CÔNICAS

CÔNICAS

(no mundo projetivo)

Israel Vainsencher

25/11/14

resumo:

Elipse, parábola e hipérbole, bem conhecidas de cursos elementares, são manifestações *reais* de um mesmo objeto *complexo projetivo*.

resumo:

Elipse, parábola e hipérbole, bem conhecidas de cursos elementares, são manifestações *reais* de um mesmo objeto *complexo projetivo*.

Vamos fazer uma breve introdução aos

- espaços projetivos,

resumo:

Elipse, parábola e hipérbole, bem conhecidas de cursos elementares, são manifestações *reais* de um mesmo objeto *complexo projetivo*. Vamos fazer uma breve introdução aos

- espaços projetivos,
- seus pontos no infinito

resumo:

Elipse, parábola e hipérbole, bem conhecidas de cursos elementares, são manifestações *reais* de um mesmo objeto *complexo projetivo*. Vamos fazer uma breve introdução aos

- espaços projetivos,
- seus pontos no infinito e
- coordenadas homogêneas.

resumo:

Elipse, parábola e hipérbole, bem conhecidas de cursos elementares, são manifestações *reais* de um mesmo objeto *complexo projetivo*. Vamos fazer uma breve introdução aos

- espaços projetivos,
- seus pontos no infinito e
- coordenadas homogêneas.

Em seguida, vamos discorrer sobre a

dualidade:

dualidade:

a coleção de retas tangentes a uma cônica corresponde a uma cônica no plano dual.

dualidade:

a coleção de retas tangentes a uma cônica corresponde a uma cônica no plano dual.

Por fim, discutiremos a questão da existência de cônica *tangente a* 5 retas gerais,

dualidade:

a coleção de retas tangentes a uma cônica corresponde a uma cônica no plano dual.

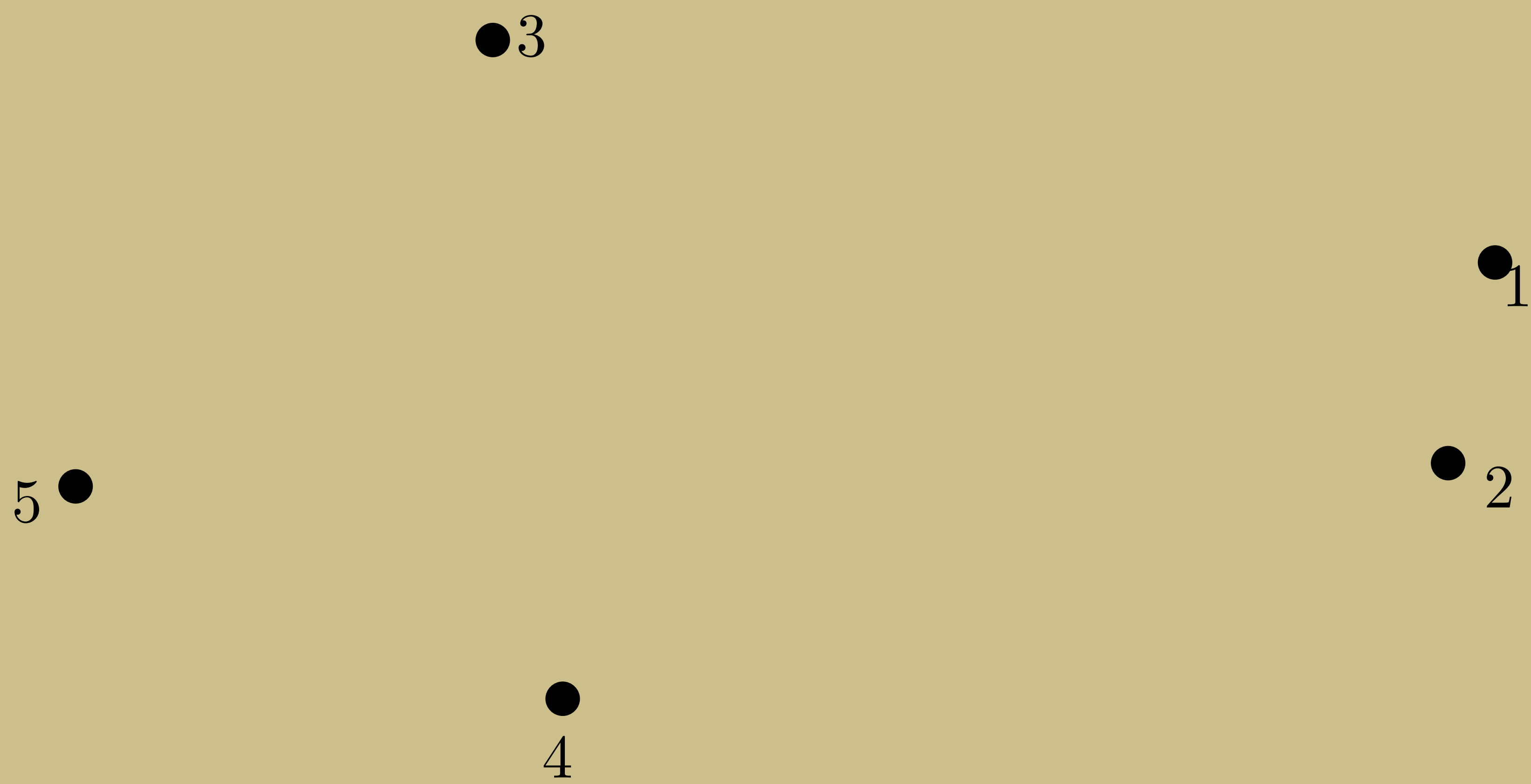
Por fim, discutiremos a questão da existência de cônica *tangente a* 5 retas gerais, dual da condição da cônica *passar por* 5 pontos gerais.

