

Introdução

Leis de conservação

Equações diferenciais parciais muitas vezes resultam de *leis de conservação*. Essas leis geralmente são expressas por meio de equações integrais¹ e garantem que certa grandeza física (energia, calor, massa etc) é preservada ou mesmo transformada durante um determinado processo.

Consideraremos aqui um princípio básico, chamado *lei de conservação da massa*. Sejam $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ um ponto e $u(x, t) \in \mathbb{R}$ a densidade de massa no ponto x e no tempo t de uma determinada substância distribuída num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, que também pode ser escolhido arbitrariamente. Quer dizer, fixado o ponto $x \in \Omega$, permitimos que a densidade de massa neste ponto varie com o tempo. Integrando $u(x, t)$ com relação a x no domínio Ω , obtemos

$$\text{massa total}^2 \text{ (no instante } t \text{) contida em } \Omega = \int_{\Omega} u(x, t) dx.$$

Pode ser que massa esteja sendo produzida (ou destruída) dentro de Ω (por exemplo, por meio de uma reação química). Vamos denotar por $f(x, t, u)$ a densidade de massa u que é produzida (ou destruída) no instante t no ponto $x \in \Omega$. Assim,

$$\text{massa total (no instante } t \text{) produzida em } \Omega = \int_{\Omega} f(x, t, u) dx.$$

(Claro, ao invés de massa produzida, podemos ter massa *destruída* em Ω .) Estamos pensando na massa contida em Ω como um processo dinâmico, em que a massa total em Ω está levando em conta a massa que está sendo produzida ou destruída nesse conjunto.

Seja $\Phi(x, t)$ um campo vetorial que rege o deslocamento da massa para fora (ou para dentro) de Ω . Se ν denota o vetor normal exterior unitário de $\partial\Omega$ (assim, em geral, ν depende de x), então

$$\text{fluxo}^3 \text{ através de } \Omega = \int_{\partial\Omega} \Phi(x, t) \cdot \nu dS,$$

em que dS denota o elemento de área em $\partial\Omega$.

¹Derivando essas equações integrais, obtemos equações diferenciais.

²Se $x \in \mathbb{R}^3$, essa integral é denotada por $\iiint_{\Omega} u(x, t) dV$ em um curso de cálculo, sendo que $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ em coordenadas cartesianas. A mesma observação também se aplica à próxima integral.

³Se $x \in \mathbb{R}^3$, em um curso de cálculo essa integral é denotada por $\iint_S \vec{\Phi} \cdot \vec{\nu} dS$ ou $\iint_S \Phi \cdot d\mathbf{S}$, em que $S = \partial U$.

O *Princípio de conservação* para $u(x, t)$ é dado por

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u dx = - \int_{\partial\Omega} \Phi \cdot \nu dS + \int_{\Omega} f dx. \quad (1)$$

Quer dizer, a taxa de variação da massa total de Ω é igual ao total de massa produzida (destruída) em Ω menos o fluxo da massa através de $\partial\Omega$. Para justificar o sinal negativo na integral do fluxo, suponha que f seja nulo, de modo que nenhuma massa esteja sendo criada ou destruída em Ω ; devido à orientação da normal ν , o fluxo é positivo quando a massa estiver saindo de Ω . Assim, o fluxo diminui a taxa em que u aumenta em Ω .

De acordo com o Teorema da Divergência⁴ temos

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \Phi dx = \int_{\partial\Omega} \Phi \cdot \nu dS$$

e supondo que $(d/dt) \int_{\Omega} u dx = \int_{\Omega} u_t dx$ (que hipóteses sobre u permitem a derivação sob o sinal de integração?), chegamos à forma

$$\int_{\Omega} u_t dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \Phi dx + \int_{\Omega} f dx,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} (u_t + \operatorname{div} \Phi - f) dx = 0, \quad (2)$$

em que $\operatorname{div} \Phi = \operatorname{div}_x \Phi$ denota o divergente de Φ com respeito a variável espacial x .

Chamamos essa igualdade de *forma integral do princípio de conservação*. Nela, tanto u como o fluxo Φ são incógnitas, enquanto se supõe que a expressão de f tenha sido estabelecida experimentalmente. Note que, nessa dedução, temos liberdade de escolha do domínio Ω .

Comparando (1) com (2), vemos que a primeira permite que u , Φ e f sejam descontínuas, enquanto a continuidade de Φ foi utilizada para a obtenção da segunda equação.

Uma vez que o domínio Ω pode ser escolhido arbitrariamente (e, portanto, concentrando em torno de cada ponto x), a forma integral do princípio de conservação produz a equação diferencial parcial

$$u_t + \operatorname{div} \Phi = f. \quad (3)$$

Na dedução acima, denotamos o fluxo dependendo apenas de (x, t) . Em situações mais complexas, o fluxo também pode depender de u ($\Phi = \Phi(x, t, u)$) ou mesmo de derivadas de u , mas o raciocínio anterior permanece válido. O termo f é chamado de termo de *reação*. A escolha de diferentes expressões para f modela fenômenos diferentes.

No caso de termos $f \equiv 0$, a equação (3) é chamada *lei de conservação*, enquanto (2) é chamada *lei de conservação em forma integral*.

Hipóteses sobre o fluxo Φ são chamadas de *equações de estado* e são feitas com base em observações empíricas de determinados fenômenos naturais. Diferentes equações de estado

⁴Que hipóteses permitem a aplicação do Teorema da Divergência? Note que o divergente está sendo tomado na variável espacial x e por isso, algumas vezes é denotado por $\operatorname{div}_x \Phi$.

conduzem a diferentes equações diferenciais parciais; quanto mais complexas as equações de estado, mais complexos os fenômenos descritos.

Exercício 1 Considere a equação de Korteweg-deVries (abreviada KdV), dada por

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0,$$

com $x \in \mathbb{R}$. Escreva essa equação na forma de lei de conservação e identifique a equação de estado utilizada.

Exercício 2 Deduza a equação diferencial parcial obtida de (3) utilizando a equação de estado $\Phi = -K \nabla u(x, t)$ (chamada de Lei de Fick), em que K é uma constante e $\nabla = \nabla_x$ denota o gradiente de u com respeito a variável x . Com o termo f presente, a equação obtida é chamada equação de reação e difusão. Se $f = 0$, trata-se de uma equação de difusão.

A equação do transporte

De todas as equações diferenciais parciais lineares importantes, a mais simples é a *equação do transporte com coeficientes constantes*. Ela é dada por

$$u_t + c \cdot \nabla u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times [0, \infty), \quad (4)$$

em que $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ é um vetor fixo e $u = u(x, t)$ (com $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$). Estamos denotando por $\nabla u = \nabla_x u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ o *gradiente* de u com respeito a x , de modo que $c \cdot \nabla u$ descreve o produto interno usual dos vetores c e ∇u no $\mathbb{R}^n$.

Essa edp resulta da lei de conservação (3) ao se supor $\Phi = cu = (uc_1, \dots, uc_n)$, $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ fixo. (Verifique!)

Para obter a solução de (4), basta interpretarmos seu significado. Com a notação $Du = (\nabla u, u_t)$, a equação é dada por

$$Du \cdot (c, 1) = (\nabla u, u_t) \cdot (c, 1) = 0,$$

em que $\cdot$ denota o produto interno usual no $\mathbb{R}^{n+1}$. (Note que, assim, estamos denotando por “ $\cdot$ ” tanto o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$ como o produto interno usual em $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.) Em outras palavras, ela nos diz que a derivada Du de $u(x, t)$ na direção do vetor $(c, 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ é nula. Assim, fixado um ponto $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ arbitrário, consideremos a reta partindo de (x, t) na direção de $(c, 1)$. Ela é dada por $(x, t) + s(c, 1) = (x + sc, t + s)$. Se definirmos, para $s \in \mathbb{R}$,⁵

$$z(s) = u(x + sc, t + s),$$

temos $z(0) = u(x, t)$ e vemos que (4) implica

$$z'(s) = Du \cdot (c, 1) = c \cdot \nabla u(x + sc, t + s) + u_t(x + sc, t + s) = 0.$$

Isso quer dizer que $z(s)$ é constante. (Note que $z'(s)$ é a derivada direcional de u na direção do vetor $v = (c, 1)$.) Ao obtermos o valor de z em qualquer ponto, teremos, em particular, a solução da equação do transporte no ponto (x, t) .

⁵A rigor, devemos ter $t + s \geq 0$.

O problema de valor inicial

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + c \cdot \nabla u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (5)$$

Tanto $c \in \mathbb{R}^n$ como $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são conhecidos. O problema consiste em determinar u , conhecendo seu valor no hiperplano $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

De acordo com o que já vimos, basta determinar o valor de z em um ponto arbitrário s . Uma vez que $z(s) = u(x + sc, t + s)$, para interceptarmos o hiperplano $\Gamma := \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$ basta fazer $s = -t$. Assim, $z(-t) = u(x - tc, 0) = u_0(x - tc)$. Como a solução da equação do transporte é o valor de $z(s)$ em qualquer ponto, concluímos que

$$u(x, t) = u_0(x - tc), \quad \text{para todo } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty). \quad (6)$$

Portanto, se o problema (5) possui uma solução suficientemente regular, essa solução é dada por (6). Reciprocamente, é fácil verificar que u definida por (6) é uma solução de (5) se $u_0 \in C^1$.

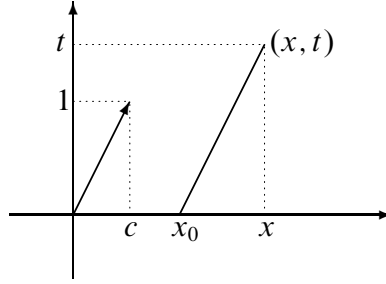


Figura 1: Se $x \in \mathbb{R}$, resolvemos o problema de valor inicial ao encontrarmos o ponto x_0 , em que $u(x_0, 0) = u(x - tc, 0) = u_0(x - tc)$. O dado inicial no ponto x_0 determina os valores de $u(x, t)$ em toda a reta $x = x_0 + ct$ e todos os pontos dessa reta tem seu valor determinado apenas pelo valor do dado inicial no ponto x_0 .

Exercício 3 Mostre que (6) é uma solução de (5), se $u_0 \in C^1$.

Observação Se u_0 não for de classe C^1 , o problema (5) não possui solução de classe C^1 . Mas, mesmo assim, a expressão (6) representa o único candidato razoável a solução de (5). Nesse caso, $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $u(x, t) = u_0(x - tc)$ é chamada *solução fraca*, mesmo se u_0 (e, portanto, u) for descontínua.

O problema não homogêneo

Consideremos a versão não homogênea de (5):

$$\begin{cases} u_t + c \cdot \nabla u = f & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (7)$$

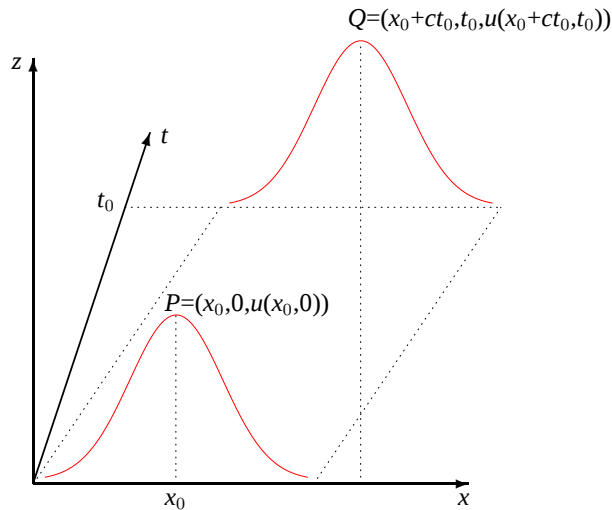


Figura 2: A figura, feita para $x \in \mathbb{R}$, justifica a denominação de equação do transporte: o dado inicial é transportado na direção das retas $x = \xi + ct$ com o passar do tempo, em que $\xi \in \mathbb{R}$.

É natural tentarmos relacionar a solução do problema homogêneo com a solução procurada.

Exercício 4 *Porque é natural essa tentativa?*

Logo, consideremos $z(s) := u(x + sc, t + s)$ para $s \in \mathbb{R}$. Então temos (verifique!)

$$z'(s) = c \cdot \nabla u(x + sc, t + s) + u_t(x + sc, t + s) = f(x + sc, t + s).$$

Isso quer dizer que z pode ser facilmente obtido. Como $z(0) = u(x, t)$ e $z(-t)$ são conhecidos, vem

$$\begin{aligned} u(x, t) - u_0(x - ct) = z(0) - z(-t) &= \int_{-t}^0 z'(s) ds \\ &= \int_{-t}^0 f(x + sc, t + s) ds \\ &= \int_0^t f(x + (s - t)c, s) ds. \end{aligned}$$

Assim,

$$u(x, t) = u_0(x - tc) + \int_0^t f(x + (s - t)c, s) ds \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0) \quad (8)$$

resolve o problema (7).

Exercício 5 *Mostre que*

$$\int_{-t}^0 f(x + sc, t + s) ds = \int_0^t f(x + (s - t)c, s) ds.$$

Exercício 6 *Mostre que (8) é uma solução de (7).*

Observação 0.1 Ao analisarmos a solução apresentada para os problemas (5) e (7), nossa primeira impressão é que análise geométrica que permitiu resolvê-los só excepcionalmente poderá ser aplicada. Veremos, ao estudar equações quase lineares de primeira ordem, que considerações geométricas nos fornecerão um método muito importante na solução de problemas de equações diferenciais parciais: o *método das características*. $\triangleleft$

Uma edp raramente é estudada por si só; em geral, é estudada juntamente com condições iniciais – como $u(x, 0) = u_0(x)$ – e/ou condições de fronteira – como $u(0, t) = 0$. Uma vez que equações diferenciais parciais resultam do estudo de fenômenos naturais ou geométricos, o objetivo dessas condições é permitir a obtenção de uma solução que descreva o fenômeno considerado. Em geral, isso leva às seguintes questões:

- (a) O problema possui solução? Essa solução está definida em todo o domínio considerado? Por exemplo, se estivermos estudando um problema de evolução (isto é, dependente do tempo t), a solução está definida para todo $t > 0$? (Nesse caso, dizemos que a solução encontrada é uma solução *global*.) Se temos uma solução global, qual o tipo de solução obtida para t suficientemente grande? (Quer dizer, estudamos o *comportamento assintótico* de uma solução global.)
- (b) A solução encontrada é única? Em grande parte dos fenômenos naturais estudados constata-se empiricamente a existência de uma única solução; se acreditamos que o problema de edp considerado modela bem o fenômeno natural estudado, essa unicidade deve ser obtida matematicamente.
- (c) uma vez que muitas vezes dados iniciais ou de fronteira são aproximações ou simplificações de situações reais, queremos que pequenas variações nesses dados provoquem pequenas variações na solução obtida. Quando isso ocorre, dizemos que o problema é *bem posto*.

O tipo de uma equação quase sempre define quais condições são necessárias para que o problema seja bem posto. Por exemplo, como veremos, problemas elípticos raramente são bem postos utilizando condições iniciais. (Afinal, muitos deles resultam do comportamento assintótico de problemas de evolução e o efeito de dados iniciais não deve perdurar nessa situação.) Por outro lado, problemas como (7) possuem solução única determinada apenas pelos dados iniciais.

Capítulo 1

Conceitos Elementares

1.1 Definições básicas

Uma equação diferencial parcial (edp) de *segunda ordem* em duas variáveis (x, t) é uma expressão da forma

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}) = 0, \quad (1.1)$$

em que F é uma função e as variáveis independentes (x, t) pertencem a um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. (A *ordem* de uma edp é dada pela derivada de maior ordem que ocorre na equação que a define. Assim, a definição dada é facilmente estendida para equações de qualquer ordem e para qualquer número de variáveis independentes. Também podemos considerar funções *complexas* $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ (que raramente serão abordadas neste texto) ou mesmo funções $u : \Omega \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ (que não serão abordadas neste texto).

Observação 1.1 Utilizaremos diversas notações para as derivadas de uma função

$$u : \begin{array}{ccc} \Omega \subset \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & u(x_1, \dots, x_n). \end{array}$$

Por exemplo, denotaremos as derivadas de u com relação à variável x_1 indiferentemente por

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad u_{x_1}, \quad \partial_{x_1} u, \quad \partial_1 u \quad \text{ou} \quad D_1 u$$

enquanto a função obtida ao se derivar u primeiro com relação a x_1 e depois com relação a x_2 será denotada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad u_{x_1 x_2}, \quad \partial_{x_2} \partial_{x_1} u, \quad \partial_2 \partial_1 u \quad \text{ou} \quad D_2 D_1 u. \quad \triangleleft$$

Uma solução *clássica* dessa edp é uma função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 (pois a equação dada é de segunda ordem) que, substituída na equação (1.1), a transforma em uma identidade. (Também essa definição pode ser facilmente estendida. Mais adiante, neste

texto, teremos a oportunidade de estender o conceito de solução.) O gráfico de uma solução $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ descreve uma superfície no sistema de coordenadas xtu do $\mathbb{R}^3$.

Estamos assumindo que x seja uma variável espacial e t uma variável temporal. Equações desse tipo são chamadas de *equações de evolução*. Se as variáveis forem todas espaciais, dizemos que é uma *equação de equilíbrio*. Nesse caso, é usual denotar as variáveis independentes por x e y (ou $x_1, \dots, x_n$ no caso de existirem n variáveis independentes). Equações de evolução descrevem fenômenos que dependem do tempo, enquanto equações de equilíbrio governam fenômenos depois que efeitos transientes são desprezíveis ou não mais existem.

Podemos estudar equações diferenciais parciais utilizando a linguagem de operadores. Assim, uma edp de segunda ordem em duas variáveis é *linear* se o operador que ela define for linear na variável dependente u e *não-linear* caso contrário. Sendo mais preciso, a edp linear de segunda ordem mais geral no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é dada por

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y + f(x, y)u = g(x, y), \quad (1.2)$$

pois é linear o operador de segunda ordem $L : C^2(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ definido por¹

$$Lu = a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y + f(x, y)u.$$

(Estamos assumindo que algum dos *coeficientes* a, b ou c não seja identicamente nulo pois, caso contrário, a equação não seria de segunda ordem. A utilização do coeficiente $2b$ ao invés de simplesmente b será justificada posteriormente.) Assim, a equação (1.2) pode ser descrita por $Lu = g$.

Essa equação é *homogênea* se $g(x, y) \equiv 0$. Dada uma equação não-homogênea $Lu = g$, dizemos que $Lu = 0$ é sua equação homogênea *associada*. Note que combinações lineares de soluções de uma edp linear homogênea são também soluções dessa equação. Essa propriedade básica de equações lineares algumas vezes pode ser generalizada ao considerarmos uma sequência infinita de soluções de uma edp:

Proposição 1.2 (Princípio da Superposição)

Seja $L : C^2(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ um operador linear de segunda ordem e (u_n) uma sequência de soluções clássicas da edp homogênea $Lu = 0$. Se (α_n) for uma sequência de escalares e a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n(x)$$

for convergente em Ω e suas derivadas parciais forem obtidas por derivação termo a termo, então

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$$

também é solução de $Lu = 0$.

¹Note que os espaços envolvidos estão sendo definidos devido ao conceito de solução que estamos assumindo; com um conceito de solução mais amplo, esses espaços podem ser alterados.

Demonstração: Por hipótese temos, para $i, j \in \{1, 2\}$,

$$D_i v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n D_i u_n$$

e

$$D_i D_j v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n D_i D_j u_n.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Lv(x) &= a(x, y) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n D_1 D_1 u_n(x, y) \right) + 2b(x, y) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n D_2 D_1 u_n(x, y) \right) \\ &\quad + c(x, y) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n D_2 D_2 u_n(x, y) \right) + d(x, y) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n D_1 u_n(x, y) \right) \\ &\quad + e(x, y) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n D_2 u_n(x, y) \right) + f(x, y) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n(x, y) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(a(x, y) D_1 D_1 u_n(x, y) + 2b(x, y) D_2 D_1 u_n(x, y) + c(x, y) D_2 D_2 u_n(x, y) \right. \\ &\quad \left. + d(x, y) D_1 u_n(x, y) + e(x, y) D_2 u_n(x, y) + f(x, y) u_n(x, y) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n L u_n(x, y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

É claro que a Proposição 1.2 pode ser estendida para operadores lineares de ordem k em qualquer número de variáveis independentes. Existem resultados que garantem que as derivadas de $v(x)$ são obtidas por derivação termo a termo: veja [7], p. 270.

Exercício 7 Mostre que a edp $u_t + uu_x = 0$ não é uma equação linear.

A relação entre uma edp linear $Lu = g$ e a edp homogênea associada $Lu = 0$ segue de acordo com a Álgebra Linear: as soluções de $Lu = g$ são dadas por $v = u_p + u_h$, em que u_p é uma solução particular de $Lu = g$ e u_h uma solução de $Lu = 0$.

Exercício 8 Prove essa afirmação.

A parte de uma edp constituída por seus termos de maior ordem é chamada *parte principal* da equação. Por exemplo, a edp de equilíbrio dada por

$$uu_y u_{xx} + yuu_x = 0$$

é uma equação de segunda ordem cuja parte principal é dada por $uu_y u_{xx}$. Estamos dando exemplo de uma equação de equilíbrio, mas não existe qualquer alteração nessa denominação se tivermos a variável t ao invés de y . Em muitos casos, a parte principal de uma edp determina as principais propriedades de suas soluções.

Dentre as equações não-lineares, uma classe importante é constituída pelas equações *semilineares*, isto é, por aquelas cuja parte principal é linear. Assim, por exemplo, para $(x, t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, é semilinear a equação de Kortweg-deVries (abreviada KdV)

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0,$$

pois é linear em seu termo de terceira ordem. A equação semilinear de segunda ordem mais geral no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é dada por

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y).$$

Como antes, essa denominação também se aplica a uma edp de evolução.

Se uma edp de segunda ordem em duas variáveis não for semilinear, ela é chamada *quase linear*² se sua parte principal tiver a forma

$$a(x, t, u, u_x, u_t)u_{xx} + 2b(x, t, u, u_x, u_t)u_{xt} + c(x, t, u, u_x, u_t)u_{tt}.$$

Em outras palavras, a edp é quase linear se ela for linear com respeito às derivadas da ordem da equação. Assim, uma edp quase linear em duas variáveis pode ser escrita como

$$a(x, t, u, u_x, u_t)u_{xx} + 2b(x, t, u, u_x, u_t)u_{xt} + c(x, t, u, u_x, u_t)u_{tt} + d(x, t, u, u_x, u_t) = 0.$$

Por exemplo, a edp de equilíbrio dada por

$$uu_y u_{xx} + yuu_x = 0$$

é quase linear, pois sua parte principal é dada por $uu_y u_{xx}$. Uma edp que não é quase linear é chamada de *totalmente não linear*. Por exemplo, a edp $3(u_t)^2 + u_x = f(x, t)$ é totalmente não linear.

Exercício 9 Qual é a forma geral de uma edp quase linear de quarta ordem em duas variáveis?

Exercício 10 Escreva a forma geral de uma equação quase linear de primeira ordem em duas variáveis.

²Frequentemente essa tipo de edp é chamada *quasilinear*, mas não há justificativa para a utilização do prefixo latino *quasi* ao invés de quase.

1.2 Solução geral e condições auxiliares

Como sabemos, a *solução geral* de uma equação diferencial ordinária de ordem k é uma combinação linear de k funções linearmente independentes. Em geral, obtida a solução geral de uma equação ordinária, uma solução particular satisfazendo k dados iniciais é obtida dessa pela resolução de um problema algébrico.

Exemplo 1.3 Consideremos, no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, a equação linear homogênea

$$u_{xy} = 0.$$

Fixando a variável x e integrando com relação a y , obtemos $u_x = h(x)$, em que $h \in C^1(\Omega)$ é uma função arbitrária que depende unicamente da variável x . Uma nova integração produz

$$u(x, y) = f(x) + g(y),$$

em que f é uma primitiva de h e $g \in C^2(\Omega)$ é uma função arbitrária. Note que o fato de procurarmos soluções clássicas implica que tanto f quanto g são funções de classe C^2 . Podemos então dizer que, para $(x, y) \in \Omega$ a solução geral da equação dada é o conjunto

$$\{u(x, y) = f(x) + g(y) : f, g \in C^2\}$$

conjunto esse que envolve duas funções *arbitrárias* de classe C^2 . Escolhendo $f(x) = x^n$ (por exemplo) e $n \in \mathbb{N}$, notamos imediatamente que o conjunto de soluções da equação dada tem dimensão infinita. $\triangleleft$

Assim, sem tentarmos ser precisos, podemos dizer que a *solução geral* de uma edp de primeira ordem deve envolver uma função arbitrária, a de uma edp de segunda ordem deve envolver duas funções arbitrárias e assim por diante. Contudo, a obtenção da solução geral de uma edp não implica na solução de um problema específico:

Exemplo 1.4 Procuremos a solução da edp

$$u_y = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^2$$

satisfazendo a condição auxiliar

$$u(0, y) = y^3.$$

Integrando a equação dada, encontramos $u(x, y) = f(x)$, em que $f \in C^1(\mathbb{R})$ é uma função arbitrária. Substituindo $u(0, y) = y^3$, chegamos a igualdade absurda $f(0) = y^3$.

Observe que podemos trocar o dado $u(0, y) = y^3$ por $u(0, y) = g(y)$, em que g é qualquer função não constante e o problema continuará não possuindo solução. Por outro lado, se $g(y)$ for constante, o problema possuirá uma infinidade de soluções. $\triangleleft$

A inexistência de soluções de uma edp pode acontecer sob situação mais geral: existem equações lineares não homogêneas de primeira ordem que não possuem solução, mesmo sem a prescrição de qualquer condição auxiliar! (Veja [9].)

O fato da solução geral de uma edp envolver funções arbitrárias sugere que o dado inicial deve ser dado na forma

$$u(0, y) = h(y) \quad (1.3)$$

ou, mais geralmente,

$$u(\alpha(s), \beta(s)) = h(s), \quad (1.4)$$

em que $s \mapsto (\alpha(s), \beta(s)) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ é a parametrização de uma curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega$, em que I é um intervalo não degenerado. No caso de equações de segunda ordem, devemos prescrever não apenas o comportamento de u na curva γ , como também o de uma de suas derivadas nessa mesma curva γ . Assim, por exemplo, são usuais condições auxiliares como

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad u_x(x, 0) = g(x), \quad x \in I, \quad (1.5)$$

em que $f \in C^2(I)$ e $g \in C^1(I)$ são dadas. Condições auxiliares como (1.4), (1.3) ou (1.5) são chamadas de *condições iniciais*.

Encontrar a solução de uma edp de primeira ordem satisfazendo uma condição inicial do tipo (1.4) é chamado *problema de Cauchy*; se a condição inicial for do tipo (1.3), o problema é chamado *problema de valor inicial*.

No caso de uma edp linear de primeira ordem com coeficientes constantes, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} au_x + bu_y + cu = f(x, y) \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (1.6)$$

possui solução única, como no caso de um problema de valor inicial para uma equação diferencial linear ordinária de primeira ordem. É o que agora mostraremos.

A obtenção da solução desse problema é feita com a introdução de novas variáveis (s, t) , de modo que, nessas novas variáveis, (1.6) assuma a forma

$$w_s + kw = \phi(s, t),$$

em que k é uma constante. Consideremos um exemplo simples:

Exemplo 1.5 Consideremos o problema linear de primeira ordem

$$u_x + 2u_y - 2u = 1 \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (1.7)$$

Consideremos então a mudança de variável linear

$$x = As + Bt, \quad y = Cs + Dt,$$

em que as constantes A, B, C e D serão determinadas. Definimos então $u(x, y) = w(s, t)$. Então

$$w_s = u_x \frac{\partial x}{\partial s} + u_y \frac{\partial y}{\partial s} = Au_x + Cu_y.$$

Comparando com a equação dada, chegaremos à forma $w_s - 2w = 1$ se tomarmos $A = 1$ e $C = 2$. Note que a única hipótese sobre os coeficientes B e D que faremos será de modo a garantir que a aplicação $(x, y) \mapsto (s, t)$ seja uma bijeção. Esse é o caso se tivermos

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq 0.$$

Consideremos agora o problema homogêneo associado. Para satisfazer a condição $u(x, 0) = u_0$, vamos escolher B e D de modo que a reta $y = 0$ corresponda à reta $s = 0$. Observe que $y = 0$ é a reta na qual foi definida a condição inicial do problema dado. Em outras palavras, teremos $y = 2s$ se escolhermos $D = 0$. Escolheremos então $B = 1$, pois essa escolha torna invertível a aplicação $(x, y) \mapsto (s, t)$. Assim, a mudança de variável que escolhemos é

$$x = s + t, \quad y = 2s,$$

cujas inversa é dada por

$$s = \frac{1}{2}y, \quad t = x - \frac{1}{2}y.$$

Agora resolvemos a equação não-homogênea $w_s - 2w = 1$, o que pode ser feito multiplicando essa equação pelo fator integrante e^{-2s} . Então a equação $w_s - 2w = 1$ pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial s}(e^{-2s}w) = e^{-2s},$$

de onde vem

$$e^{-2s}w = -\frac{1}{2}e^{-2s} + g(t),$$

ou seja,

$$w(s, t) = -\frac{1}{2} + g(t)e^{2s}$$

em que $g \in C^2$ é arbitrária. Voltando às variáveis x e y , obtivemos a solução geral da equação $u_x + 2u_y - 2u = 1$:

$$w(s, t) = u(x, y) = -\frac{1}{2} + g\left(x - \frac{1}{2}y\right)e^y. \quad (1.8)$$

Não é difícil verificar que (1.8) é uma solução de $u_x + 2u_y - 2u = 1$, qualquer que seja a função g .

Agora vamos impor que essa solução geral satisfaça ao dado inicial $u(x, 0) = u_0(x)$. Substituindo essa igualdade em (1.8), obtemos

$$u_0(x) = -\frac{1}{2} + g(x),$$

de onde vem $g(x) = \frac{1}{2} + u_0(x)$.

Isso significa que a solução do problema (1.7) é dada por

$$u(x, y) = -\frac{1}{2} + e^y \left[u_0\left(x - \frac{1}{2}y\right) + \frac{1}{2} \right].$$

◁

Analisando a solução apresentada no Exemplo 1.5, vemos que a aplicação $(x, y) \mapsto (s, t)$ é invertível pois o coeficiente $C = 2 \neq 0$. No caso da edp $au_x + bu_y + cu = g$, esse coeficiente corresponde ao valor de b . Supondo $b \neq 0$, a solução do Exemplo 1.5 generaliza-se imediatamente de modo a resolver (1.6) em exemplos concretos.

Exercício 11 *Ache a solução do problema de Cauchy*

$$u_x - u_y + u = 1, \quad u(x, 0) = \sin x.$$

Exercício 12 *Ache a solução geral da edp*

$$au_x + bu_y + cu = 0,$$

em que a, b e c são constantes, com $b \neq 0$. Em seguida, resolva o problema de Cauchy formado por essa edp e pela condição inicial $u(x, 0) = u_0(x)$.

Mas o que acontece se tivermos $b = 0$? É o que veremos no próximo exemplo.

Exemplo 1.6 Consideremos o problema de Cauchy

$$u_x + 2u = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Uma vez que $u_x/u = -2$, integrando essa equação com relação a variável x , obtemos

$$\ln u(x, y) = -2x + g(y) \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = e^{g(y)} e^{-2x}.$$

Uma vez que $u_0(x) = u(x, 0) = e^{g(0)} e^{-2x} = k e^{-2x}$ com $k = e^{g(0)} > 0$, o problema só tem solução se $u_0(x) = k e^{-2x}$, $k > 0$. Nesse caso, toda função g tal que $e^{g(0)} = k$ é solução do problema.

Assim, ou o problema dado não tem solução, ou possui uma infinidade delas. ◁

Um estudo detalhado de equações de primeira ordem será feita no próximo capítulo. De qualquer modo, é bom ressaltar que a exigência $b \neq 0$ está associada ao dado inicial $u(x, 0)$. Como veremos, com dados iniciais do tipo $u(\alpha(s), \beta(s)) = u_0(s)$, serão outras as condições que asseguram a existência de solução para o problema de Cauchy.

Capítulo 2

Equações de Primeira Ordem

Este capítulo será devotado ao estudo de problemas envolvendo equações diferenciais parciais de primeira ordem. Daremos ênfase ao estudo de equações quase lineares, mas também apresentaremos resultados sobre problemas gerais de primeira ordem.

2.1 Equações quase lineares

Começaremos estudando equações quase lineares em duas variáveis. Escreveremos essas equações na forma

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u).$$

Estamos supondo que $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, que as funções a, b e c sejam de classe C^1 (em $\Omega \times \mathbb{R}$) e que a, b não sejam simultaneamente nulos em $\Omega \times \mathbb{R}$.

Supondo conhecida uma solução $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dessa edp, o gráfico $z = u(x, y)$ (no espaço tridimensional xyz) define uma superfície, chamada *superfície solução*, parametrizada por $(x, y) \mapsto (x, y, u(x, y))$, de forma que seu vetor normal pode ser tomado como

$$v = v(x, y) = (u_x, u_y, -1).$$

Exercício 1 *Mostre que o vetor $(u_x, u_y, -1)$ é normal à superfície parametrizada por $(x, y) \mapsto (x, y, u(x, y))$.*

Escrevendo a edp na forma $au_x + bu_y - c = 0$, temos uma interpretação geométrica para essa equação:

$$au_x + bu_y - c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a, b, c) \cdot (u_x, u_y, -1) = 0,$$

em que $\cdot$ denota o produto interno usual do $\mathbb{R}^3$.

As funções dadas $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$ e $c(x, y, z)$ definem o campo vetorial $\Phi: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (U é determinado pelo domínio das funções a, b e c)

$$\Phi(x, y, z) = (a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z)).$$

Assim, procuramos uma superfície S no espaço tridimensional xyz que seja o gráfico de uma função u e cujo vetor normal seja perpendicular ao campo Φ . Dito de outra forma, o campo Φ é tangente à superfície solução S , dada como gráfico de função, em cada ponto de S .

Um problema clássico do estudo de equações ordinárias está diretamente associado à situação descrita: dado um campo vetorial Φ , encontre uma curva $\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tal que $\Gamma'(t) = (a(x(t), y(t), z(t)), b(x(t), y(t), z(t)), c(x(t), y(t), z(t)))$. No contexto de equações ordinárias, essa curva $\Gamma(t)$ é chamada curva integral do campo Φ . Nós chamaremos essa curva de *curva característica* da edp quase linear $au_x + bu_y = c$.

Definição 2.1 Uma curva $\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ dada como solução de

$$\begin{aligned}x'(t) &= a(x(t), y(t), z(t)), \\y'(t) &= b(x(t), y(t), z(t)), \\z'(t) &= c(x(t), y(t), z(t))\end{aligned}$$

é chamada *curva característica* da edp quase linear $au_x + bu_y = c$.

A ligação entre curvas características e soluções de $au_x + bu_y = c$ é clara: seja u uma solução dessa edp e consideremos uma curva característica $\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e sua projeção $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$. Restringindo a solução u à curva $\gamma(t)$ (isto é, considerando $u(x(t), y(t))$), então a curva $t \mapsto (x(t), y(t), u(x(t), y(t)))$ está inteiramente contida da superfície solução $\{z = u(x, y)\}$.

Exercício 2 Verifique esse fato.

Fixemos então um ponto P de uma superfície solução $z = u(x, y)$. Considerando o sistema que define uma curva característica como um problema de valor inicial, vemos que existe uma curva característica passando por P .

Consideremos agora um problema de Cauchy quase linear

$$\begin{cases} au_x + bu_y = c, \\ u(x_0(s), y_0(s)) = u_0(s), \end{cases} \quad (2.1)$$

em que $a = a(x, y, u)$, $b = b(x, y, u)$, $c = c(x, y, u)$ e as funções α, β e u_0 são de classe C^1 e $(x_0(s), y_0(s)) \in \Omega$ para todo s em certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. É claro, vamos supor que os coeficientes a e b não sejam simultaneamente nulos em Ω . Vamos denotar $r(s) = (x_0(s), y_0(s)) \in \mathbb{R}^2$ e $R(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s)) \in \mathbb{R}^3$ as curvas definidas pelo dado inicial. Vamos supor que a curva $r(s)$ seja *regular*, isto é, que $r'(s) = (x'_0(s), y'_0(s)) \neq (0, 0)$ para todo $s \in I$.

Observe que (2.1) nos dá uma informação importante: a curva $R(s)$ deve pertencer à superfície solução procurada!

Antes de interpretarmos geometricamente o problema de Cauchy quase linear, consideremos uma solução clássica da edp $au_x + bu_y = c$. Nesse caso, a igualdade

$$u(x_0(s), y_0(s)) = u_0(s)$$

pode ser derivada com respeito a $s \in I$, o que nos dá

$$x'_0(s)u_x(x_0(s), y_0(s)) + y'_0(s)u_y(x_0(s), y_0(s)) = u'_0(s), \quad (2.2)$$

chamada *condição da faixa* em $s \in I$. Ao abordarmos equações totalmente não lineares, essa condição será estudada detalhadamente.

Exercício 3 Interprete geometricamente a condição da faixa (2.2).

Note que, fixado o parâmetro $s_0 \in I$, essa é uma equação linear não homogênea nas incógnitas $u_x = u_x(x_0(s_0), y_0(s_0))$ e $u_y = u_y(x_0(s_0), y_0(s_0))$. Uma segunda equação linear nessas mesmas incógnitas nos é dada pela edp $au_x + bu_y = c$ se tomarmos $(x, y) = (x_0(s_0), y_0(s_0))$ e $u(x_0(s_0), y_0(s_0)) = u_0(s_0)$. Assim, temos o sistema linear

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ u'_0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

em que $a = a(x_0(s_0), y_0(s_0), u_0(s_0))$, $\alpha' = x'_0(s_0)$ etc.

Passando para a matriz aumentada

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha' & \beta' & u'_0 \end{pmatrix},$$

temos os seguintes casos a considerar:

- (i) $\det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} \neq 0$, o que implica que o sistema (2.3) possui solução única. Quer dizer, determinamos unicamente os valores de u_x e u_y no ponto $(x_0(s_0), y_0(s_0))$;
- (ii) $(a, b, c) = \lambda(\alpha', \beta', u'_0)$ para uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$, caso em que o sistema (2.3) possui infinitas soluções no ponto $(x_0(s_0), y_0(s_0))$;
- (iii) $(a, b) = \lambda(\alpha', \beta')$, mas $c \neq \lambda u'_0$, caso em que o sistema (2.3) não possui solução.

Uma conclusão é imediata: o problema (2.1) não possui solução no caso em que (iii) ocorre: há um conflito entre o dado inicial e a própria edp nesse problema.

Vamos mostrar que o caso (i) corresponde àquele em que o problema (2.1) possui solução única.

Agora estamos em condições de interpretar geometricamente o problema de Cauchy quase linear. Suponhamos que o caso (i) ocorra em todo ponto $s \in I$. Nesse caso, procuramos uma superfície S que contenha inteiramente a curva $R(s)$ dada, que seja perpendicular ao vetor $v = (u_x, u_y, -1)$ em todos os pontos de $R(s)$ (note que, de acordo com a hipótese (i), esse vetor é conhecido) e que seja dada como gráfico da função $z = u(x, y)$.

