

Capítulo 1

Estruturas

Este capítulo fornecerá as definições de espaços métricos e normados. Tais estruturas, que fundamentam o estudo da Análise Funcional, não serão o objeto principal de nosso estudo. As definições apresentadas serão aquelas que serão utilizadas no decorrer deste livro. Alguns conceitos não definidos poderão aparecer nos exercícios. Dando um exemplo: o conceito de conjunto conexo não está definido no texto, mas aparece em exercícios.

Como resultado fundamental deste capítulo ressaltamos a idéia de *completamento* de um espaço métrico. Construiremos a teoria de integração a partir deste resultado .

1.1 Espaços Métricos

Definição 1.1.1 Métrica

Um espaço métrico é um par (X, d) onde X é um conjunto e d é uma métrica, isto é, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz às seguintes propriedades:

- (i) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$.
- (iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Muitas vezes cometemos um abuso de linguagem e chamamos X de espaço métrico, ficando subentendida a métrica d nele definida. Se $A \subset X$, podemos considerar A um espaço métrico, com a métrica de X ; quando isto ocorre, dizemos que A está munido da métrica induzida pela métrica de X .

Notamos também que se (X, d_X) e (Y, d_Y) forem espaços métricos, então

$$X \times Y := \{\{x, y\}; x \in X, y \in Y\}$$

torna-se um espaço métrico se definirmos

$$d(\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}) := d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2).$$

Outras métricas também são usuais no espaço $X \times Y$ (veja exercício 4).

Definição 1.1.2 Distância entre dois conjuntos

Seja (X, d) um espaço métrico. Dados dois subconjuntos quaisquer A_1, A_2 , definimos a distância entre A_1 e A_2 por

$$\text{dist}(A_1, A_2) := \inf\{d(x, y); x \in A_1, y \in A_2\},$$

com a convenção $\text{dist}(A_1, \emptyset) = \infty$ se $A_2 = \emptyset$. Em particular, se $x \in X$, definimos

$$\text{dist}(x, A) := \text{dist}(\{x\}, A), \text{ onde } A \subset X.$$

Definimos também a vizinhança de raio $r > 0$ do subconjunto $A \subset X$ por

$$B_r(A) := \{x \in X; \text{dist}(x, A) < r\};$$

$B_r(x) := B_r(\{x\})$ chama-se bola aberta de centro x e raio $r > 0$. O diâmetro do subconjunto A é definido por

$$\text{diam}(A) := \sup\{d(x, y); x, y \in A\}.$$

A é limitado quando $\text{diam}(A) < \infty$.

Definição 1.1.3 Topologia de Espaços Métricos

Seja (X, d) um espaço métrico. Dado $A \subset X$, definimos o interior de A por

$$\text{int}(A) := \{x \in X; \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subset A\}$$

e o fecho de A por

$$\overline{A} := \{x \in X; B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset \forall \epsilon > 0\}.$$

Um conjunto $A \subset X$ é aberto se $\text{int}(A) = A$. Um conjunto A é fechado se $A = \overline{A}$. A fronteira do conjunto A é definida por

$$\partial A := \overline{A} \setminus \text{int}(A).$$

Um subconjunto $A \subset X$ é denso em X caso $\overline{A} = X$. O espaço métrico X chama-se separável se possuir um subconjunto enumerável denso. Um subconjunto $A \subset X$ é separável se o espaço métrico (A, d) for separável (métrica induzida).

É possível generalizar as noções acima e definir um espaço topológico, do qual um espaço métrico é um caso particular. Tais estruturas, bastante gerais, não serão objeto de nosso estudo.

Lema 1.1.4 *Seja X um espaço métrico separável. Então todo subconjunto de X é separável.*

Demonstração:

Suponhamos que $A \subset X$ não seja vazio e que $\{x_k; k \in \mathbb{N}\}$ seja denso em X . Escolha $a_{kj} \in A$ tal que

$$d(x_k, a_{kj}) \leq \text{dist}(x_k, A) + \frac{1}{j}.$$

Dados $a \in A$ e $\epsilon > 0$, existe x_{k_ϵ} tal que $d(a, x_{k_\epsilon}) \leq \epsilon/3$. Então, para j suficientemente grande, vale:

$$\begin{aligned} d(a, a_{k_\epsilon j}) &\leq d(a, x_{k_\epsilon}) + d(x_{k_\epsilon}, a_{k_\epsilon j}) \\ &\leq 2d(x_{k_\epsilon}, a_{k_\epsilon j}) + \frac{1}{j} \leq \epsilon, \end{aligned}$$

mostrando que $\{a_{kj}; k, j \in \mathbb{N}\}$ é denso em A .

□

Definição 1.1.5 Espaços Métricos Completos

Uma sequência de pontos (x_n) num espaço métrico X é uma sequência de Cauchy caso $d(x_i, x_j) \rightarrow 0$ quando $i, j \rightarrow \infty$. Dizemos que x é o limite de (x_k) , denotado

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x,$$

caso $d(x_k, x) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ (observe que o limite, quando existir, é único). Um espaço métrico (X, d) é completo se toda sequência de Cauchy em X tiver um limite $x \in X$. Um ponto de acumulação de uma sequência (x_k) é um ponto que é o limite de uma subsequência (x_{k_i}) (isto é, $k_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$).

Definição 1.1.6 Funções Contínuas

Sejam X, Y espaços métricos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Dizemos que f é limitada se $f(X)$ for um conjunto limitado.

Dizemos que f é contínua no ponto $x \in X$ se

$$\lim_{j \rightarrow \infty} d_X(x, x_j) = 0 \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} d_Y(f(x), f(x_j)) = 0,$$

onde d_X e d_Y são as métricas em X e Y , respectivamente. Dizemos que f é contínua, se ela for contínua em todos os pontos de X .

Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é Lipschitz-contínua se existir $C > 0$ tal que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq C d_X(x, y).$$

Definição 1.1.7 Completamento

Seja (X, d) um espaço métrico. Definimos o completamento de X como um par $(\tilde{X}, \phi)$ consistindo de um espaço métrico completo $(\tilde{X}, \tilde{d})$ e uma aplicação

$$\phi : X \rightarrow \tilde{X},$$

tal que $\phi(X)$ seja denso em $\tilde{X}$, ϕ seja injetiva e preserve distâncias, isto é,

$$\tilde{d}(\phi(x), \phi(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Teorema 1.1.8 *Todo espaço métrico (X, d) possui um completamento.*

Heuristicamente, nada é mais natural do que pensar que o completamento de X será o próprio espaço X unido ao conjunto dos pontos limites das sequências de Cauchy. O problema é que estes pontos limites ainda não estão definidos! Para definí-los, temos que considerar uma sequência de Cauchy como algo intrinsecamente ligado ao “ponto” para o qual ela vai convergir. Mas isto coloca um outro problema, de fácil resolução: podemos ter duas sequências convergindo para o mesmo “ponto”!; igualamos estas sequências ao definirmos uma relação de equivalência: duas sequências pertencem a uma mesma classe se seus elementos se aproximam arbitrariamente - isto é, se convergem para o mesmo “ponto”. Tal procedimento permite pensar em cada “ponto” como uma sequência de Cauchy, e vice-versa. É o que faremos na demonstração seguinte.

Demonstração:

Defina

$$X^* := \{\xi = (x_j); (x_j) \text{ é uma sequência de Cauchy em } X\}.$$

No conjunto X^* definimos a seguinte relação de equivalência:

$$(x_j) \sim (y_j) \Leftrightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} d(x_j, y_j) = 0.$$

(No contexto de análise matemática é usual denotar a relação $\sim$ por $=$). Consideremos o espaço quociente $\tilde{X} := X^* / \sim$. Em outras palavras, considere a partição de X^* gerada por esta relação de equivalência. Denotaremos $[\xi]$ a classe de equivalência de $\xi = (x_k)$. Assim, se (y_k) e (z_k) são dois representantes da classe $[\xi]$, então $\lim_{k \rightarrow \infty} d(y_k, z_k) = 0$. O conjunto $\tilde{X}$ é o conjunto das classes de equivalência (disjuntas) de X^* .

Definimos

$$\tilde{d}([(x_j)], [(y_j)]) := \lim_{j \rightarrow \infty} d(x_j, y_j).$$

Temos que $\tilde{d}$ está bem definido e que $(\tilde{X}, \tilde{d})$ é um espaço métrico. (Mostre !). Seja $\phi : X \rightarrow \tilde{X}$ definida por $\phi(x) = [\xi]$, onde $[\xi] = [(x)]$, a sequência com todos os termos iguais a x . É claro que ϕ preserva distâncias. Além disto, se $[\xi]$ é a classe de equivalência de $\xi = (x_k)$, então

$$[\xi] = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n).$$

Isto mostra que $\phi(X)$ é denso em $\tilde{X}$.

Resta provar que $\tilde{X}$ é completo. Para isto, considere uma sequência de Cauchy $([\xi]_n)$ de elementos de $\tilde{X}$. (Cada elemento $[\xi]_n$ é representado por uma sequência de Cauchy (x_i^n) de elementos de X). Para cada n existe $x_n \in X$ tal que $\tilde{d}([\xi]_n, \phi(x_n)) < 1/n$, pois $\phi(X)$ é denso em $\tilde{X}$. Afirmamos que a sequência (x_n) assim formada é uma sequência de Cauchy em X . De fato, temos

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= \tilde{d}(\phi(x_n), \phi(x_m)) \\ &\leq \tilde{d}(\phi(x_n), [\xi]_n) + \tilde{d}([\xi]_n, [\xi]_m) + \tilde{d}([\xi]_m, \phi(x_m)), \end{aligned}$$

provando que (x_n) é uma sequência de Cauchy em X . Seja $\xi = (x_n)$. Afirmamos que $([\xi]_n)$ converge a $[\xi]$. De fato, dado $\epsilon > 0$, temos

$$\tilde{d}([\xi]_n, [\xi]) \leq \tilde{d}([\xi]_n, \phi(x_n)) + \tilde{d}(\phi(x_n), [\xi]) < 2\epsilon$$

para n suficientemente grande. Isto mostra que $\tilde{X}$ é completo. □

1.2 Espaços Normados

Até o momento, nenhuma hipótese sobre o conjunto X foi feita. Qualquer conjunto X pode se tornar um espaço métrico, nele definindo-se, por exemplo, a métrica: $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$, $d(x, x) = 0$. Entretanto, exemplos importantes são aqueles em que o conjunto considerado é um espaço vetorial. A estrutura que definiremos a seguir é de importância fundamental:

Definição 1.2.1 Espaços Normados

Seja X um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, onde consideraremos apenas os casos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Uma função $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se uma norma em X se satisfizer às seguintes propriedades:

$$(i) \quad \|x\| \geq 0 \text{ e } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$(ii) \quad \text{Para todo } \alpha \in \mathbb{K}, \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|.$$

$$(iii) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Cada norma induz uma métrica em X ao se definir

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Um espaço normado que for completo com relação à métrica induzida por sua norma chama-se espaço de Banach.

Note que a definição acima estabelece um vínculo entre as operações do espaço vetorial e a estrutura topológica do espaço métrico: decorre imediatamente dos axiomas (ii) e (iii) de uma norma que a soma e a multiplicação por escalar são funções contínuas. Podemos generalizar a noção acima:

Definição 1.2.2 *Um espaço vetorial métrico é um espaço vetorial no qual está definida uma métrica d de modo que as operações de soma e multiplicação por escalar são contínuas.*

Observe que a continuidade das operações de soma e multiplicação por escalar não são automáticas, como no caso de um espaço vetorial normado. Para a definição de um espaço vetorial topológico, veja [6].

Definição 1.2.3 *Sejam X, Z espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $\phi : X \rightarrow Z$ é linear se $\phi(\alpha x + y) = \alpha\phi(x) + \phi(y)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in X$.*

Definição 1.2.4 *Seja X um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma função $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ é uma forma sesquilinear se satisfizer:*

$$(i) \quad \text{Para cada } y \text{ fixo, } (\alpha x_1 + x_2, y) = \alpha(x_1, y) + (x_2, y)$$

$$(ii) \quad \text{Para cada } x \text{ fixo, } (x, \alpha y_1 + y_2) = \bar{\alpha}(x, y_1) + (x, y_2)$$

Uma forma sesquilinear chama-se hermitiana (ou simétrica) caso

$$(iii) \quad (x, y) = \overline{(y, x)}.$$

Uma forma hermitiana chama-se positiva semidefinida se

$$(iv) \quad (x, x) \geq 0 \text{ para todo } x \in X,$$

e positiva definida se, adicionalmente,

$$(v) \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Uma forma hermitiana positiva definida chama-se produto escalar e o par

$$(X, (\cdot, \cdot))$$

um espaço pré-Hilbert. Todo espaço pré-Hilbert é um espaço normado ao se definir

$$\|x\| := (x, x)^{1/2}.$$

Se X for completo com relação à sua métrica, então ele se chama espaço de Hilbert.

Teorema 1.2.5 *Seja $(\cdot, \cdot)$ uma forma hermitiana positiva semidefinida em X e $\|x\| := (x, x)^{1/2}$. Então vale*

- (i) *Desigualdade de Cauchy-Schwarz:* $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.
- (ii) *Desigualdade Triangular:* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- (iii) *Regra do Paralelograma:* $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Demonstração:

(i) A demonstração que daremos é bem geométrica. Interprete! Se $x = \lambda y$, então $|(x, y)| = |\lambda| (y, y) = |\lambda| \|y\|^2 = \|x\| \|y\|$. Se $x \neq \lambda y$, existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $|(y - \alpha x, x)| = 0$ ($\alpha := (y, x)/\|x\|^2$; $\|x\| = 0$ está incluído no caso anterior). Então

$$0 \leq \|y - \alpha x\|^2 = \|y\|^2 - |\alpha|^2 \|x\|^2 = \|y\|^2 - \frac{|(y, x)|^2}{\|x\|^2},$$

donde obtemos a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

(ii) e (iii): exercícios.

□

1.3 Exercícios

- Seja $A \subset X$, onde X é um espaço métrico. Então $B_r(A)$ é um conjunto aberto, $\forall r > 0$; $B_{r_1}(B_{r_2}(A)) \subset B_{r_1+r_2}(A)$. Se X for um espaço normado, é válida a igualdade. A função $\text{dist}(\cdot, A) : X \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz-contínua com constante $C \leq 1$. Se $X \setminus \overline{A} \neq \emptyset$, então $C = 1$.
- Seja X um espaço métrico e $A \subset X$. Então $\partial B_r(0) = \{x \in X; d(x, 0) = r\}$? $\partial B_\epsilon(A) = \{x \in X; d(x, A) = \epsilon\}$?
- Considere um par (X, d) que satisfaz às duas últimas propriedades de um espaço métrico e também que $d(x, y) \geq 0$. Neste caso, dizemos que d é uma semi-métrica. Defina

$$x \sim y :\Leftrightarrow d(x, y) = 0.$$

Esta é uma relação de equivalência em X e $\tilde{X} := X/\sim$ é tal que $(\tilde{X}, d)$ é um espaço métrico

- Mostre que se (X, d_X) e (Y, d_Y) forem espaços métricos, então $X \times Y$ é um espaço métrico se definirmos:

$$(a) \quad d(\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}) := \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\};$$

$$(b) \quad d(\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}) := [d_X^2(x_1, x_2) + d_Y^2(y_1, y_2)]^{1/2}.$$

- Um subconjunto A de um espaço métrico (X, d) é limitado, se e somente se, existe $c > 0$ tal que $A \subset B_c(x)$, onde $x \in X$.
- Se $A \subset X$, onde X é um espaço métrico, então $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \text{dist}(x, A) = 0$.
- Num espaço métrico vale $A \subset X$ é aberto $\Leftrightarrow A^c := X \setminus A$ for fechado.
- Se (X, d) for um espaço métrico e $A \subset X$, então $X = \text{int}(A) \cup \partial A \cup \text{int}(A^c)$
- Seja X um espaço vetorial. Uma função $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se métrica de Fréchet se satisfizer:

$$(i) \quad \rho(x) \geq 0 \text{ e } \rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$(ii) \quad \rho(x) = \rho(-x).$$

$$(iii) \quad \rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$$

Cada métrica de Fréchet induz uma métrica ao se definir $d(x, y) = \rho(x - y)$. Cada norma é uma métrica de Fréchet.

Seja $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ uma função diferenciável com derivada contínua. Assuma que $\phi(0) = 0$ e que ϕ seja estritamente monótona, com derivada não crescente. Então vale:

$$d \text{ é métrica em } X \Leftrightarrow \phi \circ d \text{ é métrica em } X.$$

Assim,

$$\alpha \rightarrow \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|}$$

é uma métrica de Fréchet sobre $\mathbb{R}$.

10. Defina $\mathbb{K}^\infty := \{x = (x_i); x_i \in \mathbb{K} \forall i\}$. Mostre que $\mathbb{K}^\infty$ é um espaço métrico se definirmos a métrica de Fréchet

$$\rho(x) := \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} \frac{|x_i|}{1 + |x_i|}.$$

Mostre que $\mathbb{K}^\infty$ é completo.

11. Para $x \in \mathbb{K}^\infty$ defina

$$\|x\|_{l^p} := \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p \right)^{1/p}, \text{ caso } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|x\|_{l^\infty} := \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|.$$

Considere então, para $1 \leq p \leq \infty$, os conjuntos

$$l^p(\mathbb{K}) : \{x \in \mathbb{K}^\infty; \|x\|_{l^p} < \infty\}.$$

Mostre que eles são espaços de Banach. $l^p(\mathbb{K})$ é separável?

12. (i) Se (X, d) for completo e $Y \subset X$ for fechado, então (Y, d) também é completo.

(ii) Se $Y \subset X$ for tal que (Y, d) é completo, então Y é um subconjunto fechado de (X, d) .

13. Considere $\mathbb{R}^\infty$. Dê exemplo de uma aplicação linear injetiva, com imagem um subespaço próprio de $\mathbb{R}^\infty$.

14. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto conexo. Mostre que existe uma sequência de pontos $x_n \in D$ que não possui pontos de acumulação em D , mas tal que todo ponto de ∂D seja ponto de acumulação desta sequência.

15. Suponha que X seja um espaço normado. Mostre que $\tilde{X}$ é um espaço vetorial normado. Mostre que o completamento de um espaço normado é dado por uma (única) aplicação linear ϕ . Qual o sentido de único nesta frase? Com isto se pode concluir que $\mathbb{R}$ é único? O mesmo pode ser dito a respeito do completamento de um espaço métrico qualquer?

Capítulo 2

Medida Positiva e Medida Exterior

2.1 Álgebras e Medidas

Definição 2.1.1 Álgebra

Seja X um conjunto não vazio. Uma álgebra em X é uma coleção de subconjuntos $\mathcal{A}$ de X satisfazendo às seguintes condições:

- (A1) $X \in \mathcal{A}$;
- (A2) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$;
- (A3) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c := X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Decorre imediatamente da definição:

- (A4) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$;
- (A5) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$.

De fato, $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ e $A \setminus B = A \cap B^c$.

Definiremos agora medidas positivas. Como queremos que alguns conjuntos tenham medida infinita (por exemplo, a medida de $\mathbb{R}$ deve ser infinita), introduziremos o símbolo ∞ e trabalharemos com o conjunto ordenado $[0, \infty]$, que chamaremos também de intervalo. Definimos:

- (i) $a < \infty, \forall a \in \mathbb{R}$;
- (ii) $\infty + a = a + \infty = \infty, \forall a \in [0, \infty]$;
- (iii) $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$;
- (iv) $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty, \forall a \in (0, \infty]$.

Note que, assim, a soma de uma sequência de elementos em $[0, \infty]$ sempre converge em $[0, \infty]$.

Definição 2.1.2 Medida Positiva numa Álgebra

Uma medida positiva numa álgebra $\mathcal{A}$ é uma função

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$$

satisfazendo às seguintes condições:

(m1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(m2) Dados $A_i \in \mathcal{A}$, disjuntos dois a dois, então

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

Dizemos que $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ é σ -subaditiva se, adicionalmente,

(m3) Se A e A_i estão em $\mathcal{A}$ e $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, então

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Como consequência obtemos

Lema 2.1.3 *Seja μ uma medida numa álgebra $\mathcal{A}$. Então vale:*

(m4) *Monotonicidade: $A, B \in \mathcal{A}$ com $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$;*

Se, adicionalmente, μ for σ -subaditiva, então

(m5) *σ -aditividade: $A_i \in \mathcal{A}$, dois a dois disjuntos tais que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, então*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i);$$

(m6) *Se $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, então*

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A'_i),$$

em que os conjuntos A'_i estão em $\mathcal{A}$ e são dois a dois disjuntos.

Demonstração:

(m4) Como $B \setminus A \in \mathcal{A}$, temos

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

(m5) A relação $\leq$ decorre de (M3). De acordo com (m4), temos

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \text{ para todo } n.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, concluímos a demonstração.

(m6) Basta notar que

$$A = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) \cup \cdots \cup (A_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i) \cup \cdots.$$

(Prove esta igualdade!) Sendo $A'_1 := A_1$ e $A_i := A_{i+1} \setminus \bigcup_{j=1}^i A_j$ para $i > 1$, temos $A'_i \in \mathcal{A}$. Como os A'_i são disjuntos (prove!), o resultado decorre de (m5). □

2.2 Um exemplo fundamental

Seja $X = \mathbb{R}^n$. Um retângulo elementar $R \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto da forma

$$R := \{x \in \mathbb{R}^n; a_i \leq x_i < b_i \text{ para } i = 1, \dots, n\},$$

em que $-\infty \leq a_i < b_i \leq \infty$. Assim, no caso particular $n = 1$, $[a, b]$ é um retângulo (intervalo) elementar. Defina $\mathcal{A}$ consistindo do conjunto $\emptyset$ e de todas uniões **finitas** de retângulos elementares R **disjuntos**. Então $\mathcal{A}$ é uma álgebra de subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ (mostre!), que chamaremos **álgebra de Lebesgue** em $\mathbb{R}^n$.

Defina $\mu(\emptyset) := 0$ e

$$\mu(R) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i),$$

em que $\mu(R) = \infty$ caso algum $a_i = -\infty$ ou algum $b_i = \infty$.

Se $A \in \mathcal{A}$, então A é a união finita de retângulos elementares disjuntos R_i ($1 \leq i \leq m$); definimos

$$\mu(A) := \sum_{i=1}^m \mu(R_i).$$

É fácil ver que se $A_i \in \mathcal{A}$ forem disjuntos dois a dois ($1 \leq i \leq l$), então

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^l A_i\right) = \sum_{i=1}^l \mu(A_i).$$

(Mostre!) Assim, μ é uma medida em $\mathcal{A}$.

Afirmação: μ é uma medida σ -aditiva na álgebra $\mathcal{A}$.

O método da demonstração será bastante empregado em medida e integração. Ele consiste em reduzir o problema dado a um problema bem mais simples, cuja demonstração resulta na demonstração do resultado. Numa primeira leitura da demonstração abaixo talvez seja recomendável considerá-la apenas no caso $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$, quer dizer, $n = 1$.

Demonstração (von Neumann):

Para provar o afirmado basta mostrarmos, de acordo com o Lema 2.1.3, que μ é σ -subaditiva. Seja $A \in \mathcal{A}$. Então

$$A = \bigcup_{j=1}^m Q_j,$$

em que cada $Q_j = [\alpha^j, \beta^j)$ é um retângulo semiaberto.

Consideremos conjuntos $A_k \in \mathcal{A}$ tais que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

De acordo com o Lema 2.1.3, podemos supor os conjuntos A_k disjuntos; também, sem perda de generalidade, podemos supor cada A_k como sendo igual a um retângulo semiaberto $R_k = [a^k, b^k) \subset \mathbb{R}^n$ (justifique!).

Suponhamos que algum dos Q_j tenha medida infinita. Então $\mu(A) = \infty$. Por outro lado, como os A_i cobrem A , devemos ter $\sum \mu(R_i) = \infty$ (veja exercício 2, abaixo). Podemos, portanto, supor que cada Q_j é limitado.

Para $\delta > 0$ escolhido adequadamente, definimos o conjunto

$$A(\delta) := \bigcup_{j=1}^m Q_j(\delta) \subset A,$$

em que

$$Q_j(\delta) = [\alpha^j + \delta, \beta^j - \delta) := \{x \in \mathbb{R}^n; \alpha_i^j + \delta \leq x_i < \beta_i^j - \delta \ (1 \leq i \leq n)\}.$$

Considere então o compacto $\overline{A(\delta)}$. Para $\epsilon > 0$ escolhido adequadamente (quais as restrições sobre a escolha de ϵ ?), a união dos conjuntos

$$\mathbb{R}^n \supset (a_\epsilon^k, b_\epsilon^k) := \{x \in \mathbb{R}^n; a_i^k - \epsilon(b_i^k - a_i^k) < x_i < a_i^k + \epsilon(b_i^k - a_i^k)\}$$

forma uma cobertura aberta do compacto $\overline{A(\delta)}$. Passando a uma subcobertura finita, temos, de acordo com o Lema 2.1.3 ,

$$\begin{aligned} \mu(A(\delta)) &\leq \sum_{k=1}^l \mu([a_\epsilon^k, b_\epsilon^k)) \\ &\leq \sum_{k=1}^l (1 + 2\epsilon)^n \mu(R_k) \\ &\leq (1 + 2\epsilon)^n \sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k) \end{aligned}$$

Tomando, sucessivamente, os limites com $\epsilon \rightarrow 0$ e $\delta \rightarrow 0$, provamos o afirmado.

2.3 Medida Exterior

Definição 2.3.1 Medida Exterior

Seja $\mathcal{P}$ a coleção de todos os subconjuntos de X . Uma medida exterior μ^* em $\mathcal{P}$ é uma aplicação $\mu^* : \mathcal{P} \rightarrow [0, \infty]$ tal que:

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (ii) (Monotonicidade) Se $A \subset B$ então $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
- (iii) (σ -subaditividade) Se $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, então

$$\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Definição 2.3.2 Medida Nula

Dizemos que um subconjunto $N \subset X$ tem medida nula se $\mu^*(N) = 0$. Uma afirmação vale em quase todo ponto (qtp) se ela for válida a menos de um conjunto de medida nula.

Teorema 2.3.3 *Seja μ uma medida σ -aditiva numa álgebra $\mathcal{A}$ em X . Para todo $Y \subset X$, defina:*

$$\mu^*(Y) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

o ínfimo sendo tomado sob todas as sequências (A_i) de elementos de $\mathcal{A}$ cuja união contém Y . Então $\mu^* : \mathcal{P} \rightarrow [0, \infty]$ é uma medida exterior que estende μ , chamada medida exterior induzida por μ . Além disto,

$$\mu^*(Y) = \inf \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i); Y \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i; A_i \in \mathcal{A}, A_i \subset A_{i+1} \right\}.$$

Demonstração:

A subaditividade de μ nos diz que, se A e A_i ($1 \leq i < \infty$) estão em $\mathcal{A}$, então

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Decorre daí que $\mu(A) \leq \mu^*(A)$. Por outro lado, $A = A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$, donde

$$\mu^*(A) \leq \mu(A).$$

Isto mostra que $\mu^*(A) = \mu(A)$, para todo $A \in \mathcal{A}$. Em particular, $\mu(\emptyset) = 0$.

A monotonicidade de μ^* é clara. Para completar a demonstração de que μ^* é uma medida exterior, basta mostrar a σ -subaditividade de μ^* . Para fazê-lo, usaremos um recurso frequentemente empregado nas demonstrações de medida. Suponhamos que $Y \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, em que os A_i estão em $\mathcal{A}$. Se

$\mu^*(A_i) = \infty$ para algum i , então a σ -subaditividade é trivial. Caso contrário, dado $\epsilon > 0$, existe, para cada i , uma sequência de conjuntos $A_{ij} \in \mathcal{A}$ ($1 \leq j \leq \infty$) tais que $A_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{ij}) \leq \mu^*(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i}$$

(não se intimide! Estamos usando apenas a definição de $\inf$!). Então

$$\mu^*(Y) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \mu(A_{ij}) < \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, concluímos o afirmado.

