

Como antes, precisamos verificar que o espaço tangente $T_p S$ independe da parametrização escolhida de uma vizinhança aberta de $p \in S$. Se ψ for outra parametrização de uma vizinhança de p (com $\psi(v) = p$), a Proposição 8.16 garante que a mudança de coordenadas $\xi = \psi^{-1} \circ \varphi$ é um difeomorfismo; aplicando a Regra da Cadeia à igualdade $\psi \circ \xi = \varphi$, temos $\psi'(v) \circ \xi'(u) \cdot \mathbb{R}^m = \varphi'(u) \cdot \mathbb{R}^m$. Como $\xi'(u)$ é um isomorfismo, temos que $\psi'(v) \cdot \mathbb{R}^m = \varphi'(u) \cdot \mathbb{R}^m$.

Seja $p \in \partial S$. Em p temos uma situação dual: por um lado, está definido o espaço tangente m -dimensional $T_p S$ da superfície com bordo S ; mas, por outro, ∂S é uma superfície de dimensão $m - 1$, para a qual está definido o espaço tangente $(m - 1)$ -dimensional $T_p(\partial S)$. Se considerarmos uma parametrização $\varphi : U \subset H \rightarrow S$, com $\varphi(u) = p \in \partial S$, então obtemos uma parametrização de ∂S ao considerarmos uma base de H . Mas o espaço tangente $T_p(\partial S)$ é obtido sem a utilização dessa base: temos que $T_p(\partial S) = \varphi'(u) \cdot H$.

8.3 ORIENTAÇÃO EM SUPERFÍCIES COM BORDO

Definição 8.22 *Uma superfície com bordo S , de dimensão m e classe C^k , é **orientável** se admitir um atlas coerente de classe C^k . Como antes, o atlas $\mathcal{A}$ é **coerente** se mudanças de parametrizações do aberto $\Omega \subset S$ tiverem determinante jacobiano positivo.*

Teorema 8.23 *Se $S \subset \mathbb{R}^n$ for uma superfície com bordo orientável (de dimensão $m \geq 2$ e classe C^k), então a orientação de S induz uma orientação na superfície ∂S . Mais precisamente, S admite um atlas coerente, construído a partir de parametrizações $\varphi : U \subset H_0 \rightarrow \Omega \subset S$, em que H_0 é o semiespaço definido na Observação 8.17, e a orientação de ∂S é definida como aquela determinada pelas restrições ao bordo das parametrizações desse atlas.*

Demonstração: Utilizando o semiespaço H_0 introduzido anteriormente, seja $\mathcal{A}$ o conjunto das parametrizações $\varphi : U \subset H_0 \rightarrow \Omega \subset S$ de classe C^k com as seguintes propriedades:

- a) U é um aberto conexo em H_0 ;
- b) φ é positiva com relação à orientação de S .

Já vimos que podemos supor que todos os domínios de parametrizações sejam conexos. Além disso, a toda parametrização $\psi : V \subset H \rightarrow \Omega$ corresponde uma parametrização de Ω definida em um aberto $U \subset H_0$ (veja a Observação 8.17). Assim, um atlas em S gera um atlas satisfazendo a propriedade a). Mas, como existe um atlas coerente em S , sempre podemos tomar parametrizações positivas $\varphi \in \mathcal{A}$: se φ não for positiva, mudamos o sinal de φ , de modo a obter uma parametrização positiva.

Lembramos que os elementos de ∂H_0 correspondem aos elementos do $\mathbb{R}^m$ cuja primeira coordenada é igual a zero (veja a Observação 8.19). Consideremos as restrições $\varphi|_{\partial S}$ das

parametrizações cujo domínio satisfaz $U \cap \partial H_0 \neq \emptyset$. Claramente essas restrições formam um atlas $\mathcal{A}_0$ em ∂S . Afirmamos que esse atlas é coerente.

Sejam, portanto, φ e ψ duas parametrizações em $\mathcal{A}$ do aberto $\Omega \subset S$, com $\varphi(u) = p \in \partial S$ e tanto $\varphi|_{\partial S}$ quanto $\psi|_{\partial S}$ em $\mathcal{A}_0$. Consideremos a mudança de parametrização $\psi^{-1} \circ \varphi$ e sua matriz jacobiana. De acordo com a Proposição 8.12, pontos de fronteira são levados em pontos de fronteiras, de modo que $J(\psi^{-1} \circ \varphi)$ tem a forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que $a_{11} > 0$, em que $a_{11} = \frac{\partial(\psi^{-1} \circ \varphi)_1}{\partial x_1}(u)$. Como

$$\begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

corresponde à matriz jacobiana da mudança de base entre $\psi^{-1}|_{\partial S} \circ \varphi|_{\partial S}$, o afirmado decorre imediatamente de nossa afirmação.