Definição 2.2 Sejam $r_1: I_1 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $r_2: I_2 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas curvas tais que $r_1(s_0) = r_2(t_0)$. Dizemos que r_1 e r_2 interceptam-se **transversalmente** (ou que são transversais) no ponto $r_1(s_0) = r_2(t_0)$, se os vetores $r'_1(s_0)$ e $r'_2(t_0)$ forem linearmente independentes.

Definição 2.3 Para cada ponto $s_0 \in I$ (o intervalo de definição do dado inicial) a curva $\Gamma: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ em que Γ é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t), z(t)), & x(0) = x_0(s_0) \\ y'(t) = b(x(t), y(t), z(t)), & y(0) = y_0(s_0) \\ z'(t) = c(x(t), y(t), z(t)), & z(0) = u_0(s_0) \end{cases} \quad (2.4)$$

é chamada **curva característica** no ponto $(x_0(s_0), y_0(s_0), u_0(s_0))$ da equação parcial quase linear $au_x + bu_y = c$, enquanto a curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ é chamada curva **característica plana** no ponto $(x_0(s_0), y_0(s_0))$ dessa mesma equação.

O sistema (2.4) pode ser denotado por $\Gamma'(t) = \Phi(\Gamma(t))$, $\Gamma(0) = R(s_0)$.

Exercício 4 Utilizando os conceitos de transversalidade e equação característica, reinterprete os resultados obtidos sobre o problema linear (2.3).

Ao variarmos o ponto $s = s_0 \in I$, obteremos uma família de curvas dependendo desse ponto s . Para salientarmos essa dependência, denotaremos $\Gamma(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ e $\gamma(s, t) = (x(s, t), y(s, t))$ em que $x(s, t)$, $y(s, t)$ e $z(s, t)$ são dados pela solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) = a(x(t), y(t), z(t)), & x(s, 0) = x_0(s), \\ \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) = b(x(t), y(t), z(t)), & y(s, 0) = y_0(s), \\ \frac{\partial z}{\partial t}(s, t) = c(x(t), y(t), z(t)), & z(s, 0) = u_0(s). \end{cases} \quad (2.5)$$

Intuitivamente, a solução desse sistema na variável t (tendo s como parâmetro) nos fornece uma superfície nos parâmetros s e t : $(s, t) \mapsto \Gamma(s, t)$. Essa superfície é chamada *superfície integral* da edp $au_x + bu_y - c = 0$, pois ela é obtida por integração do campo Φ . Note que uma superfície integral não é necessariamente uma superfície solução, pois não sabemos se essa superfície integral é dada como gráfico de uma função $(x, y) \mapsto u(x, y)$. O método de solução da edp quase linear em duas variáveis $au_x + bu_y = c$ utilizando o sistema (2.5) é chamado *método das características*. Como veremos na Seção 2.3, esse método pode ser generalizado.

Observação 2.4 A obtenção da superfície integral depende de conseguirmos resolver o sistema (2.5), o que muitas vezes só é possível numericamente. De qualquer forma, o método das características tem a vantagem de reduzir um problema de Cauchy para uma edp quase linear de primeira ordem em um problema de valor inicial para uma equação diferencial de primeira ordem. $\triangleleft$

Compare o próximo resultado com a discussão logo após a Definição 2.1. Veja a Figura 2.1.

Lema 2.5 Suponhamos que $P = (x_0, y_0, z_0) = (x_0(s_0), y_0(s_0), u_0(s_0))$ seja um ponto da superfície solução S da edp $au_x + bu_y = c$, com S dada como o gráfico da função $u(x, y)$. Se uma curva característica $\Gamma(t)$ for tal que $\Gamma(0) = P$, então essa curva está inteiramente contida em S .

Demonstração: Seja $\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma solução de $\Gamma'(t) = \Phi(\Gamma(t))$, $\Gamma(0) = P = (x_0, y_0, z_0)$. Defina $w(t) = z(t) - u(x(t), y(t))$. Queremos mostrar que $w(t) \equiv 0$. Como $P \in S$, temos que $u(x_0, y_0) = z_0$. Por outro lado, temos que $z(0) = z_0$. Logo, $w(0) = 0$.

De acordo

$$\begin{aligned} w'(t) &= z'(t) - u_x(x(t), y(t))x'(t) - u_y(x(t), y(t))y'(t) \\ &= c(x(t), y(t), z(t)) - a(x(t), y(t), z(t))u_x(x(t), y(t)) - b(x(t), y(t), z(t))u_y(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Note que não podemos escrever que $w'(t) = 0$, pois não sabemos se a igualdade $z(t) = u(x(t), y(t))$ é verdadeira. Contudo, escrevendo $z(t) = w(t) + u(x(t), y(t))$, obtemos

$$\begin{aligned} w'(t) &= c(x(t), y(t), w(t) + u(x(t), y(t))) - a(x(t), y(t), w(t) + u(x(t), y(t)))u_x(x(t), y(t)) \\ &\quad - b(x(t), y(t), w(t) + u(x(t), y(t)))u_y(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Em suma, provamos que w é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} w'(t) = c(x(t), y(t), w(t) + u(x(t), y(t))) - a(x(t), y(t), w(t) + u(x(t), y(t)))u_x(x(t), y(t)) \\ \quad - b(x(t), y(t), w(t) + u(x(t), y(t)))u_y(x(t), y(t)), \\ w(0) = 0. \end{cases}$$

Como $w \equiv 0$ é uma solução desse sistema, podemos concluir que necessariamente temos $w \equiv 0$, pois a solução desse sistema é única. $\square$

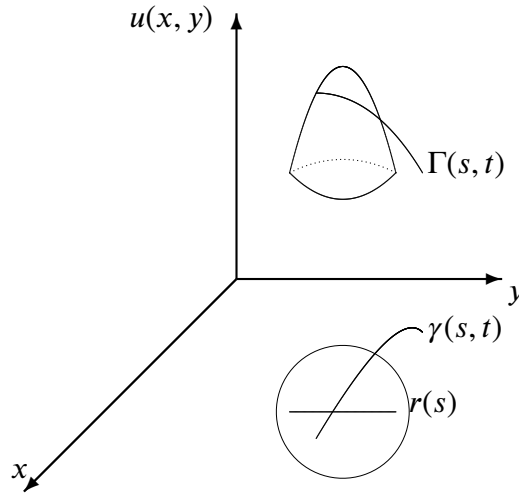


Figura 2.1: Uma curva característica que cruza um dado inicial permanece sempre dentro da superfície solução. Assim, a figura ilustra uma situação que *não ocorre*.

Exercício 5 Compare a observação feita logo após a Definição 2.1 com o Lema 2.5. Discuta.

Exemplo 2.6 Consideremos novamente o problema não homogêneo da equação do transporte:¹

$$\begin{cases} u_y + cu_x = f & \text{em } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

¹Para compatibilizar a notação, estamos denotando u_y ao invés de u_t .

Com a notação introduzida nessa seção, as duas primeiras equações do sistema de característica que deve ser resolvido são dadas por

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) = c & x(s, 0) = s \\ \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) = 1 & y(s, 0) = 0, \end{cases}$$

enquanto a terceira equação é dada por

$$\frac{\partial z}{\partial t}(s, t) = f(x(t), y(t)), \quad z(s, 0) = u_0(s).$$

Resolvendo o sistema formado pelas duas primeiras equações, encontramos

$$\begin{cases} x(s, t) = ct + s \\ y(s, t) = t, \end{cases} \quad (2.6)$$

de modo que a terceira equação do sistema característico é dada por

$$\frac{\partial z}{\partial t}(s, t) = f(ct + s, t) \quad z(s, 0) = u_0(s),$$

cujas solução é

$$z(s, t) = u_0(s) + \int_0^t f(c\xi + s, \xi) d\xi.$$

De acordo com o que vimos, $(s, t) \mapsto (ct + s, t, u_0(s) + \int_0^t f(c\xi + s, \xi) d\xi)$ é uma superfície integral da edp dada. Para obter uma solução do problema, definimos $u(x, y) = z(s(x, y), t(x, y))$, e para isso precisamos escrever s e t em termos de x e y . Uma vez que a segunda equação em (2.6) nos dá $t = y$, a primeira nos informa que $s = x - cy$. Assim,

$$z(s, t) = u(x, y) = u_0(x - cy) + \int_0^y f(x + c(\xi - y), \xi) d\xi,$$

que é justamente a solução encontrada anteriormente. ◀

Exemplo 2.7 Antes de passarmos ao caso geral, consideremos o problema semilinear

$$\begin{cases} au_x + bu_y = c(x, y, u), \\ u(x_0(s), y_0(s)) = u_0(s), \end{cases} \quad (2.7)$$

em que $a = a(x, y)$ etc.

O sistema de equações características é dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) = a, & x(s, 0) = x_0(s), \\ \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) = b, & y(s, 0) = y_0(s), \\ \frac{\partial z}{\partial t}(s, t) = c, & z(s, 0) = u_0(s), \end{cases}$$

Consideremos inicialmente a versão homogênea dessa equação, quer dizer, suponhamos $c \equiv 0$. Uma vez que as duas primeiras equações independem da terceira, podemos resolvê-las² e obter a família de curvas característica planas $\gamma(s, t)$: se considerarmos então $z(s, t) = u(\gamma(s, t))$ no caso homogêneo, chegamos a

$$\frac{\partial z}{\partial t}(s, t) = a(\gamma(s, t))u_x(\gamma(s, t)) + b(\gamma(s, t))u_y(\gamma(s, t)) = 0.$$

Essa igualdade nos diz que a solução $u(x, y)$ procurada é *constante* ao longo de cada curva característica plana:

$$\frac{d}{dt}u(\gamma(s, t)) = 0.$$

No caso geral do problema (2.7), a obtenção da família de curvas características planas não determina se esse problema tem solução. A solução $\Gamma(s, t)$ é obtida ao se resolver a equação

$$\frac{\partial z}{\partial t}(s, t) = c, \quad z(s, 0) = u_0(s),$$

e, como vimos, o dado inicial pode estar em desacordo com a informação fornecida pela própria equação. $\triangleleft$

Para resolvermos o problema (2.1) (e, com isso, mostrarmos sua relação com o problema linear (2.3)), iniciaremos nosso estudo com o caso em que a curva característica plana $\gamma(s_0, t) = (x(s_0, t), y(s_0, t))$ intercepta transversalmente a curva $r(s) = (x_0(s), y_0(s))$ no ponto $s_0 \in I$.

Teorema 2.8 *Sejam $R(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s))$ o dado inicial de Cauchy do problema (2.1) e $r(s) = (x_0(s), y_0(s))$. Suponhamos que a curva característica plana $\gamma(s_0, t)$ intercepte transversalmente $r(s)$ em seu ponto de interseção, isto é,*

$$\det \begin{pmatrix} x'_0(s_0) & a(R(s_0)) \\ y'_0(s_0) & b(R(s_0)) \end{pmatrix} \neq 0. \quad (2.8)$$

Então existe uma vizinhança aberta do ponto $(x_0(s_0), y_0(s_0))$ na qual o problema (2.1) possui solução única. Por outro lado, se (2.8) não for válido, o problema apenas pode ter solução C^1 se os vetores $\Gamma(R(s_0))$ e $R(s_0)$ forem linearmente dependentes.

Demonstração: Como sabemos de um curso de equações diferenciais ordinárias, a solução $\Gamma(s, t)$ do sistema (2.5) depende diferenciavelmente³ de s . A família de curvas $\Gamma(s, t)$ é tal que $(\partial\Gamma/\partial t)$ no ponto $(x_0(s), y_0(s), u_0(s))$ é justamente o valor do campo $\Phi(x, y, z) = (a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z))$ neste mesmo ponto. Ou seja, $(\partial\Gamma/\partial t)$ é um vetor tangente da superfície solução e, com a linguagem utilizada em equações ordinárias, $t \mapsto \Gamma(s, t)$ é uma curva integral do campo Φ .

Se o dado inicial $r(s_0)$ e a curva característica $\gamma(s_0, t)$ forem transversais quando $t = 0$, obtemos uma parametrização da superfície integral numa vizinhança do ponto

²Ao menos numericamente.

³Veja o Capítulo II, Seção 3, do livro [10] de Sotomayor.

$(x_0(s_0), y_0(s_0)) = r(s_0)$ em termos dos parâmetros s e t do plano xy : a superfície integral é parametrizada por $(s, t) \mapsto \Gamma(s, t)$ numa vizinhança desse ponto. Nosso objetivo é mostrar que essa superfície parametrizada pode ser escrita como o gráfico de uma função $u(x, y)$ definida em uma vizinhança do ponto $r(s_0)$: veja a Figura 2.2.

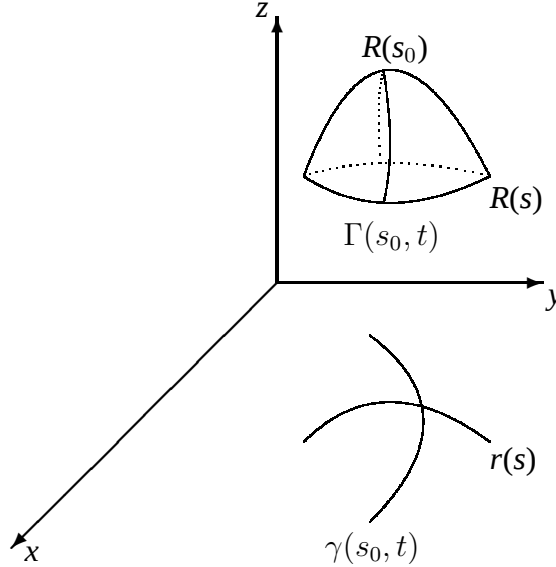


Figura 2.2: As curvas transversais $r(s)$ e $\gamma(s_0, t)$ no ponto $r(s_0)$ fornecem uma parametrização da superfície solução.

A transversalidade da interseção de $r(s)$ e $\gamma(s_0, t)$ no ponto $r(s_0)$ implica que podemos escrever os parâmetros s e t em termos de x e y em uma vizinhança de $(s_0, 0)$. De fato, como⁴

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s}(s_0, 0) & \frac{\partial x}{\partial t}(s_0, 0) \\ \frac{\partial y}{\partial s}(s_0, 0) & \frac{\partial y}{\partial t}(s_0, 0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x'_0(s_0) & a(R(s_0)) \\ y'_0(s_0) & b(R(s_0)) \end{pmatrix} \neq 0,$$

para cada (s, t) suficientemente próximo de $(s_0, 0)$ teremos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}(s, t) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s}(s, t) & \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) \\ \frac{\partial y}{\partial s}(s, t) & \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Logo, o Teorema da Aplicação Inversa garante a existência de uma vizinhança V do ponto $(s_0, 0)$ na qual podemos resolver

$$x = x(s, t), \quad y = y(s, t)$$

em termos de s e t e obter

$$s = s(x, y), \quad t = t(x, y)$$

⁴Observe que este determinante tem o mesmo valor daquele da equação (2.3).

satisfazendo

$$s(x(s_0, 0), y(s_0, 0)) = x_0(s_0) \quad \text{e} \quad t(x(s_0, 0), y(s_0, 0)) = y_0(s_0).$$

Definimos então $u(x, y) = z(s, t)$ em V . Vamos mostrar que u é solução do problema (2.1) em V . De fato, derivando a igualdade anterior, temos

$$\begin{aligned} z_t(s, t) &= u_x(x, y)x_t(s, t) + u_y(x, y)y_t(s, t) \\ &= u_x(x, y)a(x(t), y(t), z(x(t), y(t))) + u_y(x, y)b(x(t), y(t), z(x(t), y(t))) \\ &= a(x, y, u(x, y))u_x(x, y) + b(x, y, u(x, y))u_y(x, y) \end{aligned}$$

e, por outro lado, de (2.5) temos que

$$z_t(s, t) = c(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) = c(x, y, u(x, y)),$$

o que garante que

$$a(x, y, u)u_x(x, y) + u_y(x, y)b(x, y, u) = c(x, y, u(x, y)),$$

mostrando que u satisfaz à edp em (2.1).

Além disso,

$$u(x_0(s), y_0(s)) = u(x(s, 0), y(s, 0)) = z(s, 0) = u_0(s).$$

Portanto, $u(x, y)$ é solução do problema de Cauchy (2.1) em uma vizinhança do ponto $(x_0(s_0), y_0(s_0))$.

A unicidade da solução de (2.1) é consequência da unicidade de solução de (2.4) e do Lema 2.5. (Veja a discussão logo após a Definição 2.1). De fato, se v for solução de (2.1), defina a curva $(X(t), Y(t))$ como sendo a solução do sistema

$$\begin{aligned} X'(t) &= a(X(t), Y(t), v(X(t), Y(t))), & X(0) &= x_0(s_0), \\ Y'(t) &= b(X(t), Y(t), v(X(t), Y(t))), & Y(0) &= y_0(s_0). \end{aligned}$$

Então, como já vimos, $v(t)$ é uma curva característica que passa pelo ponto

$$(x_0(s_0), y_0(s_0), u_0(s_0)).$$

Como a solução de (2.4) é única, essa curva coincide com a curva característica utilizada na construção de u .

Finalmente, a afirmação sobre a inexistência de solução foi provada anteriormente. □

Exercício 6 O problema de Cauchy dado no Exemplo 2.7 sempre tem solução local única? E no caso de um problema de valor inicial, isto é, quando $x_0(s) = s$, $y_0(s) = 0$?

Observação 2.9 Observe que o caráter *local* do Teorema 2.8 é dado pelo Teorema da Aplicação Inversa. Se tivermos uma inversão *global*, o resultado valerá globalmente. ◁

Exercício 7 Considere o problema de Cauchy linear

$$\begin{cases} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y) \\ u(x_0(s), y_0(s)) = u_0(s), \end{cases}$$

em que $r(s) = (x_0(s), y_0(s))$ e $r'(s) \neq 0$ para todo $s \in I$.

Suponha que

$$\det \begin{pmatrix} x'_0(s) & a(r(s)) \\ y'_0(s) & b(r(s)) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall s \in I.$$

Mostre então que o problema dado tem solução única (de classe C^1) em uma vizinhança da curva $r(s)$. Obtenha a expressão dessa solução.

Exemplo 2.10 Consideremos o problema linear

$$\begin{cases} xu_x + (x + y)u_y = u + 1, \\ u(x, 0) = x^2. \end{cases}$$

Observe que não temos uma edp no ponto $(x, x + y) = (0, 0)$. Isto é, esse problema só está definido para $x \neq 0$.

Começamos parametrizando os dados iniciais utilizando o parâmetro s :

$$x_0(s) = s, \quad y_0(s) = 0, \quad u_0(s) = s^2.$$

Eles definem a curva plana $r(s) = (s, 0)$ e também a curva $R(s) = (s, 0, s^2)$ pertencente ao gráfico da solução u que procuramos. Daí obtemos $a(R(s)) = s$, $b(R(s)) = s$ e $c(R(s)) = s^2 + 1$.

A condição de transversalidade é verificada para todo $s \neq 0$, pois

$$\det \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & s \end{pmatrix} = s.$$

(Note que não podemos ter $s = 0$, pois isso corresponde a $x = 0$.) Assim, devemos ter unicidade de solução *local* para todo ponto (x, y) com $x \neq 0$.

O sistema de características é dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = x, & x(s, 0) = s, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = (x + y), & y(s, 0) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial t} = z + 1, & z(s, 0) = s^2. \end{cases}$$

Resolvendo o problema

$$\frac{\partial x}{\partial t}(s, t) = x, \quad x(s, 0) = s,$$

encontramos, para cada s fixo, $x(s, t) = se^t$.

Levando a expressão de $x(s, t)$ na segunda equação, chegamos ao problema

$$\frac{\partial y}{\partial t} - y = se^t, \quad y(s, 0) = 0.$$

Multiplicando pelo fator integrante e^{-t} , obtemos sua solução: $y(s, t) = ste^t$.

Finalmente, resolvemos

$$\frac{\partial z}{\partial t} - z = 1, \quad z(s, 0) = s^2,$$

cujas soluções são dadas por $z(s, t) = (s^2 + 1)e^t - 1$.

A superfície $(s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ é a superfície integral associada ao campo $F = (a, b, c)$.

Agora precisamos expressar essa superfície integral como gráfico da função u , isto é, obter $u(x, t) = z(s(x, y), t(x, y))$, que significa resolver (s, t) em termos de (x, y) . Faremos isso para todo $x = s \neq 0$, o que garante a existência de uma solução *global* para o problema considerado.

Vemos que $t = y/x$, o que implica $s = xe^{-y/x}$. Assim, concluímos que

$$u(x, y) = (x^2 e^{-2y/x} + 1)e^{y/x} - 1 = x^2 e^{-y/x} + e^{y/x} - 1$$

é a solução do problema, definida para todo $x \neq 0$.

◁

Exemplo 2.11 Ao resolver o problema

$$\begin{cases} 2yu_x + u_y = (2y^2 + x) \sin(2xy), \\ u(x, e^{-2x}) = \cos^2(xe^{-2x}), \end{cases}$$

vamos proceder de modo um pouco diferente do exemplo anterior: ao invés de resolver o problema de valor inicial associado às curvas características, vamos encontrar a solução geral do sistema de características. (Esse procedimento muitas vezes é vantajoso quando temos equações lineares.)

Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ a família de curvas características planas que procuramos. Elas devem então satisfazer

$$x'(t) = 2y(t) \quad \text{e} \quad y'(t) = 1.$$

A segunda equação nos dá $y(t) = t + c_1$. Substituindo na primeira, obtemos $x'(t) = 2t + 2c_1$; integrando, vem $x(t) = t^2 + 2tc_1 + c_2 = (t + c_1)^2 + c_2 - c_1^2$. Quer dizer, as características são dadas pela família de parábolas

$$x = y^2 + c.$$

Agora vamos ver como essa família de parábolas intercepta o dado inicial. Um esboço rápido das duas curvas indica que essa interseção é transversal. Mas podemos verificar isso analiticamente: a reta tangente a parábola no ponto (x_0, y_0) tem inclinação $1/(2y_0)$, enquanto a reta tangente à curva inicial tem inclinação $-2y_0$ (verifique!). Portanto, as retas tangentes são ortogonais nos pontos dados, mostrando que podemos aplicar o Teorema 2.8. Seja

$(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ arbitrário. Esse ponto pertence à parábola $x = y^2 + x_1 - y_1^2$. Essa parábola intercepta a curva inicial no ponto (x_0, y_0) tal que

$$\begin{aligned} x_0 &= y_0^2 + x_1 - y_1^2, \\ y_0 &= e^{2x_0}. \end{aligned}$$

FIGURA.

Parametrizando então a parábola por $t \mapsto (t^2 + x_1 - y_1^2, t)$, obtemos

$$\begin{aligned} u(x_1, y_1) &= \int_{y_0}^{y_1} \frac{d}{dt} u(t^2 + x_1 - y_1^2, t) dt + u(x_0, y_0) \\ &= \int_{y_0}^{y_1} (3t^2 + x_1 - y_1^2) \sin(2t^3 + 2t(x_1 - y_1^2)) dt + \cos^2(x_0 y_0) \\ &= \int_{y_0}^{y_1} (3t^2 + x_1 - y_1^2) 2 \sin(t^3 + 2(x_1 - y_1^2)) \cos(2t^3 + 2t(x_1 - y_1^2)) dt + \cos^2(x_0 y_0) \\ &= \int_{y_0(y_0^2 + x_1 - y_1^2)}^{y_1(y_1^2 + x_1 - y_1^2)} 2 \sin r \cos r dr + \cos^2(x_0 y_0) \\ &= \cos^2 r \Big|_{r=x_0 y_0}^{r=x_1 y_1} + \cos^2(x_0 y_0) \\ &= \cos^2(x_1 y_1). \end{aligned}$$

Quer dizer, encontramos a solução do problema dado:

$$u(x, y) = \cos^2(xy).$$

◁

Podemos também obter a solução geral de certos problemas utilizando o método de características:

Exemplo 2.12 Vamos obter uma solução não identicamente nula para a equação $2u_t - x^2 u_x + x^2 tu = 0$.

O sistema de características é dado por

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x^2}{2} \quad \text{e} \quad \frac{du}{dt} = -\frac{x^2}{2} tu.$$

Resolvendo a primeira equação, encontramos $dx/x^2 = -dt/2 \Rightarrow -x^{-1} = -t/2 + c \Rightarrow x = \frac{2}{t+C}$. Levando esse resultado na segunda equação, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{t+C} \right)^2 tu \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{2t}{(t+C)^2} = -\frac{2}{(t+C)^2} (t+C-C) \\ \Rightarrow \frac{du}{u} &= \frac{-2}{t+C} + \frac{2C}{(t+C)^2} \Rightarrow \ln u = \ln(t+C)^{-2} - \frac{2C}{t+C} + c. \end{aligned}$$

Assim,

$$u = \exp \left(\ln(t + C)^{-2} - \frac{2C}{t + C} + c \right) = \frac{1}{(t + C)^2} \bar{C} \exp \left(\frac{-2C}{t + C} \right).$$

Encontramos o valor de C utilizando a primeira equação:

$$C = \frac{2 - xt}{x}.$$

Assim,

$$u(x, t) = \bar{C} \frac{x^2}{4} \exp(xt - 2).$$

Escolhendo $\bar{C} \neq 0$, encontramos a solução procurada. ◁

Exemplo 2.13 Consideremos, para $(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$, o problema quase linear

$$\begin{cases} uu_x + xu_y = y, \\ u(0, y) = -y. \end{cases}$$

O sistema de características é dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) = z, & x(s, 0) = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) = x, & y(s, 0) = s, \\ \frac{\partial z}{\partial t}(s, t) = y, & z(s, 0) = -s. \end{cases}$$

Esse sistema pode ser escrito na forma matricial

$$X' = AX,$$

em que

$$X' = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ -s \end{pmatrix}.$$

Como sabemos da teoria de sistemas de equações diferenciais ordinárias,⁵ a solução do sistema $z' = Az$ é obtida ao encontrarmos a matriz exponencial e^{At} . Para isso, obtemos o polinômio característico da matriz A :

$$p(z) = z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1),$$

cujas raízes são $z_1 = 1$, $z_2 = (-1 + i\sqrt{3})/2$ e $z_3 = (-1 - i\sqrt{3})/2$. Note que $z_2^2 = z_3$ e $z_3^2 = z_2$.

⁵Veja [1].

Consideramos então as funções $f(t) = e^{zt}$ e o polinômio $r(z) = a(t)z^2 + b(t)z + c(t)$. Como sabemos,⁶ vale $e^{At} = r(A)$, se igualarmos $f(z) = r(z)$ em cada uma das raízes do polinômio característico. Ao fazê-lo, encontramos os valores de $a(t)$, $b(t)$ e $c(t)$. Como

$$r(1) = e^t, \quad r(z_2) = e^{z_2 t}, \quad r(z_3) = e^{z_3 t} = e^{\bar{z}_2 t},$$

temos que resolver o sistema⁷

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & e^t \\ \bar{z}_2 & z_2 & 1 & e^{z_2 t} \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 & e^{\bar{z}_2 t} \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & e^t \\ i\sqrt{3} & -i\sqrt{3} & 0 & -2ie^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}t}{2} \\ -1 & -1 & 2 & 2e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} \end{array} \right) \begin{array}{l} (\ell_3 - \ell_2) \\ (\ell_2 + \ell_2) \end{array} \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & e^t \\ -1 & 1 & 0 & \frac{2e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}t}{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{e^t}{3} + \frac{2e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2}}{3} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & e^t \\ 0 & 2 & 1 & e^t + \frac{2e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}t}{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{e^t}{3} + \frac{2e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2}}{3} \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{2e^t}{3} - \frac{2e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2}}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{e^t}{3} - e^{-t/2} \left(\sin \frac{\sqrt{3}t}{2} - \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} \right) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{e^t}{3} + \frac{2e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2}}{3} \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{e^t}{3} - e^{-t/2} \left(\sin \frac{\sqrt{3}t}{2} - \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} \right) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{e^t}{3} - e^{-t/2} \left(\sin \frac{\sqrt{3}t}{2} - \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} \right) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{e^t}{3} + \frac{2e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2}}{3} \end{array} \right), \end{aligned}$$

mostrando que

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{e^t}{3} - e^{-t/2} \left(\sin \frac{\sqrt{3}t}{2} - \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} \right), \\ b(t) &= \frac{e^t}{3} - e^{-t/2} \left(\sin \frac{\sqrt{3}t}{2} - \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} \right), \\ c(t) &= \frac{e^t}{3} + \frac{2e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2}}{3}. \end{aligned}$$

Assim, o fluxo é dado por

$$\begin{aligned} e^{At} &= a(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + b(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c(t) & a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) & a(t) \\ a(t) & b(t) & c(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

⁶Veja [2], Capítulo 6.

⁷Veremos que não é necessário resolver esse sistema!

e a solução do sistema de características é dada por

$$\begin{pmatrix} x(s, t) \\ y(s, t) \\ u(s, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(t) & a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) & a(t) \\ a(t) & b(t) & c(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a(t) - b(t))s \\ (c(t) - a(t))s \\ (b(t) - c(t))s \end{pmatrix}.$$

Notamos então que $u(s, t) = -x(s, t) - y(s, t) = (-x - y)(s, t)$. Como essa igualdade é válida para quaisquer pontos (s, t) , concluímos que

$$u(x, y) = -x - y.$$

É fácil verificar que essa expressão realmente resolve o problema dado e fornece uma solução *global* para o mesmo. $\triangleleft$

Exercício 8 No Exemplo 2.13, verifique que $x_{iii} = x$, $y_{iii} = y$ e $u_{iii} = u$. Resolva então o sistema

$$x_{iii} = x, \quad x(s, 0) = 0, \quad y_{iii} = y, \quad y(s, 0) = s, \quad u_{iii} = u, \quad u(s, 0) = -s$$

e obtenha a solução $u(x, y) = -(x + y)$. (Esse método é muito mais difícil de ser aplicado, mas em alguns casos resolve problemas em que o sistema de equações ordinárias definido pelas características não é linear.)

Exercício 9 Resolva o problema

$$\begin{cases} -yu_x + xu_y = 4xy, \\ u(x, 0) = u_0(y), \end{cases}$$

em que $x > 0$.

2.2 Inexistência e multiplicidade de soluções

Agora consideraremos situações em que não podemos aplicar o Teorema 2.8. Também discutiremos o caráter *local* desse teorema. Seguindo V. Iório [5], apresentamos quatro exemplos fundamentais:

Exemplo 2.14 Consideremos o problema

$$\begin{cases} u_y = 0, \\ u(1 - y^2, y) = u_0(y), \end{cases}$$

Claramente a solução geral da equação dada é $u(x, y) = f(x)$, em que f é uma função de classe C^1 . As características planas são as retas verticais. Como $u(x, y)$ é constante ao longo das curvas características, vemos que, para todo $x_0 < 1$, a reta $x = x_0$ intercepta a curva inicial

em exatamente dois pontos: (x_0, y_0) e $(x_0, -y_0)$. Isso implica que devemos ter $u_0(y_0) = u_0(-y_0)$ para que o problema tenha solução.

Suponhamos, portanto, que o dado inicial seja uma função par. Nesse caso, esperamos que o problema possua infinitas soluções, pois u_0 não está determinada para $x > 1$. Mas como deve ser a solução para $x \leq 1$? Já vimos que a solução deve ser função de x . Resolvendo $x = 1 - y^2$, encontramos $y = \sqrt{1 - x}$. Assim, de acordo com o que vimos sobre a solução geral da equação, ela deve ter a forma $u(x, y) = u_0(\sqrt{1 - x})$. Uma vez que a solução deve ser de classe C^1 , precisamos também que exista

$$\frac{d}{dx}u_0(\sqrt{1 - x}) \Big|_{x=1}.$$

Supondo também essa condição satisfeita, a solução do problema deve ser

$$u(x, y) = \begin{cases} u_0(\sqrt{1 - x}) & \text{se } x \leq 1 \\ g(x) & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

em que $g \in C^1([1, \infty))$ satisfaz

$$g(1) = u_0(\sqrt{1 - 1}) = u_0(0) \quad \text{e} \quad g'(1) = \frac{d}{dx}u_0(\sqrt{1 - x}) \Big|_{x=1}.$$

◁

Exercício 10 No exemplo anterior, considere $x_0 < 1$ arbitrário. Verifique que o Teorema 2.8 pode ser aplicado. Isso não contradiz a análise apresentada no exemplo, que garante a existência de solução apenas se u_0 for uma função par? Responda a mesma questão para $x_0 = 1$.

Exemplo 2.15 Consideremos o problema linear

$$\begin{cases} u_x(x, y) = 2x, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

É claro que a solução geral de $u_x = 2x$ é dada por $u(x, y) = x^2 + u_1(y)$, em que $u_1 \in C^1$. Mas o dado inicial nos diz que $u(x, 0) = u_0(x)$, de modo que devemos ter $u_0(x) = x^2 + u_1(0)$.

Esqueçamos essas considerações e analisemos o sistema de equações características, dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = 1 & x(s, 0) = s, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = 0 & y(s, 0) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial t} = 2x & z(s, 0) = u_0(s), \end{cases}$$

e que implica que a família de características planas é $\gamma(s, t) = (s + t, 0)$. (Observe: isso garante que as características planas são retas horizontais, já que o parâmetro s corresponde ao eixo x . Mas isso a edp nos dá diretamente!)

Como $R(s) = (s, 0, u_0(s))$, a condição de transversalidade não é válida em qualquer ponto $r(s)$. De fato, temos

$$\det \begin{pmatrix} x'_0(s) & a(R(s)) \\ y'_0(s) & b(R(s)) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv 0.$$

Logo, o problema só poderá ter solução para qualquer s se a curva $R(s)$ for uma característica, isto é, se os vetores $R'(s) = (1, 0, u'_0(s))$ e $\Phi(R(s)) = (1, 0, 2s)$ forem paralelos para todo s . Portanto, devemos ter $u'_0(s) = 2s$, o que implica que $u_0(s) = s^2 + c$, em que c é uma constante.

Voltando a utilizar a variável t para descrever a trajetória em uma curva característica, temos $u_0(t) = t^2 + c$. Como já temos uma curva característica, para obtermos uma solução *local* basta considerarmos o mesmo problema com um novo dado inicial: por exemplo, $R_1(s) = (0, s, u_1(s))$. A escolha de $r_1(s) = (0, s)$ assegura a transversalidade da interseção com $(t, 0)$ e além disso, garante que a inversão $(s, t) \mapsto (x, y)$ é *global*. Para escolhermos $R(s)$ vamos apenas impor que essas curvas se interceptem: já que t corresponde ao eixo x e s ao eixo y , vamos fazer com que a interseção ocorra em $(0, 0)$. Ou seja, vamos impor que $u_1(0) = u_0(0) = c$. (Observe que estamos usando a mesma estratégia utilizada na determinação das características, apenas invertendo os papéis: $u_0(t)$ como a curva inicial, $R(s)$ como a característica que intercepta a curva inicial em $s = 0$.)

O novo problema

$$\begin{cases} u_x(x, y) &= 2x, \\ u(0, y) &= u_1(y), \end{cases}$$

tem solução dada por (verifique!)

$$u(x, y) = u_1(y) + x^2,$$

em que $u_1 \in C^1$ satisfaz $u_1(0) = c$. Em outras palavras, o problema possui infinitas soluções.

Sintetizando: se o dado inicial for uma curva característica, esse dado inicial já está incorporado à solução do problema; trocamos então o dado inicial por qualquer curva que seja transversal à característica plana e que intercepte a característica em $s = 0$. Isso garante a multiplicidade de soluções para o problema. $\triangleleft$

A situação apresentada no exemplo anterior é extrema: o dado inicial coincide com uma característica plana. Mais comum é a situação em que o dado inicial $r(s)$ seja tangente a uma característica plana $\gamma(s, t)$ em um determinado ponto.

Exemplo 2.16 Consideremos o problema

$$\begin{cases} u_x(x, y) &= x^2 \\ u(x, x^3) &= u_0(x) \end{cases}$$

Como no Exemplo 2.15, temos que as características são as retas horizontais. É fácil ver que o dado inicial é tangente às curvas características apenas na origem. E também que o

dado inicial intercepta as características uma única vez. Assim, podemos integrar ao longo das características planas e obter a solução do problema, definida globalmente:

$$u(x, y) = \int_{\sqrt[3]{y}}^x t^2 dt + u_0(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{y}{3} + u_0(x).$$

FIGURA

◁

Exercício 11 Utilizando o sistema de características (2.5), resolva o problema considerado no exemplo anterior.

Exemplo 2.17 Agora consideremos uma pequena variação sobre o problema discutido no exemplo anterior:

$$\begin{cases} u_x(x, y) = x \\ u(x, x^3) = u_0(x) \end{cases}$$

Procedendo como naquele exemplo, encontramos a solução

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} - \sqrt[3]{y^2} + u_0(x).$$

Assim, a solução encontrada não é diferenciável em $x = 0$, isto é, na reta vertical $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Note que a reta $x = 0$ corresponde ao ponto s em que a curva característica e o dado inicial não são transversais. ◁

Sintetizando a situação apresentada nos exemplos anteriores, vemos que a perda da condição de transversalidade pode conduzir a: a) não existência ou multiplicidade de soluções (Exemplos refnt1) e 2.15); b) unicidade de soluções (Exemplo 2.16); c) perda de diferenciabilidade da solução (Exemplo 2.17). No próximo capítulo veremos que outras dificuldades que podem ocorrer.

Exercício 12 Resolva o problema

$$\begin{aligned} 2yu_x + u_y &= 2xyu, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) &= x. \end{aligned}$$

Exercício 13 Encontre a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \kappa u, \\ u(x, 1) = f(x), \end{cases}$$

em que κ é uma constante. A solução está definida em qualquer ponto (x, y) ? Existem escolhas de f que permitem que isso aconteça? Nesse caso, o que acontece se $\kappa > 0$ e $\kappa < 0$?

Exercício 14 No exercício anterior, considere $\kappa = 1$. Escreva a equação para a família de características planas na forma $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$ e a equação em z como $\frac{dz}{dy} = \frac{z}{y}$ e obtenha as soluções $x = \alpha y$ e $u = z = \beta y$. Parametrize o dado inicial como $x = s$, $y = s/\alpha$ e $u_0 = (\beta/\alpha)s$. Discuta existência e unicidade de soluções para esse problema.

Exercício 15 Mostre que o problema de Cauchy linear VERIFICAR!

$$\begin{cases} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y)u + f(x, y) \\ u(x_0(s), y_0(s)) = u_0(t), \end{cases} \quad (2.9)$$

possui uma única solução local, dada pela fórmula :

$$\begin{aligned} u(x, y) = & u_0(s) \exp \left(\int_0^t c(x(s, \xi), y(s, \xi)) d\xi \right) \\ & + \int_0^t \exp \left(\int_\theta^t c(x(s, \xi), y(s, \xi)) d\xi \right) f(x(s, \theta), y(s, \theta)) d\theta, \end{aligned}$$

em que s e t são funções de (x, y) em uma vizinhança V do ponto $(x_0(s_0), y_0(s_0))$, no qual a interseção de γ e $(x_0(s), y_0(s))$ é transversal.

Exercício 16 Seja $a(x, t)$ uma função de classe C^1 em uma vizinhança V de (x_0, t_0) , com $a(x_0, t_0) \neq 0$. Mostre que existe uma aplicação $(x, t) \mapsto \xi(x, t)$ definida em uma vizinhança $W \subset V$ tal que

$$\begin{cases} \xi_t + a(x, t)\xi_x = 0, \\ \xi_t(x, t) \neq 0, \end{cases}$$

para todo $(x, t) \in W$.