Finalmente, a última afirmação é o enunciado do exercício 1, abaixo.

□

2.4 Medidas e σ -álgebras

Definiremos agora σ -álgebras e medidas. A construção da medida de Lebesgue será feita no próximo capítulo.

Definição 2.4.1 σ -álgebra

Uma σ -álgebra $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X é uma álgebra em que a seguinte propriedade adicional é satisfeita:

$$(A6) \quad A_i \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}.$$

Os elementos de uma σ -álgebra são chamados conjuntos mensuráveis. Um conjunto X com uma σ -álgebra $\mathcal{M}$ chama-se espaço mensurável.

Assim, uma σ -álgebra é uma coleção de subconjuntos de X que satisfaz aos axiomas (A1), (A2) e (A6), os demais sendo consequências destes; uma outra consequência é:

$$(A7) \quad A_i \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M},$$

pois $\bigcap A_i = \left(\bigcup A_i^c \right)^c$.

Lema 2.4.2 *Seja $\{\mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ uma família qualquer de σ -álgebras em $X \neq \emptyset$. A interseção desta família de σ -álgebras,*

$$\bigcap_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{M}_\alpha$$

é uma σ -álgebra. Em particular, seja $\{F_\beta\}_{\beta \in \Gamma'}$ uma família qualquer de subconjuntos de X . Então existe a menor σ -álgebra que contém a família $\{F_\beta\}$.

Demonstração:

A afirmativa sobre a interseção de σ -álgebras decorre de propriedades básicas de conjuntos. A existência de uma σ -álgebra que contém uma coleção qualquer de subconjuntos dados decorre, então, de $\mathcal{P}$, o conjunto das partes de X , ser uma σ -álgebra. $\square$

Definição 2.4.3 Medida Positiva

Seja $\mathcal{M}$ uma σ -álgebra em X . Uma medida positiva em $\mathcal{M}$ é uma aplicação

$$\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$$

que satisfaz às seguintes propriedades

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(M2) (σ -aditividade) Se $A_n \in \mathcal{M}$ forem dois a dois disjuntos, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n);$$

(M3) (completamento) Se $A \in \mathcal{M}$ satisfaz $\mu(A) = 0$, então

$$B \subset A \Rightarrow B \in \mathcal{M}.$$

Chamamos $\mu(A)$ a medida do conjunto $A \in \mathcal{M}$, ou μ -medida, quando estivermos trabalhando com várias medidas na σ -álgebra $\mathcal{M}$.

Uma σ -álgebra $\mathcal{M}$ com uma medida positiva definida em $\mathcal{M}$ chama-se espaço de medida. Denotaremos tal espaço por

$$(X, \mathcal{M}, \mu).$$

Entretanto, muitas vezes falaremos apenas de medida μ , ficando subentendida a σ -álgebra $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X .

Dizemos que μ é uma medida σ -finita se, adicionalmente, valer

(M4) Existem $A_n \in \mathcal{M}$ com $\mu(A_n) < \infty$ para todo n tais que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Observação: As condições (M1) e (M2) são as mesmas condições da definição de medida positiva em uma álgebra $\mathcal{A}$, a hipótese $\cup A_n \in \mathcal{A}$ tornando-se desnecessária por estarmos em uma σ -álgebra. A condição (M3) muitas vezes não aparece na definição de uma medida. Note também que as propriedades (m4) e (m6) decorrem imediatamente de (M2), como antes.

Demonstraremos posteriormente outras propriedades de medidas positivas. Além disto, veremos que medidas podem ser identificadas com integrais.

Exemplo 2.4.4

1. (**A medida de contagem**) Seja X um conjunto com um número infinito de elementos. Considere a σ -álgebra $\mathcal{P}$. Dado $Y \subset X$, definimos $\mu(Y) = \#(Y)$, em que $\#(Y)$ representa a cardinalidade do conjunto Y . Se X for enumerável, μ é σ -finita.

2. (**A medida de Dirac**) Seja $x_0 \in X$. Se $A \subset X$ defina $\mu(A) := 1$ se $x_0 \in A$ e $\mu(A) := 0$ se $x_0 \notin A$. Assim temos definida uma medida em $\mathcal{P}$, chamada medida de Dirac em x_0 .

3. (**σ -álgebra de Borel**) Considere o conjunto de todos os subconjuntos abertos de um espaço topológico Z . De acordo com o lema 2.4.2, existe uma menor σ -álgebra que contém todos estes abertos. Ela é chamada σ -álgebra de Borel em Z e denotada $\mathcal{B}$.

2.5 Funções Mensuráveis

Definição 2.5.1 Função Mensurável

Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e (Y, d) um espaço métrico. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é mensurável se

- (i) Se $U \subset Y$ for aberto, então $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$;
- (ii) Existe um conjunto de medida nula N tal que $\overline{f(X \setminus N)}$ é separável.

Observação: Se o conjunto Y for separável (por exemplo, $\mathbb{R}^n$), a condição (ii) torna-se desnecessária, de acordo com o Lema 1.1.4.

Consideremos em Y a σ -álgebra $\mathcal{B}$ de Borel, isto é, a menor σ -álgebra que contém todos os conjuntos abertos. Dada uma função mensurável $f : X \rightarrow Y$, sabemos que $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$ para todo aberto U . É fácil concluir que o mesmo é verdadeiro para todo $U \in \mathcal{B}$. De fato, defina $\mathcal{N}$ a coleção de todos os subconjuntos S de Y tais que $f^{-1}(S) \in \mathcal{M}$. Então $\mathcal{N}$ é uma σ -álgebra e $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}$.

Definição 2.5.2 Função de Borel

Sejam Y, Z espaços de Banach. Uma função de Borel é uma função $f : X \rightarrow Y$ tal que a imagem inversa de conjuntos abertos em Z são elementos de $\mathcal{B}$.

Observação: Funções contínuas $f : Y \rightarrow Z$ são funções de Borel.

Lema 2.5.3 melhorar demonstração

- (i) Sejam $f_j : X \rightarrow Y$ mensuráveis. Se $f = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j$ qtp, então f é mensurável;
- (ii) Se $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$ forem mensuráveis, então

$$\inf_{j \rightarrow \infty} f_j \text{ e } \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j$$

são mensuráveis (defina arbitrariamente a função nos conjuntos (de medida nula) onde o valor $-\infty$ é assumido).

- (iii) Sejam Z um espaço de Banach, $\phi : Y \rightarrow Z$ uma função de Borel e $f : X \rightarrow Y$ mensurável. Então $\phi \circ f$ é mensurável.

Demonstração:

- (i) Seja $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$ para todo $x \in X \setminus N$, onde N é um conjunto de medida nula tal que $f_j(X \setminus N)$ é separável para todo j . Seja $U \subset Y$ aberto. Defina

$$U_i := \{y \in U; B_{\frac{1}{i}}(y) \subset U\}.$$

Para $x \in X \setminus N$ temos

$$f(x) \in U \Leftrightarrow \exists i, k; f_j(x) \in U_i \text{ se } j \geq k,$$

o que significa, usando a linguagem de conjuntos (justifique!)

$$f^{-1}(U) \setminus N = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} f_j^{-1}(U_i) \right) \setminus N \in \mathcal{M}.$$

Além disto,

$$f(X \setminus N) \subset \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} f_j(X \setminus N)},$$

que é separável (justifique!).

(ii) Seja $g(x) := \inf_{j \in \mathbb{N}} f_j(x) > -\infty$ para todo $x \in X \setminus N$, onde $\mu(N) = 0$. Então, para todo $a \in \mathbb{R}$ vale:

$$g^{-1}([a, \infty)) \setminus N = \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} f_j^{-1}([a, \infty)) \right) \setminus N \in \mathcal{M},$$

donde deduzimos a mensurabilidade de g . Da mesma forma, temos que $g_k := \inf_{j \geq k} f_j$ são mensuráveis. De acordo com (i), também

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k$$

é mensurável.

(iii) Seja N um conjunto de medida nula tal que $f(X \setminus N)$ seja separável. Então $\phi \circ f(X \setminus N) = \phi[f(X \setminus N)]$ é separável. Seja $U \subset Z$ aberto. Então $\phi^{-1}(Z) \in \mathcal{B}$, donde $f^{-1}[\phi^{-1}(Z)] \in \mathcal{M}$ $\square$

Teorema 2.5.4 tirar?

Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Suponhamos que $\mu(X) < \infty$. Seja

$$M := \{f : X \rightarrow Y; f \text{ é mensurável}\}.$$

Definimos a relação de equivalência

$$f = g \text{ em } M \Leftrightarrow f = g \text{ qtp.}$$

Seja

$$M(\mu, Y) := (M / \sim).$$

Então $M(\mu, Y)$ é um espaço métrico se definirmos

$$d_{\mu}(f, g) := \inf\{r \geq 0; \mu(\{d(f, g) > r\}) \leq r\},$$

em que

$$\{d(f, g) > r\} := \{x \in X; d(f(x), g(x)) > r\}.$$

Demonstração:

Como $\mu(X) < \infty$, d_{μ} é uma função limitada em $M(\mu, Y)$. Suponhamos que $d_{\mu}(f, g) = 0$. Considere $\mu(\{d(f, g) > \epsilon\})$. Afirmamos que, para todo $0 < r \leq \epsilon$,

$$\mu(\{d(f, g) > \epsilon\}) \leq r.$$

Caso contrário, existiria $0 < r_0 < \epsilon$ tal que $\mu(\{d(f, g) > \epsilon\}) > r_0$. Então, em particular, $\mu(\{d(f, g) > r_0\}) > r_0$, o que contraria a definição de $\inf$.

Obtemos então que

$$\mu(\{d(f, g) > \epsilon\}) = 0,$$

provando que $d_{\mu}(f, g) = 0$ se, e somente se, $f = g$.

Sejam f, g e h em $M(\mu, Y)$, $r \geq d_\mu(f, h)$ e $s \geq d_\mu(h, g)$. Então temos

$$\begin{aligned} \{d(f, g) > r + s\} &\subset \{d(f, h) + d(h, g) > r + s\} \\ &\subset \{d(f, h) > r\} \cup \{d(h, g) > s\}. \end{aligned}$$

Decorre daí que

$$\begin{aligned} \mu(\{d(f, g) > r + s\}) &\leq \mu(\{d(f, h) > r\}) + \mu(\{d(h, g) > s\}) \\ &\leq r + s, \end{aligned}$$

o que prova a desigualdade triangular. A simetria é óbvia. $\square$

Definição 2.5.5 Convergência em Medida

Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e Y um espaço métrico. Se (f_k) , $f : X \rightarrow Y$ forem mensuráveis, dizemos que f_k converge em medida para f , denotado $f_k \xrightarrow{\mu} f$, caso

$$\mu(\{d(f_k, f) > \epsilon\}) \rightarrow 0 \text{ para todo } \epsilon > 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Observação: Não estamos supondo, neste caso, $\mu(X) < \infty$. Escrevemos, entretanto,

$$f_k \xrightarrow{\mu} f \Leftrightarrow d_\mu(f_k, f) \rightarrow 0.$$

2.6 Exercícios

1. Se (A_n) for uma sequência numa álgebra $\mathcal{A}$ tal que $A_n \subset A_{n+1}$ para todo n e se $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, então

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n),$$

em que μ é uma medida na álgebra $\mathcal{A}$. Se trocarmos a álgebra $\mathcal{A}$ por uma σ -álgebra $\mathcal{M}$, quais são as modificações neste resultado?

2. Seja Q um retângulo na álgebra de Lebesgue e μ a medida definida naquela álgebra (vide seção 2.2). Mostre que se $Q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$, em que os R_n são retângulos, e se $\mu(Q) = \infty$, então $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(R_n) = \infty$.

3. Mostre que a σ -subaditividade na definição de medida exterior μ^* pode ser substituída por

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i),$$

para toda sequência de conjuntos A_i disjuntos.

4. Quando uma medida exterior é uma medida? (Sugestão: Leia as duas primeiras seções do Capítulo 3 de [3]¹).
5. Suponha que $\mu^*(A) = 0$. Então $\mu^*(A \cup B) = \mu(B)$.

¹O leitor interessando nas conexões entre lógica matemática e teoria da medida pode consultar também Benedetto, J.J.: Real Variable and Integration, Teubner, Stuttgart, 1976.

6. Considere a medida exterior induzida por uma medida em uma álgebra de subconjuntos de X . Mostre que se $E \subset X$ for um conjunto enumerável, então $\mu^*(E) = 0$. Em particular, $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$ tem medida nula.

7. Sejam μ uma medida e A_n uma sequência de conjuntos mensuráveis tal que $A_{n+1} \subset A_n$ para todo n . Mostre que se $\mu(A_1) < \infty$ então

$$\mu \left(\bigcap_{N=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

O mesmo resultado vale numa álgebra? Com que hipóteses?

8. Dê um contra-exemplo para o exercício anterior, retirada a hipótese $\mu(A_1) < \infty$.

9. Mostre que a álgebra de Lebesgue não é uma σ -álgebra. (Sugestão: considere inicialmente $n = 1$).

10. Considere o conjunto de todos os abertos do $\mathbb{R}^n$. Eles formam uma álgebra? É uma σ -álgebra?

11. O lema 2.4.2 também é válido para álgebras?

12. Porque é necessário que $\mu(X) < \infty$ na definição de $M(\mu, Y)$?

13. Dê exemplo de uma medida aditiva μ definida numa álgebra $\mathcal{A}$ que não gera uma medida exterior. Isto mostra que a hipótese de μ ser σ -aditiva no Teorema 2.3.3 é essencial.

Capítulo 3

Integração

3.1 A Integral de Funções Degrau

Definição 3.1.1 Função Característica

A função característica de um conjunto E , χ_E , é definida por:

$$\chi_E(x) = 1 \text{ se } x \in E, \quad \chi_E(x) = 0 \text{ se } x \notin E.$$

Definição 3.1.2 Funções de grau

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de subconjuntos de X e μ uma medida σ -aditiva nesta álgebra. O conjunto das funções de grau relativas a $(X, \mathcal{A}, \mu)$ com valores no espaço de Banach $(Y, \|\cdot\|)$ é definido por

$$\begin{aligned} St(\mu, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid & f(X) \text{ é um conjunto finito,} \\ & f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{A} \forall y \in Y \\ & \mu(f^{-1}(\{y\})) < \infty, \text{ se } 0 \neq y \in Y\}. \end{aligned}$$

Observação: Suponhamos que $f(X) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset Y$. Se $0 \in f(X)$, considere $f(X) \setminus \{0\}$. Definindo $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\})$ ($1 \leq i \leq m$), temos que $A_i \in \mathcal{A}$, $\mu(A_i) < \infty$ e $f \in St(\mu, Y)$ se, e somente se,

$$f = \sum_{i=1}^m \chi_{A_i} \alpha_i,$$

que é chamada representação canônica de f (ela é claramente única).

Lema 3.1.3 O conjunto $St(\mu, Y)$ é um espaço vetorial. Se $f \in St(\mu, Y)$ então $\|f\| \in St(\mu, \mathbb{R})$.

Demonstração: Decorre imediatamente da definição.

Definição 3.1.4 Espaço das Funções Degrau

Considere a seguinte relação de equivalência em $St(\mu, Y)$:

$$\begin{aligned} f = g \text{ em } St(\mu, Y) & \Leftrightarrow (f - g) = 0 \text{ qtp} \\ & \Leftrightarrow \mu(\{x \in S; (f - g)(x) \neq 0\}) = 0. \end{aligned}$$

Continuaremos a denotar $St(\mu, Y)$ o espaço quociente $(St(\mu, Y)/=)$ e f a classe de equivalência $[f]$ (abuso de linguagem!).

Para $f \in St(\mu, Y)$ definimos a integral de f em X (relativa a medida μ) por

$$\begin{aligned} \int_X f \, d\mu &:= \sum_{y \in Y \setminus \{0\}} \mu(f^{-1}(\{y\}))y \\ &= \sum_{i=1}^m \mu(A_i) \alpha_i, \end{aligned}$$

sendo que na última expressão estamos usando a representação canônica $f = \sum_{i=1}^m \mathcal{X}_{A_i} \alpha_i$.

Mostre que a integral está bem definida.

Lema 3.1.5 $St(\mu, Y)$ é um espaço normado, se definirmos

$$\|f\|_{St(\mu, Y)} := \int_X \|f\| \, d\mu.$$

Além disso, vale,

$$\left\| \int_X f \, d\mu \right\| \leq \int_X \|f\| \, d\mu = \|f\|_{St(\mu, Y)}.$$

Demonstração: Notamos que $Int : St(\mu, Y) \rightarrow Y$, definida por $Int(f) = \int_X f \, d\mu$ é uma aplicação linear. A relação de equivalência introduzida em $St(\mu, Y)$ mostra que $\|f\|_{St(\mu, Y)} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ em $St(\mu, Y)$. A última desigualdade decorre imediatamente de Y ser um espaço normado. A desigualdade triangular decorre então desta última desigualdade. $\square$

3.2 A construção do espaço $L^1(\mu, Y)$

Nosso objetivo é trabalharmos com o completamento $\tilde{St}(\mu, Y)$ do espaço vetorial $St(\mu, Y)$. A dificuldade é que, ao passarmos ao completamento, seus elementos não são funções. Assim, o que faremos a seguir visa obter um isomorfismo entre $\tilde{St}(\mu, Y)$ e um espaço de funções. Notamos também que estamos trabalhando com duas relações de equivalência: a primeira foi definida em $St(\mu, Y)$, de modo a torná-lo um espaço normado; a segunda é intrínseca ao completamento $\tilde{St}(\mu, Y)$ (veja Teorema 1.1.7).

Definição 3.2.1 Integral Sobre Um Conjunto Mensurável

Para $f \in St(\mu, Y)$ e $A \in \mathcal{A}$, temos

$$\mathcal{X}_A f \in St(\mu, Y).$$

Definimos

$$\int_A f \, d\mu := \int_X \mathcal{X}_A f \, d\mu.$$

Notamos, em particular, que

$$\int_A d\mu = \mu(A).$$

Se $f \in St(\mu, \mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, denotamos

$$\{f > \alpha\} := \{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \text{ (justifique!)},$$

e analogamente para outras desigualdades.

(Mostre que as definições acima independem da relação de equivalência em $St(\mu, Y)$).

O resultado seguinte desempenhará um papel fundamental: permitirá a associação de uma função a cada elemento de $\tilde{St}(\mu, Y)$. Apesar do enunciado diferente daquele de Lang [2], manteremos a denominação de

Lema 3.2.2 (Fundamental da Integração)

Seja (f_k) uma sequência de Cauchy de funções degrau. Então:

(i) Existem $N \subset X$, com $\mu^*(N) = 0$ e uma subsequência (f_{k_i}) tal que existe

$$f(x) := \lim_{i \rightarrow \infty} f_{k_i}(x), \quad x \in X \setminus N.$$

(ii) Além disto,

$$[(f_k)] = 0 \text{ em } \tilde{St}(\mu, Y) \Leftrightarrow f = 0 \text{ qtp.}$$

Observações: (a) O resultado acima é o passo crucial na identificação dos elementos de $\tilde{St}(\mu, Y)$ com funções: o item (i) mostra que podemos associar uma função - definida a menos do conjunto de medida nula N - a cada sequência de Cauchy em $St(\mu, Y)$; o item (ii) mostra que esta associação é compatível com a relação de equivalência introduzida em $\tilde{St}(\mu, Y)$. Isto é, dois representantes da mesma classe de equivalência são associados (bijetivamente) à mesma função. (b) O fato de trabalharmos aqui com conjuntos de medida nula - definidos na σ -álgebra $\mathcal{P}$ de todos os subconjuntos de X - é fundamental: não podemos garantir que o conjunto N seja um elemento da álgebra $\mathcal{A}$.

Demonstração:

(i) Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que

$$\|f_k - f_j\|_{St(\mu, Y)} = \int_X \|f_k - f_j\| d\mu \leq 2^{-i} \text{ se } k, j \geq i.$$

Definimos

$$g_j(x) := \sum_{i=1}^j \|f_i(x) - f_{i+1}(x)\|.$$

Para todo $x \in X$, a sequência $(g_j(x))$ é uma sequência crescente; assim, existe

$$g(x) := \lim_{j \rightarrow \infty} g_j(x) \in [0, \infty], \text{ para todo } x \in X.$$

Seja $N := \{x \in X; g(x) = \infty\}$. Nosso objetivo é mostrar que $\mu^*(N) = 0$. Daí concluiremos que $g(x) \in [0, \infty)$ para todo $x \in X \setminus N$; para tais x , como g é definida por uma série, necessariamente seu termo geral tenderá a zero. Mas isto implicará que $(f_k(x))$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach Y !

Notamos que

$$\int_X g_j(x) \, d\mu = \sum_{i=1}^j \int_X \|f_i - f_{i+1}\| \, d\mu \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 1.$$

Assim, para todo $\epsilon > 0$, temos que $M_\epsilon^j := \{g_j > 1/\epsilon\} \in \mathcal{A}$ e

$$1 \geq \int_X g_j \, d\mu \geq \int_{M_\epsilon^j} g_j \, d\mu \geq \int_{M_\epsilon^j} \frac{1}{\epsilon} \, d\mu = \frac{\mu(M_\epsilon^j)}{\epsilon}.$$

Decorre daí que

$$\mu(M_\epsilon^j) < \epsilon$$

para todo j . Além disto, $M_\epsilon^j \subset M_\epsilon^{j+1}$ e

$$N \subset \{g > 1/\epsilon\} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} M_\epsilon^j.$$

De acordo com o Teorema 2.3.3, concluímos que

$$\mu^*(N) \leq \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, isto mostra que N é um conjunto de medida nula, completando a demonstração.

(ii) “ $\Rightarrow$ ” De acordo com o demonstrado em (i), podemos supor, passando a uma subsequência se necessário, que

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \text{ para todo } x \in X \setminus N.$$

Queremos mostrar que

$$\tilde{N} := \{f \neq 0\} \setminus N$$

é um conjunto de medida nula. Para isto, uma vez que $[(f_k)] = [0]$, podemos escolher uma subsequência (f_{k_i}) tal que

$$\int_X \|f_{k_i}\| \, d\mu \leq 2^{-i}.$$

Por abuso de linguagem, continuaremos a denotar tal subsequência por (f_k) . Dado $\epsilon > 0$, defina

$$N_\epsilon^k := \{\|f_k\| > \epsilon\} \in \mathcal{A} \text{ e } N_\epsilon := \{\|f\| > \epsilon\} \setminus N.$$

Então, para todo $k_0 \in \mathbb{N}$,

$$N_\epsilon \subset \bigcup_{k > k_0} N_\epsilon^k,$$

donde

$$\begin{aligned} \mu^*(N_\epsilon) &\leq \sum_{k > k_0} \mu(N_\epsilon^k) \\ &\leq \sum_{k > k_0} \frac{1}{\epsilon} \int_X \|f_k\| \, d\mu \leq \frac{1}{\epsilon} 2^{-k_0} \rightarrow 0 \text{ quando } k_0 \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

onde fizemos uso da desigualdade

$$\int_X \|f_k\| d\mu \geq \int_{N_\epsilon^k} \|f_k\| d\mu \geq \epsilon \int_{N_\epsilon^k} d\mu = \epsilon \mu(N_\epsilon^k).$$

Isto mostra que N_ϵ é um conjunto de medida nula, donde também $\tilde{N}$.

“ $\Leftarrow$ ” Temos que mostrar, de acordo com a relação de equivalência definida no Teorema 1.1.7, que $\|f_k\|_{St(\mu, Y)} \rightarrow 0$ para uma subsequência. Como antes, (vide item (i)), podemos supor que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) = 0$$

para todo $x \in X \setminus N$. Passando a outra subsequência, podemos supor que

$$\int_X \|f_k - f_{k+1}\| d\mu \leq 2^{-k}.$$

Defina $A_j := \{f_j \neq 0\} \in \mathcal{A}$. Então $\mu(A_j) < \infty$. Dado $\epsilon > 0$, temos, para $k > j$:

$$\int_X \|f_k\| d\mu = \int_{A_j} \|f_k\| d\mu + \int_{X \setminus A_j} \|f_k\| d\mu.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \int_{A_j} \|f_k\| d\mu &\leq \int_{A_j \cap \{\|f_k\| \leq \epsilon\}} \|f_k\| d\mu + \int_{A_j \cap \{\|f_k\| > \epsilon\}} \|f_k\| d\mu \\ &\leq \epsilon \mu(A_j) + \int_{\{\|f_k\| > \epsilon\}} \|f_k\| d\mu \\ &\leq \epsilon \mu(A_j) + \int_{\{\|f_k\| > \epsilon\}} \|f_j\| d\mu + \int_X \|f_k - f_j\| d\mu \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{X \setminus A_j} \|f_k\| d\mu &= \int_{X \setminus A_j} \|f_k - f_j\| d\mu \\ &\leq \int_X \|f_k - f_j\| d\mu \end{aligned}$$

Substituindo as duas últimas desigualdades na primeira igualdade, obtemos

$$\int_X \|f_k\| d\mu \leq \epsilon \mu(A_j) + 2 \int_X \|f_k - f_j\| d\mu + \int_{\{\|f_k\| > \epsilon\}} \|f_j\| d\mu$$

O primeiro termo tende a zero quanto $\epsilon \rightarrow 0$, para todo j ; o segundo tende a zero, quando $j \rightarrow \infty$, pois $k > j$. Resta mostrar que o último termo tende a zero quando $j \rightarrow \infty$. Claramente

$$\int_{\{\|f_k\| > \epsilon\}} \|f_j\| d\mu \leq \max_{x \in X} \|f_j(x)\| \mu(\{\|f_k\| > \epsilon\}),$$

donde notamos que basta mostrar

$$\mu(\{\|f_k\| > \epsilon\}) \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty,$$

isto é, que (f_k) converge em medida para 0. Para isto, defina

$$A_{kr} := \left\{ \left(\sum_{i=k}^r \|f_i - f_{i+1}\| \right) > \epsilon \right\} \in \mathcal{A}.$$

Então vale:

$$\epsilon \mu(A_{kr}) \leq \int_X \sum_{i=k}^r \|f_i - f_{i+1}\| d\mu \leq \sum_{i=k}^r 2^{-i} \leq \sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-k+1}.$$

Além disto, $A_{kr} \subset A_{k(r+1)}$ e para $x \in X \setminus N - \cup_{j \in \mathbb{N}} A_{kr}$ vale:

$$\|f_k(x)\| \leq \|f_{r+1}(x)\| + \sum_{i=k}^r \|f_i(x) - f_{i+1}(x)\|.$$

Notamos que, por hipótese, o primeiro termo do lado direito tende a zero quando $r \rightarrow \infty$ (pois $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = 0$); o segundo é menor ou igual a ϵ , para todo k . Concluimos então que

$$\{\|f_k\| > \epsilon\} \subset N \cup \bigcup_{r=1}^{\infty} A_{kr}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \mu(\{\|f_k\| > \epsilon\}) &= \mu^*(\{\|f_k\| > \epsilon\}) \leq \mu^*(N) + \mu^*\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} A_{kr}\right) \\ &\leq \mu^*\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} A_{kr}\right). \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $k \rightarrow \infty$ na desigualdade acima, obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\{\|f_k\| > \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon} \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{-k+1} = 0,$$

completando a demonstração. □

Definição 3.2.3 Funções Lebesgue-integráveis

Definimos o espaço $L(\mu, Y)$ das funções Lebesgue-integráveis por

$$L(\mu, Y) := \{f : X \rightarrow Y \ ; \ \exists (f_k) \text{ sequência de Cauchy em } St(\mu, Y) \text{ tal que } f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \text{ qtp}\}$$

módulo a relação de equivalência

$$f = g \Leftrightarrow f = g \ \mu - \text{qtp}.$$

Em outras palavras, os elementos de $L(\mu, Y)$, como, por exemplo, f , são classes de equivalência.