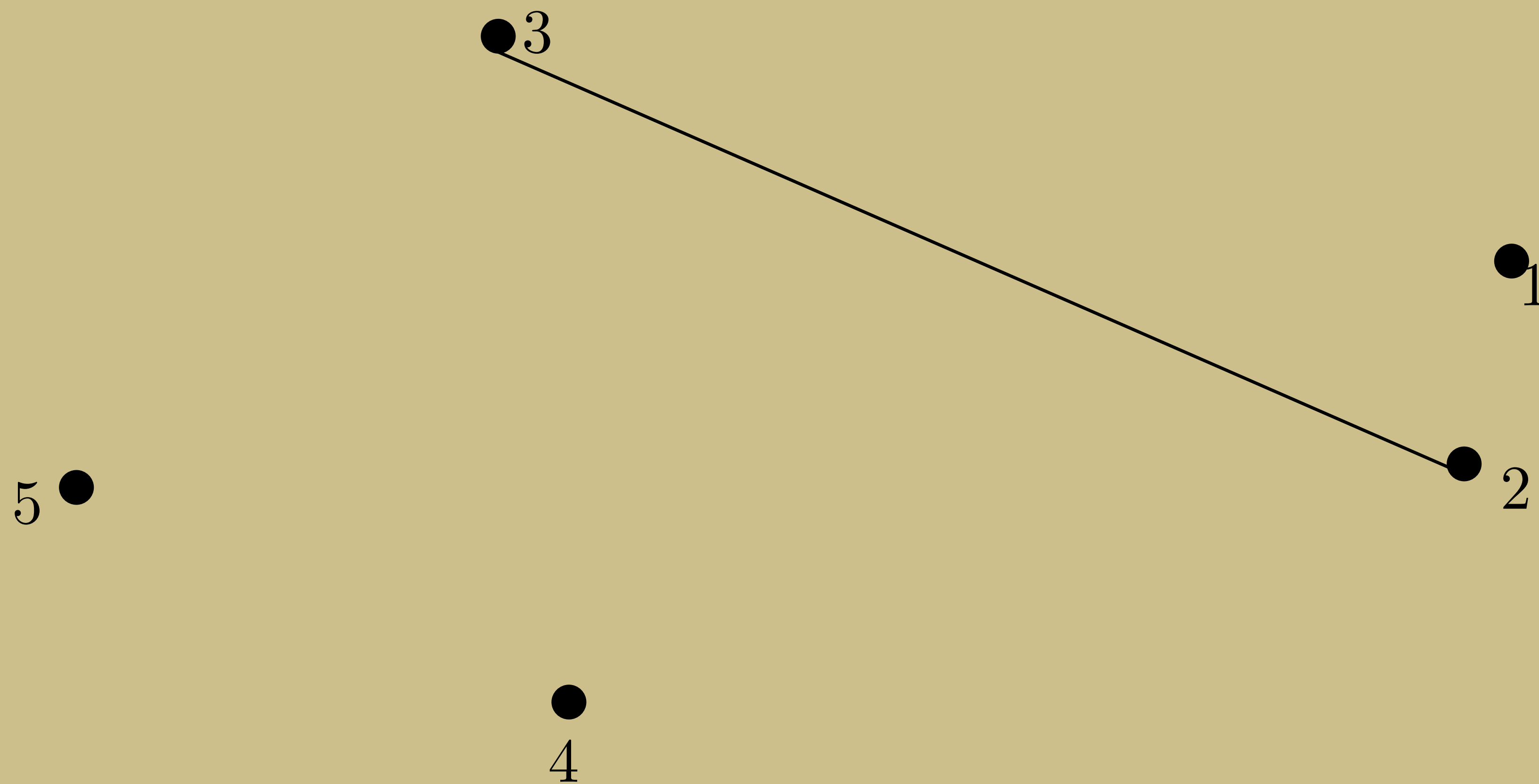
1


1
2