Exercício 17 Mostre que o problema de Cauchy da forma

$$\begin{cases} u_t + a(x, t, u)u_x = c(x, t, u), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

(chamado problema de valor inicial, uma vez que t normalmente representa a variável temporal) sempre possui solução em uma vizinhança do dado inicial $u_0(x)$.

2.3 Equações Totalmente Não Lineares

SUBSTITUIR POR TEXTO DO ESTUDO DIRIGIDO, MANTENDO EXEMPLOS.

Nesta seção consideraremos o problema de Cauchy para equações de primeira ordem que não são lineares ou quase lineares. A forma mais geral dessas equações é dada por

$$F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0,$$

em que $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ (aberto), $u(x) \in \mathbb{R}$ e $\nabla u(x) = (u_{x_1}(x), \dots, u_{x_n}(x)) \in \mathbb{R}^n$.

Trataremos também essa equação utilizando o método de características, mas restringiremos nossa atenção ao caso bidimensional. Assim, vamos considerar o problema

$$\begin{cases} F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = 0, & (x, y) \in \Omega \\ u(r(s)) = u_0(s), & s \in I, \end{cases} \quad (2.10)$$

em que são conhecidos $r(s) = (x_0(s), y_0(s))$ e $u_0(s)$, sendo $r(s)$ uma curva regular. Denotaremos, como antes, $R(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s))$. Vamos assumir que F e u sejam funções de classe C^2 .

Vamos denotar nossa equação por

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad (2.11)$$

com $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, $z = u(x, y) \in \mathbb{R}$ e $(p, q) = (u_{x_1}(x, y), u_{x_2}(x, y)) \in \mathbb{R}^2$. Para que $F(x, y, z, p, q) = 0$ realmente represente uma equação diferencial parcial precisamos assumir que $(F_p(x, y), F_q(x, y)) \neq (0, 0)$ para todo $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Exercício 18 Escreva F em termos de (x, y, z, p, q) nos casos em que:

- (a) F é uma equação linear;
- (b) F é uma equação quase linear.

Como não temos um campo vetorial definido pela própria edp (2.11), não temos direções preferenciais para definir as curvas características ao longo das quais a equação seja reduzida a um sistema de equações diferenciais ordinárias. Assim, temos que utilizar uma nova estratégia para obter essas curvas características. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ a parametrização de uma curva de classe C^2 definida em Ω .⁸ Então podemos derivar $z(t) = u(\gamma(t))$:

$$z'(t) = u_x x'(t) + u_y y'(t) = p x'(t) + q y'(t), \quad (2.12)$$

em que $u_x = u_x(\gamma(t))$ e da mesma forma para u_y , p e q . Como estamos supondo que u seja de classe C^2 , calculamos

$$p'(t) = \frac{d}{dt} u_x(\gamma(t)) = u_{xx} x'(t) + u_{xy} y'(t) \quad (2.13)$$

⁸Como estamos assumindo que u seja de classe C^2 , para garantir que $u(r(s))$ seja de classe C^2 , podemos precisar que r seja de classe C^2 .

e

$$q'(t) = \frac{d}{dt}u_y(\gamma(t)) = u_{yx}x'(t) + u_{yy}y'(t), \quad (2.14)$$

em que, como antes, $u_{xx} = u_{xx}(\gamma(t))$ etc.

Por outro lado, se u for uma solução da equação diferencial parcial $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$, derivando essa igualdade com relação a x e y obtemos

$$F_x + F_z u_x + F_p u_{xx} + F_q u_{yx} = 0 \quad (2.15)$$

e

$$F_y + F_z u_y + F_p u_{xy} + F_q u_{yy} = 0. \quad (2.16)$$

Comparando as igualdades (2.13) – (2.14) com (2.15) – (2.16), parece razoável escolher

$$x'(t) = F_p \quad \text{e} \quad y'(t) = F_q.$$

(Essa escolha parece especialmente sensata pois, no caso quase linear corresponde à escolha $x'(t) = a$ e $y'(t) = b$. Verifique!)

Com essas escolhas, a igualdade (2.12) assume a forma

$$z' = pF_p + qF_q$$

enquanto decorre de (2.15) e (2.16) que (2.13) e (2.14) são escritas, respectivamente, como

$$p' = -F_x - pF_z \quad \text{e} \quad q' = -F_y - qF_z$$

de modo que obtemos o sistema

$$\begin{cases} x' = F_p \\ y' = F_q \\ z' = pF_p + qF_q \\ p' = -F_x - pF_z \\ q' = -F_y - qF_z. \end{cases} \quad (2.17)$$

Em outras palavras, as curvas características do problema de Cauchy (2.10) são definidas pelo campo $\Phi(x, y, z, p, q) = (F_p, F_q, pF_p + qF_q, -F_x - pF_z, -F_y - qF_z) \in \mathbb{R}^5$, em que $F_p = F_p(x, y, z, p, q)$ etc.

É claro, temos dados iniciais para as três primeiras equações, em analogia ao caso quase linear:

$$x(s, 0) = x_0(s), \quad y(s, 0) = y_0(s) \quad \text{e} \quad z(s, 0) = u_0(s).$$

Mas como proceder com relação às duas últimas equações?

Começamos nosso tratamento do caso *quase linear* examinando a relação entre $R(s)$ e a informação contida na própria equação. Essa análise nos possibilitou, inclusive, obter um critério de não existência para a solução do problema de valor de inicial no caso quase linear. Assim, parece natural examinar a relação entre

$$F(x_0(s), y_0(s), u_0(s), p(s, 0), q(s, 0)) = 0 \quad \text{e} \quad x'_0(s)p(s, 0) + y'_0(s)q(s, 0) = u'_0(s),$$

a segunda igualdade obtida mediante derivação do dado inicial.

Para cada s fixo, essas equações estabelecem um sistema (não diferencial)

$$\begin{cases} F(x_0(s), y_0(s), u_0(s), p(s, 0), q(s, 0)) &= 0, \\ x'_0(s)p(s, 0) + y'_0(s)q(s, 0) &= u'_0(s) \end{cases}$$

nas variáveis $p(s, 0)$ e $q(s, 0)$, pois o dado inicial $R(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s))$ é conhecido, bem como $R'(s)$. Não podemos garantir a existência de solução para esse sistema, pois sua primeira equação não é linear. Se essa solução existir, ela nos fornece os dados iniciais para as equações em p' e q' , como veremos logo a seguir. Contudo, salientamos que pode não haver unicidade para esses dados iniciais: veja o Exemplo 2.18, abaixo.

Assim, ao sistema (2.17) estão associadas as condições iniciais dadas por

$$\begin{cases} x(s, 0) &= x_0(s) \\ y(s, 0) &= y_0(s) \\ z(s, 0) &= u_0(s) \\ F(x_0(s), y_0(s), u_0(s), p(s, 0), q(s, 0)) &= 0 \\ x'_0(s)p(s, 0) + y'_0(s)q(s, 0) &= u'_0(s) \end{cases} \quad (2.18)$$

Em geral, a obtenção de uma solução explícita para o sistema (2.17) – (2.18) é impossível.

Note que as três primeiras equações de (2.18) correspondem ao sistema de característica utilizado na solução de problemas quase lineares. Mostraremos indiretamente que, no caso de problemas quase lineares, as duas equações restantes são supérfluas: veja a Observação 2.21.

Exercício 19 Considere o problema quase linear

$$\begin{cases} u_x + u_y &= u^2, \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{cases}$$

Monte o sistema de características (2.17) com os dados iniciais (2.18). Escreva as condições iniciais das equações diferenciais em p e q como um sistema linear e relacione esse sistema com (2.3).

O próximo exemplo mostra que nem sempre podemos obter dados iniciais para as equações em p' e q' de maneira única:

Exemplo 2.18 Consideremos o problema

$$\begin{cases} u_x^2 - 3u_y^2 &= u, & (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= x^2. \end{cases}$$

Temos

$$F(x, y, z, p, q) = p^2 - 3q^2 - z^2$$

e o dado inicial pode ser parametrizado como

$$x_0(s) = s, \quad y_0(s) = 0, \quad z(s, 0) = s^2,$$

enquanto a igualdade $F(u_0(s), y_0(s), z_0(s), p(s, 0), q(s, 0)) = 0$ garante que

$$[p(s, 0)]^2 - 3[q(s, 0)]^2 = s^2$$

e $x'_0(s)p(s, 0) - y'_0(s)q(s, 0) = u'_0(s)$ garante que

$$p(s, 0) = 2s.$$

Assim, $p(s, 0) = 2s$ e $q(s, 0) = \pm s$, o que não permite determinar $q(s, 0)$ de maneira única. Cada escolha de $q(s, 0)$ conduz a um sistema linear distinto. $\triangleleft$

Exemplo 2.19 Considere o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} u_y + u_x^2 &= 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= x. \end{aligned}$$

Nesse caso temos

$$F(x, y, z, p, q) = p^2 + q.$$

O dado inicial é parametrizado por $x(s, 0) = x_0(s) = s$, $y(s, 0) = y_0(s) = 0$ e $z(s, 0) = u_0(s) = s$. Substituindo esses dados na expressão de F encontramos

$$F(s, 0, s, p(s, 0), q(s, 0)) = p^2(s, 0) + q(s, 0) = 0,$$

enquanto a derivação do dado inicial $u(x_0(s), y_0(s)) = s$ produz $x'_0(s)p(s, 0) + y'_0(s)q(s, 0) = 1$, ou seja,

$$p(s, 0) = 1.$$

Assim, temos que resolver o sistema de características dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) = 2p = F_p, & x(s, 0) = s, \\ \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) = 1 = F_q, & y(s, 0) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial t}(s, t) = 2p^2 + q = pF_p + qF_q, & z(s, 0) = s, \\ \frac{\partial p}{\partial t}(s, t) = 0 = -F_x - pF_z, & p(s, 0) = 1 \\ \frac{\partial q}{\partial t}(s, t) = 0 = -F_y - qF_z, & q(s, 0) = -1. \end{cases}$$

A segunda, quarta e quinta equações são fáceis de resolver:

$$y(s, t) = t, \quad p(s, t) = 1, \quad q(s, t) = -1.$$

Substituindo essas igualdades na primeira equação, encontramos $x(s, t) = 2t + s$, enquanto a substituição na terceira equação produz $z(s, t) = t + u_0(s)$. Assim, a solução do sistema é dada por

$$x(s, t) = 2t + s, \quad y(s, t) = t, \quad z(s, t) = t + s, \quad p(s, t) = 1 \quad \text{e} \quad q(s, t) = -1.$$

Note que, para cada s fixo, as características são retas. Da primeira equação vem $s = x - 2t$, enquanto a segunda mostra que $y = t$. Assim,

$$u(x, y) = z(s(x, y), t(x, y)) = y + x - 2y = x - y.$$

◁

Exercício 20 *Resolva o problema*

$$\begin{aligned} u_x u_y &= u, & (x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, y) &= y^2. \end{aligned}$$

Teorema 2.20 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $r(s) = (x_0(s), y_0(s)) \subset \Omega$ uma curva regular de classe C^2 definida em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Suponha que $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função de classe C^2 e considere o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} F(x, y, z, p, q) = 0, & (x, y) \in \Omega; \\ u(r(s)) = u_0(s), & s \in I. \end{cases} \quad (2.19)$$

Se o problema

$$\begin{cases} F(x_0(s), y_0(s), u_0(s), p(s, 0), q(s, 0)) = 0, \\ x'_0(s)p(s, 0) + y'_0(s)q(s, 0) = u'_0(s) \end{cases} \quad (2.20)$$

tiver solução para $s_0 \in I$ tal que

$$\det \begin{pmatrix} x'_0(s_0) & F_p(x_0(s_0), y_0(s_0), u_0(s_0), p(s_0, 0), q(s_0, 0)) \\ y'_0(s_0) & F_q(x_0(s_0), y_0(s_0), u_0(s_0), p(s_0, 0), q(s_0, 0)) \end{pmatrix} \neq 0, \quad (2.21)$$

então o problema de Cauchy (2.19) possui ao menos uma solução u de classe C^2 em uma vizinhança do ponto $r(s_0) = (x_0(s_0), y_0(s_0)) \in \Omega$.

Se as condições (2.20) e (2.21) forem válidas para todo $s \in I$, então o problema (2.19) possui uma solução de classe C^2 em uma vizinhança de $\gamma(s) \subset \Omega$.

Demonstração: Suponhamos determinados $p(s_0, 0), q(s_0, 0)$, soluções do sistema (2.20). Considerando então o sistema de características (2.17) com as condições iniciais (2.18) no ponto s_0 , temos um sistema de equações diferenciais ordinárias com dados iniciais. Assim, esse sistema possui solução única $(x(s, t), y(s, t), z(s, t), p(s, t), q(s, t))$ de classe C^2 em uma vizinhança de $r(s_0)$.

O teorema da função inversa garante que podemos resolver (s, t) em função de (x, y) em uma vizinhança de $r(s_0)$, pois

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}(s_0, 0) &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s}(s_0, 0) & \frac{\partial x}{\partial t}(s_0, 0) \\ \frac{\partial y}{\partial s}(s_0, 0) & \frac{\partial y}{\partial t}(s_0, 0) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} x'_0(s_0) & F_p(x_0(s_0), y_0(s_0), u_0(s_0), p(s_0, 0), q(s_0, 0)) \\ y'_0(s_0) & F_q(x_0(s_0), y_0(s_0), u_0(s_0), p(s_0, 0), q(s_0, 0)) \end{pmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$ com $s(x_0(s_0), y_0(s_0)) = s_0$ e $t(x_0(s_0), y_0(s_0)) = 0$. Logo, as funções z , p e q são funções de (x, y) em uma vizinhança V de $\gamma(s_0)$.

Definimos, nessa vizinhança V , $u(x, y) = z(s(x, y), t(x, y))$. Temos então que

$$u(x_0(s), y_0(s)) = z(s, 0) = u_0(s),$$

mostrando que u satisfaz o dado inicial em V . Para mostrar que u satisfaz a equação diferencial em (2.19), para $(s, t) \in V$ calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F(x(s, t), y(s, t), z(s, t), p(s, t), q(s, t)) &= \\ &= F_x x_t + F_y y_t + F_z z_t + F_p p_t + F_q q_t \\ &= F_x F_p + F_y F_q + F_z (p F_p + q F_q) + F_p (-F_x - p F_z) + F_q (-F_y - q F_z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, em V vale

$$\begin{aligned} F(x, y, u(x, y), p(x, y), q(x, y)) &= F(x(s, t), y(s, t), z(s, t), p(s, t), q(s, t)) \\ &= F(x(s, 0), y(s, 0), z(s, 0), p(s, 0), q(s, 0)) \\ &= F(x_0(s), y_0(s), z_0(s), p(s, 0), q(s, 0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para completar a prova basta verificar que

$$p(x, y) = u_x(x, y) \quad \text{e} \quad q(x, y) = u_y(x, y).$$

Pela regra da cadeia, temos que u_x e u_y satisfazem o sistema linear

$$\begin{pmatrix} x_s & y_s \\ x_t & y_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_s \\ u_t \end{pmatrix}.$$

Por hipótese, o determinante da matriz

$$\det \begin{pmatrix} x_s & y_s \\ x_t & y_t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x'_0(s) & y'_0(s) \\ F_p & F_q \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{em } V,$$

de modo que esse sistema possui solução *única*. Assim, para obter o resultado, basta mostrar que p e q satisfazem

$$u_s(s, t) = p(s, t)x_s(s, t) + q(s, t)y_s(s, t) \quad (2.22)$$

e

$$u_t(s, t) = p(s, t)x_t(s, t) + q(s, t)y_t(s, t). \quad (2.23)$$

A equação (2.23) decorre imediatamente da equação que define z'_t no sistema característico. Para obter (2.22), definimos

$$H(s, t) = u_s(s, t) - (p(s, t)x_s(s, t) + q(s, t)y_s(s, t)).$$

Derivando essa igualdade com relação a t no ponto (s, t) , vem

$$\frac{\partial}{\partial t}H = u_{st} - (p_t x_s + p x_{st} + q_t y_s + q y_{st}). \quad (2.24)$$

Por outro lado, derivando (2.23) com relação a s , temos

$$u_{ts} = (p_s x_t + p x_{ts} + q_s y_t + q y_{ts}).$$

Substituindo essa expressão em (2.24) e utilizando (2.17), vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}H &= (p_s x_t + p x_{ts} + q_s y_t + q y_{ts}) - (p_t x_s + p x_{st} + q_t y_s + q y_{st}) \\ &= -p_t x_s - q_t y_s + p_s x_t + q_s y_t \\ &= x_s(F_x + pF_z) + y_s(F_y + qF_z) + p_s F_p + q_s F_q \\ &= \frac{\partial}{\partial s}F(x, y, z, p, q) - F_z z_s + x_s p F_z + y_s q F_z \\ &= (x_s p + y_s q - z_s)F_z = -H(s, t)F_z, \end{aligned}$$

pois $F(x(s, t), y(s, t), z(s, t), p(s, t), q(s, t)) = 0$ em V , de acordo com (2.22). Assim, $H(s, t)$ satisfaz à equação diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t}H(s, t) = -H(s, t)F_z \quad \Rightarrow \quad H(s, t) = H(s, 0) \exp\left(-\int_0^t F_z d\tau\right).$$

Como $H(s, 0) = u'_0(0) - x'_0(s)p(s, 0) - y'_0(s)q(s, 0) = 0$, concluímos que $H(s, t) = 0$ e provamos (2.22).

No caso de termos a condição (2.21) válida em todo ponto $s \in I$, por continuidade teremos a solução definida em uma vizinhança de $r(s)$. $\square$

Observação 2.21 No caso de equações *quase lineares*, uma vez que já temos um resultado de existência e unicidade demonstrado, podemos deduzir que as equações em p_t e q_t presentes em (2.17) serão supérfluas nesse caso. $\triangleleft$

Não podemos, no Teorema 2.20, garantir a *unicidade* da solução do problema de Cauchy: cada solução distinta do sistema (2.20) produz, em princípio, uma solução distinta do problema de Cauchy. É o que veremos no próximo exemplo:

Exemplo 2.22 (Continuação do Exemplo 2.18) Consideremos novamente o problema

$$\begin{aligned} u_x^2 - 3u_y^2 &= u, & (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= x^2. \end{aligned}$$

Como já vimos, os dados iniciais nas equações em p e q nos fornecem $p(s, 0) = 2s$ e $q(s, 0) = \pm s$, o que não permite determinar $q(s, 0)$ de maneira única.

A escolha $q(s) = s$ conduz ao sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} x(s, t) = 2p (= F_p), & x(s, 0) = s \\ \frac{\partial}{\partial t} y(s, t) = -6q (= F_q), & y(s, 0) = s \\ \frac{\partial}{\partial t} z(s, t) = 2z (= pF_p + qF_q), & z(s, 0) = s^2 \\ \frac{\partial}{\partial t} p(s, t) = p (= -F_x - pF_z), & p(s, 0) = 2s \\ \frac{\partial}{\partial t} q(s, t) = q (= -F_y - qF_z), & q(s, 0) = s, \end{cases}$$

Resolvendo as três últimas equações e então levando o resultado nas duas primeiras, obtemos

$$x(s, t) = 4s(e^t - 1) + s, \quad y(s, t) = -6s(e^t - 1), \quad z(s, t) = s^2 e^{2t},$$

$$p(s, t) = 2se^t \quad \text{e} \quad q(s, t) = se^t.$$

Como $e^t - 1 = \frac{1}{4} \left(\frac{x}{s} - 1 \right) = -\frac{y}{6s}$, substituindo na primeira equação obtemos

$$s = x + \frac{2}{3}y$$

e, assim,

$$e^t = -\frac{y}{6s} + 1 \quad \Rightarrow \quad e^t = \frac{2x + y}{2 \left(x + \frac{2}{3}y \right)},$$

de modo que

$$u(x, y) = z(s, t) = s^2 e^{2t} = \left(x + \frac{2}{3}y \right)^2 \left(\frac{2x + y}{2 \left(x + \frac{2}{3}y \right)} \right)^2 = \left(x + \frac{y}{2} \right)^2.$$

Por outro lado, tomando $q(s) = -s$ e procedendo analogamente, chegaríamos a

$$u(x, y) = \left(x - \frac{y}{2} \right)^2.$$

Note que as soluções estão definidas em todo o plano e todas as funções envolvidas são de classe C^∞ . ◁

Exercício 21 Com as mesmas hipóteses do Teorema 2.20, mostre que, se o sistema

$$\begin{cases} F(x_0(s), y_0(s), u_0(s), p(s), q(s)) &= 0 \\ x'_0(s)p + y'_0(s)q &= u'_0(s) \end{cases}$$

possuir solução única $(p(s), q(s))$, então o problema (2.19) possuirá solução única em uma vizinhança do dado inicial; se existirem diversas soluções $(p(s), q(s))$ para esse sistema, então o problema (2.19) possuirá diversas soluções. Finalmente, se esse sistema não tiver solução, então o problema (2.19) não possuirá solução.

Exercício 22 *Mostre que o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u_t + F(x, t, u, u_x) &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{cases}$$

sempre possui uma solução em uma vizinhança de $(x_0, 0)$.

2.4 Exercícios

1. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + 2u_x &= 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= \frac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

Faça um esboço da solução para $t = 0$, $t = 1$ e $t = 4$.

2. Considere a equação da onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

com condições iniciais

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x).$$

- (a) Escreva o operador de onda como o produto de dois operadores de primeira ordem:

$$(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2)u = (\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)u = 0;$$

- (b) Defina $v = (\partial_t - c\partial_x)u$ e obtenha o sistema de primeira ordem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} &= v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \end{cases}$$

- (c) Utilizando o método de características, resolva a segunda equação e substitua sua solução na primeira

3. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + uu_x &= -ku^2, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= 1, \end{cases}$$

em que k é uma constante positiva. Esboce também as curvas características do problema.

4. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + uu_x &= -ku, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{cases}$$

em que k é uma constante positiva. Estabeleça condições sobre u_0 de modo que exista uma solução para todo $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}$.

5. Ache a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + cu_x &= -xu, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{cases}$$

em que c é uma constante positiva. Esboce as características.

6. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t - xtu_x &= x, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{cases}$$

7. Encontre a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + u_x &= u^2, & (x, t) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, t) &= u_0(t). \end{cases}$$

8. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + u_x &= 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= -x^2. \end{cases}$$

Existe uma solução para todo $t > 0$?

9. Encontre o sistema de equações características associado à equação de *Hamilton-Jacobi*

$$u_t + h(t, x, u_x) = 0$$

em que h é conhecida (chamada *hamiltoniana*).

10. Determine o sistema de características associado à equação

$$u_t + c(u)u_x = 0$$

e mostre que o resultado coincide com o estudo anteriormente feito dessa equação.

11. Utilize o método de características para encontrar duas soluções distintas do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t &= u_x^3, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= 2x^{3/2}. \end{cases}$$

Capítulo 3

Choques

3.1 Tempo de Quebra

Uma característica de equações que não são lineares é o fato de ser comum soluções que existem apenas em um intervalo finito de tempo:

Exemplo 3.1 (A equação cinemática da onda) Consideremos o problema

$$\begin{cases} u_t + \kappa(u)u_x = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

em que $t > 0$, $\kappa(u)$ e $u_0(x)$ são funções suaves de u .

Suponhamos inicialmente que exista uma solução $u(x, t)$ para $t > 0$. As equações características são

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \kappa(u), & x(s, 0) &= s, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= 1, & y(s, 0) &= 0, \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= 0, & z(s, 0) &= u_0(s). \end{aligned}$$

A última equação nos diz que z não depende de t , de modo que $z(s, t) = u_0(s)$. A segunda equação tem solução $y(s, t) = t$. Lembramos que se $(x(s, t), t)$ é a equação de uma característica plana,¹ então temos

$$u(x(s, t), t) = 0.$$

Derivando essa equação, obtemos

$$\frac{du}{dt} = u_t(x(s, t), t) + u_x(x(s, t), t) \frac{\partial x}{\partial t} = 0,$$

o que implica que u é constante ao longo das características.

¹Já vimos que $y(s, t) = t$.

Ora, derivando a equação

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \kappa(u)$$

com relação a t , obtemos

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \kappa'(u) \frac{du}{dt} = 0.$$

Isso quer dizer que as curvas características planas são *retas*. Fixemos um ponto $(\xi, 0)$ no eixo x . A equação da reta característica passando por esse ponto é

$$x - \xi = \kappa(u_0(\xi))t. \quad (3.1)$$

Note que a inclinação dessa reta é $[\kappa(u_0(\xi))]^{-1}$. Assim, se (x, t) é um ponto dessa reta, chegamos à solução da equação

$$u(x, t) = u(\xi, 0) = u_0(\xi).$$

Conclusão: a solução procurada deve satisfazer essa igualdade, em que ξ é dado implicitamente pela equação (3.1).

Vamos substituir a expressão da solução na edp original. Então temos

$$u_t = u'_0(\xi)\xi_t \quad \text{e} \quad u_x = u'_0(\xi)\xi_x.$$

Calculamos as derivadas ξ_t e ξ_x ao derivar implicitamente (3.1):

$$\xi_t = \kappa'(u_0(\xi))u'_0(\xi)\xi_t t + \kappa(u_0(\xi))$$

e

$$1 - \xi_x = \kappa'(u_0(\xi))u'_0(\xi)\xi_x t,$$

o que implica que

$$u_t = -\frac{\kappa(u_0(\xi))u'_0(\xi)}{D} \quad \text{e} \quad u_x = \frac{u'_0(\xi)}{D},$$

em que

$$D = 1 + \kappa'(u_0(\xi))u'_0(\xi)t. \quad (3.2)$$

Daí decorre que $u_t + \kappa(u)u_x = 0$.

Vemos que uma solução só pode existir para todo $t > 0$ se o denominador D não se anular. Para que isso ocorra, devemos ter que os sinais κ' e u'_0 sejam os mesmos.

Existe um outro método para calcular o tempo de quebra. Consideremos a equação da reta característica, dada por (3.1):

$$x - \xi = \kappa(u_0(\xi))t.$$

A ideia é resolver essa equação para ξ e então substituir na equação $u(x, t) = u_0(\xi)$. Para isso, definimos a equação

$$F(x, t, \xi) = x - \xi - \kappa(u_0(\xi))t = 0.$$

A condição que permite obter ξ dessa equação é que $F_\xi \neq 0$. Isso é,

$$-1 - \kappa'(u_0(\xi))u'_0(\xi)t \neq 0.$$

(Essa é a mesma condição $D \neq 0$ obtida anteriormente.)

Se essa condição for cumprida (o que garante que $u_x \neq \infty$), podemos partir de (x, t) e encontrar a característica no instante $t = 0$, o que corresponde ao valor de ξ . $\triangleleft$

Exemplo 3.2 Considere o problema

$$\begin{cases} u_t + uu_x &= 0, \\ u(x, 0) &= \exp(-x^2). \end{cases}$$

Vamos encontrar o tempo de quebra. Note que, nesse caso, temos $\kappa'(s) = 1 > 0$. Portanto, o tempo de quebra ocorre quando $D = 0$ (com D definido por (3.2)). Como $u'_0(s) < 0$, o tempo de quebra ocorrerá. Se denotarmos $F(\xi) = \kappa(u_0(\xi))$, vemos que $F'(\xi) = \kappa'(u_0(\xi))u'_0(\xi)$ e o tempo de quebra acontecerá quando $|F'(\xi)|$ for máximo. Se ξ_{quebra} denotar esse ponto, então o ponto de quebra é dado por

$$0 < t_{\text{quebra}} = -\frac{1}{F'(\xi_{\text{quebra}})}.$$

Denotando $F(s) = \exp(-s^2)$, temos $F'(s) = -2s \exp(-s^2)$ e

$$F''(s) = -(4s^2 - 2) \exp(-s^2).$$

Portanto, $F''(s) = 0$ quando $s = \pm\sqrt{1/2}$. Portanto, o tempo de quebra ocorre quando

$$t_{\text{quebra}} = -\frac{1}{F'(\sqrt{1/2})} > 0.$$

(O valor de t é negativo para $s = -\sqrt{1/2}$. É fácil verificar que $F'(s)$ atinge um ponto de máximo quando $s = \sqrt{1/2}$.) $\triangleleft$

O EXEMPLO A SEGUIR ESTÁ REPETINDO MUITO DO QUE FOI FEITO NA EQUAÇÃO CINEMÁTICA DA ONDA. TALVEZ FORMULAR COMO EXERCÍCIO.

Exemplo 3.3 (A equação de Burgers) É interessante comparar a solução da equação (linear) do transporte, resolvida no Exemplo 2.7, com uma variação quase linear daquela equação, conhecida como equação de Burgers: $u_t + uu_x = 0$. (Já vimos que a equação de Burgers pode ser interpretada como uma lei de conservação.)

Adequando a notação àquela utilizada neste capítulo, vamos considerar o problema

$$\begin{cases} u_y + uu_x &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{cases} \quad (3.3)$$

mas manteremos a interpretação de y representar o tempo. Comparando com a equação do transporte, estamos permitindo que a velocidade c dependa de $u(x, y)$. Aqui apenas faremos considerações gerais sobre o problema (3.3). Depois, examinaremos várias escolhas particulares de $u_0(x)$.

O sistema característico é dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) = z, & x(s, 0) = s, \\ \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) = 1, & y(s, 0) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial t}(s, t) = 0, & z(s, 0) = u_0(s), \end{cases}$$

A última equação pode ser resolvida diretamente:

$$z(s, t) = u_0(s).$$

Assim, se pudermos encontrar as características planas e escrever (s, t) em termos de (x, y) , encontraremos a solução $u(x, y) = z(s(x, y), t(x, y)) = u_0(s(x, y))$.

A última equação do sistema também nos indica que z não depende de t , de modo que podemos integrar a primeira equação e obter

$$x(s, t) = s + zt.$$

A integração da segunda equação nos dá $y(s, t) = t$. É imediato verificar que a condição de transversalidade do Teorema 2.8 é satisfeita:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

o que assegura existência e unicidade *local* para a solução do problema. Das expressões de $x(s, t)$, $y(s, t)$ e $z(s, t)$ encontramos as características planas: as *retas* $x - s = [u_0(s)]y$. (Note que a inclinação da reta característica $1/u_0(s)$ varia com s .)

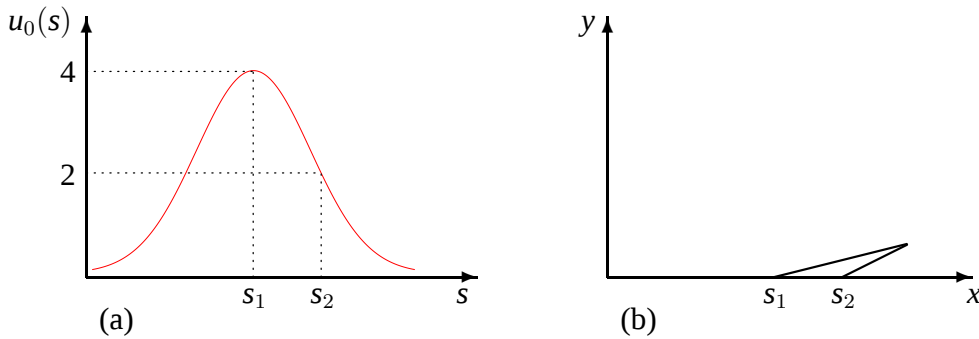


Figura 3.1: (a) Dados iniciais distintos nos pontos s_1 e s_2 produzem diferentes velocidades de propagação da onda. (b) Curvas características com pontos iniciais distintos podem interceptar-se em um tempo finito.

Certamente acontecerão problemas se essas retas características se interceptarem:² o valor da solução nos pontos de interseção das retas características será determinado por valores $u_0(s_1) \neq u_0(s_2)$, com $s_1 \neq s_2$. Veja a Figura 3.1. Nesse caso, o problema não possuirá solução.

Só poderemos evitar essa interseção das retas características se supusermos que u_0 seja uma função crescente. De fato, se tivermos $s_1 < s_2$ e $u_0(s_2) < u_0(s_1)$, então as *retas* características $x = s_1 + [u_0(s_1)]y$ e $x = s_2 + [u_0(s_2)]y$ interceptar-se-ão.

Podemos resolver (s, t) em termos de (x, y) :

$$t = y, \quad s = x - uy.$$

Desse modo, como a solução do problema é dada por $u(x, y) = z(s(x, y), t(x, y))$, obtemos a solução do problema como uma equação implícita:

$$u(x, y) = u_0(x - uy). \quad (3.4)$$

Queremos investigar a existência de uma solução definida para todo valor de y (ou, considerando que a variável y corresponde ao tempo, para todo $y > 0$). Derivando (3.4) com relação a x , encontramos $u_x = u'_0(x - uy)(1 - yu_x)$, o que nos dá

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u'_0(x - uy)}{1 + yu'_0(x - uy)}.$$

Uma vez que $s = x - uy$, o menor valor de s para o qual temos $1 + yu'_0(s) = 0$ é chamado *tempo de quebra*, o que equivale a dizer que a inclinação u_x torna-se infinita. Assim, o tempo de quebra é dado por

$$y = -\frac{1}{u'_0(s)}.$$

Note que, se tivermos $u'_0(s) > 0$, então o denominador nunca se anula e o tempo de quebra não ocorrerá, o que está de acordo com as considerações feitas anteriormente. ◀

3.2 Descontinuidades e consequências

Em muitas condições reais, os dados iniciais de um problema não são estabelecidos por uma função contínua $u_0(x)$. Contudo, se observa na prática que isso não impede a existência de uma única solução para o problema considerado.

Ao considerarmos o método de características, a descontinuidade do dado inicial $u_0(s)$ pode implicar na inexistência de curvas características em parte do domínio ou mesmo na interseção dessas, o que implica que o método das características não resultará em uma solução bem definida.

Neste capítulo consideraremos apenas equações de primeira ordem na forma $u_t = f(x, u, u_x)$, mas questões como as que serão aqui abordadas perpassam todo o estudo de equações diferenciais parciais.

²Com a linguagem de edp, dizemos “se essas retas chocarem-se”.

Exemplo 3.4 Considere o problema

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned}$$

em que

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Verifique que as características desse problema são dadas por

$$x = \begin{cases} x_0, & \text{se } x_0 < 0 \\ x_0 + t & \text{se } x_0 > 0. \end{cases}$$

Sabemos que a solução u é constante ao longo das curvas características. Como $u_0(x) = 0$ se $x < 0$, vemos que as características são retas verticais nesse caso. Por outro lado, se $x > 0$, as características são dadas por $x - t = \xi$, em que $\xi \geq 0$.

figura

A constância de u ao longo das características implica $u(x, t) = 0$ se $x < 0$ e $u(x, t) = 1$, se $x > t$.

Nesse caso, a inexistência de características entre o eixo t e a reta $x = t$ nos permite a construção de uma solução contínua $u(x, t)$ definida em todo o domínio. Como as características encontradas são retas, vamos definir uma família de retas, todas passando pelo ponto $(0, 0)$, variando entre o eixo t e a reta característica $x = t$. Ou seja, vamos definir as retas $x = ct$, em que $0 < c < 1$. O caso $c = 0$ corresponde ao eixo t enquanto o caso $c = 1$ corresponde à reta característica $x = t$. Consideraremos u constante em cada uma dessas retas, com $u = c$ na reta $x = ct$. Em outras palavras, vamos considerar

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \frac{x}{t}, & \text{se } 0 \leq x \leq t, \\ 1, & \text{se } x > t. \end{cases}$$

Uma solução dessa forma é chamada de *onda de rarefação*.

◁

Exemplo 3.5 Consideremos o problema

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned}$$

em que

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0, \\ 0, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Como $u_0(x) = 0$ se $x > 0$, vemos que as características são retas verticais nesse caso. Por outro lado, se $x < 0$, as características são retas paralelas à reta $x - t = 0$.

figura

Percebemos imediatamente que as características se interceptam. Como devemos ter $u(x, t) = 1$ se $x < 0$ e $u(x, t) = 0$ se $x > 0$, chegamos a uma contradição no ponto em que ocorrer a interseção das respectivas características.

Diante desse impasse, podemos ou desistir de obter unicidade na solução desse problema ou tentar preservar a unicidade evitando a interseção das retas características. Uma maneira de fazer isso consiste em definir uma reta $x = mt$ (com $m > 0$) ao longo da qual a descontinuidade do dado inicial em $x = 0$ se propague. Sendo mais preciso, a solução será dada por $u = 0$ quando $x > mt$ e por $u = 1$ se $x < mt$. Dessa maneira, obteremos solução única para o problema.

Essa solução parece ser artificial, mas pode ser fundamentada. Descontinuidades propagam-se por meio de *caminhos de choque* que, em geral, não pertencem à família de características. Um caminho de choque também é chamado, simplesmente, *choque*. ◀

O exame do Exemplo 3.5 causa uma certa perplexidade: se as equações diferenciais foram deduzidas à partir de leis de conservação e se esperamos que os problemas de valor inicial modelem fenômenos do mundo real, não deveríamos obter dificuldades no tratamento de dados iniciais descontínuos, uma vez que esses são comuns na natureza. Já que, em geral, continuamos a observar unicidade de solução nesses problemas, a análise do Exemplo 3.5 conduz à percepção de que a teoria não foi desenvolvida de maneira adequada. Mas o que originou essa inadequação?

Examinando a lei de conservação que origina a edp, notamos que a passagem da forma integral dessa lei para a edp está em desacordo com o tratamento de soluções descontínuas. (Veja as equações (1) e (3).) Assim, é natural supor que soluções descontínuas de uma edp possam ser satisfatoriamente tratadas ao examinar a forma integral da lei de conservação que a originou...

3.3 Soluções Fracas

Vamos considerar soluções descontínuas (que serão chamadas soluções *fracas*) sob duas abordagens. A primeira delas é mais intuitiva, a segunda delas corresponde a um conceito que poderá ser generalizado a diversas outras situações.

3.3.1 Condição de Salto

Consideremos a equação (1) no caso de uma única variável espacial, o fluxo dependendo de (x, t, u) e $f \equiv 0$, isto é, o caso em que não há produção ou destruição de massa dentro de Ω , que será tomado como o intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Nesse caso, a equação (1) é escrita como

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = \Phi(a, t, u(x, t)) - \Phi(b, t, u(x, t)), \quad (3.5)$$

Exercício 1 Sob as hipóteses mencionadas, deduza (3.5) de (1).