Lema 3.2.4 *Ao definir*

$$J([(f_k)]) := f,$$

onde $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ se $x \in X \setminus N$, N conjunto de medida nula (veja 3.2.2), temos um isomorfismo dos espaços vetoriais $\tilde{St}(\mu, Y)$ e $L(\mu, Y)$.

Demonstração: Se (f_k) e (g_k) forem representantes de $[\xi] \in \tilde{St}(\mu, Y)$, decorre do Lema 3.2.2(i), que existem f e g tais que, fora de um conjunto de medida nula, $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ e $g(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x)$. Mas $f_k - g_k = 0$ em $\tilde{St}(\mu, Y)$, donde, do Lema 3.2.2(ii), temos $f - g = 0$ qtp, isto é, $f = g$ em $L(\mu, Y)$. Isto mostra que a aplicação linear

$$J : \tilde{St}(\mu, Y) \rightarrow L(\mu, Y)$$

é uma aplicação linear contínua. De acordo com o Lema 3.2.2 tal aplicação é injetiva. Pela definição de $L(\mu, Y)$ ela é sobrejetiva. $\square$

Definição 3.2.5 Integral de Lebesgue

Sejam f e (f_k) como na definição de $L(\mu, Y)$. Definimos:

$$\int_X f \, d\mu := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\mu.$$

Observação: A integral está bem definida pois

$$\left\| \int_X f_k \, d\mu - \int_X f_j \, d\mu \right\| \leq \int_X \|f_k - f_j\| \, d\mu \rightarrow 0 \text{ quando } k, j \rightarrow \infty.$$

Isto mostra que a sequência $(\int_X f_k \, d\mu)$ é uma sequência de Cauchy em Y . Que a definição da integral independe da sequência que aproxima f é consequência do Lema 3.2.2.

3.3 Propriedades Básicas

Relacionar agora com o completamento da medida via Teorema de Hahn

Teorema 3.3.1 *A integral de Lebesgue tem as seguintes propriedades:*

- (i) $St(\mu, Y) \subset L(\mu, Y)$. Além disto, a integral é linear em $L(\mu, Y)$ e, se $A \in \mathcal{A}$ satisfaz $\mu(A) < \infty$, então

$$\int_X \alpha \chi_A \, d\mu = \alpha \mu(A), \text{ para todo } \alpha \in Y;$$

- (ii) Se $f \in L(\mu, Y)$, então $\|f\| \in L(\mu, \mathbb{R})$ e

$$\left\| \int_X f \, d\mu \right\| \leq \int_X \|f\| \, d\mu;$$

- (iii) **Mudar enunciado! O conjunto envolvido é mensurável!**

Para todo $\epsilon > 0$ e todo $f \in L(\mu, Y)$ vale

$$\int_X \|f\| \, d\mu \geq \epsilon \mu^*(\{\|f\| \geq \epsilon\});$$

(iv) $L(\mu, Y)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{L(\mu)} := \int_X \|f\| d\mu;$$

(v) $St(\mu, Y)$ é denso em $L(\mu, Y)$.

Demonstração:

(i) Se $f \in St(\mu, Y)$, então para a sequência constante $(f)_{k \in \mathbb{N}}$ temos que $J([(f)_k]) = f$, em que J é o isomorfismo entre $\tilde{St}(\mu, Y)$ e $L(\mu, Y)$. Para $f \in St(\mu, Y)$ as definições da integral de funções degrau e a integral de Lebesgue são idênticas; daí decorre a segunda afirmação.

(ii) Seja J o isomorfismo entre $\tilde{St}(\mu, Y)$ e $L(\mu, Y)$. Se $[(f_k)] \in \tilde{St}(\mu, Y)$ e $J([(f_k)]) = f$, decorre da desigualdade triangular (no espaço de Banach Y):

$$\int_X \left| \|f_k\| - \|f_j\| \right| d\mu \leq \int_X \|f_k - f_j\| d\mu \rightarrow 0 \text{ para } k, j \rightarrow \infty.$$

Isto mostra que $[(\|f_k\|)] \in St(\mu, \mathbb{R})$. Uma vez que para uma subsequência temos $f_{k_i} \rightarrow f$ qtp, obtemos $\|f_{k_i}\| \rightarrow \|f\|$ qtp, donde $J([(\|f_k \|)]) = \|f\|$. A segunda afirmação é obtida ao passarmos ao limite a desigualdade

$$-\int_X \|f_k\| d\mu \leq \left\| \int_X f_k d\mu \right\| \leq \int_X \|f_k\| d\mu,$$

(que, segundo o Lema 3.1.5, é válida) e usarmos a definição da integral.

(iii) Suponhamos que $J([(f_k)]) = f$, isto é, que existam um conjunto N com $\mu^*(N) = 0$ e uma subsequência (f_j) tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = f(x) \text{ para todo } x \in X \setminus N.$$

Passando, se necessário, a uma outra subsequência, podemos supor que

$$\int_X \|f_{j+1} - f_j\| d\mu \leq 2^{-j}.$$

Se $x \in X \setminus N$ e $0 < \delta < \epsilon$, então

$$\|f(x)\| > \epsilon \Rightarrow \|f_j(x)\| > \delta \text{ ou } \|f(x) - f_j(x)\| > \epsilon - \delta.$$

Se a segunda possibilidade ocorrer, temos

$$\begin{aligned} \|f(x) - f_i(x)\| &= \lim_{i \rightarrow \infty} \|f_i(x) - f_j(x)\| \\ &\leq \sum_{i \geq j} \|f_{i+1}(x) - f_i(x)\|, \end{aligned}$$

isto é,

$$\sum_{i \geq j} \|f_{i+1}(x) - f_i(x)\| > \|f(x) - f_j(x)\| > \epsilon - \delta,$$

donde para $m(x) = m > j$ temos

$$\sum_{i=j}^m \|f_{i+1}(x) - f_i(x)\| > \epsilon - \delta.$$

Assim,

$$\{\|f\| > \epsilon\} \subset N \cup \{\|f_j\| > \delta\} \cup \bigcup_{m>j} \left\{ \sum_{i=j}^m \|f_{i+1}(x) - f_i(x)\| > \epsilon - \delta \right\}.$$

Uma vez que os conjuntos na última união estão crescendo, decorre das propriedades da medida exterior que

$$\begin{aligned} \mu^*(\{\|f\| > \epsilon\}) &\leq \mu(\{\|f_k\| > \delta\}) \\ &\quad + \lim_{m \rightarrow \infty} \mu \left(\left\{ \sum_{i=j}^m \|f_{i+1}(x) - f_i(x)\| > \epsilon - \delta \right\} \right) \\ &\leq \frac{1}{\delta} \int_X \|f_j\| d\mu + \frac{1}{\epsilon - \delta} \sum_{i=j}^{\infty} \int_X \|f_{i+1} - f_i\| d\mu \\ &\leq \frac{1}{\delta} \int_X \|f_j\| d\mu + \frac{1}{\epsilon - \delta} 2^{1-j}, \end{aligned}$$

onde usamos a definição 3.2.1, a definição da integral de função degrau e o Lema 3.1.5.

De acordo com a prova de (ii), temos

$$\int_X \|f\| d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_X \|f_j\| d\mu,$$

donde, para $j \rightarrow \infty$, temos

$$\delta \mu^*(\{\|f\| > \epsilon\}) \geq \int_X \|f\| d\mu.$$

Fazendo $\delta \rightarrow \epsilon$, obtemos o afirmado.

(iv) Se $J([(f_k)]) = f$, decorre de (ii) que

$$\|f\|_{L(\mu)} := \int_X \|f\| d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \|f_k\| d\mu = \|[(f_k)]\|_{St(\mu, Y)},$$

o que mostra que J é isométrico. Uma vez que $\tilde{St}(\mu, Y)$ é um espaço de Banach, $L(\mu, Y)$ também é um espaço de Banach com a norma definida acima (justifique!).

(v) Se $J([(f_k)]) = f$, então, para todo $j \in \mathbb{N}$ fixo, $J([(f_k) - (f_j)]) = f - f_j$ e

$$\|f - f_j\|_{L(\mu)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \|f_k - f_j\| d\mu \rightarrow 0 \text{ quando } j \rightarrow \infty,$$

o que mostra que todo $f \in L(\mu, Y)$ pode ser aproximado por funções degrau na norma de $L(\mu, Y)$.

□

3.4 Exercícios

1. Considere a sequência de funções degrau

$$f_n := (1/n)\mathcal{X}_{[0,n]}.$$

Calcule $\int_{\mathbb{R}} f_n d\mu$. Mostre, por outro lado, que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \forall x \geq 0$. Isto contradiz a definição da integral de Lebesgue ?

Definição 3.4.1 Considere a álgebra de Lebesgue $\mathcal{A}$ com a medida definida naquela álgebra. Defina a medida interior de um conjunto $Y \subset \mathbb{R}^n$ por

$$\mu_*(Y) := \sup \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

o supremo sendo tomado sob todas as sequências (A_i) de elementos de $\mathcal{A}$ cuja união está contida em Y .

2. Mostre que $\mu_*(Y) \leq \mu^*(Y)$ para todo $Y \subset \mathbb{R}^n$.
3. Considerando a medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$ definida através do Exercício 12 do Capítulo 2, mostre: (a) Se A for mensurável, então

$$\mu(A) = \mu_*(A) = \mu^*(A).$$

(b) Se $\mu_*(Y) = \mu^*(Y) < \infty$, então Y é mensurável.

4. Mostre que existem conjuntos Lebesgue-mensuráveis em $\mathbb{R}^n$ que não estão na σ -álgebra de Borel.
5. Considere $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente crescente. Para um dos intervalos (retângulos) elementares R da álgebra de Lebesgue, defina $\mu_g(R) = g(b) - g(a)$. Estenda aditivamente esta definição a toda álgebra $\mathcal{A}$. Mostre que μ_g define uma medida σ -aditiva na álgebra $\mathcal{A}$, chamada medida de Lebesgue-Stieltjes gerada por g .
6. Dê exemplo de uma transformação linear entre espaços de Banach que não seja contínua.

Definição 3.4.2 Seja X um espaço vetorial. Um subconjunto $A \subset X$ é convexo se, dados $x, y \in A$, então $tx + (1-t)y \in A$ para todo $0 \leq t \leq 1$. Uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

7. Interprete geometricamente as definições de um conjunto e de uma função convexa. Mostre que toda função convexa é contínua.

Capítulo 4

Propriedades da Integral

4.1 O Teorema da Convergência Monótona

Lema 4.1.1 *Se $f_k \rightarrow f$ em $L(\mu, Y)$ então existe uma subsequência (f_{k_i}) tal que*

$$f_{k_i} \rightarrow f \text{ qtp.}$$

Demonstração: Escolha uma subsequência tal que

$$\int_X \|f - f_{k_i}\| d\mu \leq 2^{-i}.$$

Dado $\epsilon > 0$, defina

$$N_\epsilon := \{\limsup_{i \rightarrow \infty} \|f - f_{k_i}\| > \epsilon\} \subset \bigcup_{i=j}^{\infty} \{\|f - f_{k_i}\| > \epsilon\}, \quad \forall j.$$

Logo,

$$\mu^*(N_\epsilon) \leq \sum_{i=j}^{\infty} \mu^*(\{\|f - f_{k_i}\| > \epsilon\}).$$

Decorre então do Teorema 3.3.1(iii) que

$$\sum_{i=j}^{\infty} \mu^*(\{\|f - f_{k_i}\| > \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=j}^{\infty} \int_X \|f - f_{k_i}\| d\mu \leq \frac{1}{\epsilon} 2^{1-j} \rightarrow 0$$

quando $j \rightarrow \infty$. Isto mostra que N_ϵ tem medida nula, donde também

$$\{\limsup_{i \rightarrow \infty} \|f - f_{k_i}\| > 0\}$$

(justifique!).

□

Teorema 4.1.2

(i) (Monotonicidade) Se $f, g \in L(\mu, \mathbb{R})$ e $f \leq g$ qtp, então

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

(ii) Se (f_k) for uma sequência de Cauchy em $L(\mu, Y)$ e $f_k \rightarrow f$ qtp, então

$$f \in L(\mu, Y) \text{ e } \|f - f_k\|_{L(\mu)} \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

(iii) (Convergência Monótona) Seja $f_k \in L(\mu, \mathbb{R})$ uma sequência de funções tais que $f_k \nearrow f$ qtp (isto é, $f_{k+1}(x) \geq f_k(x)$ qtp). Se existir uma constante C tal que

$$\int_X f_k d\mu \leq C < \infty,$$

então $f \in L(\mu, \mathbb{R})$ e $f_k \rightarrow f$ em $L(\mu, \mathbb{R})$. Em especial,

$$\int_X f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu.$$

Demonstração:

(i) Pelo item (i) do Teorema 3.3.1, temos a linearidade da integral, enquanto do item (ii) decorre que

$$\int_X g d\mu - \int_X f d\mu = \int_X |g - f| d\mu \geq \left| \int_X (g - f) d\mu \right| \geq 0.$$

(ii) De acordo com o Teorema 3.3.1(iv), $L(\mu, Y)$ é completo. Logo existe $g \in L(\mu, Y)$ tal que $f_k \rightarrow g$ em $L(\mu, Y)$. De acordo com o Lema 4.1.1, existe uma subsequência (f_{k_i}) tal que

$$f_{k_i} \rightarrow g \text{ qtp,}$$

donde deduzimos $f = g$ qtp, isto é, $f = g$ em $L(\mu, Y)$.

(iii) De acordo com o provado em (i), as integrais de f_k formam uma sequência monótona em $\mathbb{R}$, que é limitada superiormente, por hipótese. Assim, existe

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu.$$

Além disto, para $j \geq k$ temos

$$\int_X (f_j - f_k) d\mu = \int_X f_j d\mu - \int_X f_k d\mu \rightarrow 0,$$

quando $j, k \rightarrow \infty$. O resultado então decorre de (ii). $\square$

Corolário 4.1.3 Se (f_n) for uma sequência em $L(\mu, \mathbb{R})$ e se existir uma função $g \in L(\mu, \mathbb{R})$ tal que $|f_n| \leq g$ qtp para todo n , então $\sup f_n$ e $\inf f_n$ estão em $L(\mu, \mathbb{R})$ e

$$\sup \int_X f_n d\mu \leq \int_X \sup f_n d\mu \quad e \quad \int_X \inf f_n d\mu \leq \inf \int_X f_n d\mu.$$

Demonstração:

De acordo com o Teorema 3.3.1(ii), $|f| \in L(\mu, \mathbb{R})$ quando $f \in L(\mu, \mathbb{R})$. Uma vez que

$$\sup\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|),$$

vemos que $\sup\{f, g\} \in L(\mu, \mathbb{R})$ se $f, g \in L(\mu, \mathbb{R})$. O mesmo pode ser dito a respeito de $\inf\{f, g\}$, pois

$$\inf\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|).$$

Assim, as funções

$$g_n := \sup\{f_1, \dots, f_n\}$$

estão em $L(\mu, \mathbb{R})$ e formam uma sequência não decrescente em n ; além disto, $g_n \leq g$ qtp para todo n . Assim,

$$\int_X g_n d\mu \leq \int_X g d\mu =: C.$$

O resultado decorre então do teorema da convergência monótona. A afirmação sobre o $\inf$ é provada analogamente (veja exercício 4, abaixo). $\square$

4.2 A Construção de uma Medida Positiva

Lema 4.2.1 *Seja $\mathcal{M}_A$ a menor σ -álgebra que contém a álgebra $\mathcal{A}$. Suponha que $\mathcal{X}_E \in L(\mu, \mathbb{R})$. Então vale:*

- (i) *Existem conjuntos $A_k \in \mathcal{A}$, com $\mu(A_k) < \infty$ tais que $\mathcal{X}_{A_k} \rightarrow \mathcal{X}_E$ em $L(\mu, \mathbb{R})$;*
- (ii) *Existe $E' \in \mathcal{M}_A$ tal que $\mathcal{X}_{E'} = \mathcal{X}_E$ qtp;*
- (iii) *Para todo $D \in \mathcal{M}_A$ temos $\mathcal{X}_{E \cap D} \in L(\mu, \mathbb{R})$.*

Demonstração:

(i) De acordo com o Teorema 3.3.1(v), existe $f_k \in St(\mu, Y)$ tal que $f_k \rightarrow \mathcal{X}_E$ em $L(\mu, \mathbb{R})$ quando $k \rightarrow \infty$. Passando a uma subsequência podemos supor que $f_k \rightarrow \mathcal{X}_E$ qtp. Defina

$$A_k := \left\{ f_k > \frac{1}{2} \right\} \in \mathcal{A}$$

(note também que $\mu(A_k) < \infty$). Então vale

$$|\mathcal{X}_{A_k} - \mathcal{X}_E| \leq 2|f_k - \mathcal{X}_E|.$$

(basta examinar os casos em que o lado esquerdo é não nulo).

Tomando a integral na desigualdade acima, decorre do Teorema 4.1.2(i) que $\mathcal{X}_{A_k} \rightarrow \mathcal{X}_E$ em $L(\mu, \mathbb{R})$.

(ii) Considere $\mathcal{X}_{A_k}$ como em (i). Então, de acordo com o Lema 3.2.2, passando a uma subsequência se necessário, existe um conjunto de medida nula N tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{X}_{A_k}(x) \rightarrow \mathcal{X}_E(x) \quad \forall x \in X \setminus N.$$

A igualdade

$$E \setminus N = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i \geq j} (A_k \setminus N)$$

pode ser verificada facilmente. Defina então

$$E' := \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=j}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}.$$

Então

$$E \setminus N = E' \setminus N,$$

como afirmado.

(iii) Defina

$$\mathcal{M}_1 = \{Y \subset X; \mathcal{X}_{E \cap Y} \in L(\mu, \mathbb{R})\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{M}_1$. Para isto, mostraremos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_1$ e que $\mathcal{M}_1$ é uma σ -álgebra. O afirmado decorre então da definição de $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.

Seja $A' \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{X}_{A_k}$ como em (i). Também como na demonstração do item (i), obtemos

$$|\mathcal{X}_{A_k \cap A'} - \mathcal{X}_{A_j \cap A'}| \leq |\mathcal{X}_{A_k} - \mathcal{X}_{A_j}| \text{ qtp,}$$

donde, integrando e aplicando o Teorema 4.1.2(i), concluímos que $(\mathcal{X}_{A_k \cap A'})$ é uma sequência de Cauchy em $L(\mu, \mathbb{R})$. Passando a uma subsequência, uma vez que $\mathcal{X}_{A_k} \rightarrow \mathcal{X}_E$ qtp, concluímos que $\mathcal{X}_{A_k \cap A'} \rightarrow \mathcal{X}_{E \cap A'}$ qtp. Assim, de acordo com o Teorema 4.1.2(ii), temos que $\mathcal{X}_{E \cap A'} \in L(\mu, \mathbb{R})$, e portanto $A' \in \mathcal{M}_1$. Isto mostra que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_1$.

Afirmamos agora que se $Y_1, Y_2 \in \mathcal{M}_1$, então $Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{M}_1$. A demonstração é inteiramente análoga a de $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_1$. De fato, de acordo com o item (i), sejam $A_{ik} \in \mathcal{A}$ tais que

$$\mathcal{X}_{A_{ik}} \rightarrow \mathcal{X}_{E \cap Y_i} \text{ em } L(\mu, \mathbb{R}), \quad i = 1, 2.$$

Então obtemos

$$|\mathcal{X}_{A_{1k} \cap A_{2k}} - \mathcal{X}_{A_{1j} \cap A_{2j}}| \leq |\mathcal{X}_{A_{1k}} - \mathcal{X}_{A_{1j}}| + |\mathcal{X}_{A_{2k}} - \mathcal{X}_{A_{2j}}| \text{ qtp,}$$

donde deduzimos, como antes, que $(\mathcal{X}_{A_{1k} \cap A_{2k}})_k \in \mathbb{N}$ é uma sequência de Cauchy em $L(\mu, \mathbb{R})$. Para uma subsequência, temos $\mathcal{X}_{A_{ik}} \rightarrow \mathcal{X}_{E \cap Y_i}$ qtp, $i = 1, 2$. Logo, $\mathcal{X}_{A_{1k} \cap A_{2k}} \rightarrow \mathcal{X}_{E \cap Y_1 \cap Y_2}$ qtp, o que prova, de acordo com o Teorema 4.1.2(ii), que $\mathcal{X}_{E \cap Y_1 \cap Y_2} \in L(\mu, \mathbb{R})$, isto é, $Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{M}_1$.

Se $Y \in \mathcal{M}_1$ então temos $Y^c \in \mathcal{M}_1$. De fato, como $\mathcal{X}_E, \mathcal{X}_{E \cap Y} \in L(\mu, \mathbb{R})$ temos que

$$\mathcal{X}_{E \setminus Y} = \mathcal{X}_E - \mathcal{X}_{E \cap Y} \in L(\mu, \mathbb{R}).$$

Finalmente, se $Y_i \in \mathcal{M}_1$ satisfaz $Y_i \subset Y_{i+1}$, temos

$$Y := \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i \in \mathcal{M}_1.$$

De fato, $\mathcal{X}_{E \cap Y_i} \nearrow \mathcal{X}_{E \cap Y}$ e $\int_X \mathcal{X}_{E \cap Y_i} d\mu \leq \int_X \mathcal{X}_E d\mu$. Decorre do teorema da convergência monótona que $\mathcal{X}_{E \cap Y} \in L(\mu, \mathbb{R})$, o que mostra que $Y \in \mathcal{M}_1$, completando a demonstração de que $\mathcal{M}_1$ é uma σ -álgebra. $\square$

Concluimos a seção mostrando como estender a medida μ definida na álgebra $\mathcal{A}$ a uma medida numa σ -álgebra $\mathcal{M}$. Para tornarmos a notação mais adequada, denotaremos $\mu_{\mathcal{A}}$ a medida definida na álgebra $\mathcal{A}$.

Teorema 4.2.2 *Sejam $\mu_{\mathcal{A}}$ a medida (σ -subaditiva) definida na álgebra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ a menor σ -álgebra que contém $\mathcal{A}$. Defina*

$$\mathcal{M} := \{E \subset X; \mathcal{X}_E = \mathcal{X}_{E'} \text{ qtp (em } \mu^*) \text{ para algum } E' \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}\}$$

e $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ por

$$\mu(E) := \begin{cases} \int_X \mathcal{X}_E d\mu_{\mathcal{A}} & , \quad \text{se } \mathcal{X}_{E \cap A} \in L(\mu_{\mathcal{A}}, \mathbb{R}) \forall A \in \mathcal{M} \\ \infty & , \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então μ é uma extensão da medida $\mu_{\mathcal{A}}$ e $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de medida. Vale:

$$\mu^*(N) = 0 \Leftrightarrow N \in \mathcal{M} \text{ e } \mu(N) = 0,$$

onde μ^* é a medida exterior induzida por $\mu_{\mathcal{A}}$.

Demonstração:

Como $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ é uma σ -álgebra e a união enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula, vemos que $\mathcal{M}$ é uma σ -álgebra e que $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{M}$.

Seja $A \in \mathcal{A}$. Se $\mu_{\mathcal{A}}(A) = \infty$, então $\mathcal{X}_A \notin L(\mu, \mathbb{R})$. De fato, se $\mathcal{X}_A \in L(\mu, \mathbb{R})$ teríamos, de acordo com o Lema 4.2.1(i), uma sequência de conjuntos $A_k \in \mathcal{A}$ tais que $\mathcal{X}_{A_j} \rightarrow \mathcal{X}_A$ em $L(\mu, \mathbb{R})$, donde para uma subsequência, $\mathcal{X}_{A_j} \rightarrow \mathcal{X}_A$ qtp. Isto mostra que $\mu(A_j) \rightarrow \infty$. Mas então

$$\int_X \mathcal{X}_A d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \mathcal{X}_{A_k} d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{\mathcal{A}}(A_k) = \infty,$$

absurdo. Logo, $\mathcal{X}_E \notin L(\mu, \mathbb{R})$ e $\mu(A) = \infty$, pois $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_{A \cap X}$. Se $\mu_{\mathcal{A}}(A) < \infty$, $\mathcal{X}_A \in St(\mu, \mathbb{R})$ e, pelo Lema 4.2.1(iii), $\mathcal{X}_{A \cap D} \in L(\mu, \mathbb{R}) \forall D \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, donde também para todo $D \in \mathcal{M}$. Segue então das definições do Teorema 3.3.1(i) que,

$$\mu(A) = \int_X \mathcal{X}_A d\mu_{\mathcal{A}} = \mu_{\mathcal{A}}(A).$$

Isto mostra que μ é uma extensão de $\mu_{\mathcal{A}}$.

Seja N um conjunto de medida exterior nula. Então $\mathcal{X}_N = \mathcal{X}_{\emptyset} = 0$ qtp, donde $N \in \mathcal{M}$. Além disto,

$$\mu(N) = \int_X \mathcal{X}_N d\mu_{\mathcal{A}} = 0.$$

Reciprocamente, se $N \in \mathcal{M}$ é tal que $\mu(N) = 0$, decorre do Teorema 3.3.1(iii) que, para todo $\epsilon > 0$,

$$\epsilon \mu^*(\{\mathcal{X}_N > \epsilon\}) \leq \int_X \mathcal{X}_N d\mu_{\mathcal{A}} = \mu(N) = 0.$$

Logo $\mu^*(N) = 0$. Como subconjuntos de um conjunto de medida nula têm medida nula, mostramos que μ é completa. Falta mostrar que $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ é σ -aditiva.

Sejam $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ disjuntos. Como $\mathcal{X}_{E_1 \cup E_2} = \mathcal{X}_{E_1} + \mathcal{X}_{E_2}$, temos $\mu(E_1 \cup E_2) = \infty \Leftrightarrow \mu(E_i) = \infty$ ($i = 1, 2$). (justifique!) Se $\mu(E_i) < \infty$ para $i = 1, 2$ então $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$ decorre da linearidade da integral (Teorema 3.3.1(i)).

Sejam agora $E_i \in \mathcal{M}$ dois a dois disjuntos e

$$E := \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{M}.$$

Suponhamos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) < \infty.$$

Então, definindo

$$\tilde{E}_k := \bigcup_{i=1}^k E_i,$$

temos

$$\int_X \mathcal{X}_{\tilde{E}_k} d\mu = \sum_{i=1}^k \mu(E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) < \infty.$$

Como $\mathcal{X}_{\tilde{E}_k \cap D} \nearrow \mathcal{X}_{E \cap D}$ para todo $D \in \mathcal{M}$, segue do Teorema da Convergência Monótona que $\mathcal{X}_{E \cap D} \in L(\mu, \mathbb{R})$ para todo $D \in \mathcal{M}$. Reciprocamente, se $\mu(E) < \infty$, então $\mathcal{X}_{E \cap D}$ para todo $D \in \mathcal{M}$. Substituindo D por $D \cap E_i$, concluímos que $\mu(E_i) < \infty$, $\forall i$. Logo

$$\sum_{i=1}^k \mu(E_i) = \int_X \mathcal{X}_{\tilde{E}_k} d\mu_{\mathcal{A}} \leq C := \mu(E) < \infty.$$

Temos então que

$$\mathcal{X}_{\tilde{E}_k \cap D} \nearrow \mathcal{X}_{E \cap D} \text{ quando } k \rightarrow \infty, \forall D \in \mathcal{M}, \forall x \in X.$$

Decorre então do teorema da convergência monótona que $\mathcal{X}_{E \cap D} \in L(\mu, \mathbb{R})$ para todo $D \in \mathcal{M}$ e

$$\mu(E) = \int_X \mathcal{X}_E d\mu_{\mathcal{A}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \mathcal{X}_{\tilde{E}_k} d\mu_{\mathcal{A}} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

□

A partir deste momento, μ designará a medida completa construída no teorema anterior. Consequentemente, $\int_X f d\mu$ denotará a integral $\int_X f d\mu_{\mathcal{A}}$.