Para provar nossa afirmação, consideremos, para $t < 0$, o a primeira coordenada do quociente

$$\frac{(\psi^{-1} \circ \varphi)(u + te_1) - (\psi^{-1} \circ \varphi)(u)}{t}.$$

A primeira coordenada de $(\psi^{-1} \circ \varphi)(u + te_1)$ é negativa (já que $u + te_1 \in H_0$ para $t < 0$), enquanto a primeira coordenada de $(\psi^{-1} \circ \varphi)(u)$ é nula (pois $u \in \partial H_0$). Como $t < 0$, o quociente tem a primeira coordenada positiva. Passando ao limite quanto $t \rightarrow 0^-$, concluímos que

$$a_{11} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{(\psi^{-1} \circ \varphi)_1(u + te_1) - (\psi^{-1} \circ \varphi)_1(u)}{t} \geq 0.$$

Como não podemos ter $a_{11} = 0$, a afirmação está provada. $\square$

Exemplo 6 (Orientação em superfícies com bordo S , com $\dim S = 1$) O intervalo $[0, 1]$ é uma superfície com bordo de dimensão 1 e classe C^∞ , de acordo com o Exemplo 5. Um atlas $\mathcal{A}$ nessa superfície é dado pelas parametrizações $\{\varphi, \psi\}$, e que $\varphi : [0, 1) \subset [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ e $\psi : (0, 1] \subset (-\infty, 1] \rightarrow (0, 1]$ são ambas iguais à função identidade. A mudança de parametrização $\psi^{-1} \circ \varphi : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ também é a função identidade, de modo que $\mathcal{A}$ é um atlas coerente, que define a orientação natural em $[0, 1]$.

Se considerarmos o semiespaço $H_0 = (-\infty, 0]$, então podemos considerar o atlas $\mathcal{B} = \{\xi, \zeta\}$, em que $\xi : (-1, 0] \subset H_0 \rightarrow [0, 1)$ é dado por $\xi(t) = -t$ e $\zeta : (-1, 0] \subset H_0 \rightarrow (0, 1]$ é dado por $\zeta(t) = 1 + t$. A mudança de parametrização $\zeta^{-1} \circ \xi : (-1, 0) \rightarrow (-1, 0)$ é a função $t \mapsto -1 - t$, de modo que o atlas $\mathcal{B}$ não é coerente.

Mas nenhum atlas em H_0 pode ser coerente, pois nele qualquer vizinhança de 0 deve ser parametrizada por uma função com derivada negativa, enquanto uma vizinhança de 1 deve ser parametrizada por uma função com derivada positiva.

Isso significa que a definição de orientação induzida no bordo não é adaptável para superfícies de dimensão 1, já que nenhum atlas construído à partir de parametrizações em H_0 pode ser coerente.

Definimos a orientação induzida em ∂S , no caso em que $\dim S = 1$, da seguinte maneira: se $x \in \partial S$, então a orientação será $+x$, se cada vetor de $T_x S$ apontar para fora da superfície S e $-x$, caso contrário. Por exemplo, no caso $[0, 1]$, a orientação é $+1$ (no ponto 1) e -0 no ponto 0 (pois os vetores tangentes a $[0, 1]$ apontam para dentro de $[0, 1]$ nesse caso). Analogamente, as semiretas $S_1 = (-\infty, a]$ é orientada em $\partial S_1 = \{a\}$ por $+a$, enquanto $S_2 = [b, \infty)$ é orientada em $\partial S_2 = \{b\}$ por $-b$. $\triangleleft$

Exemplo 7 (Orientação em produtos cartesianos de superfícies) O produto cartesiano das superfícies S_1 e S_2 é, como sabemos,⁶ uma superfície. Em cada ponto $(p, q) \in S_1 \times S_2$, o espaço tangente é dado por $T_{p,q}(S_1 \times S_2) = T_p S_1 \times T_q S_2$, e $T_p S_1, T_q S_2$ podem ser considerados subespaços de $T_{p,q}(S_1 \times S_2)$ por meio das identificações $S_1 \simeq S_1 \times \{q\}$ e $S_2 \simeq \{p\} \times S_2$.