Suponha a existência de uma curva regular $x = r(t)$ de classe C^1 ao longo da qual $u(x, t)$ possui uma descontinuidade de primeira espécie³ (isto é, os limites laterais e derivadas parciais de primeira ordem existem e são finitos quando $x \rightarrow r(t)^+$ e $x \rightarrow r(t)^-$) e que $u(x, t)$ seja de classe C^1 para $x > r(t)$ e $x < r(t)$. Nesse caso, a equação integral (3.5) é escrita como

$$\frac{d}{dt} \int_a^{r(t)} u(x, t) dt + \frac{d}{dt} \int_{r(t)}^b u(x, t) dt = \Phi(a, t, u(x, t)) - \Phi(b, t, u(x, t)).$$

Aplicando a regra de Leibniz, obtemos

$$\begin{aligned} \Phi(a, t, u(x, t)) - \Phi(b, t, u(x, t)) &= \\ &= \int_a^{r(t)} u_t(x, t) dt + \int_{r(t)}^b u_t(x, t) dt + [u(r(t)^-, t) - u(r(t)^+, t)] r'(t). \end{aligned}$$

Para perceber mais claramente o que está acontecendo em $r(t)$, tomamos o limite quando $a \rightarrow r(t)^-$ e $b \rightarrow r(t)^+$. Como as integrais tornam-se nulas, obtemos

$$[u(r(t)^-, t) - u(r(t)^+, t)] r'(t) = \Phi(r(t)^-, t, u(r(t)^-, t)) - \Phi(r(t)^+, t, u(r(t)^+, t)). \quad (3.6)$$

Introduzimos a notação:

$$u^+ = u(r(t)^+, t), \quad u^- = u(r(t)^-, t)$$

e

$$[u] = u^+ - u^-, \quad [\Phi(u)] = \Phi(r(t)^+, t, u^+) - \Phi(r(t)^-, t, u^-).$$

Com essa notação, a equação (3.6) é escrita como

$$[u] r'(t) = [\Phi(u)], \quad (3.7)$$

que é conhecida como *condição de salto* ou *condição de Rankine-Hugoniot*.

A descontinuidade de u que se propaga em $r(t)$ é chamada *onda de choque*. O termo $r'(t)$ é a *velocidade do choque*, enquanto $[u]$ é a *força do choque*.

Em muitos casos, o caminho de choque $r(t)$ é obtido ao se resolver a equação (3.7). É o que veremos no próximo exemplo.

Exemplo 3.6 (Continuação do Exemplo 3.5) Consideremos o problema

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

A equação $u_t + uu_x = 0$ vem da lei de conservação com fluxo dado por $\Phi(u) = u^2/2$. (Justifique!) Assim, a condição de salto $[u] r'(t) = [\Phi(u)]$ é escrita como

$$(u^+ - u^-) r'(t) = \frac{1}{2} [(u^+)^2 - (u^-)^2] \Rightarrow r'(t) = \frac{u^+ + u^-}{2}.$$

³ Assim, $x = r(t)$ é um choque.

Quer dizer, a velocidade do salto é a média entre os valores de u à direita e à esquerda do salto.

Vamos escrever a equação da velocidade do salto mais detalhadamente:

$$r'(t) = \frac{u(r(t)^+, t) + u(r(t)^-, t)}{2}. \quad (3.8)$$

Já que, quando $t = 0$ temos $u(0)^- = 1$ e $u(0)^+ = 0$, podemos concluir que

$$r'(0) = \frac{1 + 0}{2}.$$

Notamos que se tomarmos $r'(t) \equiv \frac{1}{2}$, obtemos um choque consistente com o problema, ao encontrarmos a solução $r(t) = \frac{t}{2}$ e o choque $x = t/2$. Esse choque produz a solução (única)

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < t/2, \\ 0, & \text{se } x > t/2, \end{cases}$$

correspondente ao choque de velocidade constante $1/2$.

Contudo, não é óbvio que o choque $x = t/2$ seja a única solução da equação (3.8). $\triangleleft$

Exemplo 3.7 (Continuação do Exemplo 3.4) Já vimos que o problema

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

possui solução contínua⁴ dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \frac{x}{t}, & \text{se } 0 \leq x \leq t, \\ 1, & \text{se } x > t. \end{cases}$$

figura para t fixo

Como no exemplo anterior, a equação $u_t + uu_x = 0$ vem da lei de conservação com fluxo $\Phi(u) = u^2/2$ e, portanto, a condição de salto é dada por

$$r'(t) = \frac{u^+ + u^-}{2}.$$

Podemos criar uma família a um parâmetro de soluções descontínuas – satisfazendo a condição de salto – ao definir, para $\gamma \in [0, 1]$,

$$u_\gamma(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \frac{x}{t}, & \text{se } 0 \leq x \leq \gamma t, \\ \gamma, & \text{se } \gamma t \leq x \leq \frac{\gamma+1}{2}t \\ 1, & \text{se } x > \frac{\gamma+1}{2}t. \end{cases}$$

⁴Portanto, não existe onda de choque.

figura para t fixo

A solução contínua obtida anteriormente corresponde à escolha $\gamma = 1$. Para $0 \leq \gamma < 1$, o choque é dado por $r(t) = \frac{\gamma+1}{2}t$. Note que a condição de salto é satisfeita, pois

$$\frac{u(r(t)^+, t) + u(r(t)^-, t)}{2} = \frac{1 + \gamma}{2} = r'(t).$$

◁

O Exemplo 3.7 nos coloca novamente em uma posição desconfortável: se tantas soluções distintas são possíveis, como esperar unicidade?

3.3.2 Formalizando o conceito de solução fraca

A abordagem que conduziu à condição de salto tem duas desvantagens: em primeiro lugar, solução fraca foi definida de maneira muito “solta”: uma solução contínua à direita e à esquerda do choque, sendo descontínua no mesmo. Em segundo lugar, não temos indicação de como generalizá-la para o $\mathbb{R}^n$.

Assim, começamos nosso tratamento justamente pelo $\mathbb{R}^n$. Consideraremos o problema

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div} \Phi(x, t, u) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Note que a equação nada mais é do que a edp que exprime nossa lei de conservação básica (3) no caso de não haver criação (ou destruição) de massa no interior de Ω . Seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times [0, \infty))$: quer dizer, φ é uma função de classe C^∞ cujo suporte é $K \times [0, T] \subset \Omega \times [0, \infty)$. Assim, em particular, $\varphi(x, t) = 0$ se $x \in \partial\Omega$ ou se $t = T$.⁵

Suponhamos que u seja uma solução clássica de (3.9). Multiplicando a edp por φ e integrando em $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n \times [0, \infty)} [u_t + \operatorname{div} \Phi(x, t, u)] \varphi = 0.$$

Consideremos a primeira integral. De acordo com o Teorema de Fubini e integração por partes

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \times (0, \infty)} u_t \varphi &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^T u_t \varphi dt dx \\ &= \int_{\Omega} \left((u\varphi)|_0^T - \int_0^T u \varphi_t dt \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(-u_0(x) \varphi(x, 0) - \int_0^T u \varphi_t dt \right) dx \\ &= - \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x, 0) dx - \int_{\Omega} \int_0^T u \varphi_t dt dx. \end{aligned}$$

⁵Observe que não podemos exigir que $\varphi(x, t) = 0$ se $t = 0$.

Na segunda integral, aplicando os Teoremas de Fubini e da Divergência, obtemos⁶

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n \times [0, \infty)} \operatorname{div} \Phi(x, t, u) \varphi &= \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div} \Phi(x, t, u) \varphi \, dx \, dt \\
 &= \int_0^T \left(\int_{\partial\Omega} \Phi(x, t, u) \varphi \, dS - \int_{\Omega} \Phi(x, t, u) \cdot \nabla \varphi \, dx \right) dt \\
 &= - \int_0^T \int_{\Omega} \Phi(x, t, u) \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt
 \end{aligned}$$

Chegamos então à nossa definição:

Definição 3.8 *Suponha que $u_0(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Uma função $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ tal que $\Phi(x, t, u) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty) \times \mathbb{R})$ é uma **solução fraca** do problema*

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div} \Phi(x, t, u) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (3.9)$$

se ela satisfizer

$$\int_{\mathbb{R}^n \times [0, \infty)} u \varphi_t + \Phi(x, t, u) \cdot \nabla \varphi = - \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) \varphi(x, 0)$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$.

Agora vamos mostrar que a condição de salto pode ser deduzida dessa definição de solução fraca.

Teorema 3.9 (Rankine-Hugoniot)

Seja $V \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$ um aberto. Suponha que uma curva C , parametrizada por $t \in [a, b] \mapsto (r(t), t)$, divida V em duas regiões, V^+ e V^- , à esquerda e à direita de C , respectivamente. Seja u uma solução fraca de

$$\begin{cases} u_t + (\Phi(x, t, u))_x = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (3.10)$$

tal que

- (i) u é uma solução clássica em V^+ e V^- ;
- (ii) u sofre um salto $[u]$ em C ;
- (iii) o salto $[u]$ é contínuo ao longo de C .

Então, para qualquer t vale a relação de Rankine-Hugoniot

$$[u]r'(t) = [\Phi(u)].$$

⁶Note que $\operatorname{div}(\Phi\varphi) = \varphi \operatorname{div} \Phi + \Phi \cdot \nabla \varphi$.

Demonstração: Suponhamos que $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ tenha suporte contido em V . Em particular, $\varphi(x, 0) = 0$, de modo que⁷

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = \iint_V [u \varphi_t + \Phi(x, t, u) \varphi_x] dA \\ &= \iint_{V^+} [u \varphi_t + \Phi(x, t, u) \varphi_x] dA + \iint_{V^-} [u \varphi_t + \Phi(x, t, u) \varphi_x] dA \end{aligned} \quad (3.11)$$

Mas, como u é uma solução clássica de (3.10) em V^+ , temos

$$\iint_{V^+} [u_t \varphi + \Phi_x(x, t, u) \varphi] dA = 0$$

e, assim,

$$\iint_{V^+} [(u\varphi)_t + (\Phi(x, t, u)\varphi)_x] dA = \iint_{V^+} [u \varphi_t + \Phi(x, t, u) \varphi_x] dA.$$

Aplicando o Teorema de Green (estamos no plano!), obtemos

$$\iint_{V^+} [(\Phi(x, t, u)\varphi)_x - (-u\varphi)_t] dA = \int_{\partial V^+} -u\varphi dx + \Phi(x, t, u)\varphi dt$$

e os mesmos cálculos são válidos para V^- .

figura

Uma vez que $\varphi = 0$ em ∂V , decorre então de (3.11) que⁸

$$\begin{aligned} 0 &= \int_C -u^- \varphi dx + \int_C \Phi(x, t, u^-) \varphi dt + \int_{-C} -u^+ \varphi dx + \int_{-C} \Phi(x, t, u^+) \varphi dt \\ &= \int_a^b [u^+ - u^-] \varphi r'(t) dt + \int_a^b [\Phi(x, t, u^-) - \Phi(x, t, u^+)] \varphi dt \\ &= \int_a^b [u] r'(t) \varphi dt + \int_a^b [\Phi(x, t, u^-) - \Phi(x, t, u^+)] \varphi dt. \end{aligned}$$

Como essa igualdade vale para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ com suporte compacto contido em V , concluímos a condição de Rankine-Hugoniot. $\square$

⁷Observe que a integral em V é uma integral dupla em um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ e dA o elemento de área.

⁸Note que a curva C é percorrida no sentido positivo em V^- e no sentido negativo em V^+ e a parametrização de C é $x = r(t)$.

3.4 Unicidade da Solução Fraca

O Exemplo 3.7 mostrou que a condição de Rankine-Hugoniot não é suficiente para assegurar a existência de *uma única* solução fraca para um problema de valor inicial. Em geral, são necessárias novas condições para obter unicidade de solução. Duas dessas condições são a *condição de entropia* e a *condição de viscosidade*. Aqui apenas apresentaremos um desses critérios: a condição de entropia, cuja prova de unicidade está além do escopo deste texto.⁹

3.4.1 Entropia

De acordo com a segunda lei da termodinâmica, a entropia de um sistema deve crescer com o tempo. Em outras palavras, um sistema termodinâmico isolado deve sofrer mudanças irreversíveis com o decorrer do tempo.

Definição 3.10 Uma função $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a **condição de entropia** se existir uma constante $E > 0$ tal que, para todos $x \in \mathbb{R}$, $t \in (0, \infty)$ e $h > 0$ vale

$$u(x + h, t) - u(x, t) \leq \frac{E}{t}h.$$

A condição de entropia implica que a função $x \mapsto u(x, t) - \frac{E}{t}x$ não é crescente. De fato,

$$\left(u(x + h, t) - \frac{E}{t}(x + h)\right) - \left(u(x, t) - \frac{E}{t}x\right) = u(x + h, t) - u(x, h) - \frac{E}{t}h \leq 0.$$

Como consequência,

- (i) $u(x, t) - \frac{E}{t}x$ possui limites laterais em cada ponto x , o que implica que $x \mapsto u(x, t)$ também tem limites laterais u^- e u^+ em cada ponto x ;
- (ii) $u^- \geq u^+$.

Exercício 2 Verifique que $u^- \geq u^+$.

A relação $u^- \geq u^+$ significa que, quando uma onda atravessa um choque (um processo basicamente irreversível), o salto deve ser sempre negativo.

Suponhamos que o fluxo $\Phi(u): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ seja convexo. Em particular, Φ' é crescente. A condição de Rankine-Hugoniot e o Teorema do Valor Médio implicam então que

$$r'(t) = \frac{\Phi(u^+) - \Phi(u^-)}{u^+ - u^-} = \Phi'(\xi),$$

com $u^+ < \xi < u^-$. Isso quer dizer que a velocidade da onda de choque é intermediária entre as velocidades das características antes e depois do choque:

$$\Phi'(u^-) > r'(t) > \Phi'(u^+).$$

⁹Veja Smoller ou Evans.

Exercício 3 Verifique essa desigualdade.

Um critério fácil para verificar a condição de entropia é dado pelo seguinte resultado:

Teorema 3.11 Considere a lei de conservação

$$\begin{cases} u_t + [\Phi(u)]_x &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) > 0. \end{cases}$$

Suponha que $\Phi', \Phi'' > \theta > 0$ (em que θ é uma constante) e $u'_0 > 0$. Então existe uma constante E tal que $u_x < E/t$ para todo $t > 0$.

Demonstração: Temos que $[\Phi(u)]_x = \Phi'(u)u_x$, que nos leva à equação cinemática da onda com $\kappa(u) = \Phi'(u)$. Quer dizer,

$$u_x = \frac{u'_0}{1 + \Phi'' u'_0 t}.$$

Se tivermos $u'_0 = 0$, então $u_x = 0$. Se for $u'_0 > 0$, então

$$u_x < \frac{u'_0}{\Phi'' u'_0 t} = \frac{1}{\Phi'' t} \leq \frac{E}{t},$$

em que $E = 1/\mu$ e $\mu = \inf \Phi''$, já que esse ínfimo existe. □

Veremos que essa condição impede múltiplas interseções das características com a onda de choque.

Exemplo 3.12 (Continuação do Exemplo 3.7) Já vimos que o problema

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

possui uma família a um parâmetro de soluções descontínuas – satisfazendo a condição de salto – ao definir, para $\gamma \in [0, 1]$,

$$u_\gamma(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \frac{x}{t}, & \text{se } 0 \leq x \leq \gamma t, \\ \gamma, & \text{se } \gamma t \leq x \leq \frac{\gamma+1}{2}t \\ 1, & \text{se } x > \frac{\gamma+1}{2}t \end{cases}$$

Se tomarmos $\gamma = 1$, obtemos uma solução contínua. Como já vimos, a equação $u_t + uu_x = 0$ vem da lei de conservação com fluxo $\Phi(u) = u^2/2$.

Assim, para $0 \leq \gamma < 1$, a condição de salto é satisfeita, pois

$$\frac{u(r(t)^+, t) + u(r(t)^-, t)}{2} = \frac{1 + \gamma}{2} = r'(t),$$

o que produz o choque $r(t) = \frac{\gamma+1}{2}t$.

Agora consideremos a condição de entropia. Como $\Phi(u) = u^2/2$, temos $\Phi'(u) = u > 0$, de modo que

$$\Phi'(u^-) = u^- = \gamma \quad \text{e} \quad \Phi'(u^+) = u^+ = 1.$$

Assim, não vale

$$\Phi'(u^-) = \gamma > \frac{\gamma+1}{2} > 1 = \Phi'(u^+).$$

Como consequência, nenhuma das soluções descontínuas satisfaz à condição de entropia. Por outro lado, a solução contínua satisfaz a condição de entropia. $\triangleleft$

Pode-se mostrar que a existência e unicidade da solução fraca satisfazendo a condição de entropia. Veja, por exemplo, o texto de Smoller.

Exemplo 3.13 Consideremos o problema de valor inicial

$$u_t + uu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

com a condição inicial dada por

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0, \\ -1 & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Nesse caso, o fluxo é dado por $u^2/2$. É fácil verificar que as características para esse problema são dadas por

$$x = \begin{cases} x_0 + t, & \text{se } x_0 < 0 \\ x_0 - t & \text{se } 0 < x_0 < 1 \\ x_0 & \text{se } x_0 > 1. \end{cases}$$

A condição de salto é dada por

$$\frac{u^+ - u^-}{2} r'(t) = \frac{1}{2} [(u^+)^2 - (u^-)^2] \quad \Rightarrow \quad r'(t) = \frac{u^+ + u^-}{2}.$$

Figura

Assim, as características apresentam choques em diversas instâncias. Vamos começar a análise com o primeiro choque, que ocorre em $t = 0$ e propagar até $t = 1$. Sua velocidade é dada por

$$r'(t) = \frac{-1 + 1}{2} = 0.$$

Continuando com a análise, precisamos determinar como esse choque continua depois de $t = 1$. Note que foi criada (na verdade, aumentada) uma região sem características para $t < x + 1$, $0 < x < 1$. Assim, precisamos introduzir uma onda de rarefação contínua nessa

região. Para isso, notamos que as retas saindo de $x = 1, t = 0$ tem equação $x = -kt + 1$ (com k constante), o que nos dá $(x - 1)/t = k$. Assim, definimos

$$u = \frac{x - 1}{t}$$

nessa região.

Essa onda de rarefação toma o valor -1 antes de sua criação e varia até o valor 0 , depois da onda. Assim, o choque em $t = 1$ deverá ter velocidade

$$r' = \frac{\frac{x-1}{t} + 1}{2}.$$

Uma vez que $r' = dx/dt$, chegamos à equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} - \frac{x}{2t} = \frac{1 - \frac{1}{t}}{2},$$

que é uma equação linear com condição inicial $x = 0$ em $t = 1$. (Essa é a posição em que esse choque começa.) Resolvendo essa equação, obtemos

$$x = r(t) = t + 1 - 2\sqrt{t}$$

e devemos limitar essa solução ao intervalo $1 \leq t \leq 4$, pois essa solução se choca com as características verticais em $x = 1$. Resolvendo essa equação, obtemos $t - 2\sqrt{t} = 0$, que nos dá a solução $t = 4$. Note que essa solução é compatível com a condição de entropia.

Figura

Agora precisamos considerar o choque das características vindas da região $x < 0$ com as características verticais, para $t > 4$. A condição de salto é dada por

$$r' = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, o choque é uma reta com velocidade $1/2$ para $t > 4$. Sua equação é, portanto,

$$x - 1 = \frac{1}{2}(t - 4),$$

o que produz uma reta de inclinação 2 no plano xt . Note que esses dois últimos choques são contínuos em $(x, t) = (1, 4)$ e que a condição de entropia foi respeitada em toda essa solução.

Escreva a solução final encontrada nesse exemplo.

Figura

3.5 Exercícios

1. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + uu_x &= 0, \\ u(x, 0) &= \frac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

Encontre o *tempo de quebra* e escreva a solução em forma implícita.

2. Considere a lei de conservação

$$\begin{cases} u_t + [\Phi(u)]_x &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) > 0. \end{cases}$$

Suponha que $\Phi', \Phi'' > \theta > 0$ (em que θ é uma constante) e $u'_0 > 0$. Mostre que existe uma constante E tal que $u_x < E/t$ para todo $t > 0$.

3. Mostre que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + [\Phi(u)]_x &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{cases}$$

em que $\Phi \in C^2$ satisfaz

- (i) $\Phi(0) = 0$ e $\Phi'' > 0$;
- (ii) f é integrável em $\mathbb{R}$,

possui no máximo uma solução fraca, integrável e C^1 por partes,¹⁰ satisfazendo tanto o condição de Rankine-Hugoniot e a condição de entropia.

4. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + uu_x &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{cases}$$

em que

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0, \\ 1 - x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Mostre que existe uma solução contínua para $t < 1$. Encontre a solução para $t > 1$. Esboce a solução para $t = 0$, $t = 1$ e $t = 3/2$.

¹⁰Uma função f é C^1 por partes se, em todo intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, existir um número finito de pontos $x_1, \dots, x_n$ tais que f é de classe C^1 em (x_i, x_{i+1}) , as derivadas laterais existindo em ambos os extremos.

Capítulo 4

A Equação de Laplace

Duas das mais importantes equações diferenciais parciais são a *equação de Laplace*

$$\Delta u = 0 \quad (4.1)$$

e a sua versão não homogênea, a *equação de Poisson*

$$-\Delta u = f. \quad (4.2)$$

Nas equações (4.1) e (4.2), procura-se a função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 que satisfaça a respectiva equação no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Em (4.2), $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua conhecida.

Definição 4.1 Uma função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 que satisfaz (4.1) é chamada *harmônica*.

Exercício 1 Mostre que a equação de Laplace $\Delta u = 0$ é invariante por translação e por rotação. Isto é, se $\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ for uma translação e P uma matriz ortogonal $n \times n$, então as funções $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$v(x) = u(\tau x) \quad e \quad w(x) = u(Px)$$

também satisfazem a equação de Laplace. Também vale $\Delta_x f(x - y) = \Delta_y f(x - y)$ para toda função f duas vezes diferenciável.

Solução: As funções $v = y \circ \tau$ e $w = u \circ P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem $Dv(x) = Du(\tau x)$ (pois $D\tau = I$) e $Dw(x) = Du(Px)O$. Desse modo, $D^2v(x) = D^2u(\tau x)$ e $D^2w(x) = D^2u(Px)(O, O) = O^T H_u(Ox)O$, H_u denotando a matriz hessiana de u . Logo,

$$\Delta v(x) = \text{tr}(D^2w(x)) = \Delta u(\tau x) = 0$$

e

$$\Delta w(x) = \text{tr}(D^2w(x)) = \text{tr}(O^T H_u(Ox)O) = \text{tr}(H_u(Ox)OO^T) = \text{tr}(H_u(Ox)) = \Delta u(Ox) = 0.$$

Note que a equação de Laplace é invariante por rotação se u estiver definida numa bola $B \subset \mathbb{R}^n$.

Denotando $Df = (D_1f, \dots, D_nf)$ e analogamente para a derivada segunda, seja $v(y) = f(x - y)$. Então $Dv(y) = Df(x - y)(-I)$ e $v''(y) = D^2f(x - y)I$. Se $w(x) = f(x - y)$, então $w''(x) = D^2f(x - y)$. Isso implica que $D_x^2f(x - y) = D_y^2f(x - y)$, donde segue que $\Delta_x f(x - y) = \Delta_y f(x - y)$.

4.1 Interpretação Física

Escrever

4.2 As Identidades de Green

Definição 4.2 Uma função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pertence a $C^k(\bar{\Omega})$ se $u \in C^k(\Omega)$ e todas as derivadas de u até a ordem k tiverem extensão contínua para $\bar{\Omega}$.

Relembramos o Teorema da Divergência: sejam $V \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\Phi \in C^1(\bar{V})$. Então, se ∂V for de classe C^1 ,

$$\int_V \operatorname{div} \Phi dx = \int_{\partial V} \Phi \cdot \nu dS$$

em que ν denota a normal *exterior* da superfície ∂V .

Em particular, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe C^1 . Então, se $u \in C^1(\bar{\Omega})$, o Teorema da Divergência aplicado ao campo $\Phi(x) = (0, \dots, 0, u(x), 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ (com $u(x)$ na posição i) nos dá

$$\int_{\Omega} u_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} uv_i dS \quad (4.3)$$

para todo $1 \leq i \leq n$, em que $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ é a normal exterior de $\partial\Omega$. Daí decorre que, se $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$, então

$$\int_{\Omega} u_{x_i} v dx = - \int_{\Omega} uv_{x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uvv_i dS,$$

chamada *fórmula de integração por partes*.

Exercício 2 Mostre essa última afirmação.

Suponhamos agora que $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Ao tomar $\Phi = \nabla u$, decorre do Teorema da Divergência (ou da equação (4.3), como acima) que

$$\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu dS = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS, \quad (4.4)$$

igualdade algumas vezes chamada *fórmula de Green*. (A última igualdade é a definição da derivada de u na direção ν .)

Vamos aplicar esse resultado ao fluxo definido por $\Phi = v\nabla u$, em que $u \in C^2(\bar{\Omega})$ e $v \in C^1(\bar{\Omega})$. Então obtemos a *Primeira Identidade de Green*:

$$\int_{\Omega} (v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v) dx = \int_{\partial\Omega} (v\nabla u \cdot \nu) dS = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS. \quad (4.5)$$

De fato,

$$\operatorname{div}(v\nabla u) = \operatorname{div} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} v, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} v \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v \right) = v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v.$$

Observe que, se tomarmos $v \equiv 1$ nesta igualdade, obtemos a fórmula de Green.

É claro que se aplicarmos o Teorema da Divergência a $\Phi = u\nabla v$ – com $u \in C^1(\bar{\Omega})$ e $v \in C^2(\bar{\Omega})$ – obteremos

$$\int_{\Omega} (u\Delta v + \nabla v \cdot \nabla u) dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS. \quad (4.6)$$

Se $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$, subtraindo (4.6) de (4.5), obtemos a *Segunda Identidade de Green*:

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS \quad (4.7)$$

O estudo das equações de Laplace e Poisson está relacionado com problemas fundamentais: o *problema de Dirichlet* para a equação de Laplace consiste em encontrar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que, dada $f \in C(\partial\Omega)$, tenhamos

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{em } \Omega, \\ u = f, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

enquanto o *problema de Neumann* consiste em encontrar $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ tal que, dada $g \in C(\partial\Omega)$, tenhamos

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Analogamente, o *problema de Dirichlet* para a equação de Poisson consiste em encontrar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que, dadas $f \in C(\partial\Omega)$ e $g \in C(\partial\Omega)$, tenhamos

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

enquanto o *problema de Neumann* consiste em encontrar $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ tal que, dadas $f \in C(\partial\Omega)$ e $g \in C(\partial\Omega)$, tenhamos

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

NOS EXERCÍCIOS ABAIXO, CONFERIR HIPÓTESES.

Exercício 3 Mostre que uma condição necessária para que o problema de Neumann para a equação de Poisson tenha solução é que tenhamos

$$\int_{\Omega} f dx = \int_{\partial\Omega} g dS.$$

Exercício 4 Mostre que, se o problema de Dirichlet para a equação de Poisson tiver solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, então essa solução é única.

Exercício 5 Mostre que, se o problema de Neumann para a equação de Poisson tiver solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, então essa solução é única a menos de uma constante.

Exercício 6 Seja $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica. Mostre que

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0.$$

Exercício 7 Seja $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica. Mostre que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu} u^2.$$

4.3 Teoremas do Valor Médio

Seja $u \in C(\Omega)$ uma função qualquer e tomemos $B_r(x) \Subset \Omega$. Pelo Teorema da Valor Médio para integrais, temos

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u dx = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(\xi) d\xi \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u dS = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u dS \end{aligned}$$

Uma propriedade fundamental das funções harmônicas - que, na verdade, caracteriza tais funções - são as Propriedades do Valor Médio, que garantem que, dada uma função harmônica u em um aberto Ω , então $u(x)$ é igual à média de u tanto sobre a esfera $\partial B_r(x)$ quanto sobre a bola $B_r(x)$, desde que $B_r(x) \subset \Omega$.¹ Essas propriedades têm consequências notáveis, como veremos posteriormente.

Lema 4.3 Seja $u \in C^1(\bar{B}_r(x_0))$. Se

$$\phi(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u dS,$$

então

$$\phi'(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS$$

em que ν denota a normal exterior da bola $B_r(x_0)$.

¹Quer dizer, não precisamos tomar o limite nas expressões do Teorema do Valor Médio para integrais.

Demonstração: Fazendo a mudança de variável $z = (y - x)/r$ na definição de ϕ , introduzimos r no integrando:

$$\phi(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_1(0)} u(x + rz) dS(z) = \frac{1}{|\partial B_1(0)|} \int_{\partial B_1(0)} u(x + rz) dS(z).$$

Derivando sob o sinal de integração e voltando à variável inicial, obtemos

$$\phi'(r) = \frac{1}{|\partial B_1(0)|} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x + rz) \cdot z dS(z) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} \nabla u(y) \cdot \left(\frac{y - x}{r} \right) dS(y).$$

Como o vetor normal unitário exterior a $\partial B_r(x)$ é justamente $(y - x)/r$, concluímos que

$$\phi'(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS,$$

mostrando o afirmado. □

Denotaremos $V \Subset \Omega$ quando tivermos $V \subset \bar{V} \subset \Omega$ e $\bar{V}$ for um compacto.

Teorema 4.4 (Propriedade do Valor Médio) *Se $u \in C^2(\Omega)$ for harmônica, então*

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x)} u = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u \\ &= \frac{1}{|\partial B_r(x_0)|} \int_{\partial B_r(x)} u = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u \end{aligned}$$

para toda bola $B_r(x) \Subset \Omega$.

Demonstração: Para $x \in \Omega$ e $B_r(x) \Subset \Omega$ e ϕ definida no Lema 4.3, temos

$$\phi'(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

Uma vez que $u \in C^2(\bar{B}_r(x))$, podemos aplicar a fórmula integral de Cauchy e obter

$$\phi'(r) = \int_{B_r(x)} \Delta u dy = 0,$$

o que mostra que ϕ é constante. Aplicando o Teorema do Valor Médio para integrais, concluímos que

$$\phi(r) = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{n\omega_n t^{n-1}} \int_{\partial B_t(x)} u(y) dS(y) = u(x).$$

Assim, se $B_r(x) \Subset \Omega$, vale

$$n\omega_n r^{n-1}u(x) = \int_{\partial B_r(x)} u dS.$$

Logo, utilizando coordenadas polares

$$\int_{B_r(x)} u dy = \int_0^r \left(\int_{\partial B_t(x)} u dS \right) dt = u(x) \int_0^r n\omega_n t^{n-1} dt = \omega_n r^n u(x),$$

mostrando a primeira igualdade. $\square$

Observação 4.5 A hipótese $B_r(x) \Subset \Omega$ possibilita a aplicação do Teorema da Divergência. Note que a Propriedade do Valor Médio implica que a função ϕ é constante. $\triangleleft$

Exercício 8 Mostre que se $u \in C^2(\Omega)$ satisfizer $u(x) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y) dy$ para toda bola $B_r(x) \Subset \Omega$, então $u(x) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dy$. $\triangleleft$

Utilizando convolução com funções regularizadoras, obtemos que uma função harmônica $u \in C^2(\Omega)$ é de classe C^∞ em Ω . Note que nada é dito sobre o comportamento de u em $\partial\Omega$.

Teorema 4.6 (Regularidade Interior) Se $u \in C^2(\Omega)$ satisfizer a Propriedade da Média para toda bola $B_r(x) \Subset \Omega$, então $u \in C^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Seja η_ϵ a $\square$

Teorema 4.7 (Recíproca da Propriedade do Valor Médio)

Se $u \in C^2(\Omega)$ satisfizer

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u dS = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u dS$$

para toda bola $B_r(x) \Subset \Omega$, então Ω é harmônica.

Demonstração: Considere ϕ definida no Lema 4.3.

Supondo que $\Delta u \not\equiv 0$, podemos supor que exista uma bola $B_R(x_0) \subset \Omega$ tal que, digamos, $\Delta u > 0$ em $B_R(x_0)$, isto é, $\Delta u(x) > 0$ para todo $x \in B_R(x_0)$. Por hipótese, $u(x_0) = \phi(r)$ para todo $0 < r \leq R$, de modo que $\phi'(r) = 0$ se $0 < r < R$. Decorre então do Lema 4.3 e da fórmula de Green que

$$0 = \phi'(r) = \frac{1}{|\partial B_r(x_0)|} \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = \frac{1}{|\partial B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} \Delta u(y) dy > 0,$$

uma contradição. $\square$

4.4 Propriedades de Funções Harmônicas

Definição 4.8 Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Dizemos que u é **sub-harmônica**, se

$$u(x) \leq \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u, \quad \forall B_r(x) \Subset U$$

e **super-harmônica**, se

$$u(x) \geq \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u, \quad \forall B_r(x) \Subset U.$$

Exercício 9 Mostre que $u \in C^2(\Omega)$ é sub-harmônica se, e somente se, $\Delta u \geq 0$ em Ω .

Exercício 10 Mostre que $u \in C^2(\Omega)$ é super-harmônica se, e somente se, $\Delta u \leq 0$ em Ω .

4.4.1 Princípio do Máximo

Teorema 4.9 (Princípio do Máximo – Forma Forte)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ conexo. Suponhamos que a função contínua $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ seja sub-harmônica (respectivamente, super-harmônica). Se u assumir um máximo (respectivamente, mínimo) em um ponto $x_0 \in \Omega$, então u é constante.

Demonstração: Suponhamos que Ω seja conexo e que u assuma seu máximo em um ponto $x_0 \in \Omega$. Defina $\mathcal{A} = \{x \in \Omega : u(x) = u(x_0) = M\}$. Como $x_0 \in \Omega$ e u é contínua, temos que $\mathcal{A}$ é um conjunto fechado não vazio. Vamos provar que $\mathcal{A}$ é aberto. Como Ω é conexo, isso implica que $\mathcal{A} = \Omega$.

Suponhamos que u seja sub-harmônica. Para $z \in \mathcal{A}$, considere então $B_r(z) \Subset \Omega$. Como $u(z) - M$ é sub-harmônica, temos

$$0 = u(z) - M \leq \frac{1}{\omega_n r} \int_{B_r(z)} (u(x) - M) dx \leq 0,$$

o que implica que $u(x) = M$ em $B_r(z)$.

Ao considerar $-u$ ao invés de u obtemos o resultado para funções super-harmônicas. $\square$

Exercício 11 (Princípio do Máximo – Forma Fraca) Sejam Ω um aberto limitado e $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Mostre que

$$(i) \max_{x \in \bar{\Omega}} u = \max_{\partial \Omega} u, \text{ se } u \text{ for sub-harmônica;}$$

$$(ii) \min_{x \in \bar{\Omega}} u = \min_{\partial \Omega} u, \text{ se } u \text{ for super-harmônica.}$$

Conclua, em particular, que se u for harmônica, então $\min_{\partial \Omega} u \leq u \leq \max_{\partial \Omega} u$.

Exemplo 4.10 A hipótese de Ω ser limitado não pode ser removida no Exercício 11. De fato, considere o domínio convexo

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > |x|\}.$$

A função $u(x, y) = y^2 - x^2$ satisfaz $\Delta u = 0$ e $u = 0$ em $\partial\Omega$. Contudo, $\sup_{\Omega} u = \infty$. $\triangleleft$

No caso de funções $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, podemos dar uma demonstração alternativa da forma fraca do Princípio do Máximo: DETALHAR ÁLGEBRA LINEAR ENVOLVIDA.

Teorema 4.11 (Princípio do Máximo – Forma Fraca)

Suponha que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ seja sub-harmônica em Ω (isto é, $\Delta u \geq 0$) e Ω um aberto limitado. Então vale a forma fraca do Princípio do Máximo:

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Respectivamente, se u for super-harmônica em Ω (isto é, $\Delta u \leq 0$) e Ω um aberto limitado, então

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Demonstração: Para $\epsilon > 0$, defina

$$u_{\epsilon}(x) = u(x) + \epsilon|x|^2.$$

Então

$$\frac{\partial u_{\epsilon}}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} + 2\epsilon x_i \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u_{\epsilon}}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + 2\epsilon.$$

Supondo u sub-harmônica, concluímos que

$$\Delta u_{\epsilon}(x) = \Delta u(x) + 2n\epsilon \geq 2n\epsilon > 0.$$

Se existisse $x_0 \in \Omega$ tal que $\max_{\Omega} u_{\epsilon}(x) = u_{\epsilon}(x_0)$, então teríamos $D^2 u(x_0) \cdot (v, v) \leq 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Quer dizer, $D^2 u(x_0)$ é negativa-definida e simétrica. Diagonalizando $D^2 u(x_0)$ (o que corresponde a uma mudança de base ortogonal), a invariância de Δu_{ϵ} sob essas mudanças de base implica que $\Delta u_{\epsilon} \leq 0$, o que contradiz $\Delta u_{\epsilon} > 0$. Assim,

$$\max_{\bar{\Omega}} u_{\epsilon} \leq \max_{\partial\Omega} u_{\epsilon}.$$

Como

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\bar{\Omega}} u_{\epsilon} \leq \max_{\partial\Omega} u + M\epsilon$$

(qual o significado de M ?) e $\epsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u.$$

□

Observação 4.12 O Princípio do Máximo garante, em particular, que se Ω for um aberto limitado e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ satisfizer

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $g \geq 0$, então u não assume valores negativos em Ω , pois $\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u \geq 0$.

Se, além disso, Ω for conexo e g positiva em algum ponto de $\partial\Omega$, então u é positiva em todos os pontos de Ω . De fato, se existisse $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = 0$, então u assumiria um mínimo em um ponto interior e, portanto, u seria constante, o que contradiz a existência de um ponto em que g é positiva. $\triangleleft$

Uma importante aplicação do Princípio do Máximo é a unicidade da solução do problema de Dirichlet para a equação de Poisson:

Teorema 4.13 (Unicidade no problema de Dirichlet para a equação de Poisson)

Seja Ω um aberto limitado. Suponhamos que $g \in C(\partial\Omega)$ e $f \in C(\Omega)$. Então existe no máximo uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ para o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.8)$$

Demonstração: Se tanto u quanto v satisfizerem (4.8), aplicando o Princípio do Máximo à função $w = u - v$, obtemos que $\Delta w = 0$ em Ω e $w = 0$ em $\partial\Omega$. Pelo Princípio do Máximo, $w \equiv 0$. $\square$

Teorema 4.14 (Dependência contínua dos dados de fronteira)

Seja Ω um aberto limitado. Suponha que u, v sejam soluções de

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g_1 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \Delta v = f & \text{em } \Omega, \\ v = g_2 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $f \in C(\Omega)$ e $g_1, g_2 \in C(\partial\Omega)$. Então

$$\|u - v\|_{\infty} \leq \|g_1 - g_2\|_{\infty}.$$

As normas $\|u - v\|_{\infty}$ e $\|g_1 - g_2\|_{\infty}$ são as normas em $\bar{\Omega}$ e $\partial\Omega$, respectivamente.

Demonstração: Definindo $w = u - v$, vemos que w satisfaz

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{em } \Omega, \\ w = g_1 - g_2 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

A afirmação decorre então do Princípio do Máximo (Teorema 4.11). $\square$

Exercício 12 Mostre que o problema de Neumann para a equação de Poisson possui no máximo uma solução, a menos de uma constante.²

Exercício 13 Sejam $u_1, u_2: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com u_2 harmônica e u_1 sub-harmônica, ambas coincidindo em $\partial\Omega$. Mostre que $u_1 \leq u_2$ em Ω . O que acontece se u_1 for super-harmônica ao invés de sub-harmônica?

4.4.2 Desigualdade de Harnack

Funções harmônicas não negativas possuem uma propriedade especial: o máximo e o mínimo de u em qualquer conjunto compacto contido em Ω são comparáveis e a constante que permite essa comparação independe de u :

Teorema 4.15 (Desigualdade de Harnack)

Para qualquer aberto conexo $V \Subset \Omega$, existe uma constante $C = C(n, V, \text{dist}(V, \partial\Omega))$ tal que

$$\frac{1}{C}u(y) \leq u(x) \leq Cu(y), \quad \forall x, y \in V \quad \Rightarrow \quad \sup_V u \leq C \inf_V u. \quad (4.9)$$

para toda função harmônica u não negativa em Ω .