Lema 4.2.3 *Seja $f \in L(\mu, Y)$. Então, para todo $E \in \mathcal{M}$, temos $\mathcal{X}_E f \in L(\mu, Y)$.*

Demonstração:

Considere funções degrau tais que $f_k \rightarrow f$ em $L(\mu, Y)$. Passando a uma subsequência, podemos supor $f_k(x) \rightarrow f(x)$ qtp. Seja $E \in \mathcal{M}$. Pela definição de $\mathcal{M}$, existe $E' \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ tal que $\mathcal{X}_E = \mathcal{X}_{E'}$ qtp. Decorre do item (iii) daquele Lema que $\mathcal{X}_{E'} f_k \in L(\mu, Y)$ (note que f_k é uma combinação linear de funções características), donde também $\mathcal{X}_E f_k \in L(\mu, Y)$. Como

$$\|\mathcal{X}_E f_k - \mathcal{X}_E f_j\| \leq \|f_k - f_j\|,$$

a sequência $(\mathcal{X}_E f_k)$ é uma sequência de Cauchy em $L(\mu, Y)$. Como $f_k \rightarrow f$ qtp, $\mathcal{X}_E f_k \rightarrow \mathcal{X}_E f$ qtp, seguindo então a afirmação do Teorema 4.1.2(ii). □

4.3 Funções Mensuráveis

Consideremos em Y a σ -álgebra $\mathcal{B}$ de Borel, isto é, a menor σ -álgebra que contém todos os conjuntos abertos. Dada uma função mensurável $f : X \rightarrow Y$, sabemos que $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$ para todo aberto U . É fácil concluir que o mesmo é verdadeiro para todo $U \in \mathcal{B}$. De fato, defina $\mathcal{N}$ a coleção de todos os subconjuntos S de Y tais que $f^{-1}(S) \in \mathcal{M}$. Então $\mathcal{N}$ é uma σ -álgebra e $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}$.

Definição 4.3.1 Função de Borel

Sejam Y, Z espaços de Banach. Uma função de Borel é uma função $f : X \rightarrow Y$ tal que a imagem inversa de conjuntos abertos em Z são elementos de $\mathcal{B}$.

Observação: Funções contínuas $f : Y \rightarrow Z$ são funções de Borel.

Lema 4.3.2 *Seja X um espaço métrico separável. Então todo subconjunto de X é separável.*

Demonstração:

Suponhamos que $A \subset X$ não seja vazio e que $\{x_k; k \in \mathbb{N}\}$ seja denso em X . Escolha $a_{kj} \in A$ tal que

$$d(x_k, a_{kj}) \leq \text{dist}(x_k, A) + \frac{1}{j}.$$

Dados $a \in A$ e $\epsilon > 0$, existe x_{k_ϵ} tal que $d(a, x_{k_\epsilon}) \leq \epsilon/3$. Então, para j suficientemente grande, vale:

$$\begin{aligned} d(a, a_{k_\epsilon j}) &\leq d(a, x_{k_\epsilon}) + d(x_{k_\epsilon}, a_{k_\epsilon j}) \\ &\leq 2d(x_{k_\epsilon}, a_{k_\epsilon j}) + \frac{1}{j} \leq \epsilon, \end{aligned}$$

mostrando que $\{a_{kj}; k, j \in \mathbb{N}\}$ é denso em A . □

Lema 4.3.3

(i) *Sejam $f_j : X \rightarrow Y$ mensuráveis. Se $f = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j$ qtp, então f é mensurável;*

(ii) *Se $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$ forem mensuráveis, então*

$$\inf_{j \rightarrow \infty} f_j \text{ e } \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j$$

são mensuráveis (defina arbitrariamente a função nos conjuntos (de medida nula) onde o valor $-\infty$ é assumido).

(iii) *Sejam Z um espaço de Banach, $\phi : Y \rightarrow Z$ uma função de Borel e $f : X \rightarrow Y$ mensurável. Então $\phi \circ f$ é mensurável.*

Demonstração:

(i) Seja $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$ para todo $x \in X \setminus N$, onde N é um conjunto de medida nula tal que $f_j(X \setminus N)$ é separável para todo j . Seja $U \subset Y$ aberto. Defina

$$U_i := \{y \in U; B_{\frac{1}{i}}(y) \subset U\}.$$

Para $x \in X \setminus N$ temos

$$f(x) \in U \Leftrightarrow \exists i, k; f_j(x) \in U_i \quad \text{se } j \geq k,$$

o que significa, usando a linguagem de conjuntos (justifique!)

$$f^{-1}(U) \setminus N = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} f_j^{-1}(U_i) \right) \setminus N \in \mathcal{M}.$$

Além disto,

$$f(X \setminus N) \subset \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} f_j(X \setminus N)},$$

que é separável (mostre!).

(ii) Seja $g(x) := \inf_{j \in \mathbb{N}} f_j(x) > -\infty$ para todo $x \in X \setminus N$, onde $\mu(N) = 0$. Então, para todo $a \in R$ vale:

$$g^{-1}([a, \infty)) \setminus N = \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} f_j^{-1}([a, \infty)) \right) \setminus N \in \mathcal{M},$$

donde deduzimos a mensurabilidade de g . Da mesma forma, temos que $g_k := \inf_{j \geq k} f_j$ são mensuráveis. De acordo com (i), também

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k$$

é mensurável.

(iii) Seja N um conjunto de medida nula tal que $f(X \setminus N)$ seja separável. Então $\phi \circ f(X \setminus N) = \phi[f(X \setminus N)]$ é separável. Seja $U \subset Z$ aberto. Então $\phi^{-1}(Z) \in \mathcal{B}$, donde $f^{-1}[\phi^{-1}(Z)] \in \mathcal{M}$ $\square$

Corolário 4.3.4 *Se existir uma sequência de funções degrau (f_k) tal que $f_k \rightarrow f$ qtp, então f é mensurável. Em particular, toda $f \in L(\mu, Y)$ é mensurável.*

Demonstração:

É imediato.

Teorema 4.3.5 (Egorov)

Suponha que $\mu(X) < \infty$ e que f_j, f sejam mensuráveis. Então são equivalentes:

(i) $f_j \rightarrow f$ qtp;

(ii) $f_j \rightarrow f$ μ -uniformemente, isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $E_\epsilon \in \mathcal{M}$ com $\mu(X \setminus E_\epsilon) \leq \epsilon$ tal que

$$f_j \rightarrow f \quad \text{uniformemente em } E_\epsilon.$$

Demonstração:

(ii) “ $\Rightarrow$ ” (i) Seja $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$. Então $\mu(X \setminus E) = 0$ e $f_j(x) \rightarrow f(x)$ para $x \in E$.

(i) “ $\Rightarrow$ ” (ii) Dado $\epsilon > 0$, considere $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(X \setminus E) = 0$ e $f_j(x) \rightarrow f(x)$ se $x \in E$.

Considere

$$E_{k,n} := \{x \in E; \|f_j(x) - f(x)\| < \frac{1}{n} \text{ se } j \geq k\} \in \mathcal{M} \quad \text{justifique!}.$$

Então, para todo n ,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{k,n} = E,$$

e $E_{k,n} \subset E_{k+1,n}$. Assim, existe um k_n tal que

$$\mu(E \setminus E_{k_n,n}) \leq \epsilon 2^{-n}.$$

Logo, definindo

$$E_{\epsilon} := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{k_n,n},$$

temos $\mu(X \setminus E_{\epsilon}) \leq \epsilon$ e $f_j \rightarrow f$ uniformemente em E_{ϵ} . □

Teorema 4.3.6 *Seja $f : X \rightarrow Y$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) f é mensurável e se anula fora de um subconjunto σ -finito de X ;
- (ii) f é o limite qtp de funções degrau.

Demonstração:

(ii) $\Rightarrow$ (i) Decorre imediatamente do Corolário 4.3.4.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Podemos supor que X seja uma união disjunta de subconjuntos X_k de medida finita (justifique!). Se provarmos que, para cada k , existe uma sequência de funções degrau $(g_j^{(k)})_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} g_j^{(k)} = f|_{X_k} \text{ qtp,}$$

o resultado estará provado. De fato, se definirmos então

$$\begin{aligned} g_n(x) &:= g_n^{(k)} \text{ em } X_k, \text{ se } k = 1, \dots, n, \\ g_n(x) &:= 0 \text{ se } x \notin X_1 \cup \dots \cup X_n, \end{aligned}$$

temos que (g_n) é uma sequência de funções degrau que converge para f qtp. Isto mostra que podemos considerar apenas o caso em que X tem medida finita.

Podemos também supor que a imagem de f contém um subconjunto denso $\{v_k\}$. Para cada n fixo, considere a cobertura aberta $B_{1/n}(v_k)$ ($1 \leq k < \infty$) da imagem de f . A partir desta cobertura aberta, podemos obter uma cobertura disjunta: basta considerar os conjuntos $B_{1/n}(v_1)$, $B_{1/n}(v_2) \setminus B_{1/n}(v_1), \dots, B_{1/n}(v_j) \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} B_{1/n}(v_i), \dots$. Todos estes conjuntos estão na σ -álgebra de Borel do conjunto Y , donde suas imagens inversas são mensuráveis. Para $1 \leq j \leq k$, seja

$$E_j = f^{-1} \left(B_{1/n}(v_j) \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} B_{1/n}(v_i) \right) \in \mathcal{M}.$$

Cada um dos conjuntos E_j tem medida finita, pois já nos restringimos ao caso em que X tem medida finita. Decorre imediatamente da definição da medida em $\mathcal{M}$ que $\chi_{E_j} \in L(\mu, \mathbb{R})$, donde, de acordo com o Lema 4.2.1, existem conjuntos $A_j \in \mathcal{A}$, dois a dois disjuntos, tais que $A_j \subset E_j$ e $\mu(E_j) - \mu(A_j)$ é arbitrariamente pequena (justifique!). Assim, para k suficientemente grande,

$$A_1 \cup \dots \cup A_k = X \setminus Y_n,$$

com $\mu(Y_n) < 1/2^n$.

Defina, para $x \in A_j$ ($1 \leq j \leq k$), $g_n(x) = v_j$, $g_n(Y_n) \equiv 0$. Cada g_n é uma função degrau tal que

$$|f(x) - g_n(x)| < 1/n \text{ se } x \notin Y_n.$$

Seja então

$$Z_n := \bigcup_{j=n}^{\infty} Y_j.$$

Vale $\mu(Z_n) \leq 1/2^{n-1}$ e $Z_n \supset Z_{n+1} \supset \dots$. Defina então

$$f_n(x) := \begin{cases} g_n(x) & \text{se } x \in X \setminus Z_n \\ 0 & \text{se } x \in Z_n \end{cases}$$

Cada f_n converge a f exceto talvez na interseção de todos os Z_n , que é um conjunto de medida nula. $\square$

4.4 O Teorema da Convergência Dominada

Lema 4.4.1 Lema de Fatou

Sejam $f_n \in L(\mu, \mathbb{R})$ tais que $f_n \geq 0$ qtp. Suponha que

$$\liminf \int_X f_n d\mu \in [0, \infty)$$

(isto é, que o $\liminf$ acima exista). Então existe

$$\liminf f_n(x) \text{ qtp,}$$

$\liminf f_n \in L(\mu, \mathbb{R})$ e

$$\int_X \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu = \liminf \|f_n\|_{L(\mu)}.$$

Demonstração:

Consideramos inicialmente a sequência (g_m) , definida por

$$g_m(x) := \inf\{f_k(x), f_{k+1}, \dots, f_{k+m}\}.$$

Para cada k , tal sequência é decrescente e converge pontualmente a $\inf_{n \geq k} f_n$. Uma vez que

$$\int_X \inf\{f_k, \dots, f_{k+m}\} d\mu \leq \int_X f_{k+j} d\mu \text{ para } j = 1, \dots, m,$$

para podermos aplicar o teorema da convergência monótona (veja exercício 6, abaixo) basta mostrar que as integrais do lado direito da expressão acima são limitadas. Note que

$$\int_X \inf_{n \geq k} f_n d\mu \leq \inf_{n \geq k} \int_X f_n d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n \geq k} \int_X f_n d\mu$$

(a primeira desigualdade decorre imediatamente da desigualdade anterior; a segunda, da definição de $\liminf$).

Assim, pelo teorema da convergência monótona, $\inf_{n \geq k} f_n \in L(\mu, \mathbb{R})$ e $g_m \rightarrow \inf_{n \geq k} f_n$ em $L(\mu, \mathbb{R})$. Seja agora $h_k := \inf_{n \geq k} f_n$. Então (h_k) é uma sequência crescente e o resultado decorre da aplicação do teorema monótona a esta sequência, pois

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = \liminf f_n.$$

□.

Observação: O Lema de Fatou usualmente é utilizado quando a sequência (f_n) converge qtp e as normas $\|f_n\|_{L(\mu)}$ são limitadas, o que assegura que $\lim f_n \in L(\mu, \mathbb{R})$.

Teorema 4.4.2 Teorema da Convergência Dominada

Seja (f_n) uma sequência de funções em $L(\mu, Y)$. Suponha que existam $g \in L(\mu, \mathbb{R})$ e $f : X \rightarrow Y$ tais que

$$\|f_n\| \leq g \quad \forall n \quad \text{e} \quad f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \text{qtp.}$$

Então $f \in L(\mu, Y)$ e

$$\int_X \|f_n - f\| d\mu \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Demonstração:

Defina

$$g_k := \sup_{m, n \geq k} \|f_n - f_m\|.$$

Então $g_k \searrow 0$ qtp. De acordo com o Corolário 4.1.3, temos $g_k \in L(\mu, \mathbb{R})$, pois $\|f_n - f_m\| \leq 2g$. Do teorema da convergência monótona deduzimos que $g_k \rightarrow 0$ em $L(\mu, \mathbb{R})$ e portanto que (f_n) é uma sequência de Cauchy em $L(\mu, Y)$. O afirmado segue então do Teorema 4.1.2(ii). □

4.5 Algumas Aplicações

Teorema 4.5.1 Critério da Majoração

Seja $f : X \rightarrow Y$ mensurável. Suponha que exista $g \in L(\mu, \mathbb{R})$ tal que $\|f\| \leq g$ qtp. Então $f \in L(\mu, Y)$. Em particular, $f \in L(\mu, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \|f\| \in L(\mu, \mathbb{R})$.

Demonstração:

Como $\|f\| \leq g$ qtp, temos que f se anula fora de um conjunto σ -finito de X . Assim, decorre do Teorema 4.3.4 que existe uma sequência (f_k) de funções degrau tais que $g_k \rightarrow f$ qtp. Defina a sequência de funções degrau f_k por

$$f_k(x) := \begin{cases} g_k(x) & \text{se } \|g_k(x)\| \leq 2g(x) \\ 0 & \text{se } \|g_k(x)\| > 2g(x) \end{cases}$$

O conjunto S_k dos pontos x tais que $2g(x) - \|g_k(x)\| \geq 0$ é mensurável, donde $f_k \in L(\mu, Y) \quad \forall k$. Além disto, $f_k \rightarrow f$ qtp e $\|f_k\| \leq 2g$ qtp. Decorre do teorema da convergência dominada que $f \in L(\mu, Y)$ □

Teorema 4.5.2 *Sejam $f \in L^1(\mu, Y)$ e $\nu : \mathcal{M} \rightarrow Y$ definida por*

$$\nu(E) := \int_E f d\mu := \int_X \mathcal{X}_E f d\mu.$$

Então ν é σ -aditiva (com valores em Y !) e

$$\|\nu(E)\| \rightarrow 0 \text{ quando } \mu(E) \rightarrow 0.$$

Demonstração:

A aditividade de ν decorre imediatamente da aditividade da integral (teorema 3.3.1(i)). Seja $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, onde $E_i \in \mathcal{M}$ e $E_i \subset E_{i+1}$. Então temos

$$\mathcal{X}_E f = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{X}_{E_i} f \text{ qtp.}$$

Temos que, de acordo com o lema 4.2.3, $\mathcal{X}_E f \in L(\mu, Y)$, seguindo então do critério de majoração que a sequência $(\mathcal{X}_{E_i} f)$ é uma sequência de funções em $L(\mu, Y)$, cujas normas formam uma sequência monótona. Assim, se $i < j$, temos

$$\begin{aligned} \int_X \|\mathcal{X}_{E_j} f - \mathcal{X}_{E_i} f\| d\mu &= \int_{E_j \setminus E_i} \|f\| d\mu \\ &= \int_{E_j} \|f\| d\mu - \int_{E_i} \|f\| d\mu \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $j, i \rightarrow \infty$.

Concluimos que $\mathcal{X}_{E_i} f \rightarrow \mathcal{X}_E f$ em $L(\mu, Y)$, donde se segue que ν é σ -aditiva. Escolha agora funções degrau

$$f_k = \sum_{i=1}^{n_k} \mathcal{X}_{E_{ki}} \alpha_{ki}$$

tais que $\|f - f_k\|_{L(\mu)} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Então temos

$$\|\nu(E)\| \leq \int_X \|f - f_k\| d\mu + \sum_{i=1}^{n_k} \|\alpha_{ki}\| \mu(E \cap E_{ki}).$$

O primeiro termo tende a zero quando k cresce, enquanto $\mu(E \cap E_{ki})$ tende a zero, para todo k e todo i , quando $\mu(E) \rightarrow 0$. $\square$

Teorema 4.5.3 *Integral de Riemann e Integral de Lebesgue*

*Seja $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função **limitada** definida no compacto $[a, b]$. Suponha que f seja descontínua num conjunto de pontos de medida zero. Então f é Lebesgue-integrável e as integrais de Riemann e Lebesgue são iguais.*

Demonstração:

Como sabemos, qualquer função f com as hipóteses acima é Riemann-integrável, isto é, a integral de Riemann existe. Considere uma partição P do intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b.$$

Seja $m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1})} f(x)$. Então, como sabemos,

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i (x_{i+1} - x_i) \rightarrow \int_a^b f(x) dx,$$

onde $|P|$ denota a norma da partição P e a integral é a integral de Riemann. Note que $\phi_P(x) \rightarrow f(x)$ exceto talvez no conjunto de pontos de descontinuidade de f (justifique!). NÃO FOI DEFINIDA ϕ_P !

Por outro lado, as funções ϕ_P são funções degrau, donde Lebesgue-integráveis. Além disto, como f é limitada, existe C tal que $|f(x)| < C \quad \forall x \in [a, b]$. Assim,

$$|\phi_P(x)| \leq C.$$

Decorre do teorema da convergência dominada que

$$\begin{aligned} \int_{[a,b)} \phi_P d\mu &= \sum_{i=1}^n m_i (x_{i+1} - x_i) \\ &\rightarrow \int_{[a,b)} f d\mu \end{aligned}$$

□

Em virtude deste resultado, é usual denotar a integral de Lebesgue por

$$\int_a^b dx,$$

entendendo que dx é a medida de Lebesgue.

4.6 Exercícios

1. Seja S um conjunto qualquer e Y um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$. Definimos o espaço das funções limitadas $B(S, Y)$ por

$$B(S, Y) := \{f : S \rightarrow Y; f(S) \text{ é limitado}\}.$$

Mostre que $B(S, Y)$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{sup}$, definida por

$$\|f\|_{sup} := \sup_{x \in S} \|f(x)\|.$$

2. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e fechado. Defina

$$C^0(S) := \{f : S \rightarrow \mathbb{K}; f \text{ é contínua}\}.$$

Mostre que $C^0(S)$ é um subespaço fechado de $B(S) := B(S, \mathbb{K})$, donde um espaço de Banach. É possível considerar subconjuntos S de um espaço métrico qualquer?

Definição 4.6.1 *Seja $f : \Omega \rightarrow Y$ uma função qualquer. Definimos o suporte de f , denotado $\text{supp } f$, por*

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}.$$

3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Seja (K_m) uma sequência de compactos tais que

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \Omega,$$

$$K_m \subset K_{m+1}$$

e, se $K \subset \Omega$ for um compacto, então

$$K \subset K_m \text{ para algum } m.$$

Mostre que

$$C^0(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}; f \text{ é contínua em } \Omega\}$$

é um espaço métrico completo com a métrica de Frechet

$$\rho(f) := \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{\|f\|_{B(K_m)}}{1 + \|f\|_{B(K_m)}}.$$

Além disto, $\rho(f_k - f) \rightarrow 0 \Leftrightarrow f_k \rightarrow f$ uniformemente $\forall K_m \subset \Omega$ compacto.

Mostre também que

$$C_0^0(\Omega) := \{f \in C^0(\Omega); \text{supp } f \subset K_m \text{ para algum } m\}$$

não é um subconjunto fechado de $C^0(\Omega)$.

4. Seja $C_0^0(\mathbb{R}^n, Y)$ o conjunto das funções contínuas $f : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$ com suporte compacto. Mostre que $C_0^0(\mathbb{R}^n, Y)$ é denso em $L(\mu, Y)$.

5. Mostre que qualquer conjunto aberto ou fechado é mensurável na σ -álgebra de Lebesgue (isto é, aquela gerada pela álgebra de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$).

6. Mostre a seguinte versão do teorema da convergência monótona: Seja (f_n) uma sequência monótona de funções reais em $L(\mu, \mathbb{R})$. Suponha que a sequência de integrais

$$\int_X f_n d\mu$$

seja limitada. Então (f_n) é uma sequência que converge tanto em $L(\mu, \mathbb{R})$ como qtp para uma função $f \in L(\mu, \mathbb{R})$.

7. Seja $f_n \in L(\mu, Y)$ tal que $f_n \rightarrow f$ qtp. Suponha que $\|f_n\|_{L(\mu)} \leq C$ para todo n . Mostre que $f \in L(\mu, Y)$ e que $\|f\|_{L(\mu)} \leq C$. Dê um exemplo mostrando que não necessariamente temos $f_k \rightarrow f$ em $L(\mu)$. Como proceder de modo a obter convergência em $L(\mu, Y)$?

8. Seja $f \in L(\mu, Y)$ e $g : X \rightarrow \mathbb{K}$ uma função limitada e mensurável. Mostre que $gf \in L(\mu, Y)$.

9. Seja (f_k) uma sequência de funções em $L(\mu, Y)$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L(\mu)} < \infty.$$

Então a serie

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ converge qtp,}$$

$f \in L(\mu, Y)$ e

$$\int_X f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\mu.$$

10. Seja $f \in L(\mu, Y)$. Dado $\epsilon > 0$, existe $E \in \mathcal{M}$ com medida finita tal que

$$\left\| \int_X f d\mu - \int_E f d\mu \right\| < \epsilon.$$

É possível obter $E \in \mathcal{A}$?

11. Seja $f \in L(\mu, Y)$. Seja S um conjunto fechado de Y . Se $E \subset X$ for um conjunto mensurável de medida finita, a integral

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu$$

pode ser vista como a média de f no conjunto E . Suponha que a média de f em E esteja sempre no conjunto S , para todo $E \in \mathcal{M}$ tal que $0 \neq \mu(E) < \infty$. Mostre que $f(x) \in S$ qtp.

12. Mostre que, em $\mathbb{R}^n$, considerando a σ -álgebra $\mathcal{M}$ gerada pela álgebra $\mathcal{A}$ de Lebesgue, então $\mathcal{M}$ consiste de conjuntos na σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}$ e de conjuntos de medida nula. Isto é, dado $E \in \mathcal{M}$, existem $E_1, E_2 \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ é a σ -álgebra de Borel em $\mathbb{R}^n$) tais que $E_1 \subset E \subset E_2$ e $\mu(E_2 \setminus E_1) = 0$.

13. Prove a desigualdade de Young generalizada: dados $a_i \geq 0$ e $1 \leq p_i < \infty$ ($1 \leq i \leq n$) tais que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1,$$

então

$$\prod_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} a_i^{p_i}.$$

14. Seja $g \in L(\mu, \mathbb{R})$ tal que $g > 0$. Mostre que, dado $\epsilon > 0$, existe $E_\epsilon \in \mathcal{M}$, com $\mu(E_\epsilon) < \infty$ tal que

$$\int_{X \setminus E_\epsilon} g \leq \epsilon.$$

Generalize para $g \in L(\mu, Y)$.

15. Generalize para o $\mathbb{R}^n$ a demonstração sobre a equivalência das integrais de Riemann e de Lebesgue.

16. Seja $k \in \mathbb{N}$. Mostre que, se $f \in L(0, 1) := L((0, 1), \mathbb{R})$ (com a medida de Lebesgue), então $x^k f \in L(0, 1)$ e $\int_0^1 x^k f dx \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

17. Dê exemplo de uma função f que não é integrável em $(0, \infty)$, mas cuja integral imprópria de Riemann existe e é finita.

18. Seja f contínua em $[a, b]$. Mostre que f é integrável. Defina, para $a < x < b$,

$$F(x) := \int_a^b f(t) dt.$$

Mostre que F é diferenciável e $F' = f$. Mostre que, no caso de $f \in L(a, b)$, então $F(x)$ é contínua em $[a, b]$.

Capítulo 5

Os espaços L^p

5.1 Definições e Propriedades

Definição 5.1.1 Espaços L^p

Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \rightarrow Y$ mensurável. Para $p \in [1, \infty]$ definimos:

(i) Se $1 \leq p < \infty$,

$$L^p(\mu, Y) := \{f : X \rightarrow Y \text{ mensurável}; \|f\|^p \in L(\mu, Y)\},$$

(ii) Se $p = \infty$,

$$L^\infty(\mu, Y) := \{f : X \rightarrow Y \text{ mensurável}; \exists N, \text{ com } \mu(N) = 0 \text{ e } \sup_{x \in X-N} \|f(x)\| < \infty\}$$

módulo a relação de equivalência

$$f = g \text{ em } L^p(\mu, Y) \Leftrightarrow f = g \text{ qtp.}$$

Nos espaços $L^p(\mu, Y)$ definimos

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_X \|f\|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

$$\|f\|_{L^\infty} := \sup_{x \in X-N} \|f(x)\|,$$

(outra notação é $\text{ess sup}_X \|f\|$) onde N é o conjunto de medida nula descrito na definição de $L^\infty(\mu, Y)$.

Para $1 \leq p < \infty$, temos

$$\|f\|_{L^p} \geq \delta [\mu(\{x \in X; \|f(x)\| \geq \delta\})]^{1/p}$$

(justifique!). Assim, para todo $p \in [1, \infty]$ temos

$$\|f\|_{L^p} = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ qtp.}$$

Observação: Se $Y = \mathbb{K}$, denotamos $L^p(\mu, \mathbb{K})$ simplesmente $L^p(\mu)$. No caso de $\Omega \subset X = \mathbb{R}^n$, considerado com a medida de Lebesgue, é usual escrever $L^p(\Omega)$ ao invés de $L^p(\mu)$. Muitas vezes o símbolo $d\mu$ não é escrito, neste caso, na notação da integral. Outras vezes ele é escrito como $d\mathcal{L}^n$ ou $d\mathcal{L}$ ou mesmo dx .

Lema 5.1.2 *O espaço $L^\infty(\mu, Y)$ é um espaço completo.*

Demonstração:

Que L^∞ é um espaço vetorial e $\|\cdot\|_{L^\infty}$ é uma norma, decorre imediatamente das definições.

Seja (f_k) uma sequência de Cauchy em $L^\infty(\mu, Y)$. Então existe um conjunto N de medida nula tal que, para todo $x \in X - N$,

$$\|f_k(x)\| \leq \|f_k\|_{L^\infty} \leq C < \infty, \text{ para todo } k$$

e

$$\|f_k(x) - f_j(x)\| \leq \|f_k - f_j\|_{L^\infty} \rightarrow 0 \text{ quando } k, j \rightarrow \infty.$$

Definimos

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) & \text{se } x \in X - N \\ 0 & \text{se } x \in N \end{cases}$$

Então f é mensurável (como limite qtp de funções mensuráveis) e limitada. Para $x \in X - N$ temos

$$\|f(x) - f_k(x)\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j(x) - f_k(x)\| \leq \|f_j - f_k\|_{L^\infty},$$

desde que k, j sejam suficientemente grandes. Isto mostra que

$$\|f - f_k\|_{L^\infty} \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty,$$

donde $L^\infty(\mu, Y)$ é completo. □

Lema 5.1.3 Desigualdade de Hölder

Sejam $p, q \in [0, \infty]$ tais que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(Diz-se que q é o expoente **conjugado** a p)

Se $f \in L^p(\mu)$ e $g \in L^q(\mu)$, então $fg \in L^1(\mu)$ e

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}.$$

Observação: Neste resultado e nos seguintes nos restringimos à situação de considerarmos $L^p(\mu)$. São possíveis generalizações: no caso de Y ser um espaço de Hilbert, veja os exercícios. Mas situações mais gerais podem ser consideradas. Veja, por exemplo, [2].