Se S_1 e S_2 forem ambas orientáveis (veja o Exercício 14), então o conjunto das parametrizações $\varphi \times \psi$, em que φ e ψ são orientações positivas em S_1 e S_2 , respectivamente, define um atlas coerente.

Quando S_1 e S_2 forem ambas superfícies com bordo, o produto cartesiano não é uma superfície com bordo (veja o Exercício 17).

Mas, se S_1 for uma superfície com bordo e S_2 for uma superfície, então $S_1 \times S_2$ é uma superfície com bordo e $\partial(S_1 \times S_2) = \partial S_1 \times S_2$. Para verificar esse fato, basta notar que, se $U_0 \subset H \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ forem abertos no semiespaço H e em $\mathbb{R}^n$, respectivamente, então $U_0 \times V \subset H \times \mathbb{R}^n$ é um aberto no semiespaço $H \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Se a superfície com bordo S_1 e a superfície S_2 forem ambas orientáveis, então $S_1 \times S_2$ é uma superfície orientável com bordo, com o mesmo atlas coerente definido no caso de superfícies, apresentado anteriormente. A coerência desse atlas decorre da relação

$$(\varphi_1 \times \psi_2)^{-1} \circ (\varphi_1 \times \psi_1) = (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1) \times (\psi_2^{-1} \times \psi). \quad (8.2)$$

Um caso particular especialmente interessante é o produto cartesiano $I \times S$, em que $I = [0, 1]$ e S é uma superfície orientada. Consideramos a orientação em $[0, 1]$ como definida no Exemplo 6. Assim, $I \times S$ é uma superfície orientada. Como $\partial(I \times S) = S_0 \cup S_1$, em que $S_0 = \{0\} \times S$ e $S_1 = \{1\} \times S$, a orientação de $I \times S$ induz orientação em S_0 e S_1 , dada pelo Teorema 8.23. Por outro lado, S é uma superfície orientada e existem difeomorfismos naturais entre S e S_0 e S e S_1 , de forma que a orientação natural de S gera orientações para S_0 e S_1 , de acordo com o Exercício 10. Os difeomorfismos são $f_0 : S \rightarrow S_0$ dado por $f_0(x) = (0, x)$ e $f_1 : S \rightarrow S_1$ dado por $f_1(x) = (1, x)$. É claro que esses difeomorfismos fornecem a S_0 e S_1 a mesma orientação de S . Denotaremos essas orientações de $\{S_0\}$ e $\{S_1\}$, e as chamaremos de orientações geradas pela orientação de S .

Nosso objetivo é comparar a orientação em S_0 e S_1 , induzida por aquela de $I \times S$, com as orientações $\{S_0\}$ e $\{S_1\}$, geradas pela orientação de S .

⁶Veja o Exemplo 7 do Capítulo 6.

Afirmamos que a orientação em $\partial(I \times S)$ coincide com aquela de $I \times S$ em S_1 , enquanto é oposta a de $I \times S$ em S_0 . Mais precisamente, a orientação de $\partial(I \times S)$ é $-\{S_0\} \cup \{S_1\}$. De fato, sejam $\varphi : U \rightarrow \Omega \subset S$ uma parametrização positiva e $\psi : U \rightarrow \Omega \subset S$ uma parametrização negativa do aberto $\Omega \subset S$. Consideremos $\Phi : (-1, 0] \times U \rightarrow [0, 1] \times \Omega$ e $\Psi : (-1, 0] \times U \rightarrow (0, 1] \times \Omega$ dadas por⁷ $\Phi(t, u) = (1 + t, \varphi(u)) = (\zeta(t), \varphi(t))$ e $\Psi(t, u) = (-t, \psi(u)) = (\zeta(t), \psi(u))$. As parametrizações Φ e Ψ são parametrizações de $I \times S$ que satisfazem o Teorema 8.23, e ambas são positivas, como se depreende da igualdade (8.2), ao observarmos que $\zeta^{-1} \circ \zeta$ e $\varphi^{-1} \circ \psi$ são ambas negativas. (Note que, em virtude do Exemplo 6, a única maneira de obter um atlas coerente à partir de parametrizações de $[0, 1]$ definidas em H_0 consiste em tomar parametrizações com sinal oposto em S , pois as parametrizações de $[0, 1]$ serão sempre negativas.)