Note que, como $u \geq 0$ em Ω , pelo Princípio do Máximo seu mínimo é atingido em $\partial\Omega$. Se u não for constante, então $\min_{\bar{V}} u > 0$.

Demonstração: Seja $r = \frac{\text{dist}(V, \partial\Omega)}{4}$. Tome $x, y \in V$ tais que $|x - y| < r$. Então, pela propriedade da Média,

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n(2r)^n} \int_{B_{2r}(x)} u \geq \frac{1}{\omega_n(2r)^n} \int_{B_r(y)} u = \frac{1}{2^n} u(y).$$

Trocando x por y , encontramos

$$u(y) \geq \frac{1}{2^n} u(x),$$

mostrando que

$$\frac{1}{2^n} u(y) \leq u(x) \leq 2^n u(y)$$

para quaisquer $x, y \in V$ com $|x - y| < r$.

Como $\bar{V}$ é compacto e conexo, podemos cobri-lo por um número finito de bolas $B_1, \dots, B_N$, todas com raio $r/2$, satisfazendo $B_i \cap B_{i-1} \neq \emptyset$ para $i \in \{2, \dots, N\}$.

Consideremos o caso de $N = 2$ e que queremos comparar um ponto $x_1 \in B_1$ com um ponto $x_2 \in B_2$. Consideremos um ponto $z \in B_1 \cap B_2$. Então temos

$$\frac{1}{2^n} u(x_1) \leq u(z) \leq 2^n u(x_1) \quad \text{e} \quad \frac{1}{2^n} u(z) \leq u(x_2) \leq 2^n u(z).$$

²Quer dizer, quaisquer duas soluções diferem por uma constante.

Logo

$$\frac{1}{2^{2n}}u(x_1) \leq \frac{1}{2^n}u(z) \leq u(x_2) \leq 2^n u(z) \leq 2^{2n}u(x_1).$$

Generalizando esse procedimento, vemos que

$$\frac{1}{2^{nN}}u(x) \leq u(y) \leq 2^{nN}u(x)$$

para quaisquer $x, y \in V$. Daí decorre o afirmado. $\square$

(Uma redação distinta para o final dessa demonstração pode ser encontrado em Peral, p. 260.)

4.5 A Solução Fundamental

4.5.1 Solução Fundamental e Estimativas

Uma boa estratégia ao se investigar qualquer equação diferencial parcial consiste em identificar algumas soluções explícitas e, se a equação for linear, gerar soluções mais complicadas à partir daquelas mais simples obtidas anteriormente.

Ao obter soluções explícitas, é aconselhável focar a atenção em classes de funções que possuem propriedades de simetria. Uma vez que a equação de Laplace é invariante por rotações (veja o Exercício 1), é natural procurar por *soluções radiais*, isto é, funções de $r = |x|$.

Vamos, portanto, procurar soluções da equação de Laplace (4.1), no caso de $\Omega = \mathbb{R}^n$, tendo a forma

$$u(x) = v(r),$$

em que $r = |x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ e v é escolhida de modo que $\Delta u = 0$ se verifique (se possível). Notamos inicialmente que

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2} (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{r} \quad (x \neq 0)$$

para $i = 1, \dots, n$. Decorre então, para $i = 1, \dots, n$, que

$$u_{x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}, \quad u_{x_i x_i} = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right)$$

e, assim,

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r).$$

Desse modo, $\Delta u = 0$ se, e somente se,

$$v'' + \frac{n-1}{r} v' = 0. \quad (4.10)$$

Se $v' \neq 0$, deduzimos que

$$[\ln v']' = \frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r} \quad \Rightarrow \quad \ln v' = (1-n) \ln r$$

e, portanto, $v'(r) = \frac{a}{r^{n-1}}$ para alguma constante a . Consequentemente, se $r > 0$, temos

$$v(r) = \begin{cases} a \ln r + b & (n = 2) \\ \frac{a}{r^{n-2}} + b & (n \geq 3), \end{cases}$$

em que b é uma constante.

Essas considerações levam à

Definição 4.16 Seja ω_n o volume da bola unitária no $\mathbb{R}^n$. A função

$$\Phi(x) = \Phi(|x|) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x| & (n = 2) \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} & (n \geq 3), \end{cases}$$

definida para todo $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ é a **solução fundamental** da equação de Laplace.

A escolha das constantes na definição da solução fundamental ficará clara na sequência. Note que, se $n = 2$, $2\pi = n\omega_n$.

Notamos que as seguintes estimativas

$$|\nabla \Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-1}}, \quad |D^2 \Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^n} \quad (4.11)$$

decorrem imediatamente de $v'(r) = a/r^{n-1}$ e, então, da equação (4.10).

Exercício 14 Mostre que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x) = -\frac{1}{n\omega_n} \frac{x_i}{|x|^n} \quad e \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(x) = -\frac{1}{n\omega_n} \left(\frac{\delta_{ij}}{|x|^n} - \frac{nx_i x_j}{|x|^{n+2}} \right)$$

e deduza daí que

$$|\nabla \Phi(x)| \leq \frac{1}{n\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-1}} \quad e \quad |D^2 \Phi(x)| \leq \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{|x|^n}.$$

Observação 4.17 Seja $f(|x|) = f(r)$ uma função radial. Então, pelo Teorema de Fubini,

$$\int_{B_R(0)} f(|x|) dx = \int_0^R \int_{\partial B_r(0)} f(r) dS dr = n\omega_n \int_0^R f(r) r^{n-1} dr,$$

pois $|\partial B_r(0)| = n\omega_n r^{n-1}$.

Em particular, se $f(|x|) = \Phi(x)$, então

$$\int_{B_R(0)} \Phi(|x|) dx = n\omega_n \int_0^R \Phi(r) r^{n-1} dr = \begin{cases} -\int_0^R r \ln r dr = \frac{R^2(1-2\ln R)}{4}, & \text{se } n = 2, \\ \frac{1}{n-2} \int_0^R r dr = \frac{R^2}{2(n-2)}, & \text{se } n \geq 3. \end{cases} \quad \triangleleft$$

Lema 4.18 *Seja Φ a solução fundamental da equação de Laplace. Então*

- (i) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B_\epsilon(0)} \Phi(y) dy = 0;$
- (ii) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon(0)} \Phi(y) dy = 0;$
- (iii) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) f(x - y) dS(y) = -f(x)$ para toda função $f \in C(B_\epsilon(0))$ para algum $\epsilon > 0$ fixo.

Demonstração: Decorre imediatamente da Observação 4.17 que

$$\int_{B_\epsilon(0)} |\Phi(y)| dy \leq \begin{cases} C\epsilon^2(1 + 2|\ln \epsilon|), & \text{se } n = 2, \\ C\epsilon^2, & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$$

o que implica a afirmação (i).

Também temos que

$$\int_{\partial B_\epsilon(0)} |\Phi(y)| dy = |\Phi(\epsilon)| \int_{\partial B_\epsilon(0)} dS(y) = n\omega_n \epsilon^{n-1} |\Phi(\epsilon)| \leq \begin{cases} C\epsilon |\ln \epsilon|, & \text{se } n = 2 \\ C\epsilon^{2-n} e^{n-1} = C\epsilon, & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$$

e a afirmação (ii) decorre desta estimativa.

Finalmente, se $y \neq 0$ e $n \geq 2$, decorre do Exercício 4.14 que $\nabla \Phi(y) = \frac{-1}{n\omega_n} \frac{y}{|y|^n}$. Como $\nu = \frac{y}{|y|}$ é a normal exterior unitária da bola $B_\epsilon(0)$, temos $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) = \nabla \Phi(y) \cdot \nu = \frac{-1}{n\omega_n \epsilon^{n-1}}$ em $\partial B_\epsilon(0)$. Segue então do Teorema de Mudança de Variável que

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) f(x - y) dS(y) &= -\frac{1}{n\omega_n \epsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\epsilon(0)} f(x - y) dS(y) \\ &= -\frac{1}{n\omega_n \epsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\epsilon(x)} f(z) dS(z). \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$, o Teorema do Valor Médio para integrais garante que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) f(x - y) dS(y) = -f(x).$$

O resultado decorre. □

4.5.2 A equação de Poisson no $\mathbb{R}^n$

Por construção, a função $x \mapsto \Phi(x)$ é harmônica para $x \neq 0$. Deslocando a origem para o ponto y , a equação de Laplace não se altera (veja o Exercício 1); assim, $x \mapsto \Phi(x - y)$ é uma função harmônica, para $x \neq y$. Consideremos agora uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e a aplicação $x \mapsto \Phi(x - y)f(y)$, para $x \neq y$, com y fixo. Essa aplicação é harmônica para qualquer escolha de $y \in \mathbb{R}^n$, assim como a soma de um número finito de tais expressões, tomadas para diferentes pontos y .

Esse raciocínio sugere

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y)f(y)dy = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln|x - y|f(y)dy & (n = 2) \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy & (n \geq 3) \end{cases} \quad (4.12)$$

seja uma solução da equação de Laplace. Entretanto, isso é *falso*: não é verdade que

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x \Phi(x - y)f(y)dy = 0.$$

(Na verdade, a estimativa (4.11) mostra que $D^2\Phi(x - y)$ não é integrável próximo de $y = x$ e, assim, a diferenciação sob o sinal de integração não procede).

Vamos supor, por simplicidade, que $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 4.19 (Solução da equação de Poisson no $\mathbb{R}^n$)

Suponhamos que $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ e considere u definida por (4.12). Então:

(i) $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $-\Delta u = f$ em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Defina $\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\tau(y) = x - y$. Então $\tau(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ e $|\det D\tau| = 1$. Assim, de acordo com o teorema de mudança de variáveis,

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\tau(\mathbb{R}^n)} \Phi(x - y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - \tau(y))f(\tau(y))|\det D\tau|dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f(x - y)dy. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \left[\frac{f(x + he_i - y) - f(x - y)}{h} \right] dy,$$

em que $0 \neq h \in \mathbb{R}$. Tomando o limite quando $h \rightarrow 0$, a convergência uniforme³

$$\frac{f(x + he_i - y) - f(x - y)}{h} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y)$$

³Veja o Corolário 4, p. 266 em [7]. O mesmo resultado pode ser obtido sem apelar para essa convergência uniforme, desde que apliquemos o Teorema da Convergência Dominada (note que Φ é integrável).

garante que, para $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y).$$

Analogamente, para $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x - y). \quad (4.13)$$

Uma vez que o lado direito da igualdade (4.13) é contínuo, vemos que $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, mostrando (i).

Como Φ tem uma singularidade em $y = 0$, isolaremos essa singularidade em uma pequena bola de raio $\epsilon > 0$ fixo:

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \int_{B_\epsilon(0)} \Phi(y) \Delta_x f(x - y) dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \Phi(y) \Delta_x f(x - y) dy \\ &=: I_\epsilon + J_\epsilon \end{aligned} \quad (4.14)$$

Afirmamos que $I_\epsilon \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. De fato, temos

$$|I_\epsilon| \leq \|D^2 f\|_{\sup} \int_{B_\epsilon(0)} |\Phi(y)| dy,$$

e a afirmação resulta do Lema 4.18 (i).

Quanto ao termo J_ϵ , notamos inicialmente que $\Delta_x f(x - y) = \Delta_y f(x - y)$ (veja o Exercício 4.1). Assim, a Primeira Identidade de Green aplicada ao termo J_ϵ produz

$$\begin{aligned} J_\epsilon &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \Phi(y) \Delta_x f(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \Phi(y) \Delta_y f(x - y) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \nabla \Phi(y) \cdot \nabla_y f(x - y) dy - \int_{\partial B_\epsilon(0)} \Phi(y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x - y) dS(y) \\ &=: K_\epsilon + L_\epsilon, \end{aligned}$$

em que ν denota o vetor unitário normal apontando para o *exterior* de $B_\epsilon(0)$.

O termo L_ϵ tende a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$. De fato, essa afirmação decorre do Lema 4.18 (ii), pois

$$|L_\epsilon| \leq \|\nabla f\|_{\sup} \int_{\partial B_\epsilon(0)} \Phi(y) dy.$$

Para estimar K_ϵ , aplicamos novamente a Primeira Identidade de Green:

$$\begin{aligned} K_\epsilon &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \Delta \Phi(y) f(x - y) dy + \int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) f(x - y) dS(y) \\ &= \int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) f(x - y) dS(y), \end{aligned}$$

pois $\Phi(y)$ é harmônica se $y \neq 0$. (Note que ν denota a normal *exterior* a $B_\epsilon(0)$.)

Decorre do Lema 4.18 (iii) que $K_\epsilon \rightarrow -f(x)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Assim,

$$\Delta u(x) = -f(x),$$

mostrando que u é uma solução da equação de Poisson. $\square$

Observação 4.20 1. Algumas vezes denotamos

$$-\Delta\Phi = \delta_0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n,$$

em que δ_0 denota a distribuição de Dirac. Com essa notação, podemos calcular formalmente, para $x \in \mathbb{R}^n$,

$$-\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta_x \Phi(x-y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \delta_x f(y) dy = f(x),$$

o que está de acordo com o teorema 4.19.

2. Na verdade, o Teorema 4.19 é válido sob hipóteses muito mais gerais sobre a função f . Veja [4].

3. A demonstração de que $K_\epsilon \rightarrow -f(x)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$ decorre de um resultado conhecido da Teoria de Integração. De fato, se f for uma função localmente integrável e $E = B_r(x_0)$, sabemos que

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E |f(x) - f(x_0)| d\mu \rightarrow 0 \quad \text{quando } \mu(E) \rightarrow 0 \quad \text{para quase todo } x_0.$$

$\triangleleft$

4.6 A Função de Green

Dada uma função $u \in C^2(\bar{\Omega})$, gostaríamos de obter uma representação integral para u em termos da solução fundamental $\Phi(y-x)$, sendo $x \in \Omega$ um ponto arbitrário. Não podemos simplesmente substituir v por $\Phi(y-x)$ na Segunda Identidade de Green (4.7), pois $\Phi(y-x)$ tem uma singularidade em x . Contornaremos essa dificuldade da mesma maneira que fizemos antes: consideraremos $\Omega \setminus B_\epsilon(x)$ e depois faremos $\epsilon \rightarrow 0$.

Teorema 4.21 *Seja $u \in C^2(\bar{\Omega})$ uma função qualquer. Então, para todo $x \in \Omega$ vale*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) \right) dS(y) - \int_{\Omega} \Phi(y-x) \Delta u(y) dy. \quad (4.15)$$

Demonstração: Fixe $x \in \Omega$ e tome $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset \Omega$. Aplicando a Segunda Identidade de Green (4.7) às funções $u(y)$ e $\Phi(y - x)$ no conjunto $V_\epsilon := \Omega \setminus B_\epsilon(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{V_\epsilon} \left(u(y) \Delta \Phi(y - x) - \Phi(y - x) \Delta u(y) \right) dy \\ = \int_{\partial V_\epsilon} \left(u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y - x) - \Phi(y - x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right) dS(y), \end{aligned}$$

em que ν denota o normal *exterior* a V_ϵ . De acordo com o Lema 4.18 (i) temos

$$\left| \int_{\partial B_\epsilon(x)} \Phi(y - x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS(y) \right| \leq C \int_{\partial B_\epsilon(x)} \Phi(y - x) dS(y) \rightarrow 0$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$. Além disso, pelo Lema 4.18 (iii),

$$\int_{\partial B_\epsilon(x)} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y - x) dS(y) \rightarrow u(x) \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Como $\Delta \Phi(y - x) = 0$ para $y \neq x$, concluímos o resultado ao fazer $\epsilon \rightarrow 0$. □

Corolário 4.22 *Seja $u \in C^2(\bar{\Omega})$ uma função harmônica. Então, para todo $x \in \Omega$ temos*

$$u(x) = \int_{\partial \Omega} \left(\Phi(y - x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y - x) \right) dS(y).$$

Exercício 15 *Deduz da expressão anterior que toda função harmônica $u \in C^2(\Omega)$ é de classe C^∞ em Ω . Mostre também que todas as derivadas parciais⁴ de u também são harmônicas. (Note que nada estamos dizendo sobre o comportamento de u em $\partial \Omega$.)*

O Teorema 4.21 nos permitiria encontrar u se soubéssemos os valores de Δu em Ω e os valores de u e $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ em $\partial \Omega$. Se tivermos condições de fronteira de Dirichlet, os valores de $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ não são conhecidos, o que nos leva ao desejo de alterar o resultado de modo a eliminar esse termo. É o que faremos.

Definição 4.23 *Para cada $x \in \Omega$, suponha que $h_x \in C^2(\bar{\Omega})$ seja a solução do problema*

$$\begin{cases} \Delta h_x(y) = 0 & \text{em } \Omega, \\ h_x(y) = \Phi(y - x) & \text{em } \partial \Omega. \end{cases} \quad (4.16)$$

Definimos a função de Green $G(x, y)$ da região Ω por

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - h_x(y)$$

em que $x, y \in \Omega$, com $x \neq y$.

⁴Quer dizer, de qualquer ordem.

De acordo com a Segunda Identidade de Green (4.7), temos

$$\int_{\partial\Omega} \left(\Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) \right) dS(y) = \int_{\Omega} h_x(y) \Delta u(y) dy. \quad (4.17)$$

Subtraindo (4.17) de (4.15), obtemos

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) \right) dS(y) - \int_{\Omega} \Phi(y-x) \Delta u(y) dy \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) \right) dS(y) - \int_{\Omega} h_x(y) \Delta u(y) dy \\ &= - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS(y) - \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) dy, \end{aligned} \quad (4.18)$$

em que

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) = \nabla_y G(x, y) \cdot \nu(y) = \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) - \frac{\partial h_x}{\partial \nu}(y).$$

Teorema 4.24 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Então toda solução $u \in C^2(\bar{\Omega})$ do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f & \text{em } \Omega, \\ u &= g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

satisfaz

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS(y) + \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy \quad (4.19)$$

Demonstração: Decorre imediatamente de (4.18). □

Observação 4.25 De acordo com o Teorema 4.19, a função de Green para o espaço $\mathbb{R}^n$ é dada por $G(x, y) = \Phi(x - y)$. ◁

O Teorema 4.24 fornece a solução do problema de Dirichlet para a equação de Poisson, se pudermos obter a função de Green. Contudo, a construção da função de Green só pode ser feita se a geometria de Ω for simples. Passaremos a estudar situações em que essa construção é possível.

Antes provaremos uma propriedade básica da função de Green.

Teorema 4.26 *Suponhamos a existência de $h_x(y) \in C^2(\bar{\Omega})$, solução do problema (4.16). Então a função de Green é simétrica, isto é, $G(x, y) = G(y, x)$ para $x \neq y$.*

Demonstração: Fixe $x, y \in \Omega$, com $x \neq y$. Defina, para $z \in \Omega$,

$$v(z) = G(x, z) \quad \text{e} \quad w(z) = G(y, z).$$

Vamos mostrar que $v(y) = w(x)$.

Temos, para $x \neq z$,

$$\Delta v(z) = \Delta G(x, z) = \Delta \Phi(z - x) - \Delta h_x(z) = 0,$$

pois tanto Φ como h são funções harmônicas de z . Da mesma forma, para $y \neq z$ obtemos

$$\Delta w(z) = \Delta G(y, z) = \Phi(z - y) - h_y(z) = 0.$$

Além disso, para todo $z \in \partial\Omega$, temos

$$v(z) = G(x, z) = \Phi(z - x) - h_x(z) = \Phi(z - x) - \Phi(z - x) = 0$$

e, analogamente,

$$w(z) = 0 \quad \text{se } z \in \partial\Omega.$$

Vamos aplicar a Segunda Identidade de Green (4.7) a v e w no aberto $V = U \setminus (B_\epsilon(x) \cup B_\epsilon(y))$, em que $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno. (Quais restrições ϵ deve satisfazer? Responda ao considerar os cálculos feitos na sequência.) Assim,

$$\int_{\partial V} \left(v \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS(z) = \int_V (v \Delta w - w \Delta v) dz = 0.$$

Uma vez que $\partial V = \partial\Omega \cup \partial B_\epsilon(x) \cup \partial B_\epsilon(y)$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS(z) + \int_{\partial B_\epsilon(x)} \left(v \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS(z) \\ &\quad + \int_{\partial B_\epsilon(y)} \left(v \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS(z). \end{aligned}$$

Como tanto v como w se anulam em $\partial\Omega$, a primeira integral é nula e, assim, temos

$$\int_{\partial B_\epsilon(y)} \left(v \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS(z) = \int_{\partial B_\epsilon(x)} \left(w \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) dS(z),$$

em que ν denota o vetor unitário normal *interior* às bolas $B_\epsilon(x)$ e $B_\epsilon(y)$.

Observe então que a singularidade de v está em $B_\epsilon(x)$, enquanto a singularidade de w está em $B_\epsilon(y)$. De acordo com o Lema 4.18, precisamos prestar especial atenção às derivadas normais de v e w . Na integral mais à esquerda temos

$$\left| \int_{\partial B_\epsilon(x)} v(z) \frac{\partial w}{\partial \nu}(z) dS(z) \right| \leq \int_{\partial B_\epsilon(x)} |v(z)| \left| \frac{\partial w}{\partial \nu}(z) \right| dS(z) \leq \sup_{\partial B_\epsilon(x)} \left\| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right\| \sup_{\partial B_\epsilon(x)} \|v\| \int_{\partial B_\epsilon(x)} dS(z),$$

pois $w \in C^1$ e $v \in C^0$ em $\partial B_\epsilon(x)$. Como $\int_{B_\epsilon(x)} dS(z) = n\omega_n \epsilon^{n-1}$, esse termo tende a zero quando ϵ tende a zero.

Similarmente, obtemos que

$$\int_{\partial B_\epsilon(y)} w \frac{\partial v}{\partial \nu} \rightarrow 0 \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Por outro lado, decorre do Lema 4.18 que⁵

$$\int_{\partial B_\epsilon(x)} w(z) \frac{\partial v}{\partial \nu}(z) dS(z) = \int_{\partial B_\epsilon(x)} w(z) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(z-x) dS(z) + \int_{\partial B_\epsilon(x)} w(z) h_x(z) dS(z) \rightarrow w(x)$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$, pois $w, h_x \in C^0$ em $\partial B_\epsilon(x)$. Analogamente,

$$\int_{\partial B_\epsilon(y)} v \frac{\partial w}{\partial \nu} dS(z) \rightarrow v(y) \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

□

4.6.1 Função de Green para a bola

Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação definida por

$$Tx = \tilde{x} = R^2 \frac{x}{|x|^2}, \quad x \neq 0.$$

Note que, se $x \in \partial B_R(0)$, então $Tx = x$ e que T é um difeomorfismo que leva o interior da bola $B_R(0)$ em seu exterior, e vice-versa. (Verifique!) Além disso, $T^{-1} = T$. Essa aplicação é chamada *inversão* com relação a esfera $\partial B_R(0)$.

Fixado $x \in B_R(0)$, para encontrarmos a função de Green da bola $B_R(0)$, precisamos encontrar uma solução $h_x \in C^2(\bar{B}_R(0))$ do problema

$$\begin{cases} \Delta h_x(y) = 0 & \text{em } B_R(0), \\ h_x(y) = \Phi(y-x) & \text{em } \partial B_R(0). \end{cases}$$

Se fosse $x = 0$, bastaria tomar $h_x(y) = \Phi(R)$. Se $x \neq 0$, a singularidade de $\Phi(x-y)$ em x nos impede de tomar essa função. Propriedades de funções harmônicas nos permitem escolher h_x adequadamente. De fato,

$$h_x(y) = \frac{R^{n-2}}{|x|^{n-2}} \Phi\left(y - \frac{R^2 x}{|x|^2}\right) = \frac{R^{n-2}}{|x|^{n-2}} \Phi(y - \tilde{x}) \quad (4.20)$$

é uma função harmônica, já que ela é uma translação da função harmônica $\Phi(y)$ multiplicada por uma constante. Essa função deixa de ser harmônica justamente em $\tilde{x}$, que é um ponto fora da bola $B_R(0)$.

⁵Note que ν é a normal interior a $\partial B_\epsilon(x)$.

Lema 4.27 A função harmônica h_x definida por (4.20) pode ser escrita na forma

$$h_x(y) = \Phi \left[\frac{|x|}{R} \left(y - \frac{R^2 x}{|x|^2} \right) \right] = \Phi \left[\frac{|x|}{R} (y - \tilde{x}) \right],$$

de modo que

$$G(x, y) = \begin{cases} \Phi(y - x) - \Phi \left[\frac{|x|}{R} (y - \tilde{x}) \right], & \text{se } x \neq 0 \\ \Phi(y) - \Phi(R), & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é a função de Green da bola $B_R(0)$.

Demonstração: Vamos considerar apenas o caso $n \geq 3$. Então, por definição,

$$\begin{aligned} \Phi \left[\frac{|x|}{R} (y - \tilde{x}) \right] &= \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{\frac{|x|^{n-2}}{R^{n-2}} |y - \tilde{x}|^{n-2}} \\ &= \frac{R^{n-2}}{|x|^{n-2}} \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|y - \tilde{x}|^{n-2}} \\ &= \frac{R^{n-2}}{|x|^{n-2}} \Phi(y - \tilde{x}). \end{aligned}$$

Se $y \in \partial B_R(0)$, então

$$\begin{aligned} \left| \frac{|x|}{R} \left(y - \frac{R^2 x}{|x|^2} \right) \right| &= \left[\frac{|x|^2}{R^2} \left| y - \frac{R^2 x}{|x|^2} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{|x|^2}{R^2} \left| |y|^2 - 2R^2 \frac{y \cdot x}{|x|^2} + \frac{R^4}{|x|^2} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(|x|^2 - 2y \cdot x + |y|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |x - y|, \end{aligned} \tag{4.21}$$

provando que

$$h_x(y) = \Phi \left[\frac{|x|}{R} \left(x - \frac{R^2 x}{|x|^2} \right) \right]$$

é solução do problema

$$\begin{cases} \Delta h_x(y) = 0 & \text{em } B_R(0), \\ h_x(y) = \Phi(y - x) & \text{em } \partial B_R(0). \end{cases}$$

□

Exercício 16 Verifique o Lema 4.27 no caso $n = 2$.

Lema 4.28 Para $y \in \partial B_R(0)$ e $x \in B_R(0)$, a função de Green $G(x, y)$ da bola $B_R(0)$ satisfaz

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) = -\frac{1}{n\omega_n R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n}.$$

Demonstração: O vetor unitário normal exterior a $B_R(0)$ é y/R . Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \nu(y)}(x, y) &= \nabla_y G(x, y) \cdot \frac{y}{R} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial G}{\partial y_i}(x, y) \\ &= \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n y_i \left[\frac{\partial}{\partial y_i} \Phi(y - x) - \frac{\partial}{\partial y_i} \Phi\left(\frac{|x|}{R}(y - \tilde{x})\right) \right].\end{aligned}$$

De acordo com o Exercício 4.14 temos

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \Phi(y - x) = -\frac{1}{n\omega_n} \frac{y_i - x_i}{|y - x|^n},$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_i} \Phi\left(\frac{|x|}{R}(y - \tilde{x})\right) &= -\frac{1}{n\omega_n} \frac{\frac{|x|}{R}(y_i - \tilde{x}_i)}{\left|\frac{|x|}{R}(y - \tilde{x})\right|^n} \frac{|x|}{R} = -\frac{1}{n\omega_n} \frac{|x|^2}{R^2} \frac{y_i - \frac{R^2 x_i}{|x|^2}}{\left|y - \frac{R^2 x}{|x|^2}\right|^n} \\ &= -\frac{1}{n\omega_n} \frac{\frac{|x|^2}{R^2} y_i - x_i}{|x - y|^n}\end{aligned}$$

de acordo com a igualdade (4.21), válida se $y \in \partial B_R(0)$.

Assim, como $|y| = R$, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \nu(y)}(x, y) &= -\frac{1}{n\omega_n R |x - y|^n} \sum_{i=1}^n y_i \left[(y_i - x_i) - \left(\frac{|x|^2}{R^2} y_i - x_i\right) \right] \\ &= -\frac{1}{n\omega_n R |x - y|^n} \sum_{i=1}^n \left(y_i^2 - \frac{|x|^2}{R^2} y_i^2 \right) \\ &= -\frac{1}{n\omega_n R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n},\end{aligned}$$

como queríamos provar. □

Decorre do Corolário 4.22 que se $u \in C^2(\bar{B}_R(0))$ for harmônica, então

$$u(x) = - \int_{\partial B_R(0)} u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu(y)}(x, y) dS(y) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} dS(y), \quad (4.22)$$

chamada *fórmula integral de Poisson*. A função

$$K(x, y) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R |x - y|^n}$$

é chamada *núcleo de Poisson* para a bola $B_R(0)$.

Lema 4.29 Para todo $x \in B_R(0)$ vale

$$1 = \int_{\partial B_R(0)} K(x, y) dS(y).$$

Demonstração: Decorre imediatamente de (4.22) ao tomarmos $u \equiv 1$. $\square$

Teorema 4.30 Seja $g \in C(\partial B_R(0))$. A solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } B_R(0), \\ u(x) = g(x) & \text{em } \partial B_R(0) \end{cases}$$

é dada por

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{g(y)}{|x - y|^n} dS(y). \quad (4.23)$$

Demonstração: Para cada $x \in \Omega$ fixo, a aplicação $y \mapsto G(x, y)$ é harmônica, exceto para $x = y$. Como a função de Green é simétrica (Teorema 4.26), a função $x \mapsto G(x, y)$ é harmônica, exceto para $x = y$. Em particular, $x \mapsto \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y)$ é harmônica. (Alternativamente: a expressão de $K(x, y)$ garante que essa função é harmônica, $x \neq y$.) Assim, temos que $\Delta u(x) = 0$, se $x \in B_R(0)$ e $y \in \partial B_R(0)$.

Queremos mostrar que as condições de fronteira são satisfeitas. Consideremos, portanto, $x_0 \in \partial B_R(0)$. Devemos verificar que, se $x \in B_R(0)$, então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u(x_0) = g(x_0).$$

Como g é contínua, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_0 > 0$ tal que, se $y \in \partial B_R(0)$ e $|y - x_0| < \delta_0$, então $|g(y) - g(x_0)| < \epsilon$. Pelo Lema 4.29 temos

$$g(x_0) = \int_{\partial B_R(0)} g(x_0) K(x, y) dS(y).$$

Seja $M = \max_{\partial B_R(0)} g(y)$. Então temos

$$\begin{aligned} |u(x) - g(x_0)| &= \left| \int_{\partial B_R(0)} K(x, y) [g(y) - g(x_0)] dS(y) \right| \\ &\leq \int_{\partial B_R(0)} K(x, y) |g(y) - g(x_0)| dS(y) \\ &= \int_{|y-x_0| \leq \delta_0} K(x, y) |g(y) - g(x_0)| dS(y) \\ &\quad + \int_{|y-x_0| > \delta_0} K(x, y) |g(y) - g(x_0)| dS(y) \\ &\leq \epsilon \int_{\partial B_R(0)} K(x, y) dS(y) + 2M \int_{|y-x_0| > \delta_0} K(x, y) dS(y) \\ &= \epsilon + 2M \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \int_{|y-x_0| > \delta_0} \frac{1}{|x - y|^n} dS(y) \end{aligned}$$

Se tomarmos $|x - x_0| \leq \delta_0/2$, então $|x - y| \geq \delta_0/2$ e $|x - y|^{-n} \leq \frac{2^n}{\delta_0^n}$.

figura

$$|u(x) - g(x_0)| \leq \epsilon + 2M \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \frac{2^n}{\delta_0^n} |\partial B_R(0)| = \epsilon + 2^{n+1} M R^{n-2} \frac{R^2 - |x|^2}{\delta_0^n}.$$

Como $R^2 - |x|^2 \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow x_0$, vemos que $|u(x) - g(x_0)|$ pode ser feito arbitrariamente pequeno.

Note que a unicidade da solução u é garantida pelo Teorema 4.13. $\square$

Exercício 17 Seja G a função de Green de um aberto Ω e $x \neq y$. Mostre que $\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) = \nabla_y G(x, y) \cdot \nu(y)$ é uma função harmônica.

Exercício 18 Sejam $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $B_r(x) \Subset \Omega$. Mostre que toda função harmônica contínua $v : \bar{B}_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u \leq v$ em $\partial B_r(x_0)$, satisfaz $u \leq v$ em $B_r(x_0)$.

Mostre que, se u for super-harmônica, então toda função harmônica contínua $v : \bar{B}_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ com $u \geq v$ em $\partial B_r(x_0)$, satisfaz $u \geq v$ em $B_r(x_0)$.

4.7 Regularidade

Nos próximos resultados estamos supondo $B_r(x) \Subset \Omega$ para evitar $\partial B_r(x) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$.

Teorema 4.31 (Suavidade das funções harmônicas)

Uma função $u \in C(\Omega)$ é harmônica em Ω se, e somente se, satisfizer a Propriedade do Valor Médio

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS(y) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS(y)$$

para toda bola $B_r(x) \Subset \Omega$.

Demonstração: Suponha que $u \in C(\Omega)$ satisfaça a Propriedade do Valor Médio em $B_r(x) \Subset \Omega$. De acordo com o Teorema 4.30, existe uma função harmônica $h \in C^2(B_r(x)) \cap C(\bar{B}_r(x))$ tal que

$$\begin{cases} \Delta h &= 0 & \text{em } B_r(x), \\ h(x) &= u(x) & \text{em } \partial B_r(x) \end{cases}$$

Tomemos então $w = h - u$. Como $B_r(x) \Subset \Omega$ é arbitrária e h é harmônica, temos que w satisfaz a Propriedade do Valor Médio em toda bola $B_r(x) \Subset \Omega$. Decorre daí que w satisfaz a forma forte do Princípio do Máximo. De acordo com o Princípio do Máximo, temos $\max_{B_r(x)} w = 0 = \min_{B_r(x)} w$ e, portanto, $w \equiv 0$ em $B_r(x)$, ou seja, $u = h$ em $B_r(x)$. Quer dizer, $u \in C^2(B_r(x))$. Como $B_r(x) \Subset \Omega$ é arbitrária, concluímos que $u \in C^2(\Omega)$. $\square$

Note que, em virtude do Corolário 4.22, toda função harmônica em Ω é C^∞ nesse aberto.

Corolário 4.32 *Seja (u_n) uma sequência de funções harmônicas. Se $u_n \rightarrow u$ uniformemente, então u é harmônica.*

Demonstração: Seja $B_r(x) \Subset \Omega$. Como u_n é harmônica, ela satisfaz a Propriedade do Valor Médio:

$$u_n(x) = \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS(y).$$

Uma vez que u é contínua (como limite uniforme de funções contínuas) e

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r(x)} u_n(y) dS(y) = \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r(x)} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(y) dS(y) \\ &= \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS(y), \end{aligned}$$

vemos que u satisfaz a Propriedade do Valor Médio em cada bola $B_r(x) \Subset \Omega$. Decorre do Teorema 4.31 que u é harmônica. $\square$

Relembramos - veja a equação (4.3):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\partial \Omega} u(y) \nu_i(y) dS(y).$$

É útil introduzir uma notação para derivadas parciais.

Definição 4.33 *Um **multi-índice** é um vetor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, com $\alpha_i \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Definimos a **ordem** de α por $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Também definimos $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$*

Teorema 4.34 (Estimativas nas derivadas) *Seja u uma função harmônica em Ω . Então*

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \int_{B_r(x_0)} |u(x)| dx \quad (4.24)$$

para toda bola $B_r(x_0) \subset \Omega$ e todo multi-índice α de ordem $|\alpha| = k$.

Aqui, para $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$C_0 = \frac{1}{\omega_n}, \quad C_k = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\omega_n}.$$

Demonstração: Faremos indução em $k = |\alpha|$. Se $k = 0$, pela Propriedade do Valor Médio,

$$|u(x_0)| = \left| \frac{1}{n\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \right| \leq \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{r^n} \int_{B_r(x_0)} |u(x)| dx. \quad (4.25)$$

Uma vez que u_{x_i} é harmônica (pelo Exercício 4.15), temos

$$\begin{aligned} |u_{x_i}(x_0)| &= \left| \frac{2^n}{\omega_n r^n} \int_{B_{r/2}(x_0)} u_{x_i}(x) dx \right| \leq \frac{2^n}{\omega_n r^n} \int_{\partial B_{r/2}(x_0)} |u(y) v_i(y)| dS(y) \\ &\leq \frac{1}{\omega_n} \left(\frac{2}{r} \right)^n \sup_{\partial B_{r/2}(x_0)} |u| \left(n \omega_n \left(\frac{r}{2} \right)^{n-1} \right) = n \left(\frac{2}{r} \right) \sup_{\partial B_{r/2}(x_0)} |u| \end{aligned} \quad (4.26)$$

Se y é o ponto em que $\sup_{\partial B_{r/2}(x_0)} |u|$ é atingido, aplicando (4.25) para a bola $B_{r/2}(y)$ concluímos

$$\sup_{\partial B_{r/2}(x_0)} |u| \leq \frac{1}{\omega_n} \left(\frac{2}{r} \right)^n \int_{B_{r/2}(y)} |u| dx \leq \frac{1}{\omega_n} \left(\frac{2}{r} \right)^n \int_{B_r(x_0)} |u| dx,$$

de modo que, substituindo em (4.26), obtemos

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq n \left(\frac{2}{r} \right) \frac{1}{\omega_n} \left(\frac{2}{r} \right)^n \int_{B_r(x_0)} |u| dx = \frac{2^{n+1} n}{\omega_n} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{B_r(x_0)} |u| dx,$$

o que mostra (4.24) no caso $k = 1$.

Assuma, por indução, que (4.24) seja válida para todas bolas $B_r(x_0) \subset \Omega$ e todos os multi-índices α de ordem menor do que ou igual a $k - 1$, com $k \geq 2$. Fixe $B_r(x_0) \subset \Omega$ e considere um multi-índice α com $|\alpha| = k$. Então

$$D^\alpha u = (D^\beta u)_{x_i}$$

para algum multi-índice β de ordem $k - 1$ e algum $i \in \{1, \dots, n\}$. Cálculos análogos àqueles que levaram à estimativa (4.26) mostram que

$$|D^\alpha u(x_0)| = |(D^\beta u)_{x_i}(x_0)| \leq \frac{nk}{r} \sup_{\partial B_{r/k}(x_0)} |D^\beta u|.$$

Estimando $\sup_{\partial B_{r/k}(x_0)} |D^\beta u|$ pela hipótese de indução, obtemos

$$\sup_{\partial B_{r/k}(x_0)} |D^\beta u| \leq \frac{(2^{n+1} n (k-1))^{k-1}}{\omega_n \left(\frac{k-1}{k} r \right)^{n+k-1}} \int_{B_r(x_0)} |u| dx.$$

Combinando essas duas últimas desigualdades, obtemos

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{(2^{n+1} nk)^k}{\omega_n} \frac{1}{r^{n+k}} \int_{B_r(x_0)} |u| dx,$$

confirmando (4.24). □

Sabemos da Análise Complexa que uma função analítica limitada em todo o plano complexo é necessariamente constante. Vamos estender este resultado.

Teorema 4.35 (Liouville)

Suponha que $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função harmônica limitada. Então u é constante.