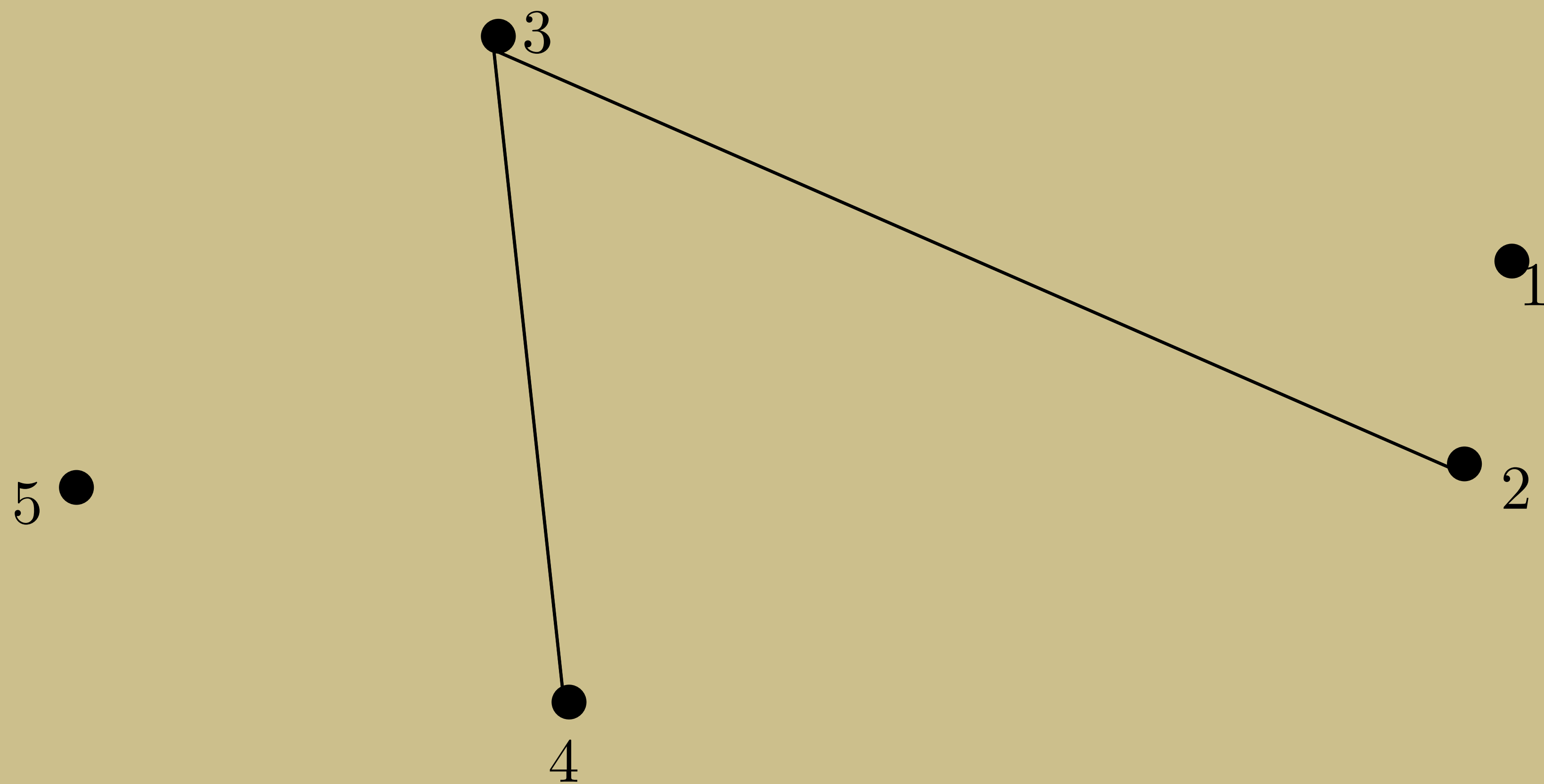

3
1
2