A orientação induzida por $I \times S$ em S_1 é determinada pela restrição de Φ ao bordo $\{0\} \times U$, ou seja, pela aplicação $u \mapsto (1, \varphi(u))$. Como $\varphi > 0$, a orientação dada por essa aplicação coincide com a orientação de $I \times S$. Por outro lado, a orientação induzida por $I \times S$ em S_0 é dada pela aplicação $u \mapsto (0, \psi(u))$, com $\psi < 0$. Isso quer dizer que ela é oposta a orientação $\{S_0\}$ e completa a prova de nossa afirmação. $\triangleleft$

8.4 PARTIÇÕES DA UNIDADE

NÃO VAI SER APRESENTADO NO CURSO.

8.5 EXERCÍCIOS

A lista de exercícios está muito irregular. Alguns desses exercícios foram retirados do livro do Elon. Contudo, nem este texto, nem o livro do Elon são suficientes para solucioná-los integralmente.

1. Demonstre o Corolário 8.6.
2. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de dimensão m e classe C^k , $k \geq 2$. O **fibrado tangente** de S é o conjunto

$$TS = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : p \in M, v \in T_p S\}.$$

Mostre que TS é uma superfície de dimensão $2m$ e classe C^{k-1} .

O **fibrado normal** de S é o conjunto

$$\nu S = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : p \in M, v \in (T_p S)^\perp\}.$$

Mostre que νS é uma superfície de dimensão n e classe pelo menos igual a C^{k-1} .

3. Seja $\mathcal{A}$ um atlas coerente na superfície orientável S , de classe C^k e dimensão m . Seja $\Omega \subset S$ um aberto conexo e $\varphi : U \rightarrow \Omega$ uma parametrização de Ω . Seja $\psi : U' \rightarrow \Omega'$ uma parametrização pertencente a $\mathcal{A}$, com $\Omega \cap \Omega' \neq \emptyset$. Então $\det J(\psi^{-1} \circ \varphi)(u)$ não muda

⁷Compare com o Exemplo 6.

de sinal enquanto $u \in \varphi^{-1}(\Omega \cap \Omega')$. (O ponto do exercício é que φ não precisa estar em $\mathcal{A}$, e que $\Omega \cap \Omega'$ não precisa ser conexo!)

4. Sejam $\varphi : U \rightarrow \Omega$, $\psi : V \rightarrow \Omega'$ e $\zeta : W \rightarrow \Omega''$ parametrizações de uma superfície S . Suponha que $S = \Omega \cup \Omega' \cup \Omega''$ e $\Omega \cap \Omega' \cap \Omega'' \neq \emptyset$. Além disso, suponha que as mudanças de coordenadas $\psi^{-1} \circ \varphi$, $\zeta^{-1} \circ \varphi$ e $\zeta^{-1} \circ \psi$ tenham sinal constante. Mostre que S é orientável.
5. Mostre que o conjunto das matrizes 3×3 de posto 1 é uma superfície orientável de dimensão 5 em $\mathbb{R}^9$.
6. Seja S o conjunto das matrizes 4×4 de posto 2. Mostre que S é uma superfície de dimensão 12 e classe C^∞ .
7. Um atlas $\mathcal{A}$ de classe C^k numa superfície S é **máximo** é um atlas com a seguinte propriedade: se $\mathcal{A}'$ for outro atlas de classe C^k em S , então $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$. Mostre que toda superfície C^k possui um atlas máximo de classe C^k .
8. Mostre que, se uma superfície S de classe C^k admite um atlas coerente de classe C^1 , então ela admite um atlas coerente de classe C^k .
9. Utilizando o Exemplo 3, mostre que a esfera $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície orientável.
10. Sejam S_1, S_2 superfícies de classe C^k e $f : S_1 \rightarrow S_2$ um difeomorfismo de classe C^k . Mostre que S_1 é orientável se, e somente se, S_2 for orientável.
11. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação C^k , $k \geq 1$. Suponha que c seja valor regular de f e que $0 \in f^{-1}(c)$. Mostre que existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com $0 \in V$, tal que $S \cap V$ é uma superfície difeomorfa a $W \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_{n-m+1} = \dots = x_n = 0\}$, em que $W \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto com $0 \in W$.
12. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.
 - (a) Mostre que $f^{-1}(0)$ não é uma superfície de classe C^1 .
 - (b) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com o mesmo sinal. Mostre que $f^{-1}(a)$ e $f^{-1}(b)$ são superfícies difeomorfas de classe C^∞ .
 - (c) O mesmo resultado vale se a e b tiverem sinal oposto?
13. Dê exemplo de uma superfície S que tem um atlas composto de apenas duas parametrizações, mas não é orientável.
14. Considere o produto cartesiano $S_1 \times S_2$ de duas superfícies de classe C^k . Mostre que $S_1 \times S_2$ é orientável se, e somente se, S_1 e S_2 forem ambas orientáveis.
15. Mostre que todo aberto Ω de uma superfície S de dimensão m e classe C^k é, por sua vez, uma superfície de dimensão m e classe C^k . Mostre que, se S for orientável, então Ω é orientável.