Demonstração:

Como $\psi : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ definida por $\psi(x, y) = xy$ é contínua, temos que fg é mensurável. Consideremos inicialmente o caso $p = 1$, o que implica $q = \infty$. Então temos

$$|(fg)(x)| \leq \|g\|_{L^\infty} |f(x)| \text{ qtp,}$$

donde, pelo critério de majoração, $fg \in L^1(\mu)$. Integrando, obtemos o afirmado. O caso $p = \infty$ é simétrico a este. Consideremos, assim, $1 < p, q < \infty$. Notamos que se $\|f\|_{L^p} = 0$ ou $\|g\|_{L^q} = 0$, então o resultado é claro, pois uma das funções seria nula qtp, donde também o produto. Suponhamos, portanto, as duas normas positivas. Afirmamos que, se $a, b \geq 0$ então vale:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad \text{Desigualdade de Young.}$$

Basta prová-la no caso $a > 0$ e $b > 0$. Usando a concavidade da função logaritmo (veja exercício 7 do capítulo 3) obtemos

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b = \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q \leq \ln \left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \right).$$

A afirmação é obtida ao se tomar a exponencial em ambos os lados.

Aplique, na desigualdade de Young,

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} \quad \text{e} \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}}$$

e obtenha

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_{L^p}^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_{L^q}^q}.$$

Decorre do critério de majoração que fg é integrável, pois o lado direito da desigualdade é integrável. Integrando obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\int_X |f(x)g(x)| d\mu}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}} &\leq \frac{\int_X |f(x)|^p d\mu}{p\|f\|_{L^p}^p} + \frac{\int_X |g(x)|^q d\mu}{q\|g\|_{L^q}^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

□

Lema 5.1.4 Desigualdade de Minkowski

Sejam $f, g \in L^p(\mu)$. Então $f + g \in L^p(\mu)$ e

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Demonstração:

O caso $p = 1$ decorre da definição de $L^1(\mu)$. O caso $p = \infty$ já foi tratado. Para $1 < p < \infty$ temos, ponto a ponto¹,

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p) \text{ qtp,}$$

(veja exercício 1), donde $f + g \in L^p(\mu)$. Uma desigualdade mais precisa é

$$\|f + g\|^p \leq \|f\| \|f + g\|^{p-1} + \|g\| \|f + g\|^{p-1}.$$

¹A desigualdade pontual $|f + g|^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$, que também prova que $f + g \in L^p(\mu)$ é trivial: $|f + g| \leq 2 \max\{|f|, |g|\}$. Logo $|f + g|^p \leq 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$.

Como $\|f\|, \|g\| \in L^p(\mu)$, tomando q o expoente conjugado a p , notamos que $\|f + g\|^{p-1} \in L^q(\Omega)$, pois $q(p-1) = p$. Decorre da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} \int_X \|f + g\|^p d\mu &\leq (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \|f + g\|^{p-1} \|1\|_{L^q} \\ &= (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \left(\int_X \|f + g\|^{q(p-1)} d\mu \right)^{1/q} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|f + g\|_{L^p}^p \leq (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \|f + g\|_{L^p}^{p-1}.$$

Se $\|f + g\|_{L^p}$ a desigualdade de Minkowski é trivial; caso contrario, ela é obtida da desigualdade acima por cancelamento. *hfill*□

Teorema 5.1.5 Riesz-Fischer

Para $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mu)$ é um espaço de Banach.

Demonstração:

Uma vez vista a desigualdade de Minkowski, basta provar que $L^p(\mu)$ é completo para $1 < p < \infty$. Seja (f_k) uma sequência de Cauchy em $L^p(\mu)$. Como sequências de Cauchy possuem no máximo um ponto de acumulação, basta provar que uma subsequência converge (justifique!). Passando a uma subsequência, que continuaremos a denotar (f_k) , podemos supor que

$$\|f_k - f_j\|_{L^p} \leq 2^{-j}, \quad \forall k, j \geq i.$$

Então vale

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{k+1} - f_k\|_{L^p} < \infty.$$

Defina

$$g_n(x) := \sum_{i=1}^n |f_{i+1}(x) - f_i(x)| \in L^p(\mu).$$

Decorre do Lema de Fatou e da desigualdade de Minkowski que

$$\begin{aligned} \int_X (\lim_{n \rightarrow \infty} g_n^p) d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n^p d\mu = (\liminf_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_{L^p})^p \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|f_{i+1} - f_i\|_{L^p} \right)^p < \infty. \end{aligned}$$

Isto mostra que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) < \infty \text{ qtp.}$$

Portanto, podemos concluir que $(f_k(x))$ é uma sequência de Cauchy qtp (compare com a demonstração do lema fundamental da integração).

Aplicando novamente o lema de Fatou, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f - f_n|^p d\mu &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_X |f_m - f_n|^p d\mu = (\liminf_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\|_{L^p})^p \\ &\leq \left(\sum_{i=n}^{\infty} \|f_{i+1} - f_i\|_{L^p} \right)^p \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

□

5.2 O Teorema da Convergência Dominada

Teorema 5.2.1 Teorema da Convergência de Vitali

Sejam $f_n \in L^p(\mu, Y)$ com $1 \leq p < \infty$. Suponhamos que $f_n \rightarrow f$ qtp. São equivalentes:

(i) $f \in L^p(\mu, Y)$ e $\|f - f_n\|_{L^p} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$;

(ii)

$$\sup_n \int_E \|f_n\|^p d\mu \rightarrow 0 \text{ quando } \mu(E) \rightarrow 0$$

e, dado $\epsilon > 0$, existe E_ϵ com $\mu(E_\epsilon) < \infty$ tal que

$$\sup_n \int_{X-E_\epsilon} \|f_n\|^p d\mu \leq \epsilon.$$

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii) De acordo com a desigualdade de Minkowski (veja exercício 6), temos

$$\left(\int_E \|f_n\|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_E \|f\|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X \|f_n - f\|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

De acordo com o teorema 4.4.4, a primeira integral à direita tende a zero quando $\mu(E) \rightarrow 0$, enquanto a segunda tende a zero por hipótese. Logo, dado $\epsilon > 0$, existe n_ϵ e δ_ϵ tais que

$$\int_E \|f_n\|^p d\mu \leq \epsilon \text{ se } n \geq n_\epsilon \text{ e } \mu(E) \leq \delta_\epsilon.$$

Por outro lado, para $1 \leq n < n_\epsilon$, aplicando novamente o teorema 4.4.4, temos que existe $\delta_{n\epsilon} > 0$ tal que

$$\int_E \|f_n\|^p d\mu \leq \epsilon \text{ se } \mu(E) \leq \delta_{n\epsilon},$$

conclusão que então vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto demonstra a primeira afirmação do item (ii). Quanto a segunda, dada $g \in L^1(\mu, \mathbb{R})$ com $g \geq 0$, afirmamos que, dado $\epsilon > 0$, existe $E_\epsilon \in \mathcal{M}$, com $\mu(E_\epsilon) < \infty$ tal que

$$\int_{X-E_\epsilon} g d\mu \leq \epsilon$$

(veja exercício 14 do capítulo 4). De fato, para $0 < \epsilon < 1$, considere $E_\epsilon := \{\epsilon \leq g \leq (1/\epsilon)\}$. Então vale:

$$\int_X g d\mu \geq \int_{E_\epsilon} g d\mu \geq \epsilon \mu(E_\epsilon).$$

Decorre daí que $\mu(E_\epsilon) < \infty$. Além disto, se $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1 < 1$, temos $E_{\epsilon_1} \subset E_{\epsilon_2}$. Defina

$$E := \bigcup_{0 < \epsilon < 1} E_\epsilon = \{0 < g < \infty\}.$$

Escolhendo uma sequência $\epsilon_n \rightarrow 0$, temos

$$\int_{X-E_{\epsilon_n}} g d\mu \rightarrow \int_{X-E} g d\mu = \int_{g=0} g d\mu = 0,$$

donde concluimos a prova de que (i) $\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Considere um conjunto E_ϵ , com $\mu(E_\epsilon) < \infty$, tal que

$$\sup_n \int_{X-E_\epsilon} \|f_n\|^p d\mu < \epsilon.$$

De acordo com o teorema de Egorov, $f_n \rightarrow f$ μ -uniformemente em E_ϵ , isto é, existe um conjunto $A_\epsilon \subset E_\epsilon$ tal que $\mu(E_\epsilon - A_\epsilon) \leq \epsilon$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente em A_ϵ . Segue daí que

$$\int_X \|f_n - f_m\|^p d\mu \leq \int_{A_\epsilon} \|f_n - f_m\|^p d\mu + \int_{X-A_\epsilon} \|f_n - f_m\|^p d\mu$$

Temos

$$\int_X \|f_n - f_m\|^p d\mu \leq \mu(A_\epsilon) \operatorname{ess\,sup}_{A_\epsilon} \|f_n - f_m\|^p.$$

Para todo $\epsilon > 0$ tal termo tende a zero desde que se tome m, n suficientemente grandes. Por outro lado, usando a desigualdade de Minkowski,

$$\begin{aligned} \int_{X-A_\epsilon} \|f_n - f_m\|^p d\mu &\leq \int_{X-A_\epsilon} (\|f_n\|^p + \|f_m\|^p) d\mu \\ &\leq 2 \left[\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{X-E_\epsilon} \|f_k\|^p d\mu + \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{E_\epsilon-A_\epsilon} \|f_k\|^p d\mu \right] \end{aligned}$$

O primeiro termo é menor que $2^p \epsilon$, enquanto o segundo tende a zero quando $\mu(E_\epsilon - A_\epsilon) \rightarrow 0$, isto é, quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Isto mostra que (f_k) é uma sequência de Cauchy em $L^p(\mu, Y)$. De acordo com o teorema de Riesz-Fischer (veja exercício 6, abaixo), existe $g \in L^p(\mu, Y)$ tal que $f_k \rightarrow g$ em $L^p(\mu, Y)$. Passando a uma subsequência, obtemos $f_n \rightarrow g$ qtp, o que mostra que $f = g$ qtp. $\square$

Teorema 5.2.2 Teorema da Convergência Dominada

Sejam Y_1 e Y_2 espaços de Banach. Suponha que $g_n \rightarrow g$ em $L^q(\mu, Y_2)$, onde $q \in [1, \infty)$. Sejam $f_n, f : X \rightarrow Y_1$ funções mensuráveis satisfazendo

(i) $f_n \rightarrow f$ qtp;

(ii) $\|f_n\|^p \leq \|g_n\|^q$ qtp,

onde $p \in [1, \infty)$. Então $f_n \rightarrow f$ em $L^p(\mu, Y_1)$

Demonstração:

Pelo critério da majoração, temos $f_n \in L^p(\mu, Y_1)$. Temos também que

$$\sup_n \int_E \|f_n\|^p d\mu \leq \sup_n \int_E \|g_n\|^q d\mu.$$

De acordo com o teorema da convergência de Vitali, a integral do lado direito da desigualdade tende a zero quando $\mu(E)$ tende a zero. Da mesma forma se mostra a segunda afirmação naquele teorema. Isto mostra que f_n satisfaz às exigências do teorema da convergência de Vitali, donde decorre o resultado. $\square$

5.3 Aproximação em L^p

FALTA TERMINAR!

O resultado seguinte é a generalização para $L^p(\mu, Y)$ de uma propriedade básica de $L(\mu, Y)$.

Lema 5.3.1 *Seja $f \in L^p(\mu, Y)$, onde $p \in [1, \infty)$. Então existem funções simples f_k , sobre conjuntos na σ -álgebra $\mathcal{M}$, tais que*

$$\|f - f_k\|_{L^p} \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Demonstração:

Defina, para $0 < \epsilon < 1$,

$$E_\epsilon := \{\epsilon < \|f\| \leq 1/\epsilon\}.$$

Temos então

$$\int_X \|f\|^p d\mu \geq \epsilon^p \mu(E_\epsilon),$$

o que mostra que $\mu(E_\epsilon) < \infty$. Uma vez que E_ϵ é mensurável, temos que $\mathcal{X}_{E_\epsilon} f$ é mensurável. Como

$$\|\mathcal{X}_{E_\epsilon} f\| \leq \frac{1}{\epsilon} \mathcal{X}_{E_\epsilon} \in L(\mu, \mathbb{R}),$$

temos que $\mathcal{X}_{E_\epsilon} f \in L(\mu, Y)$, de acordo com o critério da majoração. Logo, existem funções salto $g_{\epsilon k}$ tais que $g_{\epsilon k} \rightarrow \mathcal{X}_{E_\epsilon} f$ em $L(\mu, Y)$. Considere então as seguintes funções salto:

$$f_{\epsilon k}(x) := \begin{cases} g_{\epsilon k}(x) & \text{se } x \in E_\epsilon \text{ e } \|g_{\epsilon k}(x)\| \leq 2/\epsilon, \\ \frac{2g_{\epsilon k}(x)}{\epsilon\|g_{\epsilon k}(x)\|} & \text{se } x \in E_\epsilon \text{ e } \|g_{\epsilon k}(x)\| > 2/\epsilon, \\ 0 & \text{se } x \in X - E_\epsilon \end{cases}$$

(interprete!).

Para $x \in E_\epsilon$ com $\|g_{\epsilon k}(x)\| > 2/\epsilon$ temos

$$\begin{aligned} \|f_{\epsilon k}(x) - f(x)\| &\leq \|f_{\epsilon k}(x)\| + \|f(x)\| \\ &\leq \frac{3}{\epsilon} \\ &\leq 3(\|g_{\epsilon k}(x)\| - \|f(x)\|) \\ &\leq 3\|g_{\epsilon k}(x) - f(x)\|. \end{aligned}$$

Decorre daí que $f_{\epsilon k} \rightarrow \mathcal{X}_{E_\epsilon} f$ quando $k \rightarrow \infty$ em $L(\mu, Y)$ e

$$\int_X \|f - f_{\epsilon k}\|^p d\mu \leq \int_{X \setminus E_\epsilon}$$

FALTA TERMINAR

O próximo resultado é um fato básico sobre espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$. Sua demonstração pode ser encontrada, *e.g.*, em Rudin, *Real And Complex Analysis*, 3rd. Edition, Thm. 3.14, p. 69.

Lema 5.3.2 *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, em que $1 \leq p < \infty$. Então existem $f_k \in C_o^0(\mathbb{R}^n)$ tais que $\|f - f_k\|_{L^p} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.*

Observação: Este resultado não vale em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, pois o limite uniforme de funções contínuas é sempre uma função contínua.

Teorema 5.3.3 *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, a aplicação*

$$\mathbb{R}^n \ni h \mapsto f(x+h) \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

é contínua. Ou, dito de outra maneira,

$$\|f(\cdot + h) - f\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad |h| \rightarrow 0,$$

em que $f(\cdot + h)$ denota a função $x \mapsto f(x+h)$.

Demonstração:

É fácil perceber que basta mostrar a continuidade da função em $h = 0$, que é justamente a segunda expressão dada. Tome, de acordo com o lema anterior, $f_j \in C_o^0(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - f_j\|_{L^p} \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$. Então vale, se denotarmos K_j o suporte de $\{f_j(\cdot + h) - f_j\}$

$$\begin{aligned} \|f(\cdot + h) - f\|_{L^p} &\leq \|f(\cdot + h) - f_j(\cdot + h)\|_{L^p} + \|f_j(\cdot + h) - f_j\|_{L^p} \\ &\quad + \|f_j - f\|_{L^p} \\ &\leq 2\|f - f_j\|_{L^p} \\ &\quad + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f_j(x+h) - f_j(x)| \left(\int_{K_j} dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$

Uma vez que as funções f_j são uniformemente contínuas, o segundo termo do lado direito da desigualdade tende a zero quando $h \rightarrow 0$ para todo j . O outro termo tende a zero quando $j \rightarrow \infty$. Como j pode ser escolhido tão grande quanto se queira, o resultado decorre. $\square$

5.4 Exercícios

1. Mostre que se $a, b > 0$ então

$$\left(\frac{a+b}{2} \right)^p \leq \frac{1}{2}(a^p + b^p).$$

Utilize esta desigualdade para obter $|f+g|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$.

2. Mostre que se (f_n) for uma sequência de Cauchy em $L^p(\mu)$ e se $f_n \rightarrow f$ qtp, então $f \in L^p(\mu)$ e $f_n \rightarrow f$ em $L^p(\mu)$.

3. Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Denote $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno em H . Considere $L^2(\mu, H)$. Então, se $f, g \in L^2(\mu, H)$ mostre que

$$(f, g) \mapsto \int_X (f, g) d\mu$$

define um produto interno em $L^2(\mu, Y)$ e que este espaço é completo.

4. Dê exemplos de funções que estão em $L^p(\mu)$ mas não estão em $L^q(\mu)$.

5. Suponha que $\mu(X) < \infty$. Mostre que $L^p(\mu) \subset L^{p_1}(\mu)$ se $p \geq p_1$. Este é um resultado particularmente importante, pois muitas vezes lidamos com conjuntos abertos limitados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e os correspondentes espaços $L^p(\Omega)$ (para notação, veja definição dos espaços $L^p(\mu, Y)$)

6. Mostre a seguinte generalização da desigualdade de Hölder:

Sejam $f \in L^p(\mu, Y)$ e $g \in L^q(\mu, Y)$, com p e q expoentes conjugados. Então $\|f\| \cdot \|g\| \in L^1(\mu)$ e

$$\| \|f\| \cdot \|g\| \|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}.$$

Deduzza, em seguida, a desigualdade de Minkowski em $L^p(\mu, Y)$ e conclua que $L^p(\mu, Y)$ é um espaço de Banach.

7. Seja $f \in L^p(\mu)$, com $f \geq 0$ qtp. Mostre que, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < M$ qtp, se $x \in X - E_M$, onde $\mu(E_M) < \infty$. Enuncie este resultado em termos de $L^\infty(\mu)$ e compare com o exercício 5, acima. Mostre também que existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $f > \epsilon_1$ qtp se $x \in X - E_\epsilon$, onde $\mu(E_\epsilon) < \epsilon$. Compare com a demonstração do teorema de convergência de Vitali.

8. Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $p \in [1, \infty)$. Então

$$\|f(\cdot + h) - f\|_{L^p} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad h \rightarrow 0.$$

A função $x \mapsto f(x + h)$ esta sendo denotada $f(\cdot + h)$.

9. Para quais $p \geq 1$ temos $\frac{1}{x} \in L^p(0, 1)$? $L^p(1, \infty)$? $L^p(0, \infty)$? Defina também $L^p(a, b)$ para $0 < p < 1$ e responda às mesmas questões. Dê exemplo de uma função f , contínua e limitada em $(0, \infty)$, tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ mas $f \notin L^p(0, \infty)$ para todo $p > 0$.

Capítulo 6

O teorema de Fubini

6.1 A medida produto

Definição 6.1.1 Retângulo no produto cartesiano

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras nos conjuntos X e Y , respectivamente. Um retângulo em $X \times Y$ é um conjunto da forma $A \times B$, onde $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$. Denotaremos $\mathcal{C}$ a coleção de todas as uniões finitas de retângulos disjuntos em $X \times Y$.

Observação: Se interpretarmos $\mathbb{R}^n$ como o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n vezes), a noção de retângulo já havia sido introduzida na definição da álgebra de Lebesgue.

Considere, como exemplo básico para tudo que abordaremos, o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Lema 6.1.2 *A coleção $\mathcal{C}$ é uma álgebra de subconjuntos de $X \times Y$.*

Demonstração:

Comece provando que a interseção e a diferença de dois conjuntos em $\mathcal{C}$ está em $\mathcal{C}$. Conclua que a união e o complementar também estão. Veja exercício 1, abaixo. $\square$

Teorema 6.1.3 *Sejam $\mu_{\mathcal{A}}$ e $\nu_{\mathcal{B}}$ medidas σ -aditivas nas álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente. Considere a álgebra $\mathcal{C}$ formada pela união finita de retângulos dois a dois disjuntos $A \times B$, com $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$. Então existe uma medida σ -aditiva π na álgebra $\mathcal{C}$, tal que*

$$\pi_{\mathcal{C}}(A \times B) = \mu_{\mathcal{A}}(A) \cdot \nu_{\mathcal{B}}(B).$$

Observação: Se as medidas $\mu_{\mathcal{A}}$ e $\nu_{\mathcal{B}}$ forem σ -finitas, decorre do teorema de extensão de Hahn que tal medida π definida na σ -álgebra gerada por $\mathcal{C}$ é única.

Demonstração:

Para facilitarmos a notação, denotaremos as medidas envolvidas simplesmente por μ , ν e π .

Seja $E \in \mathcal{C}$. Então

$$E = \bigcup_{i=1}^n (A_i \times B_i),$$

onde os conjuntos $A_i \times B_i$ são retângulos dois a dois disjuntos. Definimos

$$\pi(E) := \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \nu(B_i).$$

Claramente π é uma medida aditiva na álgebra $\mathcal{C}$. Para mostrarmos a σ -aditividade, basta provarmos que se um retângulo $A \times B$ for a união de uma sequência de retângulos $A_i \times B_i$, dois a dois disjuntos, então

$$\pi(A \times B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \nu(B_i)$$

(justifique!). Além disto, podemos considerar apenas o caso em que todos os conjuntos envolvidos têm medida finita.

Claramente temos

$$\mathcal{X}_{A \times B}(x, y) = \mathcal{X}_A(x) \mathcal{X}_B(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_{A_i}(x) \mathcal{X}_{B_i}(y),$$

para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Mantendo x fixo, considere a sequência crescente

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{X}_{A_i}(x) \mathcal{X}_{B_i}(y) \nearrow \mathcal{X}_A(x) \mathcal{X}_B(y).$$

Decorre do teorema da convergência monótona:

$$\mathcal{X}_A(x) \nu(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_{A_i}(x) \nu(B_i)$$

(veja exercício 9 do capítulo 4; note que $\int_Y \mathcal{X}_{B_i} d\nu = \nu(B_i)$, pois $\nu(B_i) < \infty$).

Aplicando novamente o teorema da convergência monótona, obtemos

$$\mu(A) \nu(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \nu(B_i),$$

completando a demonstração. □

Decorre do teorema acima que integral de Lebesgue pode ser construída à partir das álgebras $\mathcal{C}$ e da medida $\pi_{\mathcal{C}}$, de modo a gerar um espaço de medida $(X \times Y, \mathcal{M}, \pi)$. Para ressaltarmos a propriedade que caracteriza a medida π , é usual denotá-la $\mu \times \nu$. Vamos caracterizar o espaço $L^p(\mu \times \nu, Z)$ (onde Z é um espaço de Banach) com respeito à transformação da integral “dupla” em integral iterada.

Lema 6.1.4 *Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ σ -álgebras nos conjuntos X e Y , respectivamente.*

(i) *Seja $Q \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$. Defina*

$$Q_x := \{y \in Y; (x, y) \in Q\}.$$

Então $Q_x \in \mathcal{N}$.

(ii) Seja $f : X \times Y \rightarrow Z$ uma aplicação mensurável no espaço de Banach Z . Então, para todo $x \in X$, a aplicação

$$f_x : Y \rightarrow Z$$

definida por $f_x(y) := f(x, y)$ é mensurável.

(iii) O mesmo vale a respeito de Q_y e f_y .

Observação: Algumas vezes denomina-se Q_x , Q_y , f_x e f_y as seções x e y de Q e f , respectivamente. Demonstração:

(i) Seja $\mathcal{S}$ a coleção de todos os subconjuntos $Q \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ tais que $Q_x \in \mathcal{N}$ para todo $x \in X$. Então $\mathcal{S}$ contém todos os retângulos $E \times F$ em $X \times Y$. De fato, se $x \in E$, então $\{y \in F; (x, y) \in E \times F\} = F$; se $x \notin E$, este conjunto é vazio.

Para provarmos o afirmado, basta então provar que $\mathcal{S}$ é uma σ -álgebra. Claramente temos que $X \times Y \in \mathcal{S}$. Suponhamos que $Q \in \mathcal{S}$. Uma vez que $(Q^c)_x = (Q_x)^c$, temos que $Q^c \in \mathcal{S}$. Da mesma forma, se $P, Q \in \mathcal{S}$, então $(P \cup Q)_x = P_x \cup Q_x$, mostrando que uniões finitas de elementos em $\mathcal{S}$ estão em $\mathcal{S}$. Finalmente, se $Q_n \in \mathcal{S}$, é fácil ver que

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \right)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Q_n)_x,$$

donde $\mathcal{S}$ é uma σ -álgebra.

(ii) Seja $V \subset Z$ um aberto. Como

$$(f^{-1}(V))_x = f_x^{-1}(V),$$

vemos que a imagem inversa de um aberto por f_x é mensurável. Seja N um conjunto de medida nula tal que $f(X \times Y \setminus N)$ seja separável. Como $f_x(X \times Y \setminus N) = f(X \times Y \setminus N)_x$, concluímos que f_x é mensurável.

(iii) A demonstração é análoga a de (i) e (ii). □

Lema 6.1.5 *Suponhamos que N seja um conjunto de medida nula em $X \times Y$. Então, para quase todo $x \in X$,*

$$\{y \in Y; (x, y) \in N\} = N_x$$

é um conjunto de medida nula em Y .

Demonstração:

Dado $\epsilon > 0$, existem conjuntos $A_i \in \mathcal{A}$, $B_i \in \mathcal{B}$ tais que

$$N \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \pi(A_i \times B_i) \leq \epsilon.$$

Considere a função:

$$g_{\epsilon n}(x, y) := \sum_{i=1}^n \chi_{A_i}(x) \chi_{B_i}(y).$$

Para todo $x \in X$ fixo, $(g_{\epsilon n})_x \in L(\nu, \mathbb{R})$ e

$$G_{\epsilon n}(x) := \int_Y (g_{\epsilon n})_x d\nu = \sum_{i=1}^n \mathcal{X}_{A_i}(x) \nu(B_i).$$

Além disto, $G_{\epsilon n} \in L(\mu, \mathbb{R})$ e

$$\int_X G_{\epsilon n} d\mu = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \nu(B_i) \leq \epsilon.$$

Quando $n \rightarrow \infty$ temos

$$G_{\epsilon n}(x) \nearrow G_{\epsilon}(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_{A_i}(x) \nu(B_i),$$

decorre do teorema da convergência dominada que $G_{\epsilon} \in L(\mu, \mathbb{R})$ e

$$\int_X G_{\epsilon} d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X G_{\epsilon n} d\mu \leq \epsilon.$$

Decorre daí que $G_{\epsilon} \rightarrow 0$ in $L(\mu, \mathbb{R})$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, donde concluimos que $G_{\epsilon}(x) \rightarrow 0$ *qtp* em x . Consideraremos a seguir apenas tais $x \in X$.