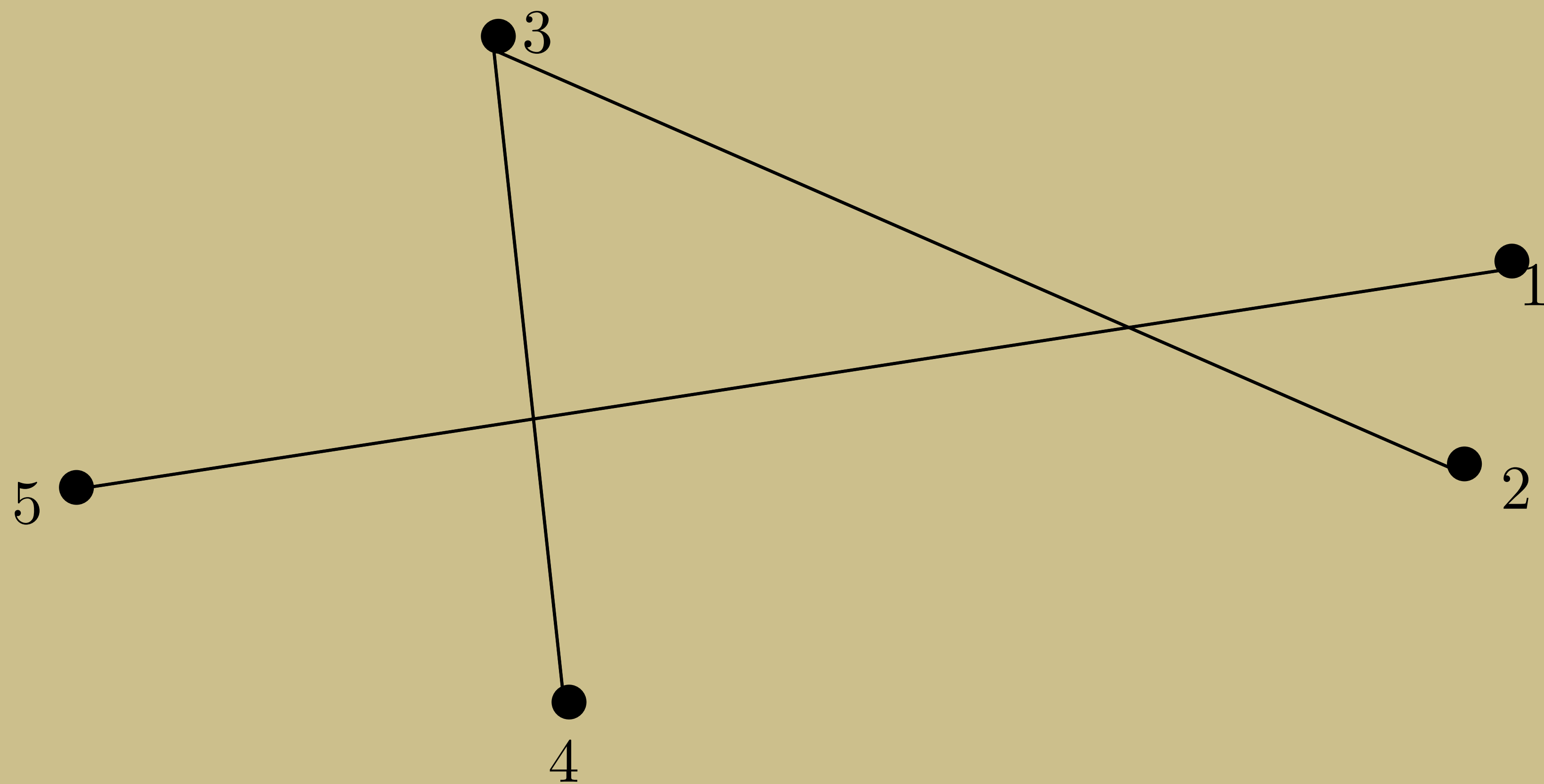

3
1
2
4