16. Seja $H_0 = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1 \leq 0\}$. Dado um semiespaço qualquer $H \subset \mathbb{R}^m$, mostre que existe um isomorfismo linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $T(H_0) = H$.
17. Mostre que o produto cartesiano de superfícies com bordo S_1 e S_2 não é uma superfície com bordo.

Capítulo 9

MUDANÇA DE VARIÁVEIS

9.1 O CASO UNIDIMENSIONAL

Seja $I_1 = [c, d]$ e $I_2 = [a, b]$ intervalos da reta. Seja $\varphi : I_1 \rightarrow I_2$ uma aplicação diferenciável tal que $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$. Sejam $f : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e g uma primitiva de f , isto é, $g' = f$. A fórmula de mudança de variáveis garante que

$$\int_{I_1} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{I_2} f(y)dy. \quad (9.1)$$

Esse resultado é facilmente obtido por meio do Teorema Fundamental do Cálculo. De fato, de acordo com esse Teorema,

$$\int_{I_2} f(y)dy = g(b) - g(a).$$

Uma vez que a Regra da Cadeia aplicada à $g \circ \varphi$ garante que

$$(g \circ \varphi)'(x) = g'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

vemos que o integrando no lado esquerdo de (9.1) corresponde à derivada de $(g \circ \varphi)$. Assim, de acordo com o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_{I_1} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = g(\varphi(d)) - g(\varphi(c)).$$

Como $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$, obtemos (9.1).

Nosso objetivo neste Capítulo é mostrar como o Teorema de Mudança de Variáveis em várias variáveis pode ser deduzido do Teorema Fundamental do Cálculo.

9.2 O TEOREMA DE MUDANÇA DE VARIÁVEIS

Definição 9.1 *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. O suporte de f , denotado $\text{supp } f$, é definido por*

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq 0\}}.$$

Em palavras, o suporte de f é o fecho do conjunto dos pontos em que f não é nula.

Isso quer dizer que $f(x) = 0$ para todo $x \notin \text{supp } f$.

Vamos supor que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função diferenciável e que $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja uma função duas vezes diferenciável. Vamos supor

(H1) φ é duas vezes diferenciável;

(H2) $\varphi = I$ fora da esfera unitária, isto é,

$$\varphi(x) = x \quad \text{para } \|x\| \geq 1.$$

Teorema 9.2 (Teorema de Mudança de Variáveis)

Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável com suporte compacto e $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação satisfazendo as hipóteses (H1) e (H2). Então

$$\int f(\varphi(x))(\det J\varphi(x))dx = \int f(y)dy. \quad (9.2)$$

Para provarmos esse Teorema, definimos $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{-\infty}^{y_1} f(z, y_2, \dots, y_n)dz.$$

Uma vez que f tem suporte compacto, g nada mais é do que a primitiva da função de uma única variável $f(\cdot, y_2, \dots, y_n)$, ou seja,

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(y_1, \dots, y_n) = f(y_1, \dots, y_n). \quad (9.3)$$

Além disso, como f é uma função diferenciável, g é uma função diferenciável.