Demonstração: De acordo com o Teorema 4.34 temos

$$|Du(x_0)| \leq \frac{C_1}{r^{n+1}} \int_{B_r(x_0)} |u| dx \leq \frac{C_1 \omega_n}{r} \sup_{\mathbb{R}^n} |u| \rightarrow 0$$

quando $r \rightarrow \infty$. Isso implica que $Du \equiv 0$ e, portanto, u é constante. $\square$

Teorema 4.36 Seja $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, com $n \geq 3$. Então qualquer solução limitada de

$$-\Delta u = f \quad \text{em } \mathbb{R}^n$$

é dada por

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y-x) f(y) dy + C.$$

Demonstração: Seja $\tilde{u}$ outra solução limitada de $-\Delta u = f$ no $\mathbb{R}^n$. Então $w = u - \tilde{u}$ é harmônica, limitada e definida em todo $\mathbb{R}^n$. Pelo Teorema de Liouville, w é constante. O resultado decorre então do Teorema 4.19. $\square$

Observação 4.37 Esse resultado não vale para $n = 2$. $\triangleleft$

Lema 4.38 Seja α um multi-índice no $\mathbb{R}^n$. Então

$$|\alpha|^{|\alpha|} \leq e^{n|\alpha|} |\alpha|! \leq C e^{|\alpha|} |\alpha|!.$$

Demonstração: Afirmamos que

$$|\alpha|! \leq n^{|\alpha|} \alpha!$$

De fato, pelo Teorema Multinomial temos

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha.$$

(Prove por indução.)

Escolhendo $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ e $m = |\alpha|$, concluímos que

$$n^{|\alpha|} \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!},$$

provando nossa afirmação.

Uma vez que $n^x \leq e^{nx}$ para todo $x \geq 0$ (o que pode ser visto tomando o logaritmo em ambos os lados da desigualdade), a primeira desigualdade do Lema resulta ao combinarmos essas duas desigualdades. A segunda desigualdade é imediata. $\square$

Teorema 4.39 (Analiticidade)

Seja u uma função harmônica no aberto Ω . Então u é analítica em Ω .

Demonstração: A expansão em série de Taylor de u em torno de x_0 é dada por

$$\sum_{|\alpha| \leq N-1} \frac{D^\alpha(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u(x_0 + t(x - x_0))}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha,$$

em que os termos de ordem superior foram estimados aplicando o Teorema do Valor Médio. Assim, precisamos cotar

$$R_N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u(x_0 + t(x - x_0))}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha = \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u(\xi)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha,$$

em que $\xi = x_0 + t(x - x_0) \in B_\gamma(x_0)$ depende de x_0 , em que $\gamma = |x - x_0|$ será determinado.

Definimos

$$r = \frac{1}{4} \text{dist}(x_0, \partial\Omega) \quad \text{e} \quad M = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_{2r}(x_0)} |u| dx.$$

De acordo com o Teorema 4.34 e o Lema 4.38, temos

$$\sup_{B_r(x_0)} |D^\alpha u| \leq M \left(\frac{2^{n+1}n}{r} \right)^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|} \leq CM \left(\frac{2^{n+1}n^2 e}{r} \right)^{|\alpha|} \alpha!$$

(Na primeira desigualdade aplicamos (4.24) separando os termos presentes em M dos termos restantes, para $k = |\alpha|$.)

Tomamos agora

$$|x - x_0| < \frac{r}{2^{n+2}n^3 e}.$$

Então

$$\begin{aligned} |R_N(x)| &\leq \sum_{|\alpha|=N} CM \left(\frac{2^{n+1}n^2 e}{r} \right)^N \left(\frac{r}{2^{n+2}n^3 e} \right)^N = CM \sum_{|\alpha|=N} \left(\frac{1}{2n} \right)^N \\ &\leq CM n^N \frac{1}{(2n)^N} = \frac{CM}{2^N} \rightarrow 0 \quad \text{quando } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

4.8 Introdução aos Métodos Variacionais

Ilustraremos a aplicação de métodos variacionais ao considerar o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.27)$$

Consideremos $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Multiplicando a equação por ϕ e integrando, obtemos

$$-\int_{\Omega} \Delta u \phi dx = \int_{\Omega} f \phi dx. \quad (4.28)$$

Se $u \in C^2(\Omega)$ satisfizer essa equação, decorre da Primeira Identidade de Green que

$$-\int_{\Omega} \Delta u \phi dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi dx - \int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi dx$$

(pois $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$), de modo que (4.28) é escrita como

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi dx = \int_{\Omega} f \phi dx.$$

Note que essa equação faz sentido mesmo que u não seja de classe C^2 .

O funcional

$$I(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - f u \right) dx$$

é chamado *ação*.⁶

Uma vez que estamos interessados em resolver o problema (4.27), vamos considerar esse funcional definido no conjunto

$$\mathcal{A} = \{w \in C^2(\Omega) : w = g \text{ em } \partial\Omega\},$$

chamado conjunto das funções admissíveis.

Teorema 4.40 *Suponha que $u \in C^2(\Omega)$ seja solução de (4.27). Então*

$$I(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} I(w). \quad (4.29)$$

Reciprocamente, se $u \in \mathcal{A}$ satisfizer (4.29), então u é uma solução de (4.27).

Demonstração: Suponhamos que u seja solução de $-\Delta u = f$ em Ω , isto é, $-\Delta u - f = 0$ em Ω . Multiplicando essa igualdade por $u - w$ (com $w \in \mathcal{A}$) e integrando, obtemos

$$\int_{\Omega} -\Delta u (u - w) dx - \int_{\Omega} f (u - w) dx = 0.$$

Aplicando a Primeira Identidade de Green obtemos (como antes)

$$0 = \int_{\Omega} [\nabla u \cdot \nabla (u - w) - f (u - w)] dx,$$

pois em $\partial\Omega$ temos $u - w = g - g = 0$.

⁶Esse funcional é chamado erroneamente de funcional energia.

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - fu) dx &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla w - fw) dx \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla w|^2 dx - \int_{\Omega} fw dx, \end{aligned}$$

com a desigualdade sendo obtida ao aplicar as estimativas⁷

$$|\nabla u \cdot \nabla w| \leq |\nabla u| |\nabla w| \leq \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} |\nabla w|^2.$$

Assim, mostramos que

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - fu \right) dx \leq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla w|^2 - fw \right) dx \quad \Rightarrow \quad I(u) \leq I(w), \quad \forall w \in \mathcal{A}.$$

Como $u \in \mathcal{A}$, concluímos a validade de (4.29).

Reciprocamente, para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ fixo, definimos

$$i(t) = I(u + t\phi), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como $u + t\phi \in \mathcal{A}$, a função $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possui um mínimo no ponto 0. Ou seja,

$$\left. \frac{d}{dt} i(t) \right|_{t=0} = i'(0) = 0,$$

se pudermos mostrar a existência de $i'(0)$.

Uma vez que

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u + t\nabla\phi|^2 - f(u + t\phi) \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + t\nabla u \cdot \nabla\phi + \frac{t^2}{2} |\nabla\phi|^2 - f(u + t\phi) \right) dx, \end{aligned}$$

vemos que

$$0 = i'(0) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla\phi - f\phi) dx = \int_{\Omega} (-\Delta u - f)\phi dx$$

e o fato de $C_0^\infty(\Omega)$ ser denso em $C^2(\Omega)$ garante que $-\Delta u - f = 0$ em Ω . □

O resultado acima é uma aplicação do cálculo de variações ao problema de Dirichlet para a equação de Poisson.

⁷A primeira é a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a segunda decorre de $ab \leq (a^2/2) + (b^2/2)$, válida para $a, b \in \mathbb{R}$ e que decorre imediatamente de $0 \leq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Observação 4.41 A existência de mínimo para funcionais definidos em espaços de funções depende da existência de subsequência convergente para uma sequência minimizante. Como essa subsequência pode não existir, esse o ínfimo pode não ser atingido. Consideremos, por exemplo, o funcional

$$J(f) = \int_0^1 [1 + |f'(x)|^2]^{1/4} dx,$$

definido no conjunto de funções admissíveis

$$\mathcal{A} = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) : f(0) = 1, f(1) = 0\}.$$

Note que se $|f| \rightarrow \infty$, então $J(f) \rightarrow \infty$. Além disso, $J(f) \geq 1$. Se 1 for o ínfimo desse funcional, ele não pode ser atingido, já que deveríamos ter $|f'| = 0$, o que gera uma descontinuidade em f .

Mas o ínfimo é 1. De fato, consideremos

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{\epsilon}, & \text{se } 0 \leq x \leq \epsilon < 1 \\ 0, & \text{se } \epsilon \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Figura

Temos $f \in \mathcal{A}$ e $f'(x) = -\epsilon^{-1}$, se $0 \leq x \leq \epsilon$, e $f'(x) = 0$, se $\epsilon \leq x \leq 1$. (Note que f é contínua, mas não é C^1 .)

Calculando $J(f)$, obtemos

$$J(f) = \int_0^\epsilon (1 + \epsilon^{-2})^{1/4} dx + \int_\epsilon^1 1 dx = \epsilon(1 + \epsilon^{-2})^{1/4} + (1 - \epsilon).$$

Além disso, $\epsilon \sqrt[4]{1 + \epsilon^{-2}} = \sqrt[4]{\epsilon^4 + \epsilon^2} = \epsilon^{1/2}(1 + \epsilon^2)^{1/4}$, de modo que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$J(f) = \epsilon^{1/2}(1 + \epsilon^2)^{1/4} + (1 - \epsilon),$$

que pode ser feito arbitrariamente próximo de 1. Assim, o funcional J não tem mínimo. $\triangleleft$

4.9 Exercícios

1. Sejam Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ e $u \in C(\Omega)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja $u_k \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ harmônica em Ω . Considere a sequência de funções em $\bar{\Omega}$:

$$S_N = \sum_{k=1}^N a_k u_k, \quad N \in \mathbb{N},$$

em que $\sum_{k=1}^\infty a_k$ é uma série numérica *absolutamente* convergente.

Prove que, se a sequência (u_k) for *uniformemente* limitada em $\bar{\Omega}$, então S_N converge uniformemente para uma função harmônica $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Solução: Existe $C > 0$ tal que $|u_k(x)| \leq C$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \bar{\Omega}$. Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k u_k(x)| \leq C \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty,$$

decorre do M -teste de Weierstraß que S_N converge uniformemente. Seja $u = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$. Já provamos que u é harmônica (Corolário 4.32).

2. Sejam $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ e $u \in C^2(\Omega)$.

- (a) Mostre que $\Delta\phi(u) = \phi''(u)|\nabla u|^2 + \phi'(u)\Delta u$;
- (b) se ϕ for convexa e u harmônica em Ω , mostre que $v(x) := \phi(u(x))$ é sub-harmônica em Ω ;
- (c) conclua que se u for harmônica em Ω , então $|\nabla u|^2$ é sub-harmônica em Ω .

Solução: (a) $v = \phi(u)$ implica $v_{x_i} = \phi'(u)u_{x_i}$ e, assim, $v_{x_i x_i} = \phi''(u)u_{x_i}u_{x_i} + \phi'(u)u_{x_i x_i}$. Portanto, $\Delta v = \Delta\phi(u) = \sum_{i=1}^n (\phi''(u)u_{x_i}^2 + \phi'(u)\Delta u) = \phi''(u)|\nabla u|^2 + \phi'(u)\Delta u$.

(b) Consideremos $\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} \phi(u) dS(x)$. Uma vez que ϕ é convexa e $\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} = 1$, podemos aplicar a desigualdade de Jensen:

$$\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} \phi(u) dS(x) \geq \phi \left(\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u dS(x) \right) = \phi(u),$$

mostrando que $\phi(u)$ é sub-harmônica.

(c) Considere a função convexa $\phi(x) = x^2/2$. De acordo com (b), $\phi(u)$ é sub-harmônica; de acordo com (a), $\Delta\phi(u) = |\nabla u|^2 + u\Delta u$. Como $\Delta u = 0$, $\phi(u) = |\nabla u|^2$.

3. Mostre que se $\lambda < 0$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ satisfizer $-\Delta u = \lambda u$ em Ω então

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{x \in \partial\bar{\Omega}} |u|.$$

(Sugestão: use $\phi(u) = u^2$ no item (a) do Exercício 2.)

Solução: Como $\phi(x) = x^2$ é convexa, temos que $\Delta\phi(u) = 2|\nabla u|^2 + 2u\Delta u = |\nabla u|^2 - 2\lambda u^2$. Como $\lambda < 0$ temos que $\Delta\phi(u) \geq 0$ em Ω , mostrando que $\Delta\phi(u)$ é sub-harmônica em Ω . Logo, podemos aplicar a forma fraca do Princípio do Máximo e concluir que

$$\max_{\bar{\Omega}} \phi(u) = \max_{x \in \partial\bar{\Omega}} \phi(u),$$

ou seja,

$$\max_{\bar{\Omega}} u^2 = \max_{x \in \partial\bar{\Omega}} u^2 \quad \Rightarrow \quad \max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{x \in \partial\bar{\Omega}} |u|.$$

4. Mostre que, se $\lambda < 0$, então o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

tem solução única. Solução: Se u, v fossem soluções desse problema, aplique o Exercício 3 a $w = u - v$. Como $w \equiv 0$ em $\partial\Omega$, concluímos que $w \equiv 0$ em Ω .

5. Mostre que existe uma constante positiva C_n , dependendo apenas de n , tal que

$$\max_{\bar{B}_1(0)} |u| \leq C_n (\max_{\partial\bar{B}_1(0)} |g| + \max_{\bar{B}_1(0)} |f|)$$

se $u \in C^2(B_1(0)) \cap C(\bar{B}_1(0))$ for uma solução de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } B_1(0), \\ u = g & \text{em } \partial B_1(0). \end{cases}$$

(Sugestão: para $M = \max_{\bar{B}_1(0)} |f|$ e $m = \max_{\partial\bar{B}_1(0)} |g|$ mostre que as funções $\frac{M}{2n}|x|^2 \pm u(x)$ são sub-harmônicas e limitadas em $\partial B_1(0)$ por $\frac{M}{2n} + m$.)

6. Modifique a prova dos teoremas sobre a propriedade da média para mostrar que

$$u(0) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(0)} g(y) dS_y + \frac{1}{n\omega_n(n-2)} \int_{B_R(0)} \left(\frac{1}{|y|^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}} \right) f(y) dy$$

se $n \geq 3$ e $u \in C^2(B_R(0)) \cap C(\bar{B}_R(0))$ for uma solução

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } B_R(0), \\ u = g & \text{em } \partial B_R(0). \end{cases}$$

7. Seja u uma solução de

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Mostre que se $x_0 \in \Omega$, então

$$\frac{1}{2n} \min_{y \in \partial\Omega} |y - x_0|^2 \leq u(x_0) \leq \frac{1}{2n} \max_{y \in \partial\Omega} |y - x_0|^2.$$

8. Seja $R > 0$ e, para cada $\alpha \in [0, 1]$, sejam $R_\alpha = (1 - \alpha)R$ e $U_\alpha = B_{R_\alpha}(0)$. Verifique que, se $u \in C(\bar{\Omega}_1) \cap C^2(U_1)$ for harmônica em U_1 então:

$$\max_{\bar{\Omega}_\alpha} |\nabla u| \leq \frac{n\sqrt{n}}{R_\alpha} \max_{\partial\Omega_1} |u|, \text{ para todo } \alpha \in (0, 1).$$

9. Conclua, utilizando o Exercício 8, que se u_k for uma sequência **uniformemente limitada** de funções harmônicas em $B_R(0)$ e contínuas em $\bar{B}_R(0)$, então existe uma subsequência de u_k que converge uniformemente em cada bola $B_r(0) \subset B_R(0)$ para uma função u que é harmônica em $B_R(0)$.

(Sugestão: use o teorema de Arzelà-Ascoli.)

10. Suponha Ω conexo e seja u_k uma sequência de funções harmônicas em Ω satisfazendo a propriedade

$$u_k(x) \leq u_m(x) \quad \text{se } k \leq m \quad \text{para cada } x \in U.$$

Seja V aberto de Ω tal que $\bar{V} \Subset \Omega$ e considere $x_0 \in V$. Use a desigualdade de Harnack, para mostrar que:

- (a) se $(u_k(x_0))$ convergir, então u_k converge uniformemente em $\bar{V}$ para uma função u que é harmônica em V ;
- (b) caso contrário, se $\lim u_k(x_0) = \infty$, então $u_k \rightarrow \infty$ uniformemente em qualquer compacto contido em V .
11. Mostre que a função contínua $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é sub-harmônica se, e somente se, para toda bola $B_r(x_0) \Subset \Omega$ e toda função harmônica contínua $v : \bar{B}_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ com $u \leq v$ em $\partial B_r(x_0)$, tivermos $u \leq v$ em $B_r(x_0)$.

Observação: Nos exercícios seguintes, o conjunto σ e as funções u_g e $u_{\xi,r}$ são definidos, respectivamente, por:

$$\sigma = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u \text{ é sub-harmônica em } U \text{ e } u \leq g \text{ em } \partial\Omega\}$$

em que $g \in C(\partial\Omega)$ é uma função que suporemos fixada;

$$u_g(x) := \sup \{u(x) : u \in \sigma\} \quad \text{para cada } x \in \bar{\Omega};$$

$$\bar{u}_{\xi,r}(x) := \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in \bar{\Omega} \setminus B_r(\xi) \\ v_{\xi,r}(x), & \text{se } x \in B_r(\xi) \end{cases}$$

em que u é uma função fixada e $v_{\xi,r}$ é a única solução de

$$\begin{cases} \Delta v_{\xi,r} = 0 & \text{em } B_r(\xi) \\ v_{\xi,r} = u & \text{em } \partial B_r(\xi) \end{cases}$$

para cada $B_r(\xi) \Subset \Omega$. A função $\bar{u}_{\xi,r}$ é chamada **levantamento harmônico** de u em Ω com respeito à bola $B_r(\xi)$.

12. Mostre que, se $m \leq \min_{x \in \partial\Omega} g(x)$, então a função constante e igual a m é um elemento de σ .

13. Mostre que se $u \in \sigma$ e $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ for uma função harmônica tal que $v(x) \geq g(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$, então $u(x) \leq v(x)$ para todo $x \in \bar{\Omega}$. Em particular, $u(x) \leq M := \max_{y \in \partial\Omega} g(y)$.
14. Conclua do Exercício 13 que a função u_g está bem definida.
15. Mostre que, para cada função u fixada, a função $v_{\xi,r} \in C^2(B_r(\xi))$ está bem definida.
16. Para cada $u \in \sigma$ e $B_r(\xi) \subset \Omega$, mostre que $u \leq \bar{u}_{\xi,r}$ em $\bar{\Omega}$ e $\bar{u}_{\xi,r} \in \sigma$.
17. Mostre que, se $u_i \in \sigma$ para $i = 1, \dots, k$ então

$$u(x) = \max \{u_1(x), \dots, u_k(x)\} \in \sigma.$$

O próximo exercício é um guia para a demonstração de que u_g é uma função harmônica (método de Perron).

18. Sejam $y \in \Omega$ e v_k uma sequência de funções em σ tais que $v_k(y) \rightarrow u_g(y)$. Para cada $x \in \bar{\Omega}$, defina a sequência

$$V^k(x) = \max \{v_1(x), \dots, v_k(x)\}.$$

(Note que a existência da sequência v_k é garantida pela definição de u_g . Observe que, do Exercício 17 decorre que $V^k \in \sigma$.)

- (a) Verifique que $V^k(x)$ é uma sequência não decrescente para cada $x \in \bar{\Omega}$ e que $V^k(y) \rightarrow u_g(y)$.

Observação: Para cada $y \in \Omega$ fixo, é fácil definir uma sequência não decrescente $v_{k,y}$ tal que $v_{k,y}(y) \rightarrow u_g(y)$. A definição de V^k permite que isso seja feito para todo $x \in \bar{\Omega}$.

- (b) Considere $r > 0$ e $B_r(y) \Subset \Omega$. Seja $\bar{V}_{y,r}^k$ o levantamento harmônico de V^k com respeito à bola $B_r(y)$. Mostre que $\bar{V}_{y,r}^k(x)$ é uma sequência não decrescente para cada $x \in \bar{\Omega}$ e que $\bar{V}_{y,r}^k(y) \rightarrow u_g(y)$.
- (c) Aplique o Exercício 10 para concluir que $\bar{V}_{\xi,r}^k$ converge uniformemente em $\bar{\Omega}$ para uma função z que é harmônica em $B_r(y)$ e tal que $z(y) = u_g(y)$.
- (d) Mostre que $z = u_g$ em $B_r(y)$ e conclua que u_g é harmônica em Ω . (Sugestão: para cada $\bar{x} \in B_r(y)$ repita os argumentos acima e construa uma sequência $\bar{W}_{\xi,r}^k(x)$ uniformemente convergente em $\bar{\Omega}$ para uma função $\bar{z}$ que é harmônica em $B_r(\xi)$ e tal que $\bar{z}(y) = u_g(y)$. Faça a construção de forma que $\bar{W}_{\xi,r}^k \geq \bar{V}_{\xi,r}^k$ para garantir que $z \leq \bar{z}$ em $B_r(y)$ e aplique o princípio do máximo à função harmônica $\bar{z} - z$, observando que $u_g(y) = z(y) \leq \bar{z}(y) \leq u_g(y)$.)

Definição 4.42 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Uma **barreira** no ponto $\tilde{x} \in \partial\Omega$ é uma função $\beta \in C(\bar{\Omega})$ satisfazendo:

- (i) β é super-harmônica em Ω ;
- (ii) $\beta(\tilde{x}) = 0$ e $\beta > 0$ em $\bar{\Omega} \setminus \{\tilde{x}\}$.

Um ponto $\tilde{x} \in \partial\Omega$ é **regular**, se existir uma barreira $\beta \in C(\bar{\Omega})$ em $\tilde{x}$.

Definição 4.43 Um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ satisfaz a **condição da bola exterior** se, para todo ponto $\tilde{x} \in \partial\Omega$, existirem $R > 0$ e uma bola $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ tal que $\partial B_R(x_0) \cap \partial\Omega = \{\tilde{x}\}$.

O exercício seguinte é um guia para a demonstração de que $u_g \rightarrow g$ em $\partial\Omega$.

19. Sejam $\tilde{x} \in \partial\Omega$ e uma bola $B_R(x_0)$ exterior a Ω que toca $\partial\Omega$ somente em $\tilde{x}$. Defina a função $H(x)$, positiva e harmônica em $\mathbb{R}^n - \{x_0\}$, por:

$$H(x) = \begin{cases} \frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{|x-x_0|^{n-2}} & \text{se } n \geq 3, \\ \ln \frac{|x-x_0|}{R} & \text{se } n = 2. \end{cases}$$

Agora, tome $\epsilon > 0$ e, supondo $g \in C(\partial\Omega)$, escolha $\delta > 0$ tal que $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon$ se $x \in B_\delta(x_0) \cap \partial\Omega$.

- (a) Mostre que

$$|g(x) - g(x_0)| < \epsilon + C_\epsilon H(x) \text{ para todo } x \in \partial\Omega,$$

em que $C_\epsilon = \frac{2\|g\|_\infty}{H_\delta}$ e $H_\delta = \min \{H(x) : x \in \partial\Omega \text{ e } |x - x_0| \geq \delta\} > 0$;

- (b) Conclua do item anterior que

$$g(x_0) - \epsilon - C_\epsilon H(x) \leq u_g(x) \leq g(x_0) + \epsilon + C_\epsilon H(x), \text{ para todo } x \in \bar{\Omega};$$

(Observe que $g(x_0) \pm (\epsilon + C_\epsilon H(x))$ é harmônica em $\bar{\Omega}$.)

- (c) Observando que $H(x_0) = 0$, conclua do exercício anterior que

$$\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} |u_g(x) - g(x_0)| < \epsilon$$

para todo $\epsilon > 0$, ou seja, $\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} u_g(x) = g(x_0)$.

4.10 O Método de Perron

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. O objetivo dessa seção é estudar a existência de solução para o problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

(Lembramos que, se a solução desse problema existir, então ela é única, pelo Princípio do Máximo.)

Lema 4.44 *Uma função contínua $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é sub-harmônica se, e somente se, para toda bola $B_r(x_0) \Subset \Omega$ e toda função harmônica contínua $v : \bar{B}_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ com $u \leq v$ em $\partial B_r(x_0)$, tivermos $u \leq v$ em $B_r(x_0)$.*

Demonstração: Seja $w = u - v$. Então w satisfaz a desigualdade da média em $B_r(x_0)$ (pois tanto u quanto v satisfazem essa desigualdade) e prova que w é sub-harmônica. Como $w \leq 0$ em $\partial\Omega$, o Princípio do Máximo garante que $w \leq 0$ em Ω . Assim, $u \leq v$ em $B_r(x_0)$.

Reciprocamente, consideremos uma função harmônica contínua v em $B_r(x_0)$, tal que $u = v$ em $\partial B_r(x_0)$. (A existência dessa função é garantida pelo Teorema 4.30.) Então, por hipótese,

$$\begin{aligned} u(x_0) &\leq v(x_0) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} v(y) dS(y) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) dS(y), \end{aligned}$$

provando que u é sub-harmônica. □

A rigor, a utilização do Lema 4.44 no sentido direto sempre pode ser substituída pela aplicação do Princípio do Máximo para funções sub-harmônicas.

Lema 4.45 *Se u_i ($i = 1, \dots, k$) for sub-harmônica em U , então*

$$u(x) = \max \{u_1(x), \dots, u_k(x)\} \in \sigma.$$

Demonstração: Notamos inicialmente que $u(x)$ é contínua em $\bar{\Omega}$. De fato, é fácil ver que

$$\max \{u_1(x), u_2(x)\} = \frac{u_1(x) + u_2(x) + |u_1(x) - u_2(x)|}{2}.$$

Como u_1, u_2 e $|u_1(x) - u_2(x)|$ são contínuas, concluímos que $\max \{u_1(x), u_2(x)\}$ é contínua. Daí decorre que $u(x)$ é contínua, pois

$$\max \{u_1(x), \dots, u_k(x)\} = \max \{ \max \{u_1(x), \dots, u_{k-1}(x)\}, u_k(x) \}.$$

Como $u_i \leq g$ em $\partial\Omega$, temos $u \leq g$ em $\partial\Omega$. Consideremos uma bola $B \Subset \Omega$ e uma função harmônica contínua $v : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}$, com $u \leq v$ em ∂B . Em particular, $u_i \leq v$ em ∂B . Como cada função u_i é sub-harmônica, resulta que $u_i \leq v$ em B . Isso implica que $u \leq v$ em B e, de acordo com o Lema 4.44, isso prova que u é sub-harmônica. □

Observação 4.46 Uma demonstração alternativa de que u é harmônica é simples: se $B_r(x) \Subset \Omega$, temos

$$\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) dS(y) \geq \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u_i(s) dS(y) \geq u_i(x_0)$$

para todo $1 \leq i \leq k$, de onde concluímos o afirmado. $\triangleleft$

Lema 4.47 *Seja u_k uma sequência de funções harmônicas no conexo Ω satisfazendo a propriedade*

$$u_k(x) \leq u_m(x) \quad \text{se } k \leq m \text{ para cada } x \in \Omega.$$

Seja V aberto de Ω tal que $\bar{V} \Subset \Omega$. Se, para algum $x_0 \in V$, $(u_k(x_0))$ convergir, então u_k converge uniformemente em $\bar{V}$ para uma função u que é harmônica em V .

Demonstração: Suponhamos que $(u_k(x_0))$ convirja. Temos que, $u_\ell - u_k$ é harmônica em Ω e não negativa, se $\ell \geq k$. Então, de acordo com a desigualdade de Harnack temos

$$|u_k(y) - u_\ell(y)| \leq C |u_k(x_0) - u_\ell(x_0)|, \quad \forall y \in V.$$

Como consequência, vemos que $(u_k(y))$ é uma sequência de Cauchy para todo $y \in V$. Definimos $u(y) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} u_\ell(y)$ para todo $y \in V$. Passando ao limite com $\ell \rightarrow \infty$ na desigualdade anterior, obtemos $|u_k(y) - u(y)| \leq C |u_k(x_0) - u(x_0)|$. Dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $k \geq n_0$ implica $|u_k(x_0) - u(x_0)| < \epsilon/C$. Assim, $|u_k(y) - u(y)| \leq \epsilon$ para todo $y \in V$, mostrando que a convergência é uniforme. Uma vez que cada função u_k é harmônica, u é harmônica como consequência do Corolário 4.32.

A continuidade uniforme em todo $\bar{V}$ é obtida ao se considerar um aberto V' , com $V \Subset V' \Subset U$. $\square$

Definição 4.48 *Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Considere uma bola $B_r(\xi) \Subset \Omega$. O levantamento harmônico de u em Ω com respeito à bola $B_r(\xi)$ é a função*

$$\bar{u}_{\xi,r}(x) := \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in \bar{\Omega} \setminus B_r(\xi) \\ v_{\xi,r}(x), & \text{se } x \in B_r(\xi) \end{cases}$$

em que $v_{\xi,r}$ é a única solução de

$$\begin{cases} \Delta v_{\xi,r} = 0 & \text{em } B_r(\xi) \\ v_{\xi,r} = u & \text{em } \partial B_r(\xi). \end{cases}$$

A existência do levantamento harmônico u em Ω com respeito à bola $B_r(\xi)$ é garantida pelo Teorema 4.30, enquanto sua unicidade é dada pelo Teorema 4.13.

Lema 4.49 *Seja u uma função sub-harmônica. Então $\bar{u}_{\xi,r} \in \sigma$ e satisfaz $u \leq \bar{u}_{\xi,r}$ em $\bar{\Omega}$ e $u = \bar{u}_{\xi,r}$ em $\partial\Omega$. Além disso, $\bar{u}_{\xi,r} \in \sigma$.*

Demonstração: Começamos mostrando que $u \leq \bar{u}_{\xi,r}$ em $\bar{\Omega}$. Como $u = \bar{u}_{\xi,r}$ em $\bar{\Omega} \setminus B_r(\xi)$, basta considerar a desigualdade em $B_r(\xi)$. Como $v_{\xi,r}$ é harmônica e igual a u em $\partial B_r(\xi)$, temos $u \leq v_{\xi,r}$ em $B_r(\xi)$, como consequência do Lema 4.44.

Agora vamos mostrar que $\bar{u}_{\xi,r} \in \sigma$. Como $v_{\xi,r}$ é contínua, temos que $\bar{u}_{\xi,r}$ é contínua. Como $\bar{u}_{\xi,r}$ é harmônica em $B_r(\xi)$ e subharmônica em $\bar{\Omega} \setminus B_r(\xi)$, concluímos que é sub-harmônica em $\bar{\Omega}$ e, portanto, seu máximo é atingido em $\partial\Omega$. Como consequência, $\bar{u}_{\xi,r} \leq g$ em $\partial\Omega$.

Figura

□

Exercício 19 Mostre que $\bar{u}_{\xi,r}$ é sub-harmônica aplicando o Lema 4.44.

Exercício 20 Mostre o $\bar{u}_{\xi,r}$ é sub-harmônica utilizando diretamente a Desigualdade da Média, como na Observação 4.46.

Definição 4.50 Seja $g \in C(\partial\Omega)$ uma função. Definimos

$$\sigma = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u \text{ é sub-harmônica em } \Omega \text{ e } u \leq g \text{ em } \partial\Omega\}$$

e, para todo $x \in \bar{\Omega}$,

$$u_g(x) = \sup \{u(x) : u \in \sigma\}.$$

Teorema 4.51 A função u_g está bem definida e é harmônica em Ω .

Demonstração: Para mostrar que u_g está bem definida, note que $m = \min_{\partial\Omega} g$ é sub-harmônica (pois $m \in C^2(\bar{\Omega})$ e $\Delta m = 0 \geq 0$), de modo que $\sigma \neq \emptyset$. Além disso, se $u \in \sigma$, então $u \leq \max_{\partial\Omega} g$, de forma que o supremo está bem definido em cada ponto $x \in \bar{\Omega}$.

Seja $\xi \in \Omega$ arbitrário. A definição de u_g garante a existência de uma sequência não decrescente $(v_n) \subset \sigma$ tal que $v_n(\xi) \rightarrow u_g(\xi)$. Defina, para cada $x \in \bar{\Omega}$,

$$V^k(x) = \max \{v_1(x), \dots, v_k(x)\}.$$

Pelo Lema 4.45, temos $V^k \in \sigma$. É claro que $V^k(x) \leq V^{k+1}(x)$ para todo $x \in \bar{\Omega}$ e $V^k(\xi) \rightarrow u_g(\xi)$, pois $V_k(\xi) = v_k(\xi)$. (Observe que se existir k tal que $v_k(\xi) > u_g(\xi)$, então $V^j(\xi) \geq v_k(\xi) > u_g(\xi)$ para todo $j \geq k$.)

Considere $r > 0$ tal que $B_r(\xi) \Subset \Omega$. Seja $V_{\xi,r}^k$ o levantamento harmônico de V^k com respeito à bola $B_r(\xi)$. Então $\bar{V}_{\xi,r}^k(x)$ é uma sequência não decrescente para cada $x \in \bar{\Omega}$, como consequência da aplicação do Princípio do Máximo às funções harmônicas $v_{\xi,r}^k$ e $v_{\xi,r}^{k+1}$ em $B_r(\xi)$, já que $v_{\xi,r}^k \leq v_{\xi,r}^{k+1}$ em $\partial B_r(\xi)$. De acordo com Lema 4.49, temos que $V^k \leq V_{\xi,r}^k \leq u_g$ em $\bar{\Omega}$. Passando ao limite em k , concluímos que $V_{\sigma,r}^k \rightarrow u_g(\xi)$. Assim, $\bar{V}_{\xi,r}^k(\xi) \rightarrow u_g(\xi)$.

De acordo com o Lema 4.47, concluímos que $V_{\xi,r}^k$ converge uniformemente em $\bar{B}_r(\xi)$ para uma função z que é harmônica em $B_r(\xi)$ e satisfaz $z(\xi) = u_g(\xi)$.

Para completar a prova, vamos mostrar que $z = u_g$ em $B_r(\xi)$. Da definição de u_g decorre que $z \leq u_g$. Se existir $x' \in B_r(\xi)$ tal que $z(x') < u_g(x')$, como $u_g = \sup_{v \in \sigma} v$, existe uma função sub-harmônica $\tilde{v}$ tal que $z(x') < \tilde{v}(x') \leq u_g(x')$. Defina $W^k = \max\{V^k, \tilde{v}\}$. Se $W_{\xi,r}^k$ denota o levantamento harmônico de W^k com respeito à bola $B_r(\xi)$, então esse levantamento harmônico converge para uma função $\bar{z}$, harmônica em $B_r(\xi)$ e satisfazendo $z \leq \bar{z} \leq u_g$, o que implica $\bar{z}(\xi) = u_g(\xi) = z(\xi)$. Considere então, em $B_r(\xi)$, a função harmônica $\bar{z} - z \geq 0$. Como essa função atinge o mínimo 0 no ponto interior ξ , devemos ter $z = \bar{z}$ em $B_r(\xi)$, o que contradiz $z(x') < u_g(x')$, pois $z(x') < \tilde{v}(x') \leq u_g(x')$. $\square$

De maneira análoga obtemos:

Lema 4.52 *Sejam*

$$\Sigma = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u \text{ é super-harmônica em } \Omega \text{ e } u \geq g \text{ em } \partial\Omega\}$$

e, para todo $x \in \bar{\Omega}$,

$$U_g(x) = \inf \{u(x) : u \in \Sigma\}.$$

Então a função U_g está bem definida e é super-harmônica em Ω .

Definição 4.53 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Uma **barreira** no ponto $\tilde{x} \in \partial\Omega$ é uma função $\beta \in C(\bar{\Omega})$ satisfazendo:*

- (i) β é super-harmônica em Ω ;
- (ii) $\beta(\tilde{x}) = 0$ e $\beta > 0$ em $\bar{\Omega} \setminus \{\tilde{x}\}$.

Um ponto $\tilde{x} \in \partial\Omega$ é **regular**, se existir uma barreira $\beta \in C(\bar{\Omega})$ em $\tilde{x}$.

Uma barreira em $\tilde{x}$ pode ser definida como a existência de uma função α , contínua em $\bar{\Omega}$, sub-harmônica em Ω , satisfazendo $\alpha(\tilde{x}) = 0$ e $\alpha < 0$ em $\bar{\Omega} \setminus \{\tilde{x}\}$. É claro que essas definições são equivalentes.

Lema 4.54 *Se $\tilde{x}$ for um ponto regular de Ω , então*

$$\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} u_g(x) = g(\tilde{x}).$$

Demonstração: Sejam β uma barreira em $\tilde{x}$.

Para $\epsilon > 0$ qualquer e $k > 0$ a ser determinado, defina as funções

$$s(x) = g(\tilde{x}) - \epsilon - k\beta(x) \quad \text{e} \quad S(x) = g(\tilde{x}) + \epsilon + k\beta(x).$$

Como $\beta \geq 0$, claramente temos $s(x) \leq g(\tilde{x}) - \epsilon$ e $s(\tilde{x}) = g(\tilde{x}) - \epsilon$. Da mesma forma, $S(x) \geq g(\tilde{x}) + \epsilon$ e $S(\tilde{x}) = g(\tilde{x}) + \epsilon$.

É claro que, em Ω , $s(x)$ é sub-harmônica e $S(x)$ é super-harmônica. (Note que $g(\tilde{x}) \pm \epsilon$ são constantes.)

Vamos mostrar que podemos escolher $k > 0$ tal que $s \in \sigma$ e $S \in \Sigma$.

A continuidade de g em $\partial\Omega$ garante a existência de $\delta > 0$ tal que

$$x \in \partial\Omega, \quad |x - \tilde{x}| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(x) - g(\tilde{x})| < \epsilon,$$

o que implica $g(\tilde{x}) - \epsilon < g(x)$. Ou seja,

$$s(x) \leq g(x), \quad \text{se } x \in B_\delta(\tilde{x}) \cap \partial\Omega.$$

Como $\beta(x)$ possui um mínimo positivo em $\partial\Omega \setminus B_\delta(\tilde{x})$, podemos escolher $k_1 > 0$ suficientemente grande tal que

$$s(x) \leq m = \min_{\partial\Omega} g(x), \quad \text{se } x \in \partial\Omega \setminus B_\delta(\tilde{x}),$$

mostrando que $s \in \sigma$. A prova de que $S(x) \in \Sigma$ é análoga. (Encontraremos $k_2 > 0$ tal que $S(x) \in \Sigma$. Tomando o máximo entre k_1 e k_2 , encontramos uma constante k tal que $s \in \sigma$ e $S \in \Sigma$.)

Como $s \in \sigma$ e $S \in \Sigma$, temos, para $x \in \Omega$,

$$g(\tilde{x}) - \epsilon - k\beta(x) \leq u_g(x) \leq g(\tilde{x}) + \epsilon + k\beta(x),$$

ou seja,

$$|u_g(x) - g(\tilde{x})| \leq \epsilon + k\beta(x).$$

Como $\beta(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \tilde{x}$, concluímos que $u_g(x) \rightarrow g(\tilde{x})$ quando $x \rightarrow \tilde{x}$. $\square$

Teorema 4.55 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. O problema de Dirichlet para a equação de Laplace*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

possui solução para toda $g \in C(\partial\Omega)$ se, e somente se, todos os pontos de $\partial\Omega$ forem regulares.