Por outro lado, quando $n \rightarrow \infty$,

$$\int_Y (g_{\epsilon n})_x d\nu = G_{\epsilon n}(x) \nearrow G_{\epsilon}(x) < \infty$$

e

$$(g_{\epsilon n})_x(y) \nearrow (g_{\epsilon})_x(y) := \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_{A_i}(x) \mathcal{X}_{B_i}(y).$$

Assim, decorre do teorema da convergência monótona que $(g_{\epsilon})_x \in L(\nu, \mathbb{R})$ e

$$\int_Y (g_{\epsilon})_x d\nu = (G_{\epsilon})_x.$$

Logo $(g_{\epsilon})_x \rightarrow 0$ em $L(\nu, \mathbb{R})$, donde existe uma subsequência $\epsilon \rightarrow 0$ (que depende do ponto x !) tal que $(g_{\epsilon})_x(y) \rightarrow 0$ *qtp* em y . Como

$$(g_{\epsilon})_x(y) \geq \mathcal{X}_{N_x}(y),$$

devemos ter $\mathcal{X}_{N_x}(y) = 0$ *qtp* em y . □

Lema 6.1.6 *Sejam $f \in L^1(\mu, Y)$ e $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$, o espaço das transformações lineares contínuas do espaço de Banach Y no espaço de Banach Z . Então $T \circ f \in L^1(\mu, Z)$ e*

$$\int_X T \circ f d\mu = T \left(\int_X f d\mu \right).$$

Demonstração:

Aproxime $f \in L(\mu, Y)$ por funções salto

$$f_k = \sum_{i=1}^{n_k} \chi_{A_{ki}} \alpha_{ki}, \quad \alpha_{ki} \in Y, \quad \mu(A_{ki}) \leq \infty.$$

Como T é contínua, temos

$$\begin{aligned} T \left(\int f d\mu \right) &\leftarrow T \left(\int_X f_k d\mu \right) = T \left(\sum_{i=1}^{n_k} \mu(A_{ki}) \alpha_{ki} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n_k} \mu(A_{ki}) T \alpha_{ki} = \int_X T \circ f_k d\mu. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\int_X \|T \circ f_k - T \circ f_j\| d\mu \leq \|T\| \int_X \|f_k - f_j\| d\mu \rightarrow 0,$$

vemos que $(T \circ f_k)$ é uma sequência de Cauchy em $L^1(\mu, Z)$, donde existe $g \in L^1(\mu, Z)$ tal que

$$T \circ f_k \rightarrow g \quad \text{em } L^1(\mu, Z),$$

quer dizer,

$$\int_X T \circ f_k d\mu \rightarrow \int_X g d\mu.$$

Passando a uma subsequência, $T \circ f_k \rightarrow g$ qtp. Passando a outra subsequência, $f_k \rightarrow f$ qtp, donde $g = T \circ f$ qtp. $\square$

6.2 O Teorema de Fubini

Teorema 6.2.1 Fubini

Sejam Z um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Então

$$J : L^p(\mu \times \nu, Z) \rightarrow L^p(\mu, L^1(\nu, Z))$$

definida por

$$(Jf)(x)(y) = f(x, y)$$

é um isomorfismo linear isométrico. Quer dizer, para toda função $f \in L^p(\mu \times \nu, Y)$, a função $(Jf)(x) = f_x \in L^p(\nu, Z)$ para quase todo $x \in X$ e

$$F(x) := \int_Y f_x d\nu \in L^p(\mu, Z).$$

Reciprocamente, dada $f : X \times Y \rightarrow Z$ mensurável, se $f_x \in L^p(\nu, Z)$ para quase todo $x \in X$, e $F(x) \in L^p(\mu, Z)$, então $f \in L^p(\mu \times \nu, Z)$.

O mesmo resultado vale para

$$\hat{J} : L^p(\mu \times \nu, Z) \rightarrow L^p(\nu, L^p(\mu, Z)),$$

definida analogamente.

No caso particular em que $p = 1$ temos, além disto,

$$\int_X \left(\int_Y Jf d\nu \right) d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu). \quad (6.1)$$

Analogamente,

$$\int_Y \left(\int_X \hat{J}f d\mu \right) d\nu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu). \quad (6.2)$$

Observações:

1. Algumas vezes o papel da positividade é acentuado na formulação deste teorema. Na “recíproca”, exige-se que, para quase todo $x \in X$,

$$\int_Y \|f_x\|^p d\nu \in L^p(\mu, \mathbb{R}).$$

Convença-se que tal hipótese está implícita em nossa formulação.

2. Tendo em vista as equações (6.1) e (6.2), é usual, uma vez demonstrado o teorema de Fubini, suprimir as aplicações J e $\hat{J}$, e escrever o resultado da seguinte maneira:

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu \right) d\nu.$$

Dependendo do contexto, resalta-se que μ e ν referem-se a integração na variáveis x e y respectivamente, denotando-se μ_x ou $\nu(y)$, por exemplo.

Demonstração:

De acordo com o lema 5.2.3, dada $f \in L^p(\mu \times \nu, Z)$, existem funções simples

$$f_k = \sum_{i=1}^m \mathcal{X}_{C_i} \alpha_i, \quad C_i \in \mathcal{C}, \quad \mu(A_i) < \infty, \quad \alpha_i \in Z$$

(com m , A_i e α_i dependendo de k) que convergem a f no espaço $L^p(\mu \times \nu, Z)$. Pela definição da álgebra $\mathcal{C}$, tais funções podem ser representadas como

$$f_k = \sum_{i,j=1}^n \mathcal{X}_{A_i \times B_j} \alpha_{ij}, \quad A_i \in \mathcal{A}, \quad B_j \in \mathcal{B}, \quad \alpha_{ij} \in Y.$$

onde tanto os A_i como os B_j são disjuntos e possuem medida finita (compare com a representação usada nos teoremas anteriores). Então, para todo $x \in X$,

$$(Jf_k)(x) = (f_k)_x = \sum_{i,j=1}^n \mathcal{X}_{A_i}(x) \mathcal{X}_{B_j} \alpha_{ij} \in L^p(\nu, Z)$$

e

$$\|(Jf_k)(x)\|_{L^p(\nu)}^p = \|(f_k)_x\|_{L^p(\nu)}^p = \sum_{i,j=1}^n \mathcal{X}_{A_i}(x) \mu(B_i) \|\alpha_{ij}\|_Z^p.$$

Temos então que $Jf_k \in L^p(\mu, L^p(\nu, Z))$. De fato,

$$\begin{aligned} \|Jf_k\|_{L^p(\mu)} &= \int_X \|(Jf_k)(x)\|_{L^p(\nu)}^p d\mu \\ &= \int_X \|(f_k)_x\|_{L^p(\nu)}^p d\mu \\ &= \sum_{i,j=1}^n \mu(A_i) \nu(B_i) \|\alpha_{ij}\|_Z^p \\ &= \|f_k\|_{L^p(\mu \times \nu)}^p. \end{aligned}$$

Uma vez que $Jf_k - Jf_j = J(f_k - f_j)$ também é uma função simples, decorre da igualdade acima que

$$\|Jf_k - Jf_j\|_{L^p(\mu)}^p = \|f_k - f_j\|_{L^p(\mu \times \nu)}^p \rightarrow 0$$

quando $k, j \rightarrow \infty$. Isto mostra que (Jf_k) é uma sequência de Cauchy no espaço completo $L^p(\mu, L^p(\nu, Z))$. Logo

$$Jf_k \rightarrow F \in L^p(\mu, L^p(\nu, Z)).$$

Passando a uma subsequência, obtemos que

$$(Jf_k)(x) = (f_k)_x \rightarrow F(x) \text{ qtp em } x.$$

Por outro lado, como $f_k \rightarrow f$ em $L^p(\mu \times \nu, Z)$, passando a uma subsequência temos que

$$f_k(x, y) \rightarrow f(x, y) \text{ qtp em } (x, y).$$

Decorre então do lema 6.2.5 que, para quase todo x fixo,

$$f_k(x, y) = (f_k)_x(y) \rightarrow (f)_x(y) = f(x, y) \text{ qtp em } y.$$

Concluimos, portanto, que

$$F(x) = f_x \text{ qtp em } x,$$

o que significa que

$$F = Jf.$$

Decorre então do anteriormente mostrado que

$$\|Jf\|_{L^p(\mu)} = \|f\|_{L^p(\mu \times \nu)},$$

o que completa a prova de que Jf está bem definida e é isométrica (e portanto injetiva). Concluimos, portanto, que a imagem de J é um conjunto fechado (justifique!). Para mostrarmos que J é sobre, basta mostrar, portanto, que a imagem de J é densa em $L^p(\mu, L^p(\nu, Z))$. Para isto considere um

elemento em $h \in L^p(\mu, L^p(\nu, Z))$. De novo pelo lema 5.2.3, h pode ser aproximado por combinação linear de funções simples:

$$\sum_{i=1}^k \mathcal{X}_{A_i} g_i,$$

onde cada elemento $g_i \in L^p(\nu, Z)$ (isto é apenas a definição de função simples!). Por outro lado, como $g_i \in L^p(\nu, Z)$, cada g_i pode ser aproximada por funções

$$\sum_{j=1}^m \mathcal{X}_{B_j} \alpha_j.$$

Assim, funções

$$\sum_{i,j=1}^n \mathcal{X}_{A_i} \mathcal{X}_{B_j} \alpha_{ij}$$

aproximam h . Mas estas funções estão na imagem de J , o que completa a prova da primeira afirmação.

Falta provar a igualdade (6.1) no caso $p = 1$. Para isto usaremos o lema 6.2.6. Para isto, notamos que a integral relativa a ν é uma transformação linear contínua I de $L^1(\nu, Z)$ em Z . Assim, tomando $f_k \rightarrow f$ em $L^1(\mu \times \nu, Z)$ temos, como vimos acima, $Jf_k \rightarrow Jf$ em $L^1(\mu, L^1(\nu, Z))$; por outro lado, decorre do lema 6.2.6 que $I \circ Jf \in L^1(\mu, Z)$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_X \left(\int_Y (Jf) d\nu \right) d\mu &= \int_Y \left(\int_X (Jf) d\mu \right) d\nu \\ &\leftarrow \int_Y \left(\int_X (Jf_k) d\mu \right) d\nu \\ &= \int_X \left(\int_Y (Jf_k) d\nu \right) d\mu \\ &= \int_{X \times Y} f_k d(\mu \times \nu) \\ &\rightarrow \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu). \end{aligned}$$

As afirmações a respeito de $\hat{J}$ são inteiramente análogas. □

6.3 Exercícios

1. Mostre o lema 6.1.1. Mostre que qualquer elemento em $\mathcal{A}$ pode ser expresso como uma união disjunta de retângulos.
2. Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ σ -álgebras geradas pelas álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente. Mostre que a σ -álgebra gerada por $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ coincide com a σ -álgebra $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$.

Capítulo 7

Algumas Aplicações

7.1 Funções definidas por integrais

Teorema 7.1.1 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrável em cada subintervalo compacto I e*

$$F(s) := \int_a^s f(t)dt.$$

Então F é contínua em cada ponto de I e satisfaz $F'(s) = f(s)$ em cada ponto s onde f é contínua.

Demonstração:

Seja $\mathcal{X}_s$ a função característica do intervalo $[a, s]$. Se $s_k \rightarrow b > a$, então $\mathcal{X}_{s_k}(t) \rightarrow \mathcal{X}_b(t) \forall t \in [a, b]$. Pelo teorema da convergência dominada ($|\mathcal{X}_{s_k}| \leq 1 \in L(a, b)$), temos

$$F(s_k) = \int_{\mathbb{R}} f \mathcal{X}_{s_k} dt \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f \mathcal{X}_b dt = F(b),$$

o que prova que F é contínua. Seja s_0 um ponto de continuidade de f . Então, dado $\epsilon > 0$

$$|f(x) - f(s_0)| \leq \epsilon \text{ se } |x - s_0| \leq \delta.$$

Portanto

$$f(s_0) - \epsilon \leq f(x) \leq f(s_0) + \epsilon.$$

Como a integral é monótona, obtemos

$$(f(s_0) - \epsilon)|h| \leq \int_{s_0}^{s_0+h} f(t)dt \leq (f(s_0) + \epsilon)|h|, \forall h \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta).$$

Isto mostra que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{|h|} \int_{s_0}^{s_0+h} f(t)dt \right| &= \left| \frac{F(s_0+h) - F(s_0)}{|h|} \right| \\ &\leq f(s_0) + \epsilon. \end{aligned}$$

O afirmado decorre. □

Consideraremos, de agora em diante, que $U \subset \mathbb{R}^n$ seja um aberto e Y um espaço de Banach com norma $|\cdot|$.

Teorema 7.1.2 *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Seja $f : X \times U \rightarrow Y$ uma aplicação satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) *Para cada $t \in U$ fixo, a aplicação*

$$x \mapsto f(x, t)$$

é mensurável.

(ii) *Existe uma aplicação $f_1 \in L^1(\mu, Y)$ tal que, para todo $t \in U$,*

$$|f(x, t)| \leq |f_1(x)|.$$

(iii) *Para quase todo $x \in X$ fixo temos, para todo $t_0 \in U$,*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = f(x, t_0);$$

Então a função

$$F(t) := \int_X f(x, t) d\mu(x)$$

é contínua.

Demonstração:

Decorre das hipóteses (i) e (ii) que a aplicação $f(x, t)$ pode ser integrada com relação à variável x (critério da majoração).

Assim, basta mostrar que, para toda sequência (t_k) convergindo para t , temos

$$\int_X f(x, t_k) d\mu(x) \rightarrow \int_X f(x, t) d\mu(x).$$

Defina $f_k(x) := f(x, t_k)$. Então, de acordo com a hipótese (iii) acima, (f_k) converge qtp para a aplicação

$$x \mapsto f(x, t).$$

Decorre de (iii) e do teorema da convergência dominada que

$$F(t_k) = \int_X f(x, t_k) d\mu(x) \rightarrow \int_X f(x, t) d\mu(x) = F(t).$$

□

Lema 7.1.3 *Suponha que $g : X \times U \rightarrow Y$ seja contínua em U para quase todo $x \in X$ fixo e mensurável em X para quase todo $t \in U$. Então g é mensurável em X **para todo** $t \in U$. Além disto, g é mensurável em $X \times U$.*

Demonstração:

Seja N o conjunto de medida nula tal que

$$g(x, t)$$

seja contínua em t para todo $x \in X - N$. Para cada $t_0 \in U$, escolha então $t_k \rightarrow t_0$ de forma que $g(x, t_k)$ seja mensurável. Assim, para $x \in X - N$, temos $g(x, t_k) \rightarrow g(x, t_0)$. Concluimos que $g(x, t_0)$ é mensurável, como limite de funções mensuráveis.

Mostraremos agora que g é mensurável em $X \times U$, quando U for limitado. Para isto, cubra U com m retângulos R_i^m , todos de mesma medida. Em cada $R_i^m \cup U$, escolha um ponto t_i^m e defina

$$g_m(x, t) = g(x, t_i^m), \quad t \in R_i^m.$$

Temos então que cada g_m é mensurável em $X \times U$ e, se $x \in X - N$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x, t) = g(x, t).$$

Isto mostra que $g(x, t)$ é mensurável em $X \times U$, quando U for limitado.

Dado U qualquer, cubra U por uma sequência crescente de compactos (K_j) e aplique o resultado anterior ao aberto $U \cap K_j$. O resultado decorre. $\square$

Teorema 7.1.4 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : X \times U \rightarrow Y$. Suponha que*

- (i) *Para quase todo $t \in U$, $f(x, t)$ é integrável em X ;*
- (ii) *Para quase todo $x \in X$, $f(x, t)$ é de classe C^1 em U*
- (iii) *Se $t = (t_1, \dots, t_n) \in U$, então existem $g_j \in L^1(\mu, Y)$ tais que*

$$\left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial t_j} \right| \leq |g_j(x)|, \quad \forall t \in U, \text{ qtp em } x.$$

Então

$$F(t) := \int_X f(x, t) d\mu(x)$$

é de classe C^1 em U e

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t_j} = \int_X \frac{\partial f(x, t)}{\partial t_j} d\mu(x).$$

Demonstração:

Seja N o conjunto de medida nula tal que $f(x, t)$ é de classe C^1 em U se $x \in X - N$. Suponha que $h_k \rightarrow 0$ e defina

$$g_{jk}(x, t) := \frac{f(x, t + h_k e_j) - f(x, t)}{h_k}.$$

Decorre do lema 7.1.3 que g_{jk} é mensurável em X para todo $t \in U$.

Além disto,

$$\frac{F(t + h_k e_j) - F(t)}{h_k} = \int_X \frac{f(x, t + h_k e_j) - f(x, t)}{h_k} d\mu(x).$$

Aplicando o teorema do valor médio, a condição (iii) e o teorema da convergência dominada, concluimos que

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t_j} = \int_X \frac{\partial f(x, t)}{\partial t_j} d\mu(x).$$

Que as derivadas parciais são contínuas é consequência imediata do Teorema 7.1.2. $\square$

7.2 Convolução

Definição 7.2.1 Convolução

Sejam $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definimos a convolução de f com g , denotada $f * g$, por

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy.$$

É fácil notar que

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = (g * f)(x).$$

Observação: A função $y \mapsto f(x-y)$, para x fixo, é mensurável em y . De fato, definindo $g(y) := x-y$ e $F(y) := (f \circ g)(y)$, queremos mostrar que $F^{-1}(A)$ é mensurável, para todo aberto $A \subset \mathbb{R}$. Como $F^{-1}(A) = g^{-1}[f^{-1}(A)]$ e $E := f^{-1}(A)$ é mensurável (pois f é mensurável), basta mostrar que $g^{-1}(E)$ é mensurável para todo conjunto mensurável E . Mas

$$x - y \in E \Leftrightarrow y \in (-E) + x.$$

Como $(-E) + x$ é uma translação do conjunto mensurável $-E$, ele também é mensurável. Isto completa a demonstração.

Teorema 7.2.2 *Sejam $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p \leq \infty$. Então $(f * g)(t)$ está definido para quase todo t e*

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}.$$

Demonstração:

Suponhamos que $p = \infty$. Temos:

$$\begin{aligned} |(f * g)(y)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)| dy \\ &\leq \|f\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| dy \\ &= \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1}, \end{aligned}$$

em que usamos o fato da medida de Lebesgue ser translação invariante.

Suponhamos agora $p = 1$. Então, integrando a função

$$|f(y)||g(x-y)|$$

primeiro com relação a variável x e depois com relação a y e aplicando a “recíproca” do teorema de Fubini, obtemos

$$\|(f * g)\|_{L^1} = \|g\|_{L^1} \|f\|_{L^1}.$$

Consideremos agora $1 < p < \infty$. Seja p^* o expoente conjugado a p , isto é, $(1/p) + (1/p^*) = 1$. Suponhamos inicialmente que existam as integrais envolvidas:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f * g|^p dt &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \right|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^{1/p} |g(x-y)|^{1/p^*} |f(y)| dy \right|^p dx \end{aligned} \tag{7.1}$$

Uma vez que $|g(x-y)|^{1/p}|f(y)| \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $|g(x-y)|^{1/p^*} \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, decorre da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^{1/p} |g(x-y)|^{1/p^*} |f(y)| dy &\leq \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |g(x-y)| dy \right]^{1/p} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| dy \right]^{1/p^*} \\ &= \|g\|_{L^1}^{1/p^*} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |g(x-y)| dy \right]^{1/p} \end{aligned}$$

Assim¹,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f * g|^p dt &\leq \|g\|_{L^1}^{p/p^*} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |g(y-x)| dy dx \\ &= \|f\|_{L^1}^{p/p^*} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y-x)| dx \right) dy \\ &= \|g\|_{L^1}^{1+(p/p^*)} \|f\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

Como $1 + (p/p^*) = p$, o resultado segue elevando a desigualdade acima a $1/p$. Note agora que a existência das integrais está assegurada ao considerarmos a sequência de desigualdades acima no sentido contrário. $\square$

Teorema 7.2.3 *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então $f * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e as derivadas parciais de $f * \phi$ são calculadas derivando-se o integrando*

Demonstração:

Já vimos que podemos fazer a convolução de f e ϕ :

$$(f * \phi)(x) = \int_X f(y) \phi(x-y) dy.$$

A aplicação do Teorema 7.1.4 prova o afirmado. $\square$

¹Neste ponto podemos obter uma desigualdade mais precisa. Obtemos,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f * g|^p dx &\leq \|g\|_{L^1}^{p/p^*} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |g(y-x)| dy dx \\ &\leq \|\phi\|_{L^1}^{p/p^*} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| |f(y+x)|^p dy dx \end{aligned}$$

e portanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g|^p dx \leq \|g\|_{L^1}^{p/p^*+1} \sup_{x \in \text{supp } g} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y+x)|^p dy = \|g\|_{L^1}^p \sup_{x \in \text{supp } g} \|f(\cdot+x)\|_{L^p}^p, \quad (7.2)$$

desde que a última expressão a direita faça sentido. Esta estimativa também pode ser obtida se $p = 1$ ou $p = \infty$.

7.3 Sequências de Dirac

Definição 7.3.1 *Seja $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua de suporte compacto² tal que*

$$\phi \geq 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1.$$

Então $\phi_\epsilon(x) := \epsilon^{-n} \phi(x/\epsilon)$ chama-se sequência de Dirac de ϕ . Note que $\phi_\epsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $p \in [1, \infty]$ e todo $\epsilon > 0$.

Observação: A rigor, ϕ_ϵ não é uma sequência. Considere $\epsilon = 1/j$ com $j \rightarrow \infty$.

Lema 7.3.2 *Para todo $\epsilon > 0$, temos*

$$\phi_\epsilon(x) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^n - B_\rho(0)} \phi_\epsilon dx \rightarrow 0,$$

para todo $\rho > 0$.

Demonstração:

As duas primeiras afirmações são claras. Quanto à última, podemos supor que $\text{supp} \phi \subset B_m(0)$ para $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Note então que

$$x/\epsilon \in B_m(0) \Leftrightarrow x \in B_{\epsilon m}(0),$$

donde segue o resultado. □

Observação: Muitas vezes as propriedades citadas acima são usadas para se definir uma sequência de Dirac.

Exemplo 7.3.3 Defina

$$\phi(x) := \begin{cases} k \exp(-1/(1 - |x|^2)) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \leq 1, \end{cases}$$

onde k é escolhido de modo que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi dx = 1$. Note que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\text{supp} \phi = \overline{B_1(0)}$.

Teorema 7.3.4 *Seja $1 \leq p < \infty$. Suponha que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e que ϕ_ϵ seja uma sequência de Dirac. Então*

$$f * \phi_\epsilon \rightarrow f \quad \text{em } L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

²O suporte de ϕ , denotado $\text{supp} \phi$ é definido por

$$\text{supp} \phi := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n; \phi(x) \neq 0\}}.$$

Demonstração³:

Temos, considerando p^* o expoente conjugado a p ,

$$\begin{aligned}
 |(f * \phi_\epsilon)(x) - f(x)| &= \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \phi_\epsilon(x - y) dy - f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(x - y) dy \right| \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(x - y) [f(y) - f(x)] dy \right| \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_\epsilon(y)|^{1/p^*} |\phi_\epsilon(y)|^{1/p} |f(x - y) - f(x)| dy
 \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, elevando ambos os lados a p e integrando, obtemos, como na demonstração do Teorema 7.2.2,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} |(f * \phi_\epsilon) - f|^p dx &\leq \\
 &\leq \|\phi_\epsilon\|_{L^1}^{p/p^*} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y) - f(x)|^p |\phi_\epsilon(y)| dy dx.
 \end{aligned}$$

Uma vez que $\|\phi_\epsilon\|_{L^1} = 1$, aplicando o teorema de Fubini, obtemos

$$\|(f * \phi_\epsilon) - f\|_{L^p}^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_\epsilon(y)| \psi(y) dy,$$

em que $\psi(y) := \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y) - f(x)|^p dx = \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_{L^p}^p$. Para $\delta > 0$ escreva

$$\begin{aligned}
 I_\epsilon &:= \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_\epsilon(y)| \psi(y) dy = \int_{|y| < \delta} |\phi_\epsilon(y)| \psi(y) dy + \\
 &\quad + \int_{|y| \geq \delta} |\phi_\epsilon(y)| \psi(y) dy \\
 &=: A_{\epsilon\delta} + B_{\epsilon\delta}
 \end{aligned}$$

Dado $\rho > 0$, escolha, de acordo com o Teorema 5.3.3 δ tão pequeno que $\psi(y) < \rho$ se $|y| < \delta$. Então

$$A_{\epsilon\delta} \leq \rho \int_{|y| < \delta} |\phi_\epsilon| dy \leq \rho,$$

³Utilizando a estimativa (7.2), podemos obter uma demonstração simples deste resultado: Defina $\phi_{\epsilon\delta} := \chi_{B_\delta(0)} \phi_\epsilon$ e $\psi_{\epsilon\delta} := \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)}$. Aplique a estimativa e obtenha

$$\|f * \phi_\epsilon - f\|_{L^p} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi_{\epsilon\delta} \right) \sup_{|h| \leq \delta} \|f(\cdot + h) - f\|_{L^p} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi_{\epsilon\delta} \right) \sup_{|h| \leq \delta} \|f(\cdot + h) - f\|_{L^p}$$

A primeira integral é menor ou igual a 1, enquanto o primeiro sup tende a zero quando $\delta \rightarrow 0$, de acordo com o Teorema 5.3.3. O segundo sup é cotado, de acordo com a desigualdade de Minkowski, por $2\|f\|_{L^p}$, enquanto a integral restante tende a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$ para todo δ , de acordo com a definição de sequência de Dirac.

para todo ϵ . De acordo com a desigualdade de Minkowski, temos

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} |\psi(y)| \leq (2\|f\|_{L^p})^p,$$

de forma que $B_{\epsilon\delta}$ é menor que uma constante multiplicada por $\int_{|y| \geq \delta} |\phi_\epsilon| dy$, que, por sua vez, tende a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$. Isto mostra que $I_\epsilon \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, donde decorre o teorema. $\square$

Teorema 7.3.5 *Para $1 \leq p < \infty$ temos que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$*

Demonstração:

Dado $\rho > 0$, escreva $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ como⁴ $f = g + h$, onde g tem suporte compacto e $\|h\|_{L^p} < \rho$. Considere uma sequência de Dirac $(\phi_\epsilon) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e defina $g_\epsilon := g * \phi_\epsilon$. Então $g_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (note que $\text{supp} g_\epsilon \subset B_\epsilon(\text{supp} g)$!) e $\|g - g_\epsilon\|_{L^p} \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. De acordo com a desigualdade de Minkowski,

$$\|f - g_\epsilon\|_{L^p} \leq \|g - g_\epsilon\|_{L^p} + \|h\|_{L^p}.$$

Tomando ϵ de forma que $\|g - g_\epsilon\|_{L^p} < \rho$, obtemos

$$\|f - g_\epsilon\|_{L^p} < 2\rho,$$

provando o afirmado. $\square$

7.4 Partições da unidade

Definição 7.4.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e (U_i) uma cobertura de Ω por conjuntos abertos U_i . Uma cobertura de Ω é **localmente finita** se todo ponto $x \in \Omega$ possui uma vizinhança $B_\epsilon(x)$ tal que*

$$\{i \in \mathbb{N}; U_i \cap B_\epsilon(x)\} \text{ é um conjunto finito.}$$

Exemplo 7.4.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, não necessariamente limitado. Consideraremos alguns modos de obter uma cobertura localmente finita de Ω .*

(i) Defina

$$U_i := \{x \in \Omega; 2^{-i-1} < \text{dist}(x, \partial\Omega) < 2^{-i+1}\}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Então os conjuntos U_i formam uma cobertura localmente finita de Ω . Também os conjuntos

$$V_i := (U_i \cap B_{2^{i+1}}(0)) \cup \left(\bigcup_{j < i} U_j \cap [B_{2^{i+1}}(0) - B_{2^{i-1}}(0)] \right)$$

formam uma cobertura localmente finita de Ω , com a propriedade adicional de serem os V_i limitados, satisfazendo $\overline{V_i} \subset \Omega$.

(ii) Defina

$$U_i := \{x \in \Omega; \text{dist}(x, \partial\Omega) > \rho/2^i\} \cup B_{\rho/2^i}(0),$$

⁴Como $\int_{\mathbb{R}^n} |f| < \infty$, defina $g = \mathcal{X}_{B_r(0)} f$ e $h = f - g$. Tomando r suficientemente grande, obtemos h com a propriedade desejada.

em que as constantes ρ e γ são escolhidas de modo que $U_1 \neq \emptyset$. Note que cada U_i é um aberto limitado, $\overline{U_i} \subset U_{i+1}$, mas a cobertura $\cup U_i$ não é localmente finita. Entretanto, definindo

$$\begin{aligned} V_2 &:= U_2 \\ V_3 &:= U_3 \setminus \overline{U_1} \\ &\vdots \\ V_j &:= U_j \setminus \overline{U_{j-2}}, \end{aligned}$$

obtemos

$$\Omega \subset \bigcup_{j=2}^{\infty} V_j$$

através de uma cobertura localmente finita. Cada ponto $x \in \Omega$ tem uma vizinhança que intercepta no máximo dois elementos desta cobertura.