Já que f tem suporte compacto, podemos escolher $c > 0$ suficientemente grande, de modo que f seja identicamente nula fora do cubo C definido por

$$\|y_i\| \leq c.$$

Decorre imediatamente de (9.3) que $g(y_1, \dots, y_n) = 0$, se $\|y_j\| > c$ para algum $j \in \{2, \dots, n\}$, ou se $y_1 \leq -c$. Podemos supor que $c > 1$, de forma que o cubo C contém a bola unitária $\|x\| \leq 1$. Como φ é a identidade I fora da esfera unitária, isso quer dizer que $f(\varphi(x))$ é igual a zero fora do cubo C . Assim, ao provarmos (9.2), podemos considerar que o lado esquerdo da igualdade esteja sendo integrado no cubo C .

A definição de g permite expressar o lado esquerdo de (9.2) em termos da derivada de g com relação à primeira variável:

$$\int f(\varphi(x))(\det J\varphi(x))dx = \int \frac{\partial g}{\partial x_1}(\varphi(x))(\det J\varphi(x))dx. \quad (9.4)$$

Lema 9.3 O integrando no lado direito da equação (9.4) pode ser escrito como

$$\det \begin{pmatrix} D(g \circ \varphi)(x) \\ D\varphi_2(x) \\ \vdots \\ D\varphi_n(x) \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

em que a matriz está sendo expressa por meio de suas linhas e $D\varphi_i(x)$ denota a i -ésima **linha** da matriz jacobiana de φ .

Demonstração: De acordo com a Regra da Cadeia, temos

$$D(g \circ \varphi)(x) = Dg(\varphi(x)) \cdot D\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(\varphi(x)) D\varphi_i(x).$$

A igualdade mostra que $D(g \circ \varphi)(x)$ é combinação linear dos vetores $D\varphi_1(x), \dots, D\varphi_n(x)$. Como os $n - 1$ últimos desses vetores são as $n - 1$ últimas linhas da matriz em (9.5), podemos subtraí-los de $D(g \circ \varphi)(x)$ sem alterar o valor do determinante em (9.5). Isso nos deixa com

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(\varphi(x)) D\varphi_1(x) \\ D\varphi_2(x) \\ \vdots \\ D\varphi_n(x) \end{pmatrix}.$$

A linearidade da função determinante permite que escrevamos essa expressão como

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(\varphi(x)) \det \begin{pmatrix} D\varphi_1(x) \\ D\varphi_2(x) \\ \vdots \\ D\varphi_n(x) \end{pmatrix},$$

que é justamente o integrando em (9.4). □

A expressão (9.5) pode ser escrita como:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(\varphi(x)) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(\varphi(x)) & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(\varphi(x)) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Expandindo esse determinante de acordo com sua primeira linha, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x_1} g(\varphi(x)) M_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} g(\varphi(x)) M_n, \quad (9.6)$$

em que $M_1, \dots, M_n$ são os cofatores da primeira linha da matriz jacobiana de $\varphi(x)$. Substituindo (9.6) na integral no lado direito de (9.4), obtemos

$$\int_{-c}^c \dots \int_{-c}^c \left[\frac{\partial}{\partial x_1} g(\varphi(x)) M_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} g(\varphi(x)) M_n \right] dx_1 \dots dx_n. \quad (9.7)$$

Consideremos o primeiro termo dessa integral:

$$\int_{-c}^c dx_2 \dots dx_n \int_{-c}^c \frac{\partial}{\partial x_1} g(\varphi(x)) M_1 dx_1.$$

Integrando por partes (com relação à variável x_1), vem

$$\begin{aligned} \int_{-c}^c \frac{\partial}{\partial x_1} g(\varphi(x)) M_1 dx_1 &= g(\varphi(x)) M_1 \Big|_{-c}^c - \int_{-c}^c g(\varphi(x)) \frac{\partial M_1}{\partial x_1} dx_1 \\ &= (gM_1)(c, x_2, \dots, x_n) - (gM_1)(-c, x_2, \dots, x_n) - \int_{-c}^c g(\varphi(x)) \frac{\partial M_1}{\partial x_1} dx_1 \\ &= \int_{-c}^c f(x_1, \dots, x_n) dx_1 - \int_{-c}^c g(\varphi(x)) \frac{\partial M_1}{\partial x_1} dx_1, \end{aligned}$$

pois $g(-c, x_2, \dots, x_n) = 0$, enquanto $M_1(c, x_2, \dots, x_n) = M_1(-c, x_2, \dots, x_n) = 1$, pois $g(x) = x$ para $\|x\| \geq 1$, de modo que $D\varphi(x) = I$ para $\|x\| \geq 1$.