Demonstração: A existência de solução no caso dos pontos de fronteira serem regulares foi provada no Teorema 4.51 e no Lema 4.54. Para mostrar a recíproca, consideramos uma função g tal que $g(\tilde{x}) = 0$ e $g(x) > 0$ para todo $x \in \partial\Omega$. A solução u_0 do problema de Dirichlet para a equação de Laplace para esses dados de fronteira é uma barreira, de acordo com o Princípio do Máximo. $\square$

Definição 4.56 *Um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ satisfaz a condição da bola exterior se, para todo ponto $\tilde{x} \in \partial\Omega$, existirem $R > 0$ e uma bola $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ tal que $\partial B_R(x_0) \cap \partial\Omega = \{\tilde{x}\}$.*

Nesse caso, a função $H : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$H(x) = \begin{cases} \frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{|x-x_0|^{n-2}} & \text{se } n \geq 3, \\ \ln \frac{|x-x_0|}{R} & \text{se } n = 2. \end{cases}$$

constitui uma barreira em $\tilde{x}$.

Exercício 21 *Verifique esse fato.*

Capítulo 5

Equação do Calor

A equação do calor

$$u_t - \Delta u = 0 \quad (5.1)$$

e sua versão não homogênea

$$u_t - \Delta u = f(x, t) \quad (5.2)$$

são o nosso próximo objetivo de estudo.

Em geral, como veremos, toda afirmativa sobre funções harmônicas encontra uma versão correspondente para a equação do calor. Assim, o desenvolvimento da teoria será feito de maneira semelhante àquela utilizada no estudo da equação de Laplace.

É importante notar que se $u(x, t)$ for solução da equação do calor, então $v(x, t) = u(x, -t)$ não é solução da equação do calor, pois satisfaz $v_t + \Delta v = 0$. Isso quer dizer que a equação do calor distingue o passado do futuro e governa um processo irreversível.

5.1 Interpretação Física

Escrever

5.2 O Núcleo do Calor

Nossa primeira providência do estudo da equação do calor (5.1) será obtermos uma solução fundamental, análoga àquela obtida para funções harmônicas. A linearidade de (5.1) indica que, para $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u(x, t)$ uma solução do calor, então $v(x, t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ também é solução do calor. Esse fato sugere que a razão

$$\frac{r^2}{t} = \frac{|x|^2}{t}$$

desempenhe um papel importante na solução dessa equação. De fato, observe que chamando $\tilde{x} = \lambda x$ e $\tilde{t} = \lambda^2 t$, então $|\tilde{x}|^2 = \lambda x \cdot \lambda x = \lambda^2 |x|^2$ e

$$\frac{|\tilde{x}|^2}{\tilde{t}} = \frac{\lambda^2 |x|^2}{\lambda^2 t} = \frac{|x|^2}{t}.$$

Exercício 1 Verifique que, considerando “coordenadas polares” centradas em um ponto a , a razão $\frac{r^2}{t}$ é invariante com relação a translação $y = x - a$.

Ao invés de procurarmos soluções tendo a forma

$$u(x, t) = v\left(\frac{r^2}{t}\right),$$

é mais fácil procurarmos soluções com a forma

$$u(x, t) = w(t)v\left(\frac{r^2}{t}\right) = w(t)v\left(\frac{|x|^2}{t}\right),$$

em que w, v são funções a serem determinadas. Temos

$$u_t = w'(t)v\left(\frac{r^2}{t}\right) - \frac{r^2}{t^2}w(t)v'\left(\frac{r^2}{t}\right),$$

$$u_{x_i} = w(t)v'\left(\frac{|x|^2}{t}\right)\frac{2x_i}{t}$$

e

$$u_{x_i x_i} = w(t)\left[v''\left(\frac{|x|^2}{t}\right)\frac{4x_i^2}{t^2} + v'\left(\frac{|x|^2}{t}\right)\frac{2}{t}\right].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= w'(t)v\left(\frac{r^2}{t}\right) - \frac{r^2}{t^2}w(t)v'\left(\frac{r^2}{t}\right) - \sum_{i=1}^n w(t)\left[v''\left(\frac{r^2}{t}\right)\frac{4x_i^2}{t^2} + v'\left(\frac{r^2}{t}\right)\frac{2}{t}\right] \\ &= w'(t)v\left(\frac{r^2}{t}\right) - w(t)\left[\frac{4r^2}{t^2}v''\left(\frac{r^2}{t}\right) + \frac{r^2}{t^2}v'\left(\frac{r^2}{t}\right) + v'\left(\frac{r^2}{t}\right)\frac{2n}{t}\right] \end{aligned}$$

Neste ponto a análise é baseada em conhecimentos anteriores. Vamos denotar $\xi = r^2/t$ e separar essa equação como

$$w'(t)v(\xi) - w(t)v'(\xi)\frac{2n}{t} = w(t)\left[\frac{4r^2}{t^2}v''(\xi) + \frac{r^2}{t^2}v'(\xi)\right]. \quad (5.3)$$

Ao igualarmos a zero o lado direito dessa igualdade, temos que resolver

$$\left[\frac{4r^2}{t^2}v''(\xi) + \frac{r^2}{t^2}v'(\xi)\right] = 0,$$

isto é,

$$4v'' + v' = 0.$$

Ao anular o lado direito da equação (5.3), somos levados à equação

$$w'v - \frac{2nv'}{t}w = 0$$

e, portanto, como as variáveis t e ξ são independentes, devemos ter

$$t \frac{w'}{w} = 2n \frac{v'}{v} = -\sigma,$$

em que σ é uma constante. Resolvendo $4v'' + v' = 0$ obtemos $v = Ce^{-\xi/4}$. Levando $v = Ce^{-\xi/4}$ e $v' = -\frac{1}{4}Ce^{-\xi/4}$ na equação

$$2nv' + \sigma v = 0$$

obtemos $\sigma = \frac{n}{2}$.

Substituindo esse valor na equação $tw' + \sigma w = 0$, encontramos

$$\frac{w'}{w} = -\frac{n}{2t} \Rightarrow \ln w = -\frac{n}{2} \ln t + D \Rightarrow w = At^{-n/2},$$

de modo que nossa solução fundamental é dada por

$$u(x, t) = w(t)v(\xi) = Bt^{-n/2}e^{-r^2/4t} = Bt^{-n/2}e^{-|x|^2/4t},$$

sendo uma solução radial.

Definição 5.1 A função

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t}, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n, t < 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

é chamada *solução fundamental da equação do calor* ou *núcleo do calor*.

Exercício 2 Fixe $0 < s < t$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $\Phi(x - y, t - s)$ também é solução da equação do calor.

Decorre imediatamente da definição que a solução fundamental é C^∞ , se $t > 0$. Mas $\Phi(x, t)$ tem uma singularidade em $(0, 0)$.

Lema 5.2 Para cada $t > 0$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1.$$

Demonstração: Temos, ao fazer a mudança de variável $z = x/\sqrt{4t}$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/4t} dx = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_i^2} dz_i = 1. \end{aligned}$$

□

Exercício 3 Se $x \in \mathbb{R}$, calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Para isso, calcule o quadrado dessa integral utilizando diferentes variáveis de integração e então utilize coordenadas polares.

Figura : gráfico da solução fundamental no caso $x \in \mathbb{R}, t > 0$ fixo

Observações sobre o gráfico: $\Phi(x, t)$ é uma distribuição de probabilidade para $t > 0$; para cada x fixo, $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(x, t) = 0$. Quando $t \rightarrow 0$ o máximo tende a infinito como $\sqrt{t}$; se $x \neq 0$, $\Phi(x, t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Exercício 4 Seja $u(x, t)$ uma solução da equação do calor (5.1) no caso $x \in \mathbb{R}$. Suponha que, para todo $t > 0$, tenhamos

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_x(x, t) = 0.$$

(Note que essa propriedade é satisfeita pela solução fundamental.)

Mostre que

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx \right) = 0.$$

Essa propriedade vale também para $x \in \mathbb{R}^n$?

5.3 Equação do Calor: o Problema de Valor Inicial

5.3.1 O Problema Homogêneo no $\mathbb{R}^n$

Vamos considerar o problema de valor inicial homogêneo no $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (5.5)$$

Teorema 5.3 Seja $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Defina

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t} g(y) dy$$

para $t > 0$. Então $u(\cdot, t) \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ para todo $t > 0$ e

- (i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$;
- (ii) $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$;
- (iii) $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x, t) = g(x_0)$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Como $\Phi(x - y, t) = \frac{1}{4\pi t^{n/2}} e^{-|x-y|^2/4t}$ é uma função C^∞ com todas as suas derivadas *uniformemente* limitadas em $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty)$ e

$$D^\alpha u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha \Phi(x - y, t) g(y) dy,$$

provamos (i). Além disso,

$$u_t(x, y) - \Delta u(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} [\Phi_t(x - y, t) - \Delta_x \Phi(x - y, t)] g(y) dy = 0,$$

pois $\Phi(x - y, t)$ é uma solução da equação do calor.

Para provar (iii), fixemos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$. Escolha $\delta > 0$ tal que

$$|y - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(y) - g(x_0)| < \epsilon.$$

Tome $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x - x_0| < \delta/2$. Decorre do Lema 5.2 que

$$\begin{aligned} |u(x, t) - g(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) [g(y) - g(x_0)] dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) |g(y) - g(x_0)| dy \\ &= \int_{B_\delta(x_0)} \Phi(x - y, t) |g(y) - g(x_0)| dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} \Phi(x - y, t) |g(y) - g(x_0)| dy \\ &\leq \epsilon + 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} \Phi(x - y, t) dy \end{aligned} \quad (5.6)$$

Uma vez que $|x - x_0| < \delta/2$, para $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)$ temos

$$|y - x_0| \leq |y - x| + |x - x_0| < |y - x| + \frac{\delta}{2} < |x - y| + \frac{|y - x_0|}{2}$$

(pois $|y - x_0| > \delta$), o que implica

$$|x - y| \geq \frac{|x - x_0|}{2}.$$

Figura: a mesma feita para o Laplaciano serve.

Assim, a última integral em (5.6) é limitada por

$$\begin{aligned} \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} \exp^{-|x-y|^2/4t} dy &\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} \exp^{-|y-x_0|^2/16t} dy \\ &\leq \frac{Cn\alpha(n)}{t^{n/2}} \int_\delta^\infty e^{-r^2/16t} r^{n-1} dr. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $s = r/4\sqrt{t}$, obtemos que a última integral vale

$$\frac{Cn\alpha(n)}{t^{n/2}} \int_{\delta}^{\infty} e^{r^2/16t} r^{n-1} dr = Cn\alpha(n)4^n \int_{\delta/4\sqrt{t}}^{\infty} e^{-s^2} s^{n-1} ds \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+,$$

pois

$$\int_0^{\infty} e^{-s^2} s^{n-1} ds = \sqrt{\pi} < \infty$$

e $\delta/4\sqrt{t} \rightarrow \infty$.

Daí concluímos (iii). A afirmação sobre a limitação de $u(\cdot, t)$ decorre imediatamente da fórmula de representação da solução. $\square$

Observação 5.4 O Princípio do Máximo para a equação do calor implicará que a solução obtida $u(x, t)$ é a *única* solução limitada e C^∞ dessa equação. Na verdade, a solução obtida Ω é analítica, veja John [6]. $\triangleleft$

Exercício 5 Mostre que, para cada s fixo tal que $0 < s < t$, então

$$u(x, t; s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) g(y, s) dy$$

é solução do problema

$$\begin{cases} u_t(x, t; s) - \Delta u(x, t; s) &= 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > s, \\ u(x, s; s) &= g(x, s) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

que é um problema de valor inicial que se inicia em $t = s$ ao invés de $t = 0$.

5.3.2 O Problema Não Homogêneo no $\mathbb{R}^n$

Agora consideraremos o problema não homogêneo no $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f, & \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= 0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (5.7)$$

Como vimos no Exercício 5, não podemos tentar resolver o problema (5.7) tentando uma solução com a forma

$$u(x, t; s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy.$$

O *Princípio de Duhamel* – estabelecido inicialmente para a equação da onda, mas válido para uma larga classe de equações diferenciais parciais – afirma que podemos obter uma solução para o problema (5.7) ao integrar as soluções $\Omega_T(x, t; s)$ com respeito a s , isto é,

$$u(x, t) = \int_0^t u(x, t; s) ds$$

é solução de (5.7). Assim, o Princípio de Duhamel é um análogo ao método de variação dos parâmetros para equações diferenciais ordinárias: a solução do problema não homogêneo é obtida a partir de soluções do problema homogêneo.

Denotaremos $C_0^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ as funções $f : \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ de classe C^2 na variável x , de classe C^1 na variável t e com suporte compacto.

Teorema 5.5 *Seja $f \in C_0^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ e defina*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{[4\pi(t - s)]^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4|t-s|} f(y, s) dy ds. \end{aligned}$$

Então $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ é uma solução de (5.7).

Demonstração: Não podemos derivar sob o sinal de integração, pois $\Phi(x - y, t - s)$ tem uma singularidade em $t = s$. Assim, procederemos como na prova do Teorema 4.19.

Inicialmente mudamos variáveis e escrevemos¹

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f(x - y, t - s) dy ds,$$

de modo que Φ é integrável em $\mathbb{R}^n \times [0, t]$ para todo $t > 0$ e $u(x, t)$ diferenciável para todo t . Assim, podemos derivar sob o sinal de integração² e obter

$$u_t(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f_t(x - y, t - s) dy ds + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f(x - y, 0) dy ds$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f_{x_i x_j}(x - y, t - s) dy ds.$$

Essas expressões garantem que $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Além disso,³

$$\begin{aligned} (u_t - \Delta u)(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) f(x - y, t - s) dy ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f(x - y, 0) dy \\ &= \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) f(x - y, t - s) dy ds \\ &\quad + \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x - y, t - s) dy ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f(x - y, 0) dy \\ &= I_\epsilon + J_\epsilon + K. \end{aligned}$$

¹Veja o Exercício 6, na sequência.

²Veja o Exercício 7, na sequência.

³Veja o Exercício 8, na sequência.

Começamos cotando a integral I_ϵ :

$$|I_\epsilon| \leq (\|f_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}) \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) dy ds \leq C\epsilon.$$

Para cotar J_ϵ integramos por partes:⁴

$$\begin{aligned} J_\epsilon &= \int_\epsilon^t \left[\left(\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) \Phi(y, s) \right] f(x - y, t - s) dy ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \epsilon) f(x - y, t - \epsilon) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x - y, 0) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \epsilon) f(x - y, t - \epsilon) dy - K, \end{aligned}$$

pois Φ é solução da equação do calor.

Assim

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \epsilon) f(x - y, t - \epsilon) dy = f(x, t),$$

o que pode ser verificado procedendo de maneira semelhante à da prova do Teorema 5.3.⁵

Finalmente, como

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) dy ds \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) dy ds \\ &= t \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $t \rightarrow 0^+$, verificamos que Ω satisfaz a condição inicial. □

Exercício 6 Verifique a mudança de variável realizada na prova do Teorema 5.5, isto é, mostre que

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f(x - y, t - s) dy ds.$$

Exercício 7 Justifique as derivações sob sinal de integração, utilizadas na prova do Teorema 5.5.

Exercício 8 Justifique a mudança de variável que conduziu às expressões das integrais I_ϵ , J_ϵ e K , na demonstração do Teorema 5.5.

⁴Veja o Exercício 9, na sequência.

⁵Veja o Exercício 10, na sequência.

Exercício 9 Verifique a integração por partes realizada na estimativa da integral J_ϵ na prova do Teorema 5.5.

Exercício 10 Mostre que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \epsilon) f(x - y, t - \epsilon) dy = f(x, t).$$

Observação 5.6 Combinando os Teoremas 5.3 e 5.5 chegamos à solução do problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = g, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

cujas soluções são dadas por

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(x, t) dy ds + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy$$

desde que f e g satisfaçam as hipóteses dos respectivos teoremas. $\triangleleft$

5.4 Fórmula do Valor Médio

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $T > 0$. O problema de valor inicial para a equação do calor em Ω é dado por

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \Omega \times (0, T] =: \Omega_T \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.8)$$

em que $g \in C(\partial\Omega)$. Chamaremos Ω_T de *cilindro parabólico*. Note que Ω_T inclui a “tampa superior” do cilindro sólido, mas não inclui a “tampa inferior”.

Denotaremos $\bar{\Omega}_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$ e $\Gamma_T = \bar{\Omega} \times [0, T) = \bar{\Omega}_T \setminus \Omega_T$. O conjunto Γ_T é chamado *fronteira parabólica* e tem especial importância no estudo da equação do calor, pois uma solução atinge seu máximo e seu mínimo nesse conjunto. Note que Γ_T inclui as laterais do cilindro sólido e também a “tampa inferior”, mas não inclui a “tampa superior”.

figura

Definição 5.7 Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ e $r > 0$ definimos a **bola do calor** $E(x, t, r)$ por:

$$E(x, t, r) = \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} : |y - x| \leq R(t, s, r) \text{ e } t - \frac{r^2}{4\pi} \leq s \leq t \right\}$$

em que

$$R(t, s, r) = \begin{cases} \sqrt{2n(t - s) \left(\ln \frac{r^2}{4\pi} - \ln(t - s) \right)}, & \text{se } t - \frac{r^2}{4\pi} \leq s < t, \\ 0, & \text{se } s = t. \end{cases}$$

É fácil ver que $R(t, s, r)$ está bem definido e, com isso, $E(x, t, r)$. Note que (x, t) corresponde ao centro do topo de $E(x, t, r)$.

Exercício 11 Mostre que

$$E(x, t, r) \subset B \left[x, R \left(t, t - \frac{r^2}{4\pi e}, r \right) \right] \times \left[t - \frac{r^2}{4\pi}, t \right] = B \left[x, \sqrt{\frac{n}{2\pi e}} r \right] \times \left[t - \frac{r^2}{4\pi}, t \right],$$

em que $B[x, s]$ denota a bola fechada de centro x e raio s em $\mathbb{R}^n$.

Exercício 12 Mostre que $R(s) = R(t, s, r)$ é uma função côncava de s , isto é,

$$\xi R(t, s_1, r) + (1 - \xi) R(t, s_2, r) \leq R(t, \alpha s_1 + \beta s_2, r),$$

para $0 \leq \xi \leq 1$.

Sugestão: mostre que $R''(s) \leq 0$, para todo $s \in \left[t - \frac{r^2}{4\pi}, t \right]$.

Exercício 13 Mostre que $E(x, t, r)$ é um conjunto convexo, isto é, se $(y_1, s_1), (y_2, s_2) \in E(x, t, r)$ então $(\xi y_1 + (1 - \xi)y_2, \xi s_1 + (1 - \xi)s_2) \in E(x, t, r)$ para $0 \leq \xi \leq 1$.

Exercício 14 Mostre que $E(x, t, r)$ é o **fecho** em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ do conjunto

$$A = \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} : \Phi(x - y, t - s) \geq \frac{1}{r^n}, s < t, \right\},$$

em que Φ é a solução fundamental da equação do calor. Em particular, mostre que se $(y, s) \in A$, então $[t - r^2/(4\pi)] \leq s$.

Exercício 15 Mostre que a função

$$\Psi(y, s) := \frac{n}{2} \ln \left(\frac{r^2}{4\pi(-s)} \right) + \frac{|y|^2}{4s}$$

para $(y, s) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0)$ se anula em $\partial E(0, 0, r)$.

Exercício 16 Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$. Mostre que, para cada $(x_1, t_1) \in \mathbb{R}^n \times (0, t)$, existe $r = r(x_1, t_1) > 0$ suficientemente pequeno tal que a reta L que liga (x_1, t_1) à (x, t) intercepta $E(x, t, r)$ em um único ponto.

Lema 5.8 Seja $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e denote $E(0, 0, r)$ por $E(r)$ para cada $r > 0$. Então:

$$\frac{1}{r^n} \iint_{E(r)} F(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = \iint_{E(1)} F(ry, r^2 s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds.$$

Demonstração: Denotando $R(0, s, r)$ por $R(s, r)$, temos

$$\frac{1}{r^n} \iint_{E(r)} F(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = \frac{1}{r^n} \int_{-\frac{r^2}{4\pi}}^0 \int_{B(0, R(s, r))} F(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds.$$

Fazendo a substituição $y = rz$ e $s = r^2\sigma$ na segunda integral acima encontramos

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^n} \iint_{E(r)} F(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds &= \frac{1}{r^n} \int_{\frac{r^2}{4\pi}}^0 \int_{B(0, \frac{R(s,r)}{r})} F(y, s) \frac{|rz|^2}{(r^2\sigma)^2} r^n dz r^2 d\sigma \\ &= \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 \int_{B(0, R(\sigma, 1))} F(rz, r^2\sigma) \frac{|z|^2}{\sigma^2} dz d\sigma \\ &= \iint_{E(1)} F(rz, r^2\sigma) \frac{|z|^2}{\sigma^2} dz d\sigma, \end{aligned}$$

uma vez que $dy = r^n dz$, $ds = r^2 d\sigma$ e

$$\begin{aligned} |z| \leq \frac{|y|}{r} &\leq \frac{R(s, r)}{r} = \frac{R(r^2\sigma, r)}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{2n(-r^2\sigma) \left(\ln \frac{r^2}{4\pi} - \ln(-r^2\sigma) \right)} \\ &= \sqrt{2n(-\sigma) \left(\ln r^2 + \ln \frac{1}{4\pi} - \ln r^2 - \ln(-\sigma) \right)} \\ &= R(\sigma, 1). \end{aligned} \quad \square$$

Exercício 17 Mostre que

$$\iint_{E(0,0,1)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = 4.$$

Teorema 5.9 Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Suponha que Ω_T contenha $(0, 0)$ e que $u \in C^{2,1}(\Omega_T)$ seja uma solução da equação do calor em Ω_T . Então,

$$u(0, 0) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(0,0,r)} u(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds$$

para todo $r > 0$ tal que $E(0, 0, r) \subset \Omega_T$.

Demonstração: Denotando $E(0, 0, r)$ por $E(r)$ e a integral acima por $\phi(r)$, temos, conforme o Lema 5.8,

$$\phi(r) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(r)} u(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = \frac{1}{4} \iint_{E(1)} u(ry, r^2s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{1}{4} \iint_{E(1)} [\nabla u(ry, r^2s) \cdot y + 2rsu_s(ry, r^2s)] \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \\ &= \frac{1}{4r} \iint_{E(1)} [\nabla u(ry, r^2s) \cdot ry + 2r^2su_s(ry, r^2s)] \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \\ &= \frac{1}{4r^{n+1}} \iint_{E(r)} [\nabla u(y, s) \cdot y + 2su_s(y, s)] \frac{|y|^2}{s^2} dy ds, \end{aligned}$$

onde usamos novamente o Lema 5.8 na passagem da segunda igualdade para a terceira.

Assim, $\phi'(r) = A + B$, em que

$$A := \frac{1}{4r^{n+1}} \iint_{E(r)} [\nabla u(y, s) \cdot y] \frac{|y|^2}{s^2} dy ds,$$

e

$$B := \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} u_s(y, s) \frac{|y|^2}{2s} dy ds.$$

Agora, definindo

$$\Psi(y, s) := \frac{n}{2} \ln \left(\frac{r^2}{4\pi(-s)} \right) + \frac{|y|^2}{4s}; \quad (y, s) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0)$$

temos

$$\Psi_s = - \left(\frac{n}{2s} + \frac{|y|^2}{4s^2} \right), \quad \nabla \Psi = \frac{y}{2s}, \quad y \cdot \nabla \Psi = \frac{|y|^2}{2s}$$

e

$$B = \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} (y \cdot \nabla \Psi) u_s dy ds.$$

Mas

$$\begin{aligned} u_s(y \cdot \nabla \Psi) &= \sum_{i=1}^n u_s y_i \Psi_{y_i} = \left(\sum_{i=1}^n u_s y_i \Psi \right)_{y_i} - \sum_{i=1}^n (u_s y_i)_{y_i} \Psi \\ &= \operatorname{div}(\Psi u_s y; 0) - \Psi \sum_{i=1}^n (u_s + (u_s)_{y_i} y_i) \\ &= \operatorname{div}(\Psi u_s y; 0) - \Psi \sum_{i=1}^n u_s - \Psi \sum_{i=1}^n (u_{y_i})_s y_i \\ &= \operatorname{div}(\Psi u_s y; 0) - n \Psi u_s - \Psi \left(\sum_{i=1}^n y_i u_{y_i} \right)_s \\ &= \operatorname{div}(\Psi u_s y; 0) - n \Psi u_s - \Psi(y \cdot \nabla u)_s, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -\Psi(y \cdot \nabla u)_s &= -(\Psi(y \cdot \nabla u))_s + \Psi_s(y \cdot \nabla u) \\ &= \operatorname{div}(0; -\Psi(y \cdot \nabla u)) - \left(\frac{n}{2} + \frac{|y|^2}{4s} \right) (y \cdot \nabla u). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 u_s(y \cdot \nabla \Psi) &= \operatorname{div}(\Psi u_s y; 0) - n \Psi u_s - \Psi(y \cdot \nabla u)_s \\
 &= \operatorname{div}(\Psi u_s y; 0) - n \Psi u_s + \operatorname{div}(0; -\Psi(y \cdot \nabla u)) - \left(\frac{n}{2s} + \frac{|y|^2}{4s^2} \right) (y \cdot \nabla u) \\
 &= \operatorname{div}(\Psi(u_s y; -(y \cdot \nabla u))) - n \Psi u_s - \left(\frac{n}{2s} + \frac{|y|^2}{4s^2} \right) (y \cdot \nabla u)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \operatorname{div}(\Psi(u_s y; -(y \cdot \nabla u))) dy ds - \frac{n}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \Psi u_s dy ds \\
 &\quad - \frac{n}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \frac{(y \cdot \nabla u)}{2s} dy ds - \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \frac{|y|^2}{4s^2} (y \cdot \nabla u) dy ds \\
 &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{\partial E(r)} \Psi(u_s y; -y \cdot \nabla u) \cdot \nu dy ds - \frac{n}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \Psi u_s dy ds \\
 &\quad - \frac{n}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \frac{(y \cdot \nabla u)}{2s} dy ds - \frac{1}{4r^{n+1}} \iint_{E(r)} \frac{|y|^2}{s} (y \cdot \nabla u) dy ds \\
 &= -\frac{n}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \Psi u_s dy ds - \frac{n}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \frac{(y \cdot \nabla u)}{2s} dy ds - A,
 \end{aligned}$$

onde, $\nu \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ é o vetor unitário e normal exterior à $\partial E(r)$. Na última igualdade, usamos que $\Psi|_{\partial E(r)} = 0$, resultado que decorre do Exercício 15.

Concluimos até aqui que

$$\begin{aligned}
 \phi'(r) &= A + B = -\frac{n}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left[\Psi u_s + \frac{(y \cdot \nabla u)}{2s} \right] dy ds \\
 &= -\frac{n}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left[\Psi \Delta u + \frac{(y \cdot \nabla u)}{2s} \right] dy ds,
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

uma vez que Ω satisfaz à equação do calor. (Veja também o Exercício 20).

Observando que

$$\Psi \Delta u = \sum_{i=1}^n \Psi u_{y_i y_i} = \sum_{i=1}^n (\Psi u_{y_i})_{y_i} - \sum_{i=1}^n \Psi_{y_i} u_{y_i} = \operatorname{div}(\Psi \nabla u; 0) - \nabla \Psi \cdot \nabla u$$

e que

$$-\nabla \Psi \cdot \nabla u = -\frac{y}{2s} \cdot \nabla u = -\frac{(y \cdot \nabla u)}{2s},$$

temos

$$\begin{aligned}
 \phi'(r) &= -\frac{n}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \operatorname{div}(\Psi \nabla u; 0) dy ds \\
 &= -\frac{n}{r^{n+1}} \iint_{\partial E(r)} (\Psi \nabla u; 0) \cdot \nu dy ds = 0,
 \end{aligned}$$

mais uma vez como consequência do Exercício 15.

Portanto, ϕ é uma função constante e, como

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \phi(r) = \frac{1}{4} \iint_{E(1)} \lim_{r \rightarrow 0^+} u(ry, r^2s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = \frac{1}{4} \iint_{E(1)} u(0, 0) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds,$$

temos que

$$\phi(r) = u(0, 0) \frac{1}{4} \iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = u(0, 0),$$

conforme o Exercício 17, e assim

$$u(0, 0) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(0,0,r)} u(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds.$$

□

Corolário 5.10 *Sejam $\Omega \in \mathbb{R}^n$ aberto e $u \in C^{2,1}(\Omega_T)$ uma solução da equação do calor em $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$. Então,*

$$u(x, t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x,t,r)} u(y, s) \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds$$

para todo $r > 0$ tal que $E(x, t, r) \subset \Omega_T$ e para todo $(x, t) \in \Omega_T$.

Exercício 18 *Prove o Corolário 5.10. (Sugestão: fixe $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ e use o teorema anterior para a função $v(x, t) = u(x + x_0, t + t_0)$).*

Exercício 19 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ um aberto contendo $(0, 0)$ e $u \in C^{2,1}(\Omega)$ uma solução da equação do calor em Ω . Então,*

$$u(0, 0) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(0,0,r)} u(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds$$

para todo $r > 0$ tal que $E(0, 0, r) \subset \Omega$

Exercício 20 *Seja $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ uma **sub-solução** da equação do calor, isto é, tal que $u_t - \Delta u \leq 0$ em Ω_T . Mostre que:*

(a)

$$u(x, t) \leq \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x,t;r)} u(y, s) \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds.$$

para cada $E(x, t; r) \subset \Omega_T$.

(Sugestão: adapte a passagem em (5.9) na demonstração do teorema anterior.)

(b) se $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ é tal que $u(x_0, t_0) = \max_{\bar{\Omega}_T} u$, então $u(x_0, t) = \max_{\bar{\Omega}_T} u$ para todo $t \in [0, t_0]$.

(Sugestão: mostre que $0 = \min \{s \in [0, t_0] : u(x_0, t) = M, t \in [s, t_0]\}$.)

(c) $\max_{\bar{\Omega}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$, em que $\Gamma_T = \bar{\Omega}_T - \Omega_T$.

(d) se Ω é conexo e se $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ é tal que $u(x_0, t_0) = \max_{\bar{\Omega}_T} u$, então $u(x, t) = \max_{\bar{\Omega}_T} u$ para todo $(x, t) \in \bar{\Omega}_{t_0}$.

5.5 O Princípio do Máximo

Nesta seção apresentaremos a demonstração do Princípio do Máximo para a equação do calor, com uma prova independente daquela sugerida no Exercício 20.

Teorema 5.11 (Forma Fraca do Princípio do Máximo)

Seja $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\bar{\Omega}_T)$. Se u satisfizer $u_t - \Delta u \leq 0$, então

$$\max_{\bar{\Omega}_T} u = \max_{\Gamma_T} u. \quad (5.10)$$

Se Ω satisfizer $u_t - \Delta u \geq 0$, então

$$\min_{\bar{\Omega}_T} u = \min_{\Gamma_T} u. \quad (5.11)$$

Em particular, se u satisfizer $u_t - \Delta u = 0$, então

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega_T)} = \|u\|_{L^\infty(\Gamma_T)}.$$

Demonstração: Claramente temos que

$$\max_{\Gamma_T} u \leq \max_{\bar{\Omega}_T} u.$$

Basta, portanto, mostrar que⁶

$$\max_{\bar{\Omega}_T} u \leq \max_{\Gamma_T} u.$$

Suponhamos inicialmente que $u_t - \Delta u < 0$ em Ω_T .

Dado $0 < \epsilon < T$, como u é contínua em $\bar{\Omega}_{T-\epsilon}$, ela atinge seu máximo em $\bar{\Omega}_{T-\epsilon}$.

Seja (x_0, t_0) o ponto de máximo de u em $\bar{\Omega}_{T-\epsilon}$. Como u é derivável nesse conjunto, temos $Du(x_0, t_0) = 0$, em que Du a derivada (total) de u com relação às variáveis x e t . Além disso, temos $\Delta u(x_0, t_0) \leq 0$ e, portanto, $[u_t - \Delta u](x_0, t_0) \geq 0$, uma contradição. Da mesma forma, não podemos ter (x_0, t_0) na “tampa superior”.

⁶Observe que basta mostrar que $\max_{\bar{\Omega}_T} u \leq \max_{\Gamma_T} u$.

Assim, concluímos que

$$\max_{\bar{\Omega}_{T-\epsilon}} u = \max_{\Gamma_{T-\epsilon}} u \leq \max_{\Gamma_T} u.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, a continuidade de u em $\bar{\Omega}_T$ garante a conclusão desejada.

Assim, supondo $u_t - \Delta u < 0$, nossa primeira afirmação está provada.

Por outro lado, se fosse $u_t - \Delta u \leq 0$, defina $v(x, t) = u(x, t) + \epsilon|x|^2$. Então $v_t = u_t$ e $\Delta v = \Delta u + 2\epsilon n$, de modo que $v_t - \Delta v < 0$. Aplicando o resultado já provado para a função v , concluímos que

$$\max_{\bar{\Omega}_T} v = \max_{\Gamma_T} v = \max_{\Gamma_T} u + \epsilon \max_{\Gamma_T} |x|^2$$

e daí concluímos (fazendo $\epsilon \rightarrow 0$) que

$$\max_{\bar{\Omega}_T} v \leq \max_{\Gamma_T} u.$$

Como temos $\max_{\bar{\Omega}_T} u \leq \max_{\bar{\Omega}_T} v$, a primeira afirmação está provada.

As outras afirmações são imediatas: para (ii), basta considerar $v = -u$. □

Corolário 5.12 *O problema*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f & \text{em } \Omega_T, \\ u &= g & \text{em } \Gamma_T, \end{cases}$$

com $f \in C^0(\Omega_T)$ e $g \in C^0(\Gamma_T)$ possui no máximo uma solução $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\bar{\Omega}_T)$.

Demonstração: Se u, v fossem soluções do problema dado, então $w = u - v$ satisfaria

$$\begin{cases} w_t - \Delta w &= 0 & \text{em } \Omega_T, \\ w &= 0 & \text{em } \Gamma_T. \end{cases}$$

Da Forma Fraca do Princípio do Máximo concluímos que $w \equiv 0$. □

Exercício 21 *Suponha que $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\bar{\Omega}_T)$ seja uma solução de*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= 0 & \text{em } \Omega_T, \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega \times [0, T] \\ u &= g & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

sendo $g \geq 0$. Mostre que se g for positiva em algum ponto, então u é positiva em todos os pontos de Ω_T .

Teorema 5.13 (Princípio do Máximo para $\Omega = \mathbb{R}^n$) Suponha que $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ seja solução de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u \leq 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u = g & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

e satisfaça a estimativa

$$u(x, t) \leq Ae^{a|x|^2}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T], \quad (5.12)$$

em que A e a são constantes positivas.

Então

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

(Naturalmente, esse resultado só é interessante se g for uma função limitada no $\mathbb{R}^n$.)

Demonstração: Dividindo o intervalo $[0, T]$ em subintervalos de comprimento menor do que $1/(4a)$ e aplicando o argumento sucessivamente a esses subintervalos, podemos assumir que $T < 1/(4a)$, pois

$$u(x, t) \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^n} u(y, kT) \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^n} u(y, 0),$$

para $kT \leq t \leq (k+1)T$.

Assim, existe $\epsilon > 0$ tal que $a < \frac{1}{4(T+\epsilon)}$ (isto é, $4a(T+\epsilon) < 1$). Fixado $y \in \mathbb{R}^n$ e $\mu > 0$, definimos

$$\begin{aligned} v(x, t) &= u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \epsilon - t)^{n/2}} e^{|x-y|^2/[4(T+\epsilon-t)]} \\ &= u(x, t) - \mu \Phi(x-y, T + \epsilon - t), \end{aligned}$$

em que $0 \leq t \leq T$ e Φ é a solução fundamental da equação do calor. Então $v_t - \Delta v \leq 0$. (Veja o Exercício 22).

Vamos mostrar que $v(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g$ e então fazer $\mu \rightarrow 0$.

Defina o cilindro circular $C = B_\rho(y) \times (0, T)$. Pelo Princípio do Máximo para domínios limitados temos

$$v(y, t) \leq \max_{\Gamma_T}.$$

Na “tampa inferior” temos

$$v(x, 0) \leq u(x, 0) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g,$$

pois $\mu \Gamma > 0$.

Na superfície lateral temos $|x - y| = \rho$ e

$$\begin{aligned} v(x, t) &\leq Ae^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T + \epsilon - t)^{n/2}} e^{\rho^2/[4(T+\epsilon-t)]} \leq Ae^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T + \epsilon)^{n/2}} e^{\rho^2/[4(T+\epsilon)]} \\ &= Ae^{a(|y|+\rho)^2} - \mu[4(a+\gamma)]^{n/2} e^{(a+\gamma)\rho^2}, \end{aligned}$$

em que $\gamma > 0$ é definido por

$$a + \gamma = \frac{1}{4(T + \epsilon)}.$$

Tomando ρ suficientemente grande, temos que o lado direito tende a menos infinito quando ρ tende a infinito. Assim,

$$v(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

Fazendo $\mu \rightarrow 0$, concluímos a prova. $\square$

Exercício 22 Mostre que a função $v(x, t)$ definida na prova do Teorema 5.13 satisfaz $v_t - \Delta v \leq 0$.

Exercício 23 Mostre que existe no máximo uma solução $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ para o problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u = g & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

sendo $f \in C^0(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ e $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$, se Ω satisfizer a estimativa

$$|u(x, t)| \leq Ae^{a|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T.$$

5.6 Regularidade

Teorema 5.14 Seja $u \in C^{2,1}(\bar{\Omega}_T)$ uma solução de $u_t - \Delta u = 0$ em Ω_T . Se Ω tiver fronteira de classe C^1 então $u \in C^\infty(\Omega_T)$.

Demonstração: Seja $v \in C^{2,1}(\bar{\Omega}_T)$ uma função qualquer. Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_T} (u_t - \Delta u)v = \int_0^T \int_{\Omega} (u_t - \Delta u)vdxdxdt = \int_{\Omega} \int_0^T u_tvdt - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta uvdxdxdt \\ &= \int_{\Omega} uvdx \Big|_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \int_{\Omega} uv_t dxdxdt - \left[\int_0^T \int_{\Omega} u\Delta v dxdxdt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS_x dt \right] \\ &= - \int_{\Omega_T} u(v_t - \Delta v) - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS_x dt \\ &\quad + \int_{\Omega} u(x, T)v(x, T)dx - \int_{\Omega} u(x, 0)v(x, 0)dx \end{aligned}$$

Fixe $y \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$. Para $v(x, t) = \Phi(x - y, T + \epsilon - t)$ temos $v_t + \Delta v = 0$ (note o sinal de v_t), de modo que

$$\int_{\Omega} u(x, T)\Phi(x - y, \epsilon)dx - \int_{\Omega} u(x, 0)\Phi(x - y, T + \epsilon)dx =$$

$$= \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(x-y, T+\epsilon-t) \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \Phi(x-y, T+\epsilon-t)}{\partial \nu} \right) dS_x dt.$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ verificamos, de maneira análoga à prova do Teorema 5.3, que

$$\int_{\Omega} u(x, T) \Gamma(x-y, \epsilon) dx \rightarrow u(y, T)$$

e também

$$\int_{\Omega} u(x, 0) \Phi(x-y, T+\epsilon) dx = \int_{\Omega} u(x, 0) \Phi(x-y, T) dx.$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} u(y, T) &= \int_{\Omega} u(x, 0) \Phi(x-y, T) dx \\ &+ \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(x-y, T+\epsilon-t) \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \Phi(x-y, T+\epsilon-t)}{\partial \nu} \right) dS_x dt. \end{aligned}$$

Como $\Phi(x-y, s) \in C^\infty$, concluímos daí o afirmado. $\square$

Observação 5.15 Se $\partial\Omega$ for de classe C^1 , pode-se mostrar que u é analítica, veja F. John [6]. Por outro lado, mesmo retirando a hipótese de $\partial\Omega$ ser de classe C^1 , é verdade que $u \in C^\infty$, veja Evans [3]. $\triangleleft$

5.7 Métodos Variacionais

Podemos mostrar a unicidade de solução para problemas do calor utilizando métodos de “energia”. Consideremos o problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{em } \Omega_T = \Omega \times (0, T], \\ u = g & \text{em } \partial\Omega \times [0, T], \\ u = g & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

em que f e g são contínuas em seus respectivos domínios.