Definição 7.4.3 *Seja $\mathcal{U}$ uma coleção de conjuntos abertos no $\mathbb{R}^n$ cuja união é $\mathbb{R}^n$. Dizemos que $\mathcal{V}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$ se para cada $V_\beta \in \mathcal{V}$ podemos encontrar $U_\alpha \in \mathcal{U}$ tal que $V_\beta \subset U_\alpha$.*

Teorema 7.4.4 *Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de $\mathbb{R}^n$. Então existe um refinamento (V_j) de $\mathcal{U}$ que é localmente finito⁵ e enumerável. Além disto, $\overline{V_j}$ é compacto para todo j .*

Demonstração:

Seja $B_n := B_n(0)$. Cobrimos $\mathbb{R}^n$ pelos anéis compactos

$$\overline{B_1}, \overline{B_2} \setminus B_1, \dots, \overline{B_{n+1}} \setminus B_n, \dots$$

Para cada $x \in B_1$, como $\mathcal{U}$ cobre $\mathbb{R}^n$, temos $x \in U_x$ para algum $U_x \in \mathcal{U}$. Como U_x é aberto, podemos escolher $0 < r < 1/2$ tal que $V_x := B_r(x)$ satisfaz

$$\overline{V_x} \subset U_x.$$

Os conjuntos V_x assim definidos formam uma cobertura aberta do conjunto compacto $\overline{B_1}$, da qual extraímos a subcobertura finita $V_1, \dots, V_m$. Consideramos agora o anel $\overline{B_2} \setminus B_1$. Analogamente, para cada $x \in \overline{B_2} \setminus B_1$, escolhemos uma bola $W_x := B_r(x)$ com $0 < r < 1/2$ tal que $\overline{W_x} \subset U_x \in \mathcal{U}$. Como $\overline{B_2} \setminus B_1$ é compacto podemos escolher uma subcobertura finita $W_1, \dots, W_s$. Desprezando os elementos desta subcobertura que porventura forem iguais a um dos $V_1, \dots, V_m$ já escolhidos e renominando os restantes, obtemos uma cobertura $\{V_1, \dots, V_m, V_{m+1}, \dots, V_p\}$ de $\overline{B_2}$. Continuando desta maneira, obtemos uma cobertura (V_j) , aberta e enumerável, do $\mathbb{R}^n$. Da forma que os conjuntos V_j foram escolhidos, vemos que eles formam um refinamento de $\mathcal{U}$. Além disto, como $r < 1/2$, vemos que cada $\overline{V_j}$ é compacto.

Falta apenas mostrar que (V_j) é localmente finita. Dado $x \in \overline{B_n} \setminus B_{n-1}$, considere a bola $B_{1/4}(x)$. Uma vez que escolhemos V_j com $r < 1/2$, vemos que apenas os V_j que cobrem $\overline{B_n} \setminus B_{n-1}$ e aqueles que cobrem os anéis vizinhos $\overline{B_{n+1}} \setminus B_n$ e $\overline{B_{n-1}} \setminus B_{n-2}$ podem intersectar a bola $B_{1/4}(x)$. Assim, pela construção que fizemos, apenas um número finito de V_j pode intersectar $B_{1/4}(x)$.

⁵Este resultado estabelece, em particular, que $\mathbb{R}^n$ é paracompacto, isto é, que toda cobertura aberta possui um refinamento localmente finito.

□

Observação: O resultado acima pode ser generalizado para variedades localmente compactas que satisfazem o segundo axioma de enumerabilidade. Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em Warner, F.W.: Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Springer, 1977, p. 9.

Corolário 7.4.5 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de Ω . Então vale o mesmo resultado do Teorema 7.4.4.*

Demonstração:

Basta adicionar um conjunto aberto, por exemplo $U_0 := \mathbb{R}^n$, para obter uma cobertura aberta do $\mathbb{R}^n$ e então aplicar o Teorema 7.4.4. Note que o refinamento é composto de bolas $B_{r_j}(x_j)$.

□

Teorema 7.4.6 *Seja $\mathcal{U}$ uma coleção de conjuntos abertos no $\mathbb{R}^n$ cuja união é Ω . Então existe uma sequência $\{\eta_i\} \subset C_o^\infty(\Omega)$ que constitui uma **partição da unidade localmente finita subordinada à cobertura $\mathcal{U}$** , isto é,*

- (i) $\eta_i \in C_o^\infty(U_\alpha)$ para algum $U_\alpha \in \mathcal{U}$;
- (ii) $\eta_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^\infty \eta_i(x) = 1$ para todo $x \in \Omega$;
- (iii) Para todo compacto $K \subset \Omega$ existe um inteiro m e um conjunto aberto $W \supset K$ tal que

$$\eta_1(x) + \eta_2(x) + \dots + \eta_m(x) = 1$$

para todo $x \in W$.

Demonstração:

De acordo com o Corolário 7.4.5, existe um refinamento U_j enumerável e localmente finito da cobertura $\mathcal{U}$, em que $U_j = B_{r_j}(x_j)$. Dada uma sequência de Dirac associada a $\phi \in C_o^\infty(B_1(0))$, definimos

$$\psi_j(x) := \phi\left(\frac{x - x_j}{r_j}\right).$$

Então $\text{supp } \psi_j \subset \overline{B_{r_j}}(x_j)$ e, para cada $x \in \Omega$ e $\rho > 0$, apenas um número finito de termos da série $\sum \psi_j(x)$ é não nulo em $B_\rho(x)$. Isto mostra que $\psi(x) = \sum \psi_j(x) \in C^\infty(\Omega)$. Defina então

$$\eta_j := \frac{\psi_j(x)}{\psi(x)}.$$

Observe que, dado um compacto $K \subset \Omega$, apenas um número finito de η_j intersecta K . Isto completa a demonstração.

□

Corolário 7.4.7 *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto fechado e $G \supset A$ um conjunto aberto. Então existe $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que*

- (i) $0 \leq \alpha(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $\alpha(x) = 1$ para $x \in F$;

(iii) $\text{supp } \alpha \subset G$.

Demonstração:

Consideramos a cobertura $\{G, F^c\}$ do $\mathbb{R}^n$ e η_j a partição da unidade subordinada a esta cobertura. Quer dizer, $\text{supp } \eta_j \subset G$ ou $\text{supp } \eta_j \subset F^c$. Definimos α como a soma de todos os η_j cujo suporte está contido em G . Quer dizer, definindo $M := \{j \in \mathbb{N}; \text{supp } \eta_j \subset G\}$, temos

$$\alpha(x) = \sum_{j \in M} \eta_j(x).$$

Claramente temos (i). Temos também

$$\text{supp } \alpha = \overline{\bigcup_{j \in M} \text{supp } \eta_j} = \bigcup_{j \in M} \text{supp } \eta_j \subset G.$$

Note que a segunda igualdade é válida para famílias localmente finitas.

Finalmente, para $x \in F$ temos

$$1 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \eta_j(x) = \sum_{j \in M} \eta_j(x) + \sum' \eta_j(x) = \alpha(x) + \sum' \eta_j(x),$$

em que $\sum' \eta_j(x)$ denota a soma dos η_j cujos suportes estão em F^c , mas não em G (observe que os suportes só podem estar nestes conjuntos). Temos $\sum' \eta_j(x) = 0$ se $x \in F$, o que mostra (ii). $\square$

Em algumas situações devemos nos ater a uma dada cobertura de um aberto Ω , não sendo possível passar a um refinamento. Para obtermos uma partição da unidade subordinada a esta cobertura, é necessário que esta cobertura seja localmente finita. É a situação que passaremos a descrever.

Definição 7.4.8 *Uma partição da unidade do aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ estritamente subordinada a uma cobertura aberta localmente finita (U_i) é uma coleção de funções $\eta_j \in C_o^\infty(U_j)$ tal que*

$$\eta_j \geq 0 \quad e \quad \sum_{j \in \mathbb{N}} \eta_j(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$$

(a soma é feita sobre todos os índices i , mas para um dado ponto $x \in \Omega$ apenas um número finito de termos é não nulo).

Teorema 7.4.9 *Seja (U_j) uma cobertura aberta localmente finita de Ω . Suponhamos que os abertos U_j sejam limitados e $\overline{U_j} \subset \Omega$. Então existe uma partição da unidade estritamente subordinada a (U_j) .*

Demonstração:

Afirmamos inicialmente que escolher indutivamente conjuntos abertos V_i , com $\overline{V_i} \subset U_i$ tais que

$$\Omega \subset \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} V_i \cup \bigcup_{i=m}^{\infty} U_i \right).$$

De fato, supondo escolhidos os conjuntos V_i para $i < m$, então

$$\Omega - U_m \subset \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} V_i \cup \bigcup_{m+1}^{\infty} U_i \right),$$

donde concluímos que os conjuntos acima cobrem o compacto ∂U_m . Decorre daí que, para algum $r > 0$, tais conjuntos cobrem também o conjunto $B_r(\partial U_m)$ (justifique!)

Defina então

$$V_m := U_m - \overline{B_{r/2}(\partial U_m)}.$$

Temos então que

$$\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i.$$

De fato, se $x \notin \bigcup_{i < m} V_i$, temos que x pertence apenas a um número finito de conjuntos U_i . Se i_0 é o maior destes índices, $x \in \bigcup_{i \leq i_0} V_i$.

Escolhemos agora subconjuntos E_i com $V_i \subset E_i \subset U_i$ e definimos

$$\epsilon_i := \text{dist}(\partial E_i, V_i \cup (\mathbb{R}^n - U_i)) > 0.$$

Seja (ϕ_ϵ) uma sequência de Dirac associada a $\phi \in C_0^\infty(B_1(0))$. Defina $\psi_i := \mathcal{X}_{E_i} * \phi_{\epsilon_i}$. Então $\psi_i \in C_0^\infty(U_i)$ e $\mathcal{X}_{V_i} \leq \psi_i \leq 1$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_{V_i} \geq \mathcal{X}_\Omega.$$

Note que no primeiro somatório apenas um número finito de termos é não nulo, pois a cobertura U_i é localmente finita. Defina

$$\eta_i := \frac{\psi_i}{\sum_i \psi_i}.$$

□

FALTA COLOCAR AQUI O LEMA 2.11 DO ALT!!!!!!

7.5 Exercícios

1. Prove o teorema de Weierstraß: toda função contínua definida num intervalo fechado $[a, b]$ pode ser uniformemente aproximada por um polinômio. Para isto, suponha que o intervalo $[a, b]$ seja o intervalo $[0, 1]$. Mostre que o resultado acima estará demonstrado, se ele for provado para o intervalo $[0, 1]$. Seja L a reta unindo $f(0)$ a $f(1)$. Mostre que $f - L$ se anula em 0 e 1. Isto mostra que podemos assumir $f(0) = f(1) = 0$. Estenda então f definindo $f(x) = 0$ se $x \notin [0, 1]$. Defina então as funções de Landau,

$$\phi_k = \frac{1}{c_k} (1 - x^2)^k,$$

onde c_k é escolhido de modo que ϕ_k seja uma sequência de Dirac. Mostre que a sequência $\phi_k * f$ é uma sequência de polinômios que converge uniformemente a f em $[0, 1]$.

2. Dada uma família localmente finita $(C_\alpha)_{\alpha \in A}$ de subconjuntos de um espaço X , mostre que, para todo compacto $K \subset X$, existe um conjunto finito $A_0 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \subset A$ tal que $K \cap C_\alpha \neq \emptyset$ implica $\alpha \in A_0$.

Capítulo 8

O Teorema de Mudança de Variáveis

Consideraremos, em todo o capítulo, que μ é a medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$. Denotaremos $L(\Omega)$ o conjunto das funções integráveis $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$. Que dizer, consideramos a σ -álgebra induzida em Ω pela σ -álgebra de Lebesgue $\mathcal{M}$: seus elementos são interseções dos elementos de $\mathcal{M}$ com o conjunto Ω ; da mesma forma para a medida.

Notamos que, quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então $f = f_1 + if_2$, com $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$). Assim,

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f_1 d\mu + i \int_{\Omega} f_2 d\mu.$$

Propriedades à respeito de f podem ser provadas analisando-se f_1 e f_2 , sempre levando em conta o critério da majoração.

8.1 Imagens de conjuntos mensuráveis

Lema 8.1.1 *Seja N um conjunto de medida nula no $\mathbb{R}^n$ e $f : N \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de Lipschitz-contínua. Então $f(N)$ tem medida nula.*

Demonstração:

Seja C a constante de Lipschitz de f . Considere uma sequência (R_j) de **cubos** cobrindo N tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(R_j) < \epsilon$$

(justifique!). Seja r_j o comprimento do lado de R_j . Vemos então que $f(N \cup R_j)$ está contido num cubo R'_j cujo lado possui comprimento menor ou igual a $2Cr_j$ (justifique!). Assim, temos que

$$\mu(R'_j) \leq 2^n C^n r_j^n = (2C)^n \mu(R_j),$$

donde decorre o afirmado. □

Lema 8.1.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 . Suponha que $N \subset \Omega$ tenha medida nula em Ω . Então $f(N)$ tem medida nula.*

Demonstração:

Para cada $x \in \Omega$ existem retângulo fechados R_x contido em Ω tais que a família $(\text{int}(R_x))$ cubra N . Como Ω é separável, tal cobertura possui uma subcobertura enumerável (R_j) (justifique!). Basta então mostrar que, para todo j , $f(N \cup R_j)$ tem medida nula. Como f' é limitada no compacto R_j , decorre da desigualdade do valor médio que f é Lipschitz-contínua quando restrita a R_j . O resultado decorre então do lema 8.1.1. $\square$

Lema 8.1.3 *Seja $A \subset \mathbb{R}^m$. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-contínua, com $m < n$. Então $f(A)$ tem medida nula.*

Demonstração:

A imersão $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ faz com que $\mathbb{R}^m$ tenha medida nula no $\mathbb{R}^n$. Em particular, A tem medida n -dimensional nula. O resultado então segue do lema 8.1.1. $\square$

Observação: O resultado anterior é falso se supusermos f apenas contínua. Justifique !

8.2 Blocos e Transformações Lineares

Definição 8.2.1 Bloco

Sejam $v_1, \dots, v_n$ vetores no $\mathbb{R}^n$. Definimos o bloco B gerado por estes vetores como sendo o conjunto

$$B := \{t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_n v_n; 0 \leq t_i \leq 1\}.$$

Dizemos que o bloco B é **degenerado** se os vetores $v_1, \dots, v_n$ forem linearmente dependentes.

Observação: Uma vez que o contexto em que estamos é completamente geométrico, falaremos do volume do bloco B ao invés de referirmos à medida do bloco B . Note que um bloco é sempre mensurável.

Definição 8.2.2 Volume Orientado

Considere o bloco B gerado pelo vetores $v_1, \dots, v_n$. Definimos

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_n) := \mu(B),$$

isto é, o **volume** do bloco B . Definimos o volume orientado

$$V^o(v_1, \dots, v_n) := \pm \text{Vol}(v_1, \dots, v_n),$$

onde o sinal é positivo se tivermos $\det(v_1, \dots, v_n) > 0$ e negativo caso contrário (o determinante se refere à matriz que tem os vetores $v_1, \dots, v_n$ como vetores coluna).

Teorema 8.2.3 Vale

$$\text{Vol}^o(v_1, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_n)$$

e

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|.$$

Demonstração:

Notamos inicialmente que basta considerarmos o caso de blocos não degenerados. De fato, se $v_1, \dots, v_n$ forem linearmente dependentes, decorre do lema 8.1.3 que $\mu(B) = 0$ (justifique!); como $\det(v_1, \dots, v_n) = 0$, o resultado se verifica.

Provaremos o resultado mostrando que $Vol(v_1, \dots, v_n)$ satisfaz as propriedades do determinante..

1a. Parte: Para todo $v \in \mathbb{R}^n$,

$$Vol^o(v, v_2, \dots, v_n) = \det(kv, v_2, \dots, v_n).$$

Consideremos inicialmente $k \in \mathbb{N}$. Temos que a igualdade

$$B(kv, \dots, v_n) = B((k-1)v, \dots, v_n) \cup (B(v, \dots, v_n) + (k-1)v_1)$$

é verdadeira, exceto por um conjunto de medida nula, qual seja, o bloco $(n-1)$ -dimensional $B(v_2, \dots, v_n)$. Logo

$$\begin{aligned} Vol(kv, \dots, v_n) &= Vol((k-1)v, \dots, v_n) + Vol(v, v_2, \dots, v_n) \\ &= k Vol(v, \dots, v_n), \end{aligned}$$

onde a última igualdade é obtida indutivamente.

Tomando $v = u/k$ na igualdade acima, obtemos

$$Vol\left(\frac{v}{k}, \dots, v_n\right) = \frac{1}{k} Vol(v, \dots, v_n). \quad (8.1)$$

Concluimos então que a identidade (8.1) é válida para qualquer racional positivo. Dado um real positivo s , tome racionais positivos r, r' tais que $r \leq s \leq r'$. Assim,

$$B(rv, \dots, v_n) \subset B(sv, \dots, v_n) \subset B(r'v, \dots, v_n),$$

donde

$$r Vol(v, \dots, v_n) \leq Vol(sv, \dots, v_n) \leq r' Vol(v, \dots, v_n).$$

Tomando o limite quando $r, r' \rightarrow s$, concluimos que a igualdade (8.1) vale para qualquer real positivo k . Para $k = 0$ ela é trivialmente válida. Finalmente, como

$$B(-v, \dots, v_n) = B(v, \dots, v_n) - v$$

(justifique!), vemos que (8.1) é válida para qualquer k real.

2a. parte:

$$Vol^o(\dots, v_{i-1}, kv, v_{i+1}, \dots) = k Vol^o(\dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots).$$

Decorre imediatamente de repetir o argumento da 1a. parte para as outras variáveis.

3a. parte: $Vol^0(v_1 + cv_2, v_2, \dots, v_n) = Vol(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Se $c = 0$ o resultado é óbvio. Consideremos então o caso $c = 1$. Notamos que a situação que estamos lidando é puramente bi-dimensional, uma vez que os vetores $(v_3, \dots, v_n)$ são comuns aos dois blocos. O bloco gerado por v_1, v_2 consiste de dois triângulos, T (formado pelo vetor v_1 e pelo vetor soma $v_1 + v_2$) e T' (formado pelo vetor v_2 e pelo vetor soma $v_1 + v_2$), tendo apenas um conjunto

de medida zero em comum (a diagonal dos triângulos). O bloco gerado por $v_1 + v_2, v_2$ consiste do triângulo T' e do triângulo $T + v_2$, que é uma translação do triângulo T . Isto mostra que estes dois blocos têm o mesmo volume. Portanto

$$Vol^o(v_1 + v_2, v_2, \dots, v_n) = Vol^o(v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Consideremos agora $c \neq 0$ arbitrário. Então temos, usando o mostrado na 2a. parte:

$$\begin{aligned} cVol^o(v_1 + cv_2, v_2, \dots, v_n) &= Vol^o(v_1 + cv_2, cv_2, \dots, v_n) \\ &= Vol^o(v_1, cv_2, \dots, v_n) \\ &= cVol^o(v_1, v_2, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Cancelando-se c obtemos o afirmado.

4a. parte: $Vol^o(v_1 + cv_j, \dots, v_j, \dots, v_n) = Vol^o(v_1, \dots, v_j, \dots, v_n)$.

Basta repetir o argumento utilizado na 3a. parte.

5a. parte:

$$\begin{aligned} Vol^o(v + w, v_2, \dots, v_n) &= Vol^o(v, v_2, \dots, v_n) + \\ &\quad + Vol^o(w, v_2, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} Vol^o(c_1v_1 + \dots + c_nv_n, v_2, \dots, v_n) &= \dots \\ &= Vol^o(c_1v_1, v_2, \dots, v_n) \\ &= c_1Vol^o(v_1, v_2, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Do resultado acima decorre imediatamente o afirmado.

6a. parte: Resulta do anteriormente mostrado que $Vol^o(v_1, \dots, v_n)$ é linear em cada variável. Da definição da medida de Lebesgue de um retângulo temos que

$$Vol^o(e_1, \dots, e_n) = 1,$$

onde $e_1, \dots, e_n$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$. Uma vez que

$$Vol^o(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$$

se os vetores $v_1, \dots, v_n$ forem linearmente dependentes, vemos que

$$Vol^o(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

é alternado. Isto mostra que $Vol^o(v_1, v_2, \dots, v_n)$ satisfaz todas as propriedades satisfeitas por $\det(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Da unicidade da função determinante segue que o lema está demonstrado. $\square$

Corolário 8.2.4 *Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ o cubo unitário gerado pela base canônica do $\mathbb{R}^n$. Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear. Então*

$$Vol\ T(C) = |\det(T)|.$$

Demonstração:

Definindo $v_i := T(e_i)$, vemos que $T(C)$ é o bloco gerado por $v_1, \dots, v_n$. Representando T por sua matriz (a_{ij}) , vemos que

$$v_i = a_{1i}e_1 + \dots + a_{ni}e_n,$$

donde $\det(v_1, \dots, v_n) = \det(a_{ij}) = \det(T)$. □

Corolário 8.2.5 *Se R for um retângulo qualquer no $\mathbb{R}^n$ e $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear, então*

$$\text{Vol } T(R) = |\det(T)| \text{Vol}(R).$$

Demonstração:

Uma vez que a medida de Lebesgue é invariante por translações, podemos assumir que o retângulo é um bloco (justifique!). Se C for o cubo unitário, podemos supor que $R = T_1(C)$, donde $T(R) = (T \circ T_1)(C)$. Decorre então do corolário 8.2.4 que

$$\text{Vol } T(R) = |\det(T \circ T_1)| = |\det(T) \det(T_1)| = |\det(T)| \text{Vol}(R).$$

□

8.3 O teorema de mudança de variáveis

Consideraremos agora uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , definida no aberto U . Usaremos a aproximação de f por sua derivada (uma transformação linear !) para generalizarmos o corolário 8.2.5. Para isto, definimos

Definição 8.3.1 Determinante Jacobiano

Sejam U um aberto e $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável. Definimos o determinante jacobiano de f por

$$\Delta_f(x) := \det Jf(x) = \det f'(x),$$

onde $Jf(x)$ denota a matriz jacobiana de f .

Lema 8.3.2 *Sejam U um aberto e $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Suponha que $f(0) = 0$ e $f'(0) = I$, onde I denota a transformação identidade. Tome $r > 0$ tal que $\overline{B_r(0)} \subset U$. Suponha que exista $0 < s < 1$ tal que*

$$|f'(x) - f'(z)| \leq s$$

para todo $x, z \in \overline{B_r(0)}$. Se $y \in \mathbb{R}^n$ satisfaz

$$|y| \leq (1 - s)r,$$

então existe um único $x \in \overline{B_r(0)}$ tal que

$$f(x) = y.$$

Demonstração:

Para $|y| < (1-s)r$ defina $g_y : \overline{B_r(0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$g_y(x) := x - f(x) + y.$$

Temos que

$$\begin{aligned} |f(x) - x| &= |f(x) - f(0) - f'(0)x| \\ &\leq |x| \sup |f'(z) - f'(0)| \\ &\leq rs. \end{aligned}$$

Decorre daí que

$$|g_y(x)| \leq |f(x) - x| + |y| \leq rs + (1-s)r = r,$$

donde $g_y : \overline{B_r(0)} \rightarrow \overline{B_r(0)}$. Afirmamos que g_y é uma contração. De fato, decorre do teorema do valor médio que

$$\begin{aligned} |g_y(x_1) - g_y(x_2)| &= |x_1 - x_2 - (f(x_1) - f(x_2))| \\ &= |x_1 - x_2 - f'(0)(x_1 - x_2) + \sigma(x_1, x_2)| \\ &= |\sigma(x_1, x_2)|, \end{aligned}$$

onde

$$\sigma(x_1, x_2) \leq |x_1 - x_2| \sup |f'(z) - f'(0)| \leq s|x_1 - x_2|.$$

Pelo lema da contração, g_y tem um único ponto fixo $x \in \overline{B_r(0)}$, que satisfaz

$$f(x) = y.$$

□

Teorema 8.3.3 *Sejam $R \subset U$ um retângulo e U um aberto em $\mathbb{R}^n$. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe C^1 . Então*

$$\mu(f(R)) = \int_R |\Delta_f| d\mu.$$

Observação: Notamos que, se f for linear, o resultado acima nada mais é do que o corolário 8.2.5.

Demonstração:

Sem perda de generalidade, podemos considerar que o retângulo R é um cubo. Para isto, basta alterar as normas em cada um dos lados do retângulo (multiplicando por uma constante positiva), de forma que todos os lados tenham então o mesmo comprimento.

Dado $\epsilon > 0$, divida cada lado de R em m segmentos iguais. Isto faz com que R seja subdividido em m^m subcubos, denotados C_j ($j = 1, \dots, m^m$). Denotaremos c_j o centro do cubo C_j . Uma vez que as imagens $f(C_j)$ têm no máximo um conjunto de medida nula em comum, temos

$$Vol f(R) = \sum_{j=1}^{m^m} Vol f(C_j).$$

Uma vez que f' é uniformemente contínua em R , dado $\epsilon > 0$, podemos escolher m suficientemente grande, de forma que, denotando $T_j = f'(c_j)$, se tenha

$$f(x) = f(c_j) + T_j(x - c_j) + r_j(x - c_j),$$

com

$$|r_j(x - c_j)| \leq \epsilon|x - c_j|.$$

Assim, para calcularmos $\text{Vol}(C_j)$, basta nos concentrarmos no caso em que C é um cubo de centro na origem e f tem a forma

$$f(x) = Tx + r(x), \quad |r(x)| \leq \epsilon|x|$$

para $x \in C$ (justifique!).

Logo

$$(T^{-1} \circ f)(x) = x + (T^{-1} \circ r)(x), \quad (8.2)$$

e veremos a aplicação $(T^{-1} \circ f)$ como uma perturbação da identidade. Temos, para alguma constante K e $x \in C$,

$$|(T^{-1} \circ r)(x)| \leq K\epsilon$$

(justifique!). Decorre do lema 8.3.1 que $T^{-1} \circ f(C)$ contém um cubo de raio

$$(1 - C\epsilon)\lambda,$$

onde λ é o raio do cubo C . Por outro lado, decorre de (8.2) que $T^{-1} \circ f(C)$ está contido num cubo de raio $(1 + K\epsilon)\lambda$. Aplicando T a estes cubos e determinando o volume, achamos

$$\begin{aligned} |\det(T)|\text{Vol}(C) - \epsilon K_1 \text{Vol}(C) &\leq \\ &\leq \text{Vol} f(C) \leq |\det(T)|\text{Vol}(C) + \epsilon K_1 \text{Vol}(C). \end{aligned}$$

O resultado segue ao aplicarmos a estimativa acima a cada um dos cubos C_j : T será a transformação $f'(c_j)$; somando sobre todos os valores de j e estimando $|\Delta_f|$, obtemos o resultado. $\square$

Corolário 8.3.4 *Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ for um difeomorfismo de classe C^1 e $R \subset U$ um retângulo, então*

$$\int_{f(R)} g d\mu = \int_R (g \circ f) |\Delta_f| d\mu$$

para toda função $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, contínua em $f(R)$.

Demonstração:

As funções g e $(g \circ f)|\Delta_f|$ são uniformemente contínuas em $f(R)$ e R , respectivamente. Considere uma partição de R através de subretângulos R_j . Temos

$$\int_{f(R)} = \sum_j \int_{f(R_j)}$$

Seja δ o maior dos comprimentos dos lados de R_j , para todo j . Então existe uma constante C tal que $f(R_j)$ está contido num retângulo cujos lados tem comprimento menor ou igual a $C\delta$.