Assim, o primeiro termo em (9.7) é igual a

$$\int_{-c}^c \dots \int_{-c}^c f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n - \int_{-c}^c \dots \int_{-c}^c g(\varphi(x)) \frac{\partial M_1}{\partial x_1} dx_1 \dots dx_n.$$

Procedemos do mesmo modo com relação às variáveis restantes. Obtemos, por exemplo,¹ que o segundo termo em (9.7) é igual a

$$- \int_{-c}^c \dots \int_{-c}^c g(\varphi(x)) \frac{\partial M_2}{\partial x_2} dx_1 \dots dx_n.$$

Lema 9.4 *Vale a identidade clássica*

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial M_n}{\partial x_n} \equiv 0, \quad (9.8)$$

em que $M_1, \dots, M_n$ são os cofatores relativos à primeira coluna da matriz jacobiana de $\varphi(x)$.

Demonstração: Temos que $M_1, \dots, M_n$ são os cofatores da primeira linha da matriz jacobiana de $\varphi(x)$:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Isso quer dizer que podemos representar o lado esquerdo de (9.8) simbolicamente como

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} D \\ D\varphi_2(x) \\ \dots \\ D\varphi_n(x) \end{pmatrix}. \quad (9.9)$$

¹Note que temos que mudar a ordem de integração, o que pode ser feito. Veja o Teorema 6.2, p. 58 do livro-texto.

Por exemplo, se $n = 2$, a expressão (9.9) (ou o lado esquerdo de (9.8)) é igual a

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}$$

o que confirma a igualdade (9.8), pois estamos supondo que $\varphi \in C^2$.

Por indução, desenvolvendo segundo os cofatores de uma linha qualquer que não a primeira, verificamos (9.8). □

Referências Bibliográficas

- [1] R. Abraham, J. E. Marsden e T. Ratiu: Manifolds, Tensor Analysis, and Applications, 2nd. Edition, Springer, New York, 1988.
- [2] R. G. Bartle: The Elements of Real Analysis, 2nd. edition, Wiley, New York, 1976.
- [3] H. J. Bortolossi: Cálculo Diferencial a Várias Variáveis, Editora PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2002.
- [4] M. P. do Carmo: Differential Forms and Applications, Springer, Berlin, 1994.
- [5] H. Cartan: Cours de Calcul Différentiel, Hermann, Paris, 1985.
- [6] K. Deimling: Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [7] J. Dieudonné: Foundations of Modern Analysis, Academic Press, New York, 1960.
- [8] S. Lang: Real and Functional Analysis, 3rd. Edition, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [9] E. L. Lima: Variedades Diferenciáveis, IMPA, Rio de Janeiro, 1973.
- [10] E. L. Lima: Espaços métricos, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.
- [11] E. L. Lima: Curso de Análise, volume 2, IMPA, Rio de Janeiro, 1981.
- [12] E. L. Lima: Análise Real, volume 2, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.
- [13] E. L. Lima: Análise no Espaço $\mathbb{R}^n$, IMPA, Rio de Janeiro, 2002.
- [14] J. T. Schwartz: Nonlinear Functional Analysis, Gordon and Breach, New York, 1969.
- [15] M. Spivak: Calculus on Manifolds, W.A. Benjamin, New York, 1965.
- [16] F. Warner: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer, Berlin, 1983.