De fato, se u e v fossem solução deste problema (ambas em $C^2(\bar{\Omega}_T)$), definindo $w = u - v$ obtemos que w é solução do problema

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0 & \text{em } \Omega_T = \Omega \times (0, T], \\ w = 0 & \text{em } \Gamma_T. \end{cases}$$

Definindo

$$\phi(t) = \int_{\Omega} w^2(x, t) dx, \quad 0 \leq t \leq T$$

e aplicando a Primeira Identidade de Green, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\phi(t) &= \int_{\Omega} 2w(x,t)w_t(x,t)dx = \int_{\Omega} 2w(x,t)\Delta w(x,t)dx \\ &= -2 \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx + 2 \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial \nu} dS \\ &= -2 \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \leq 0,\end{aligned}$$

pois $w = 0$ em $\partial\Omega$. Assim,

$$\phi(t) \leq \phi(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

e, portanto, $w \equiv 0$.

A unicidade que trataremos a seguir é mais sutil.

Teorema 5.16 *Suponhamos que $u, v \in C^2(\bar{\Omega}_T)$ sejam soluções do problema*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= 0 & \text{em } \Omega_T = \Omega \times (0, T], \\ u &= g & \text{em } \partial\Omega \times [0, T]. \end{cases}$$

Suponha que $u(x, T) = v(x, T)$ para todo $x \in \Omega$, então

$$u = v \quad \text{em } \Omega_T.$$

Demonstração: Defina, como antes, $w = u - v$ e

$$\phi(t) = \int_{\Omega} w^2(x,t)dx, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Obtemos então (como antes)

$$\phi'(t) = -2 \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx = -2 \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla w dx. \quad (5.13)$$

Uma nova derivação produz

$$\phi''(t) = -4 \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla w_t dx$$

e, aplicando a Primeira Identidade de Green,

$$\phi''(t) = 4 \int_{\Omega} \Delta w w_t dx + \int_{\partial\Omega} w_t \frac{\partial w}{\partial \nu} dS = 4 \int_{\Omega} \Delta w w_t dx,$$

pois, para x fixo, temos $w = u - v = g - g = 0$ em $\partial\Omega \times [0, 1]$ e, portanto $w_t = 0$ em $\partial\Omega$. Como $w_t = \Delta w$, temos que

$$\phi''(t) = 4 \int_{\Omega} (\Delta w)^2 dx. \quad (5.14)$$

Por outro lado, como $w = 0$ em $\partial\Omega$, temos

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx = - \int_{\Omega} w \Delta w dx \leq \left(\int_{\Omega} w^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} (\Delta w)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Combinando esta desigualdade com (5.13) e (5.14), obtemos

$$\begin{aligned} (\phi'(t))^2 &= 4 \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^2 \\ &\leq \left(\int_{\Omega} w^2 dx \right) \left(4 \int_{\Omega} (\Delta w)^2 dx \right) \\ &= \phi(t) \phi''(t), \end{aligned}$$

mostrando que

$$\phi''(t) \phi(t) \geq (\phi'(t))^2, \quad \forall 0 \leq t \leq T. \quad (5.15)$$

Se tivermos $\phi(t) = 0$ para todo $0 \leq t \leq T$, chegamos ao nosso resultado. Caso contrário, existe um intervalo $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ tal que

$$\phi(t) > 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2) \quad \text{e} \quad \phi(t_2) = 0.$$

(Note que o fato de $\phi(t)$ se anular no ponto final de algum intervalo é consequência da hipótese $u(x, T) = v(x, T)$.)

Defina a função

$$f(t) = \ln \phi(t), \quad t \in [t_1, t_2).$$

Então

$$f'(t) = \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} \Rightarrow f''(t) = \frac{\phi''(t)\phi(t) - [\phi'(t)]^2}{[\phi(t)]^2} = \frac{\phi''(t)}{\phi(t)} - \frac{[\phi'(t)]^2}{[\phi(t)]^2} \geq 0,$$

de acordo com (5.15). Isso mostra que f é convexa no intervalo (t_1, t_2) . Assim, se $0 \leq \xi \leq 1$, temos, para qualquer t tal que $t_1 < t < t_2$,

$$f((1 - \xi)t_1 + \xi t) \leq (1 - \xi)f(t_1) + \xi f(t).$$

Como $\phi(t) > 0$ para todo $t \in [t_1, t_2)$, temos $\phi((1 - \xi)t_1 + \xi t) > 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} 0 \leq \ln \phi((1 - \xi)t_1 + \xi t) &\leq (1 - \xi) \ln \phi(t_1) + \xi \ln \phi(t) \\ &= \ln \phi(t_1)^{(1-\xi)} + \ln \phi(t)^\xi \\ &= \ln[\phi(t_1)^{(1-\xi)} \phi(t)^\xi]. \end{aligned}$$

Tomando a exponencial, concluímos que

$$0 \leq \phi((1 - \xi)t_1 + \xi t) \leq \phi(t_1)^{(1-\xi)} \phi(t)^\xi.$$

Fazendo $t \rightarrow t_2$, obtemos

$$0 \leq \phi((1 - \xi)t_1 + \xi t_2) \leq \phi(t_1)^{(1-\xi)} \phi(t_2)^\xi.$$

Como $\phi(t_2) = 0$, concluímos que

$$\phi((1 - \xi)t_1 + \xi t_2) \equiv 0,$$

o que contradiz a hipótese $\phi(t) > 0$. Portanto temos $\phi(t) \equiv 0$ e obtemos o resultado. $\square$

5.8 Exercícios

1. Seja u solução do problema de Cauchy *homogêneo* para a equação do calor com dado inicial contínuo u_0 .

- (a) Prove que se u_0 tiver *suporte compacto* então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0,$$

uniformemente em $\mathbb{R}^n$.

- (b) Prove que se u_0 for uma função *limitada* em $\mathbb{R}^n$ então existe uma constante C , que depende apenas de u_0 e de n , tal que

$$|\nabla u(x, t)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}}, \quad \text{para todo } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty).$$

Solução: (a) Como u_0 tem suporte compacto (e, portanto, é limitada), a solução do problema de Cauchy é dada por

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy.$$

Tome $R > 0$ suficientemente grande de modo que $B_R(0)$ contenha o suporte de u_0 . Então

$$|u(x, t)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy \right| \leq \int_{B_R(0)} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x-y|^2/(4t)} |u_0(y)| dy.$$

Mas

$$e^{-|x-y|^2/(4t)} \leq 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

de modo que

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{B_R(0)} |u_0(y)| dy \leq \frac{C}{(4\pi t)^{n/2}}.$$

Daí decorre o resultado.

(b) O fato de u ser limitada garante que

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy.$$

Daí decorre que

$$\begin{aligned} \nabla_x u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x \Phi(x - y, t) u_0(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x-y|^2/(4t)} \frac{x-y}{2t} u_0(y) dy, \end{aligned}$$

pois $\Phi_{x_i}(x - y, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x-y|^2/(4t)} \frac{2(x_i - y_i)}{4t}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} |\nabla_x u(x, t)| &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/(4t)} \frac{|x-y|}{2t} |u_0(y)| dy \\ &\leq \frac{M}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/(4t)} \frac{|x-y|}{2t} dy. \end{aligned}$$

Fazendo $r = |x - y|$,

$$\begin{aligned} |\nabla_x u(x, t)| &\leq \frac{M}{(4\pi t)^{n/2}} \int_0^\infty \int_{\partial B_r(0)} e^{-r^2/(4t)} \frac{r}{2t} dS dr \\ &\leq \frac{M}{(4\pi t)^{n/2}} \int_0^\infty (n\alpha(n)r^{n-1}) e^{-r^2/(4t)} \frac{r}{2t} dr \end{aligned}$$

Fazendo a mudança da variável $\xi = \frac{r}{2\sqrt{t}}$ (que implica $r^2/(4t) = \xi^2$ e $r^n = 2^n t^{n/2}$) temos

$2\sqrt{t}d\xi = dr$, de modo que

$$\begin{aligned} |\nabla_x u(x, t)| &\leq \frac{2Mn\alpha(n)2^{n-1}t^{(n-1)/2}}{(4\pi t)^{n/2}} \int_0^\infty \xi^n e^{-\xi^2} d\xi \\ &= \frac{2^n A M n \alpha(n)}{(4\pi)^{n/2}} \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{C}{\sqrt{t}}, \end{aligned}$$

em que $A = \int_0^\infty \xi^n e^{-\xi^2} d\xi$.

2. Seja Ω uma função suave e limitada em $\mathbb{R}^n \times [0, T]$, satisfazendo $u_t - \Delta u \leq 0$ em $\mathbb{R}^n \times (0, T)$.

Para cada $t \in [0, T]$, defina

$$M(t) := \sup \{u(x, t) : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Mostre que

$$M(t) \leq M(0) \text{ para todo } t \in [0, T].$$

Sugestão: Considere a função $\phi(x, t) = (\alpha - t)^{-n/2} e^{\frac{|x|^2}{4(\alpha-t)}}$, que é solução da equação do calor em $\mathbb{R}^n \times [0, \alpha)$ para qualquer $\alpha > 0$. Considere a sequência de funções

$$v_\epsilon(x, t) = u(x, t) - \epsilon \phi(x, t)$$

e aplique o princípio do máximo em domínios limitados Ω_T com $\alpha > T$ para mostrar que $v_\epsilon(x, t) \leq M(0)$ (uniformemente em t).

Capítulo 6

Equação da Onda

Neste capítulo estudaremos a equação da onda

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

e a equação da onda não homogênea,

$$u_{tt} - \Delta u = f,$$

ambas sujeitas a condições iniciais e de fronteira apropriadas. Elas serão estudadas no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ para $t > 0$. É usual representar o operador $u_{tt} - \Delta u$ por $\square$. Assim, a equação da onda algumas vezes é escrita como

$$\square u = 0.$$

6.1 Interpretação Física

Escrever

6.2 Método da Reflexão

Já vimos que, no caso unidimensional, o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = g & \text{em } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \\ u_t = h & \text{em } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (6.1)$$

possui solução única

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy \quad (6.2)$$

para g e h dados, expressão conhecida como *fórmula de d'Alembert*.

Verifica-se facilmente que se $g \in C^2(\mathbb{R})$ e $h \in C^1(\mathbb{R})$, então a igualdade (6.2) define uma função $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ que satisfaz a equação da onda no caso unidimensional e satisfaz as condições iniciais e de fronteira dadas, isto é,

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x,t) = g(x_0) \quad \text{e} \quad \lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u_t(x,t) = h(x_0)$$

para todo ponto $x_0 \in \mathbb{R}$.

Utilizaremos a fórmula de d'Alembert para resolver o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ u = g & \text{em } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ u_t = h & \text{em } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ u = 0 & \text{em } \{x = 0\} \times (0, \infty), \end{cases} \quad (6.3)$$

em que $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, g e h são funções dadas satisfazendo $g(0) = h(0) = 0$.

Figura

Transformaremos o problema (6.3) no problema (6.1) ao definirmos uma extensão ímpar das funções envolvidas; definimos:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x,t) &= -u(-x,t), \quad x \leq 0, \quad \tilde{u}(x,t) = u(x,t), \quad x > 0, \\ \tilde{g}(x) &= -g(-x), \quad x \leq 0, \quad \tilde{g}(x) = g(x), \quad x > 0 \end{aligned}$$

e

$$\tilde{h}(x) = -h(-x), \quad x \leq 0, \quad \tilde{h}(x) = h(x), \quad x > 0.$$

Com essa transformação, o problema (6.3) escreve-se como

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ \tilde{u} = \tilde{g} & \text{em } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \\ \tilde{u}_t = \tilde{h} & \text{em } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

e sua solução é dada por

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2} [\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy.$$

Escrevendo essa solução para $x \geq 0$, obtemos

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy, & \text{se } x \geq t \geq 0, \\ \frac{1}{2} [g(x+t) - g(t-x)] + \frac{1}{2} \int_{-x+t}^{x+t} h(y) dy, & \text{se } 0 \leq x \leq t. \end{cases} \quad (6.4)$$

No caso $h \equiv 0$, podemos entender essa solução como indicando que o deslocamento inicial g divide-se em duas partes, um movendo para a direita com velocidade igual a 1 e outro para a esquerda, com a mesma velocidade. O último reflete-se no ponto $x = 0$, onde a corda vibrante é mantida fixa.

6.3 Médias Esféricas

Suponhamos que $u \in C^m(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ seja uma solução do problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \\ u_t = h & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (6.5)$$

em que $m \geq 2$.

Definição 6.1 *Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Para $r, t > 0$, definimos*

(i)

$$U(x; r, t) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y, t) dS(y);$$

(ii)

$$G(x; r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} g(y) dS(y);$$

(iii)

$$H(x; r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} h(y) dS(y).$$

Exercício 24 *Encontre a expressão para as soluções radiais de $\Delta u = 0$.*

Lema 6.2 (Euler-Poisson-Darboux) *Para $x \in \mathbb{R}^n$ fixo e u solução de (6.5), temos que $U \in C^m([0, \infty) \times [0, \infty))$ satisfaz*

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r}U_r = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ U = G & \text{em } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ U_t = H & \text{em } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (6.6)$$

Demonstração: Note que, como u satisfaz (6.5), tomando as médias esféricas verificamos que U satisfaz as expressões da posição inicial e da velocidade inicial.

Fazendo a mudança de variável $y = x + rz$ na expressão que define U , encontramos (como antes, veja o Teorema 4.4) $dy = r^{n-1} dz$ e

$$U(x; r, t) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B_1(0)} u(x + rz, t) dS(z).$$

Portanto,

$$U_r(x; r, t) = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x + rz, t) \cdot z dS(z)$$

e, como $z = (y - x)/r$ é o vetor normal unitário exterior de $B_r(x)$, voltando para a variável y temos

$$\begin{aligned} U_r(x; r, t) &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} \nabla u(y) \cdot v \, dS(y) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B_r(x)} \Delta u(y, t) dy = \frac{r}{n} \left(\frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B_r(x)} \Delta u(y, t) dy \right), \end{aligned} \quad (6.7)$$

de acordo com o Teorema da Divergência.

Em particular, para cada $t > 0$ fixo, vemos que, fazendo $r \rightarrow 0$, temos

$$\lim_{r \rightarrow 0} U_r(x; r, t) = 0.$$

Derivando (6.7), obtemos

$$\begin{aligned} U_{rr} &= \frac{-(n-1)}{n\alpha(n)r^n} \int_{B_r(x)} \Delta u(y, t) dy + \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \frac{d}{dr} \int_0^r \int_{\partial B_s(x)} \Delta u(y, t) dS(y) ds \\ &= \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B_r(x)} \Delta u(y, t) dy + \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} \Delta u(y, t) dS(y) \end{aligned}$$

Daí decorre que¹

$$\lim_{r \rightarrow 0} U_{rr}(x; r, t) = \frac{1}{n} \Delta(x, t) \quad (6.8)$$

e também que $U \in C^m$, se $u \in C^m$. (Note que estamos aplicando o teorema da média para integrais à função $\Delta u(x, t)$.)

Como $u_{tt} = \Delta u$, decorre de (6.7) que

$$r^{n-1} U_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B_r(x)} u_{tt}(y, t) dy = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_0^r \int_{\partial B_s(x)} u_{tt}(y, t) dS(y) ds.$$

Assim,

$$\frac{d}{dr} (r^{n-1} U_r) = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B_r(x)} u_{tt}(y, t) dS(y),$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dr} (r^{n-1} U_r) = r^{n-1} \left(\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u_{tt}(y, t) dS(y) \right) = r^{n-1} U_{tt},$$

de onde decorre que U satisfaz a equação diferencial dada. $\square$

Observação 6.3 Note que o termo $U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r$ é a expressão do Laplaciano em coordenadas polares. $\triangleleft$

Exercício 25 Mostre a igualdade (6.8). Justifique também que $U \in C^m$, se $u \in C^m$. (Para isso, obtenha as expressões de U_{rrr} etc.)

¹Veja o Exercício 25.

6.4 Dois Casos Paradigmáticos

A solução do problema (6.5) depende da dimensão do espaço ambiente. Sendo mais específico, a solução é obtida por métodos distintos se, no espaço $\mathbb{R}^n$, tivermos $n > 1$ ímpar ou par.

Começaremos considerando $n > 1$ ímpar em sua versão mais simples: $n = 3$.

6.4.1 A fórmula de Kirchhoff

Consideremos o caso $n = 3$ e suponhamos que $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ seja uma solução de (6.5). Utilizaremos as definições anteriores para U , G , H .

Vamos fazer a mudança de variável

$$\tilde{U} = rU,$$

que nos dá $\tilde{U}_{tt} = rU_{tt}$, $\tilde{U}_r = U + rU_r$ e $\tilde{U}_{rr} = 2U_r + rU_{rr}$.

Definindo

$$\tilde{G}(x; r) = rG(x; r) \quad \text{e} \quad \tilde{H} = rH, \quad (6.9)$$

afirmamos que $\tilde{U}$ satisfaz

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ \tilde{U} = \tilde{G} & \text{em } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ \tilde{U}_t = \tilde{H} & \text{em } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ \tilde{U} = 0 & \text{em } \{r = 0\} \times (0, \infty). \end{cases} \quad (6.10)$$

De fato, temos

$$\tilde{U}_{tt} = rU_{tt} = r[U_{rr} + (2/r)U_r] = rU_{rr} + 2U_r = \tilde{U}_{rr}.$$

Assim, no caso $n = 3$, o resultado decorre imediatamente de (6.6).²

De acordo com (6.4), a solução de (6.10) é dada, para $0 \leq r \leq t$, por

$$\tilde{U}(x; r, t) = \frac{1}{2} [\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)] + \frac{1}{2} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(y) dy.$$

Como, pela Definição 6.1 e pelo teorema da média para integrais temos

$$u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0} U(x, t; r),$$

concluimos que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{U}(x, t; r)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \left[\frac{\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(y) dy \right] \\ &= \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t) = \tilde{G}'(x; t) + \tilde{H}(x; t), \end{aligned} \quad (6.11)$$

²Observe que a mudança de variável $\tilde{U} = rU$ não conduz à equação do calor unidimensional no caso de $n = 2$.

pois, chamando $y_1 = r + t$ e $y_2 = t - r$, $y_1 - y_2 = 2r$ e $r \rightarrow 0^+$ implica $y_1, y_2 \rightarrow t$; o valor da segunda integral decorre da aplicação do teorema da média para integrais.

Como $\tilde{G}(x; r) = rG(x, r)$ e $\tilde{H}(x; r) = rH(x, r)$, temos que $\tilde{G}(x; t) = tG(x, t)$ e $\tilde{H}(x; t) = tH(x, t)$. Substituindo essas expressões em (6.11), encontramos

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(t \frac{1}{3\frac{4}{3}\pi t^2} \int_{\partial B_t(x)} g(y) dS(y) \right) + \frac{t}{3\frac{4}{3}\pi t^2} \int_{\partial B_t(x)} h(y) dS(y).$$

Mas³

$$\frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B_t(x)} g(y) dS(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_1(0)} g(x + tz) dS(z),$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B_t(x)} g(y) dS(y) \right) &= \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_1(0)} \nabla g(x + tz) \cdot z dS(z) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B_t(x)} \nabla g(y) \frac{y - x}{t} dS(y). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left(\frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B_t(x)} g(y) dS(y) \right) + t \left(\frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B_t(x)} \nabla g(y) \frac{y - x}{t} dS(y) \right) \\ &\quad + \frac{t}{4\pi t^2} \int_{\partial B_t(x)} h(y) dS(y) \\ &= \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B_t(x)} [th(y) + g(y) + \nabla g(y) \cdot (y - x)] dS(y), \end{aligned} \quad (6.12)$$

expressão que é conhecida como *fórmula de Kirchhoff* para a solução do problema (6.5) no caso tridimensional.

6.4.2 O Método da Descida

Agora consideramos o caso $n = 2$. Não existe qualquer mudança de variável como a empregada no caso $n = 3$ que seja capaz de transformar a equação de Euler-Poisson-Darboux (6.2) em um problema unidimensional.

O que faremos é considerar o $\mathbb{R}^2$ como o subespaço de pontos $(x_1, x_2, 0)$ do espaço tridimensional. Obteremos a solução em $\mathbb{R}^3$ e então anularemos a terceira coordenada espacial do ponto (x_1, x_2, x_3) . Esse é o *método da descida*.

Assim, definimos

$$\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2, t).$$

³Veja a demonstração do Lema 6.2.

Escrevendo o problema (6.5) em termos de $\bar{u}$, encontramos

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - \Delta \bar{u} = 0 & \text{em } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ \bar{u} = \bar{g} & \text{em } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}, \\ \bar{u}_t = \bar{h} & \text{em } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (6.13)$$

em que

$$\bar{g}(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2) \quad \text{e} \quad \bar{h}(x_1, x_2, x_3) = h(x_1, x_2),$$

pois $u_{x_3, x_3} = 0$.

Com a notação

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad \bar{x} = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3,$$

a solução do problema (6.13) é dada, de acordo com (6.11), por

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \bar{u}(\bar{x}, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(t \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial \bar{B}_t(\bar{x})} \bar{g}(y) d\bar{S}(y) \right) + t \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial \bar{B}_t(\bar{x})} \bar{h}(y) d\bar{S}(y) \end{aligned} \quad (6.14)$$

em que $\bar{B}_t(x)$ denota a bola no $\mathbb{R}^3$ com centro $\bar{x}$ e raio $t > 0$ e $d\bar{S}$ a medida de superfície de $\partial \bar{B}_t(x)$. Parametrizamos a esfera $(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - 0)^2 = t^2$ ao parametrizar seus hemisférios norte e sul como gráfico de função, o domínio dessa parametrização coincidindo com a bola $B_t(x) \subset \mathbb{R}^2$. Assim, para cada uma dessas parametrizações temos

$$d\bar{S}(y) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_2} \right)^2} dy.$$

Como

$$\frac{\partial y_3}{\partial y_i} = \frac{y_i - x_i}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}},$$

vemos que

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_2} \right)^2} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}}.$$

Para derivarmos a primeira integral, fazemos a mudança de variável $y = x + tz$ (isto é, $y_1 = x_1 + tz_1$, $y_2 = x_2 + tz_2$, temos $dy = t^2 dz$ (pois $dy = dy_1 dy_2 = (tdz_1)(tdz_2) = t^2 dz$) e $\sqrt{t^2 - |x - y|^2} = t\sqrt{1 - |z|^2}$, e obtemos (o fator 2 multiplicando cada integral surge ao

parametrizar os hemisférios norte e sul da esfera)

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(2t^2 \frac{1}{4\pi t^2} \int_{B_t(x)} \frac{g(y)dy}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}} \right) + \left(2t^2 \frac{1}{4\pi t^2} \int_{B_t(x)} \frac{h(y)dy}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left(t \frac{1}{2\pi} \int_{B_1(0)} \frac{g(x + tz)}{\sqrt{1 - |z|^2}} dz \right) + \left(\frac{1}{2\pi t^2} \int_{B_t(x)} \frac{t^2 h(y)}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{B_1(0)} \frac{g(x + tz)}{\sqrt{1 - |z|^2}} dz \right) + \left(\frac{t}{2\pi} \int_{B_1(0)} \frac{\nabla g(x + tz) \cdot z}{\sqrt{1 - |z|^2}} dz \right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2\pi t^2} \int_{B_t(x)} \frac{t^2 h(y)}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi t^2} \int_{B_t(x)} \frac{tg(y)dy}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}} + \frac{1}{\pi t^2} \int_{B_1(0)} \frac{t \nabla g(y) \cdot (y - x) dy}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi t^2} \int_{B_t(x)} \frac{t^2 h(y)}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi t^2} \int_{B_t(x)} \frac{t^2 h(y) + tg(y) + t \nabla g(y) \cdot (y - x) dy}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}} \right),
 \end{aligned}$$

expressão conhecida como *fórmula de Poisson* para a solução do problema (6.5) no caso $n = 2$.

Observação 6.4 As soluções do problema (6.5) para dimensões maiores que 3 segue os métodos aqui apresentados. Veja Evans [3] para detalhes. $\triangleleft$

6.5 O Problema Não Homogêneo

Agora vamos abordar o problema não homogêneo

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= g & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \\ u_t &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (6.15)$$

Nosso tratamento deste problema utilizará o Princípio de Duhamel, já utilizado na solução do problema não homogêneo da onda. Assim, definimos $u = u(x, t; s)$ como a solução da família de problemas no parâmetro s :

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t; s) - \Delta u(x, t; s) &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times (s, \infty), \\ u(x, t; s) &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \\ u_t(x, t; s) &= f(x, t; s) & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = s\}. \end{cases} \quad (6.16)$$

Definindo

$$u(x, t) = \int_0^t u(x, t; s) ds, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \quad (6.17)$$

o Princípio de Duhamel garante que essa é a solução de (6.15).

Teorema 6.5 *Suponhamos que $n \geq 2$. Seja $f : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ suficientemente regular.⁴ Então $u(x, t)$ dado por (6.17) satisfaz:*

- (i) $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$;
- (ii) $u_{tt} - \Delta u = f$ em $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$;
- (iii) $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x, t) = 0$ e $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u_t(x, t) = 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Não provaremos (i) – veja Evans [3].

Decorre da regra de Leibniz que

$$u_t(x, t) = u(x, t; t) + \int_0^t u_t(x, t; s) ds = \int_0^t u_t(x, t; s) ds.$$

Assim

$$u_{tt}(x, t) = u_t(x, t; t) + \int_0^t u_{tt}(x, t; s) ds = f(x, t) + \int_0^t u_{tt}(x, t; s) ds.$$

Uma vez que

$$\Delta u(x, t) = \int_0^t \Delta u(x, t; s) ds,$$

vemos que

$$u_{tt} - \Delta u = f(x, t) + \int_0^t [u_{tt}(x, t; s) - \Delta u(x, t; s)] ds = f(x, t).$$

As afirmações em (iii) decorrem imediatamente das expressões de u e u_t . □

6.6 Métodos de Energia

Teorema 6.6 (Unicidade para a equação da onda)

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado, com ∂U suave. Então o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= f, & \text{em } U_T, \\ u &= g, & \text{em } \Gamma_T \\ u_t &= h, & \text{em } U \times t = 0 \end{cases} \quad (6.18)$$

possui no máximo uma solução $u \in C^2(\bar{U}_T)$.

⁴A regularidade de f depende da dimensão n . Veja Evans [3].

Demonstração: Suponhamos que $u, v \in C^2(\bar{U}_T)$ sejam soluções do problema. Considere $w = u - v$, que é solução do problema

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w = 0, & \text{em } U_T, \\ w = 0, & \text{em } \Gamma_T \\ w_t = 0, & \text{em } U \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Defina então a “energia”

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (w_t^2(x, t) + |\nabla w(x, t)|^2) dx.$$

Derivando, obtemos

$$\begin{aligned} e'(t) &= \int_{\Omega} (w_{tt} w_t + \nabla w \cdot \nabla w_t) dx \\ &= \int_{\Omega} w_t (w_{tt} - \Delta w) dx = 0, \end{aligned}$$

pois

$$\int_{\partial U} w_t \frac{dw}{dv} = 0,$$

uma vez que $w \equiv 0$ em $\partial U \times [0, T]$ e, portanto, $w_t = 0$ em $\partial U \times [0, T]$.

Assim, temos que $e(t)$ é constante, ou seja, $e(t) = e(0) = 0$. Isso implica que $w_t \equiv 0$ e $\nabla w \equiv 0$. Concluimos que w é constante e só podemos ter $w \equiv 0$, pois $w = 0$ em Γ_T . $\square$

Agora passemos a examinar o domínio de dependência das soluções da equação da onda em todo o $\mathbb{R}^n$. Assim, suponhamos que $u \in C^2$ seja solução de

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty).$$

Fixe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $t_0 > 0$ e considere o cone

$$C_{x_0 t_0} = \{(x, t) : |x - x_0| \leq t_0 - t, 0 \leq t \leq t_0\}$$

e também a bola $B_{t_0-t}(x_0)$.

Figura

Teorema 6.7 Se $u \equiv u_t \equiv 0$ em $B_{t_0-t}(x_0)$, então $u \equiv 0$ em $C_{x_0 t_0}$.

Demonstração: Considere

$$\begin{aligned} e(t) &= \frac{1}{2} \int_{B_{t_0-t}(x_0)} (u_t^2(x, t) + |\nabla u(x, t)|^2) dx, \quad 0 \leq t \leq t_0, \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{t_0-t} \int_{\partial B_s(x_0)} (u_t^2(x, s) + |\nabla u(x, s)|^2) dS(x) ds \end{aligned}$$

Então temos

$$\begin{aligned}
 e'(t) &= -\frac{1}{2} \int_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dS(x) + \frac{1}{2} \int_{B_{t_0-t}(x_0)} (u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla u_t) dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dS(x) + \int_{B_{t_0-t}(x_0)} w_t (w_{tt} - \Delta w) dx \\
 &\quad + \int_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} u_t \frac{du}{dv} dS(x) \\
 &= \int_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} \left(u_t \frac{du}{dv} - \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right) dS(x)
 \end{aligned}$$

Mas, de acordo com a desigualdade de Cauchy-Schwarz⁵

$$\left| u_t \frac{du}{dv} \right| = |u_t (\nabla u \cdot \nu)| \leq |u_t| |\nabla u| \leq \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} |\nabla u|^2.$$

Assim, concluímos que

$$e'(t) \leq 0.$$

Em particular, $e(t) \leq e(0) = 0$ para todo $0 \leq t \leq t_0$. Portanto, $u_t \equiv 0$ e $\nabla u \equiv 0$. Assim u é constante no cone $C_{x_0 t_0}$. Como $u \equiv 0$ em $B_{t_0-t}(x_0)$, temos $u \equiv 0$ em $C_{x_0 t_0}$. $\square$

6.7 Exercícios

1. Deduza, do Princípio de Duhamel, as fórmulas

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-s}^{x+s} f(y, t-s) dy ds$$

e

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{B(x,t)} \frac{f(y, t - |y-x|)}{|y-x|} dy$$

para as soluções do problema de Cauchy para a equação da onda não homogênea com dados iniciais nulos em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

2. Seja $u(x, t)$ a solução do problema de Cauchy para a equação da onda em $\mathbb{R}^3$ com dados iniciais suaves e com suportes compactos. Mostre que existe uma constante C tal que

$$|u(x, t)| \leq \frac{C}{t}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \text{ e } t > 0.$$

⁵Veja a demonstração do Teorema 4.40.

3. Seja $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ a solução do problema de Cauchy para a equação da onda unidimensional com posição inicial $u(x, 0) \equiv 0$ e $u_t(x, 0) = h(x)$, em que $h \in C^1(\mathbb{R})$ é uma função que se anula somente em a , com $-1 \leq a \leq 1$.

- (i) Mostre que u não possui pontos críticos em $\mathbb{R} \times (0, \infty)$;
(ii) mostre que o máximo de u no triângulo característico

$$T = \{u(x, t) : t - 1 \leq x \leq 1 - t, \ 0 \leq t \leq 1\}$$

é um dos valores

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 h(x) dx; \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^a h(x) dx; \quad \frac{1}{2} \int_a^1 h(x) dx.$$

Solução: Sabemos que

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(s) ds.$$

- (a) Suponha que (x_0, t_0) com $t_0 > 0$ seja um ponto crítico de u . Então,

$$u_t(x_0, t_0) = \frac{h(x_0 + t_0) + h(x_0 - t_0)}{2} = 0$$

e

$$u_x(x_0, t_0) = \frac{h(x_0 + t_0) - h(x_0 - t_0)}{2} = 0.$$

Concluimos que $h(x_0 + t_0) = h(x_0 - t_0) = 0$ e, como a é a única raiz de h devemos ter $x_0 + t_0 = 0 = x_0 - t_0$, ou seja, $t_0 = 0$ o que é uma contradição. Portanto, u não possui pontos críticos em $(-\infty, \infty) \times (0, \infty)$.

- (b) Do item anterior segue que o máximo de u em Ω é assumido na fronteira $\partial\Omega$, constituída de três retas:

$$\Gamma_1 : (t - 1, t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\Gamma_2 : (1 - t, t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\Gamma_3 : (x, 0) \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Uma vez que sobre Γ_1 temos $\frac{d}{dt}u(t - 1, t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{-1}^{2t-1} h(s) ds = h(2t - 1)$, segue que o único ponto críticos de u sobre Γ_1 ocorre se $2t - 1 = a$, ou seja, se $t = \frac{a+1}{2}$. Nesse caso, o valor de u será $u(\frac{a-1}{2}, \frac{a+1}{2}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^a h(s) ds$. Assim, o máximo da função u restrita Γ_1 será o maior entre os valores $\frac{1}{2} \int_{-1}^a h(s) ds$, $u(-1, 0) = 0$ e $u(0, 1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 h(s) ds$.

Analogamente, o único ponto crítico de u sobre Γ_2 ocorre se $1 - 2t = a$ e o valor de u nesse ponto é $u(\frac{1+a}{2}, \frac{1-a}{2}) = \frac{1}{2} \int_a^1 h(s) ds$. Portanto, o máximo da função u restrita Γ_2 será o maior entre os valores $\frac{1}{2} \int_a^1 h(s) ds$, $u(1, 0) = 0$ e $u(0, 1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 h(s) ds$.

Por último, como $u = 0$ sobre Γ_3 segue que o valor máximo u em Ω é um dos valores $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 h(x) dx$, $\frac{1}{2} \int_{-1}^a h(x) dx$, $\frac{1}{2} \int_a^1 h(x) dx$ e 0.

4. Seja $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ solução do problema de Cauchy para a equação da onda unidimensional $u_{tt} = u_{xx}$ com $u(x, 0) = g(x)$ e $u_t(x, 0) = h(x)$. Suponha que f e g tenham suportes compactos. Defina as energias cinética e potencial por

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x, t) dx \text{ e } P(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x, t) dx,$$

respectivamente.

- (a) Mostre que a energia total $E(t) = K(t) + P(t)$ é uma função constante;
- (b) Mostre que $K(t) = P(t)$ para todo t suficientemente grande.
5. (Falta a velocidade inicial! $u(x, 0) = ?$ e $u_t(x, 0) = u'(x, 0) = ?$.) Utiliza o método da energia para mostrar a unicidade de soluções suaves do problema

$$\begin{cases} u_{tt} - h(t)\Delta u &= f(x, t), & \text{em } (x, t) \in U_T, \\ u(x, t) &= g_1(x, t) & \text{em } \Gamma_T, \\ u_t(x, t) &= g_2(x, t), & \text{em } U \times \{t = 0\} \end{cases}$$

sendo g_1, g_2 uma funções suaves em seus domínios e h uma função diferenciável em U_T tal que, para todo $t \in [0, T]$, $h(t) \geq k > 0$ e $|h'(t)| \leq M$.

Solução: Se u, v forem soluções do problema, então $w = u - v$ satisfaz a equação dada com $f \equiv 0$, $g \equiv 0$ e $0 = w = w_t$ em Γ_T . Seja

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [w_t^2 + h(t)|\nabla w|^2] dx.$$

Então

$$E'(t) = \int_{\Omega} (w_t w_{tt} + h(t) \nabla w_t \cdot \nabla w dx) + \int_{\Omega} \frac{h'(t)}{2} |\nabla w|^2 dx.$$

Aplicando a identidade de Green,

$$E'(t) = \int_{\Omega} w_t w_{tt} dx + h(t) \left[\int_{\partial U} w_t \frac{\partial w}{\partial \nu} dS - \int_{\Omega} w_t \Delta w \right] + \int_{\Omega} \frac{h'(t)}{2} |\nabla w|^2 dx.$$

Como $w_t \equiv 0$ em ∂U , temos

$$E'(t) = \int_{\Omega} w_t (w_{tt} - h(t) \Delta w) dx + \int_{\Omega} \frac{h'(t)}{2} |\nabla w|^2 dx.$$

Como $w_{tt} - h(t)\Delta w = 0$, concluímos que

$$\begin{aligned}
 E'(t) &= \frac{h'(t)}{2} \int_U |\nabla w|^2 \\
 &\leq \left| \frac{h'(t)}{2} \int_U |\nabla w|^2 \right| \\
 &= \frac{|h'(t)|}{h(t)} \left(\frac{h(t)}{2} \int_\Omega |\nabla w|^2 \right) \\
 &= \frac{|h'(t)|}{h(t)} \left[\frac{1}{2} \int_\Omega (w_t^2 + h(t)|\nabla w|^2) dx - \frac{1}{2} \int_\Omega w_t^2 dx \right] \\
 &= \frac{|h'(t)|}{h(t)} E(t) - \frac{|h'(t)|}{2h(t)} \int_\Omega |w_t|^2 dx \\
 &\leq \frac{|h'(t)|}{h(t)} E(t) \\
 &\leq \frac{M}{k} E(t).
 \end{aligned}$$

Integrando essa desigualdade obtemos, para $0 < s < t$

$$E(t) \leq E(s)e^{M(t-s)/k}$$

e, como $E(0) = 0$, vem $E(t) \leq 0$.

Isso implica que $w_t \equiv 0$ e $\nabla w \equiv 0$. Concluímos que w é constante e só podemos ter $w \equiv 0$, pois $w = 0$ em Γ_T .

Referências Bibliográficas

- [1] William E. Boyce e Richard DiPrima, Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valor de Contorno, XXXXXXXXXXXXXXXX
- [2] Hamilton P. Bueno: Álgebra Linear - Um Segundo Curso, SBM, Rio de Janeiro, 2005.
- [3] Lawrence C. Evans: Partial Differential Equations, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.
- [4] Gilbarg and N.S. Trudinger:
- [5] Valéria M Iório: EDP, Um Curso de Graduação, IMPA, Rio de Janeiro, 1991.
- [6] Fritz John: Partial Differential Equations, 3rd. Edition, Springer, New York, 1978.
- [7] Elon L. Lima: Curso de Análise, volume 2, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1981.
- [8] J. David Logan: An Introduction do Nonlinear Partial Differential Equations, Wiley-Interscience, New York, 1994.
- [9] Joel Smoller: Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, Springer, New York, 1983.
- [10] Jorge Sotomayor: Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [11] Erich Zauderer: Partial Differential Equations of Applied Mathematics, Wiley-Interscience, New York, 1983.