Dado $\epsilon > 0$, suponhamos $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Tomando a partição de modo que δ seja suficientemente pequeno, podemos considerar que

$$M_j - m_j < \epsilon, \quad \text{onde } M_j = \sup_{f(R_j)} g, \quad m_j = \inf_{f(R_j)} g.$$

Aplicando o teorema 8.3.3 com g suposta constante igual a m_j e M_j :

$$\begin{aligned} m_j \mu(f(R_j)) &\leq \int_{f(R_j)} g d\mu \leq M_j \mu(f(R_j)); \\ m_j \int_{R_j} |\Delta_f| d\mu &\leq \int_{R_j} (g \circ f) |\Delta_f| d\mu \leq M_j \int_{R_j} |\Delta_f| d\mu; \\ \mu(f(R_j)) &= \int_{R_j} |\Delta_f| d\mu. \end{aligned}$$

O resultado decorre. Para $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $g = g_1 + ig_2$, analise g_1 e g_2 como acima. $\square$

Teorema 8.3.5 Mudança de Variáveis

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe C^1 definido no aberto U . Seja $g \in L^1(f(U))$. Então $(g \circ f) |\Delta_f| \in L^1(U)$ e

$$\int_{f(U)} g d\mu = \int_U (g \circ f) |\Delta_f| d\mu.$$

Demonstração:

Seja R um retângulo fechado contido em U . Mostraremos inicialmente que a restrição de $(g \circ f) |\Delta_f|$ a R está em $L^1(R)$ e que a fórmula é válida com U substituído por R .

Considere uma sequência $g_k \in C_0^0(f(U))$ tal que $g_k \rightarrow g$ em $L^1(f(U))$ (justifique!). Passando a uma subsequência, podemos supor que $g_k \rightarrow g$ para todo $y \in f(U) - Z$, onde Z é um conjunto de medida nula. Pelo lema 8.1.2, $f^{-1}(Z)$ tem medida nula.

Defina $\hat{g}_k := (g_k \circ f) |\Delta_f|$. Cada $\hat{g}_k$ é uma função contínua em R e $\hat{g}_k \rightarrow (g \circ f) |\Delta_f|$ qtp em R (justifique!). Afirmamos que $\hat{g}_k$ é uma sequência de Cauchy em $L^1(R)$. De fato, decorre do corolário 8.3.4 que

$$\int_R |\hat{g}_k - \hat{g}_j| d\mu = \int_{f(R)} |g_k - g_j| d\mu,$$

donde segue o afirmado.

Mas então temos que $\hat{g}_k \rightarrow (g \circ f) |\Delta_f|$ em $L^1(R)$ (justifique!) e

$$\int_{f(E)} g d\mu = \int_E (g \circ f) |\Delta_f| d\mu$$

quando $E = R$. Decorre da expressão acima que o teorema é válido para qualquer subconjunto mensurável $E \subset R$ (note que $f(E)$ é mensurável!).

Considere agora uma sequência de retângulos $R_m \subset U$ tal que $\cup R_m = U$ (justifique a existência de tal sequência!). Definindo $E_n := R_n - (R_1 \cup \dots \cup R_{n-1})$ obtemos uma sequência de subconjuntos disjuntos E_n , tais que o teorema vale quando aplicado a cada E_n . Defina então

$$h_n := \mathcal{X}_{E_n} g \quad \text{e} \quad \hat{h}_n := (h_n \circ f) |\Delta_f|.$$

O teorema decorre então do teorema da convergência dominada (mais precisamente, do exercício 9 do capítulo 4). $\square$

Observação: Não é difícil adaptar a demonstração do resultado acima, de modo a podermos considerar aplicações $g : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$, onde Y é um espaço de Banach.

Algumas vezes encontramos-nos em uma situação em que a função f acima não é invertível em um conjunto de medida nula; por exemplo, quando lidamos com coordenadas polares. O próximo resultado mostra que isto não constitui dificuldade.

Corolário 8.3.6 *Sejam U um aberto e $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Seja $E \subset U$ um conjunto mensurável tal que:*

- (i) ∂E tem medida nula em $\mathbb{R}^n$;
- (ii) f é um difeomorfismo quando restrito ao interior de E .

Dada $g \in L^1(f(E))$, então $(g \circ f)|\Delta_f| \in L^1(E)$ e

$$\int_{f(E)} g d\mu = \int_E (g \circ f) |\Delta_f| d\mu.$$

Demonstração:

Seja $E_0 = \text{int}(E)$. Os conjuntos $f(E)$ e $f(E_0)$ diferem apenas por um conjunto de medida nula: $f(\partial E)$. Como E_0 e E diferem também apenas por um conjunto de medida nula, basta então aplicar o teorema de mudança de variáveis aos conjuntos $f(E_0)$ e E_0 . $\square$

8.4 Exercícios

- Mostre que a imagem de um conjunto mensurável por uma função Lipschitz-contínua é mensurável. Em particular, a imagem de conjuntos mensuráveis por uma transformação linear é sempre mensurável.
- Mostre a unicidade da função determinante, isto é, que existe apenas uma aplicação n -linear $\det : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ alternada tal que $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$. Sugestão: Dados vetores $v_1, \dots, v_n$, escreva-os como combinação linear dos vetores da base canônica e utilize as propriedades da função determinante.

Capítulo 9

Integração e Diferenciação

Em todo este capítulo denotaremos $L([a, b])$ as funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que são Lebesgue integráveis.

9.1 Derivadas de Funções Monótonas

Definição 9.1.1 Cobertura de Vitali

Uma coleção de intervalos $\mathcal{V}$ é uma cobertura de Vitali de $A \subset \mathbb{R}$ se, para todo $\epsilon > 0$ e todo $x \in A$ existe um intervalo $I \in \mathcal{V}$ tal que $x \in I$ e $\mu(I) < \epsilon$.

Teorema 9.1.2 *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto tal que $\mu^*(A) < \infty$. Dado $\epsilon > 0$, toda cobertura de Vitali $\mathcal{V}$ de A possui uma coleção de intervalos $\{I_i; i = 1, 2, \dots, n\}$, dois a dois disjuntos, tais que*

$$\mu^* \left(A \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i \right) < \epsilon.$$

Demonstração:

1a. parte: Sem perda de generalidade, podemos supor que todos os intervalos $I \in \mathcal{V}$ são fechados, uma vez que

$$\mu^* \left(A \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i \right) = \mu^* \left(A \setminus \bigcup_{i=1}^n \bar{I}_i \right).$$

Uma vez que $\mu^*(A) < \infty$, podemos também supor que existe um aberto U , com $\mu(U) < \infty$ tal que $I \subset U$ para todo $I \in \mathcal{V}$. Note que, ao fazermos esta hipótese, pode ser necessário passar a uma subcobertura de $\mathcal{V}$.

2a. parte: Escolheremos uma coleção $I_i \in \mathcal{V}$, de intervalos com medida não-crescente. Escolha $I_1 \in \mathcal{V}$ tal que

$$\mu(I_1) > \frac{1}{2} \sup\{\mu(I); I \in \mathcal{V}\}.$$

Indutivamente, construímos uma sequência de intervalos, com

$$\mu(I_{j+1}) \leq \mu(I_j),$$

ao escolhermos I_{j+1} satisfazendo: se $A \subset \bigcup_{i=1}^j I_i$, escolhemos apenas os conjuntos $I_1, \dots, I_j$; caso contrário, defina

$$r_j := \sup\{\mu(I); I \in \mathcal{V}, I \cap I_i = \emptyset, i = 1, \dots, j\}.$$

Temos que $r_j \leq \mu(U) < \infty$. Por outro lado, $r_j > 0$, pois $\mathcal{V}$ é uma cobertura de Vitali e $\cup_{i=1}^j I_i$ não cobre A . Pela definição de $\sup$, podemos escolher $I_{j+1} \in \mathcal{V}$ com $\mu(I_{j+1}) > r_j/2$ e $I_{j+1} \cap I_i = \emptyset$ para $i = 1, \dots, j$. Reordenando a cada passagem, obtemos uma sequência não-crescente.

Afirmamos que existe¹ n tal que $\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(I_i) < \epsilon/5$. Caso contrário, obteríamos uma contradição com $\mu(U) < \infty$, uma vez que a coleção escolhida é constituída de intervalos disjuntos.

3a. parte: Com n escolhido acima, a coleção $I_1, \dots, I_n$ é a coleção procurada. De fato, se $y \in (A \setminus \cup_{i=1}^n I_i)$, podemos escolher $I_y \in \mathcal{V}$ tal que

$$I_y \cap I_i = \emptyset, \forall i = 1, \dots, n.$$

Tal fato é consequência de $\cup_{i=1}^n I_i$ ser um conjunto fechado e da definição de $\mathcal{A}$. Por outro lado, existe I_k pertencente a coleção $I_{n+1}, I_{n+2}, \dots$ tal que $I_y \cap I_k \neq \emptyset$. De fato, temos

$$\mu(I_y) \leq r_j < 2\mu(I_{j+1}),$$

de acordo com a definição de r_j e ao método de construção de $\{I_1, \dots, I_n, \dots\}$. Uma vez que $\mu(I_j) \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$, devemos ter $I_y \cap I_k \neq \emptyset$ para algum k .

Seja $k = k(y)$ o menor inteiro $k > n$ tal que $I_k \cap I_y \neq \emptyset$. Seja x_k o centro do intervalo I_k . Afirmamos que

$$|y - x_k| \leq \frac{5}{2}\mu(I_k). \quad (9.1)$$

De fato, temos

$$|y - x_k| < \mu(I_y) + \frac{1}{2}\mu(I_k) \leq \frac{5}{2}\mu(I_k).$$

Para cada i , seja J_i o intervalo fechado de centro em x_i e comprimento $5\mu(I_i)$. De acordo com a desigualdade (9.1), temos $y \in J_i$. Uma vez que $k = k(y) > n$ e $y \in A \setminus \cup_{i=1}^n I_i$, temos

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i \subset \bigcup_{i=1}^n J_i$$

e

$$\mu\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} J_i\right) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(J_i) \leq 5 \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(I_i) < \epsilon.$$

Isto completa a demonstração. □

Definição 9.1.3 Derivadas de Dini

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos as derivadas de Dini de f por

$$\begin{aligned} D^+ f(x) &= \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ D_+ f(x) &= \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ D^- f(x) &= \limsup_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \\ D_- f(x) &= \liminf_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \end{aligned}$$

¹Caso a coleção de intervalos construída acima seja infinita.

Estes números sempre existem e claramente temos

$$(i) \quad D^+ f(x) \geq D_+ f(x), \quad D^- f(x) \geq D_- f(x);$$

(ii) $\exists f'(x)$ se, e somente se, todas as derivadas de Dini forem finitas e iguais em x .

Teorema 9.1.4 *Seja f uma função crescente² no intervalo $[a, b]$. Então f é diferenciável qtp. A derivada f' é mensurável e*

$$\int_a^b f(x) dx \leq f(b) - f(a).$$

Demonstração:

Vamos mostrar que qualquer conjunto onde duas das derivadas de Dini são desiguais tem medida nula. Exemplificaremos escolhendo o conjunto

$$E := \{x \in [a, b]; D_- f(x) < D^+ f(x)\}.$$

1a. parte: Claramente podemos escrever E como a união de todos os conjuntos

$$E_{q,r} := \{x \in [a, b]; D_- f(x) < q < r < D^+ f(x)\},$$

em que $q, r \in \mathcal{Q}$. Assim, basta mostrarmos que $s := \mu^*(E_{q,r}) = 0$ para quaisquer q, r como acima. Vamos supor $s > 0$ e mostrar então que, para todo $\epsilon > 0$, temos

$$q(s + \epsilon) > r(s - 2\epsilon),$$

donde podemos concluir $q \geq r$, uma contradição.

Para isto, vamos construir uma cobertura de Vitali $\mathcal{V}$ de $E_{q,r}$. Considere um aberto U contendo $E_{q,r}$ tal que $\mu(U) < s + \epsilon$. Para cada $x \in E_{q,r}$, escolha $h > 0$ tal que

$$[x - h, x] \in U \quad \text{e} \quad f(x) - f(x - h) < qh.$$

Note que é possível satisfazer a primeira relação porque U é aberto, enquanto a segunda decorre da definição de $D_- f(x)$. Seja $\mathcal{V}$ a coleção de todos os intervalos $[x - h, x]$ com $x \in E_{q,r}$ e h escolhido como acima. Claramente $\mathcal{V}$ é uma cobertura de Vitali de $E_{q,r}$. De acordo com o Teorema 9.1.2, podemos escolher uma coleção de intervalos $\{I_i := [x_i - h_i, x_i] \in \mathcal{V}; i = 1, 2, \dots, n\}$, dois a dois disjuntos, tais que

$$\mu^* \left(E_{q,r} \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i \right) < \epsilon. \quad (9.2)$$

2a. parte: Defina

$$B := E_{q,r} \cap \left(\bigcup_{i=1}^n I_i \right).$$

Então

$$\left(E_{q,r} \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i \right) \cup B = E_{q,r}$$

²Função crescente significa $x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$. Note que toda função crescente é mensurável.

e portanto, de acordo com a equação (9.2),

$$\mu^*(E_{q,r}) < \epsilon + \mu^*(B).$$

Vamos agora obter uma cobertura de Vitali $\mathcal{U}$ de B em termos de $I_1, \dots, I_n$.

Para cada $y \in B$, existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $y \in I_j$

9.2 Funções de Variação Limitada

Definição 9.2.1 Aplicações de Variação Limitada

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ uma aplicação tomando valores no espaço de Banach $(E, |\cdot|)$. A aplicação f é de variação limitada no intervalo $[a, b]$, denotado $f \in BV[a, b]$ se

$$V(f, [a, b]) := \sup_P V_P f := \sup_P \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \infty,$$

onde o sup é tomado sobre todas as partições do intervalo $[a, b]$.

É fácil ver que o conjunto $BV[a, b]$ forma um espaço vetorial. Além disto, se $f, g \in BV[a, b]$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, então

$$V(f + g, [a, b]) \leq V(f, [a, b]) + V(g, [a, b])$$

e

$$V(\alpha f, [a, b]) = |\alpha| V(f, [a, b]).$$

Assim, $BV[a, b]$ é um espaço vetorial que possui a semi-norma

$$V(\cdot, [a, b])$$

Exemplo 9.2.2 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e crescente no intervalo $[a, b]$. Então $V(f, [a, b]) = f(b) - f(a)$ e, portanto, $f \in BV[a, b]$. Se f for diferenciável no intervalo $[a, b]$ e possuir derivada f' limitada, então $f \in BV[a, b]$, em virtude do Teorema do Valor Médio. Em particular, este é o caso se $f \in C^1([a, b])$.

Definição 9.2.3 Função Variação

Seja $f \in BV[a, b]$. Para todo $x \in [a, b]$ define a função variação de f por

$$Vf(x) := V(f, [a, x]).$$

Lema 9.2.4

(i) A função $Vf(x)$ é crescente;

(ii) Se $a \leq x \leq y \leq b$, então

$$V(f, [a, y]) = V(f, [a, x]) + V(f, [x, y]).$$

(iii) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função da forma

$$f = g - h,$$

em que g, h são funções crescentes. Então $f \in BV[a, b]$ para todo intervalo $[a, b]$ e

$$V(f, [a, b]) \leq g(b) - g(a) + h(b) - h(a).$$

(iv) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in BV[a, b]$, então existem funções crescentes $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $g(a) = 0 = h(a)$ e

$$f(x) = f(a) + [g(x) - h(x)]$$

e

$$Vf(x) = g(x) + h(x).$$

Demonstração:

(i) e (ii) Notamos que se $x < y$, sempre podemos refinar uma partição de $[a, y]$ de forma a incluir x . (ii) decorre imediatamente deste fato, enquanto (i) segue se, além disto, notarmos que se P' é um refinamento de P , então $V_P f \leq V_{P'} f$. Daí decorre (i).

(iii) Considere uma partição $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ do intervalo $[a, b]$. Então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1}) - h(x_i) + h(x_{i-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^n |h(x_i) - h(x_{i-1})| \\ &= g(x_n) - g(x_0) + h(x_n) - h(x_0) \\ &= g(b) - g(a) + h(b) - h(a). \end{aligned}$$

(iv) Defina g, h pelas fórmulas

$$2g = Vf + f - f(a) \qquad 2h = Vf - f + f(a).$$

Claramente $g(a) = 0 = h(a)$ e as expressões para f e Vf decorrem imediatamente das definições de g e h . Resta provar que estas funções são crescentes. Sejam $x, y \in [a, b]$ com $x \leq y$. Então, de acordo com (ii),

$$\begin{aligned} 2g(y) - 2g(x) &= V(f, [a, y]) + f(y) - f(a) \\ &\quad - [V(f, [a, x]) + f(x) - f(a)] \\ &= V(f, [x, y]) + f(y) - f(x) \geq 0, \end{aligned}$$

pois, obviamente, $V(f, [x, y]) \geq |f(y) - f(x)|$. Analogamente para h .

□

Corolário 9.2.5 Se f for de variação limitada no intervalo $[a, b]$, então f' existe qtp em $[a, b]$ e é mensurável neste intervalo.

Demonstração:

Decorre imediatamente da aplicação do Teorema 9.1.4 ao item (iv) do Lema 9.2.4.

□

9.3 Derivação de Integrais

Lema 9.3.1 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função em $L([a, b])$. Então a função F definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é uma função contínua de variação limitada em $[a, b]$.

Demonstração:

Seja $\mathcal{X}_x$ a função característica do intervalo $[a, x]$. Se $x_k \rightarrow a' > a$, então $\mathcal{X}_{x_k}(t) \rightarrow \mathcal{X}_{a'}(t) \forall t \in [a, a']$. Pelo teorema da convergência dominada ($|\mathcal{X}_{x_k}| \leq 1 \in L((a, a'), \mu)$), temos

$$F(x_k) = \int_{\mathbb{R}} f \mathcal{X}_{x_k} dt \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f \mathcal{X}_{a'} dt = F(a'),$$

o que prova que F é contínua.

Para mostrar que F é de variação limitada, seja $\{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$. Então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k |F(x_i) - F(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^k \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|dt \\ &= \int_a^b |f(t)|dt < \infty. \end{aligned}$$

□

Lema 9.3.2 *Se $f \in L([a, b])$ e*

$$\int_a^x f(t)dt = 0$$

para todo $x \in [a, b]$, então $f(t) = 0$ qtp em $[a, b]$.

Demonstração:

Defina

$$E := \{x \in [a, b]; f \geq 0\}.$$

Então E é mensurável. Suponhamos que $\mu(E) > 0$. Então existe um conjunto fechado $F \subset E$, com $\mu(F) > 0$. Defina $\mathcal{O} = (a, b) - F$. Como $0 = \int_a^b f = \int_F f + \int_{\mathcal{O}} f$, temos

$$\int_{\mathcal{O}} f = - \int_F f \neq 0.$$

Mas $\mathcal{O}$ pode ser escrito como uma união enumerável de intervalos (a_n, b_n) disjuntos. Decorre daí que

$$\int_{V_\epsilon} f = \sum \int_{a_n}^{b_n} f.$$

Isto mostra que $\int_{a_n}^{b_n} f \neq 0$ para algum n . Mas isto implica que ou $\int_a^{a_n} f \neq 0$ ou $\int_a^{b_n} f \neq 0$, uma contradição. Similarmente analisamos o caso em que $f < 0$ num conjunto de medida positiva. O lema decorre destes dois casos.

□

Lema 9.3.3 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e mensurável em $[a, b]$*

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt + F(a).$$

Então $F'(x) = f(x)$ qtp em $[a, b]$.

Demonstração:

Notamos imediatamente que f é integrável em $[a, b]$. De acordo com Lema 9.3.1, temos que F é de variação limitada em $[a, b]$. Assim $F'(x)$ existe qtp em $[a, b]$. Suponhamos que $|f| \leq K$. Defina

$$f_n(x) := \frac{F(x+h) - F(x)}{h},$$

em que $h = 1/n$. Então

$$f_n(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt,$$

donde $|f_n| \leq K$. Uma vez que $f_n(x) \rightarrow F'(x)$ qtp, decorre do Teorema da Convergência Dominada (note que $K \in L([a, b])!$) que

$$\begin{aligned} \int_a^c F'(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^c f_n(x)dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^c [F(x+h) - F(x)]dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_{a+h}^{c+h} F(x)dx - \int_a^c F(x)dx \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \int_c^{c+h} F(x)dx - \frac{1}{h} \int_a^{a+h} F(x)dx \right] \\ &= F(c) - F(a) \\ &= \int_a^c f(t)dt. \end{aligned} \tag{9.3}$$

A penúltima igualdade decorre da continuidade de F e de que

$$\begin{aligned} \left| F(c) - \frac{1}{h} \int_c^{c+h} F \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_c^{c+h} [F(c) - F] \right| \\ &\leq \sup_{x \in [c, c+h]} |F(c) - F(x)|. \end{aligned}$$

De acordo com a equação (9.3) temos então

$$\int_a^c (F' - f) = 0$$

para todo $c \in [a, b]$, donde, pelo Lema 9.3.2, temos

$$F'(x) = f(x) \text{ qtp em } [a, b].$$

□

Consideramos agora o caso de uma função integrável não necessariamente limitada.

Teorema 9.3.4 *Seja f integrável em $[a, b]$ e suponha que*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt.$$

Então $F'(x) = f(x)$ para quase todo $x \in [a, b]$.

Demonstração:

Uma vez que $f = f^+ - f^-$, notamos que o resultado estará provado se ele for mostrado para funções não negativas. Defina f_n por $f_n(x) = f(x)$, se $f(x) \leq n$ e $f_n(x) = n$, se $f(x) > n$. Então $f - f_n \geq 0$ e portanto

$$G_n(x) := \int_a^x (f - f_n)$$

é uma função crescente. De acordo com o Teorema 9.1.4, $G_n(x)$ possui derivada qtp. É fácil ver que esta derivada tem que ser não negativa. Assim,

$$\begin{aligned} F'(x) &= G'_n(x) + \frac{d}{dx} \int_a^x f_n \\ &\geq f_n(x) \text{ qtp,} \end{aligned}$$

de acordo com Lema 9.3.3. Como n é arbitrário, temos então

$$F'(x) \geq f(x) \text{ qtp.}$$

Portanto

$$\int_a^b F'(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

De acordo com o Teorema 9.1.4, temos

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx,$$

donde

$$\int_a^b (F' - f) = 0.$$

Como $F'(x) - f(x) \geq 0$, isto implica $F'(x) - f(x) = 0$ qtp e o resultado segue.

□

9.4 Funções Absolutamente Contínuas

Definição 9.4.1 Funções Absolutamente Contínuas

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente contínua em um intervalo limitado $[a, b]$ se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(t_i)| \leq \epsilon$$

para qualquer coleção de intervalos $(t_1, s_1), \dots, (t_n, s_n)$ dois a dois disjuntos tais que

$$\sum_{i=1}^n |s_i - t_i| < \delta.$$

Em particular, toda função absolutamente contínua é contínua, pois podemos tomar apenas um intervalo na soma acima.

Lema 9.4.2 Se f for absolutamente contínua em $[a, b]$, então f é de variação limitada em $[a, b]$. Em particular, f possui derivada qtp em $[a, b]$.

Demonstração:

Dado $\epsilon = 1$ tome o δ correspondente na definição de função absolutamente contínua. Então

$$V(f, [a, b]) \leq 1 + \frac{b-a}{\delta}.$$

□

Lema 9.4.3 Seja f integrável em $[a, b]$. Então

$$F(x) = C + \int_a^x f(t) dt$$

é absolutamente contínua.

Demonstração:

Seja $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ uma coleção de subintervalos dois a dois disjuntos de $[a, b]$. Então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| &= \sum_{i=1}^n \left| \int_{a_i}^{b_i} f(t) dt \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} |f(t)| dt \\ &= \int_{\cup_{i=1}^n (a_i, b_i)} |f(t)| dt. \end{aligned}$$

O resultado decorre então do Teorema 4.5.2.

□

Lema 9.4.4 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função absolutamente contínua em $[a, b]$ tal que $f' = 0$ qtp em (a, b) . Então f é constante³.*

Demonstração:

Tome $c \in (a, b]$. Queremos provar que $f(c) = f(a)$. Por hipótese, existe um subconjunto $A \subset [a, c]$ tal que $\mu(A) = c - a$ e $f' = 0$ em A . Tome $x \in A$. Então

$$0 = f'(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, existe um intervalo $[x, y] \subset [a, c]$ tal que

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon(y - x)}{2(c - a)}.$$

Note que a coleção de intervalos $[x, y]$ assim definidos forma uma cobertura de Vitali do conjunto A . Assim, de acordo com o Teorema 9.1, existe uma coleção de intervalos dois a dois disjuntos

$$\{[x_i, y_i]; x_i \in A, i = 1, \dots, n\}$$

tais que

$$\mu \left(A \setminus \bigcup_{i=1}^n [x_i, y_i] \right) < \delta. \quad (9.4)$$

Note que para a coleção continua valendo

$$|f(y_i) - f(x_i)| < \frac{\epsilon(y_i - x_i)}{2(c - a)}. \quad (9.5)$$

Podemos reordenar os intervalos $[x_i, y_i]$ de modo que $x_i < x_{i+1}$ para $i = 1, \dots, n-1$. Se definirmos $y_0 := a$ e $x_{n+1} = c$, vemos que os intervalos $[y_i, x_{i+1}]$ são tais que

$$[a, c] = \bigcup_{i=0}^n [y_i, x_{i+1}] \cup \bigcup_{i=1}^n [x_i, y_i].$$

Em virtude de (9.4) temos então que

$$\sum_{i=0}^n x_{i+1} - y_i < \delta$$

e, como f é absolutamente contínua,

$$\sum_{i=0}^n |f(x_{j+1}) - f(y_j)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

³Este lema faz uma distinção entre as funções absolutamente contínuas e as de variação limitada. Todas as funções da primeira classe pertencem à segunda, mas a recíproca não vale. Existem funções de variação limitada que não são constantes mas cuja derivada é qtp igual a zero. Veja Benedetto, J.J.: Real Variable and Integration, Example 4.4, p.128 ou Titchmarsh, E. C.: The Theory of Functions, p. 366.

Por outro lado, decorre de (9.5) que

$$\sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| < \frac{\epsilon}{2(c-a)} \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|.$$

Combinando estas duas últimas desigualdades, obtemos

$$|f(c) - f(a)| < \epsilon,$$

o que prova o afirmado, uma vez que $\epsilon > 0$ é arbitrário. □

Definição 9.4.5 *Uma função f de variação limitada no intervalo $[a, b]$ é singular se $f' = 0$ qtp em $[a, b]$.*

Teorema 9.4.6 *Seja f absolutamente contínua no intervalo $[a, b]$. Então, para todo $x \in [a, b]$,*

$$f(x) = f(0) + \int_a^x f'(t)dt.$$

Teorema 9.4.7 *Seja f uma função de variação limitada no intervalo $[a, b]$. Então, a menos de constante, existe uma única decomposição*

$$F(x) = G(x) + H(x),$$

em que G é uma função singular e H é absolutamente contínua.

Demonstração:

Defina, para todo $x \in [a, b]$, $H(x) := \int_a^x F'(t)dt$. Então H é absolutamente contínua. Defina então $G(x) = F(x) - H(x)$. Então $G'(x) = 0$ qtp em $[a, b]$, o que mostra que H é singular. Suponhamos agora que $F(x) = G(x) + H(x)$ e $F(x) = G_1(x) + H_1(x)$ sejam duas decomposições de F como no enunciado deste teorema. Então

$$G(x) - G_1(x) = H_1(x) - H(x).$$

Isto mostra que $G(x) - G_1(x)$ é absolutamente contínua. Mas $G'(x) - G'_1(x) = 0$ qtp, donde, pelo Teorema 9.4.4, temos $G(x) = G_1(x) + C$. O resultado segue. □

9.5 Exercícios

1. Seja f integrável em $[a, b]$. Então

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é uniformemente contínua em $[a, b]$.