Índice Remissivo

- adjunta de uma aplicação linear, 29
- aplicação
 - aberta, 49
 - bilinear, 12
 - de classe C^0 , 75
 - de classe C^∞ , 75
 - de classe C^n , 75
 - diferenciável, 14
 - uniformemente, 37
 - k-homogênea, 86
 - uniformemente diferenciável, 37
- aplicação analítica, 94
- aplicação diferenciável, 14
 - definida num semiespaço, 113
 - entre superfícies, 81
 - posto, 66
- aplicação linear
 - adjunta de uma, 29
- atlas, 108
 - coerente, 108
 - máximo, 121
- atlas coerente
 - em superfícies com bordo, 117
- base positiva, 88
- bordo, 112
 - de um aberto num semiespaço, 113
 - de uma superfície, 115
- caminho, 17
 - diferenciável, 18
- campo de vetores normais, 109
- carta, 76
- codimensão de uma superfície, 77
- conjunto
 - verticalmente convexo, 67
- contração, 7
- coordenadas
 - de uma função, 16
- curva, 17
- derivada
 - de aplicações
 - n -lineares, 16
 - bilineares, 15
 - constantes, 15
 - dadas por coordenadas, 16
 - do $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, 18
 - do $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, 17
 - lineares, 15
 - de caminhos, 17
 - de funções reais, 18
 - de uma aplicação definida num semiespaço, 113
 - interpretação geométrica, 21, 32
- derivada de f , 15
- desigualdade
 - de Cauchy-Schwarz, 2
 - do valor médio, 35
- difeomorfismo, 49
 - de aplicações definidas em semiespaços, 113
 - entre superfícies, 82
 - global, 49
 - local, 49
- distância, 10
 - geodésica, 46
- equações de Cauchy-Riemann, 29
- espaço métrico, 10
- espaço dual, 18
- espaço tangente, 28
 - a uma superfície com bordo, 117
 - ao gráfico de uma função, 22
- espaço vetorial
 - com produto interno, 1

- de Banach, 2
- euclidiano, 1
- normado, 1, 2
 - completo, 2
- espaços vetoriais
 - linearmente homeomorfos, 4
 - normados
 - homeomorfismo de, 4
- fórmula de Taylor
 - com resto de Lagrange, 96
 - com resto infinitesimal, 93
 - com resto integral, 95
- fibrado
 - normal, 120
 - tangente, 120
- forma local
 - das imersões, 65
 - das submersões, 61
- forma quadrática
 - indefinida, 99
 - negativa definida, 99
 - positiva definida, 99
 - positiva semidefinida, 99
- função
 - convexa, 102
 - holomorfa, 29
- funcionais lineares, 18
- gráfico de uma função, 28
- gradiente, 45
- hessiana da função f , 98
- homeomorfismo, 4
- identidade
 - de polarização, 3
 - do paralelogramo, 3
- imersão, 64
 - isométrica, 46
- immersões
 - forma local das, 65
- lema
 - da contração, 7
- matriz
 - hessiana, 98
 - matriz jacobiana, 17
 - máximo
 - absoluto, 97
 - estrito, 97
 - local, 97
 - estrito, 97
 - mínimo
 - absoluto, 97
 - estrito, 97
 - local, 97
 - estrito, 97
 - mudança de parametrização, 80
 - mudança de sinal de uma parametrização, 109
 - multiplicadores de Lagrange, 103
 - norma, 1
 - de uma aplicação linear, 6
 - ortogonalidade, 1
 - parâmetro, 76
 - parametrização, 76
 - definida em semiespaço, 114
 - positiva, 108
 - parametrizações compatíveis, 108
 - ponto crítico
 - não-degenerado, 102
 - ponto fixo, 7
 - posto
 - de uma aplicação diferenciável, 66
 - teorema do, 67
 - produto
 - escalar, 1
 - interno, 1
 - canônico, 1
 - identidade de polarização, 3
 - produto interno
 - em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, 30
 - produto vetorial, 13
 - regra da cadeia, 31
 - para aplicações definidas em semiespaços, 113
 - regras de derivação, 32
 - semiespaço, 112

- bordo de um, 112
- sistema de coordenadas, 76
- submersão, 60
- superfície
 - com bordo, 114
 - de nível, 45
 - orientável, 108
 - orientada, 108
 - produto, 78
- superfície com bordo
 - orientável, 117
- superfícies
 - produto cartesiano de, 78
- teorema
 - da aplicação aberta, 54
 - da aplicação injetora, 52
 - da aplicação inversa, 55
 - da aplicação sobrejetora, 54
 - de mudança de parametrização, 80
 - de mudança de variáveis, 124
 - de Pitágoras, 2
 - de representação de Riesz, 10
 - de Schwarz, 90
 - de Taylor com resto de Lagrange, 96
 - de Taylor com resto infinitesimal, 93
 - de Taylor com resto integral, 95
 - do ponto fixo
 - de Banach-Cacciopoli, 7
 - de Brouwer, 9
 - do posto, 67
 - do valor médio, 34
 - dos multiplicadores de Lagrange, 103
 - forma local das imersões, 65
 - forma local das submersões, 61
- valor regular, 84
- verticalmente convexo
 - conjunto, 67
- vetor
 - unitário, 2
- vetores
 - ortogonais, 1
 - perpendiculares, 1