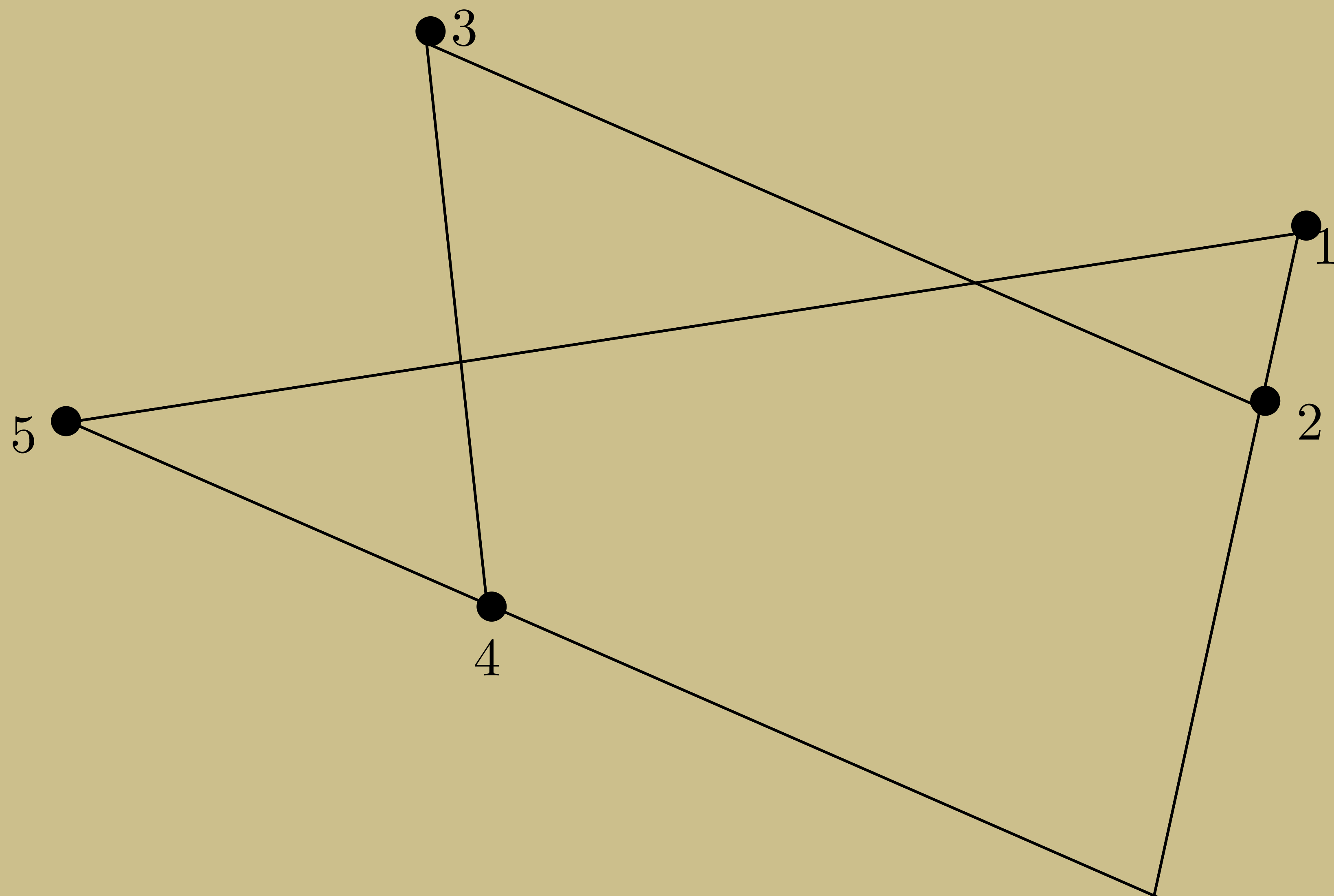

3
1
5
2
4

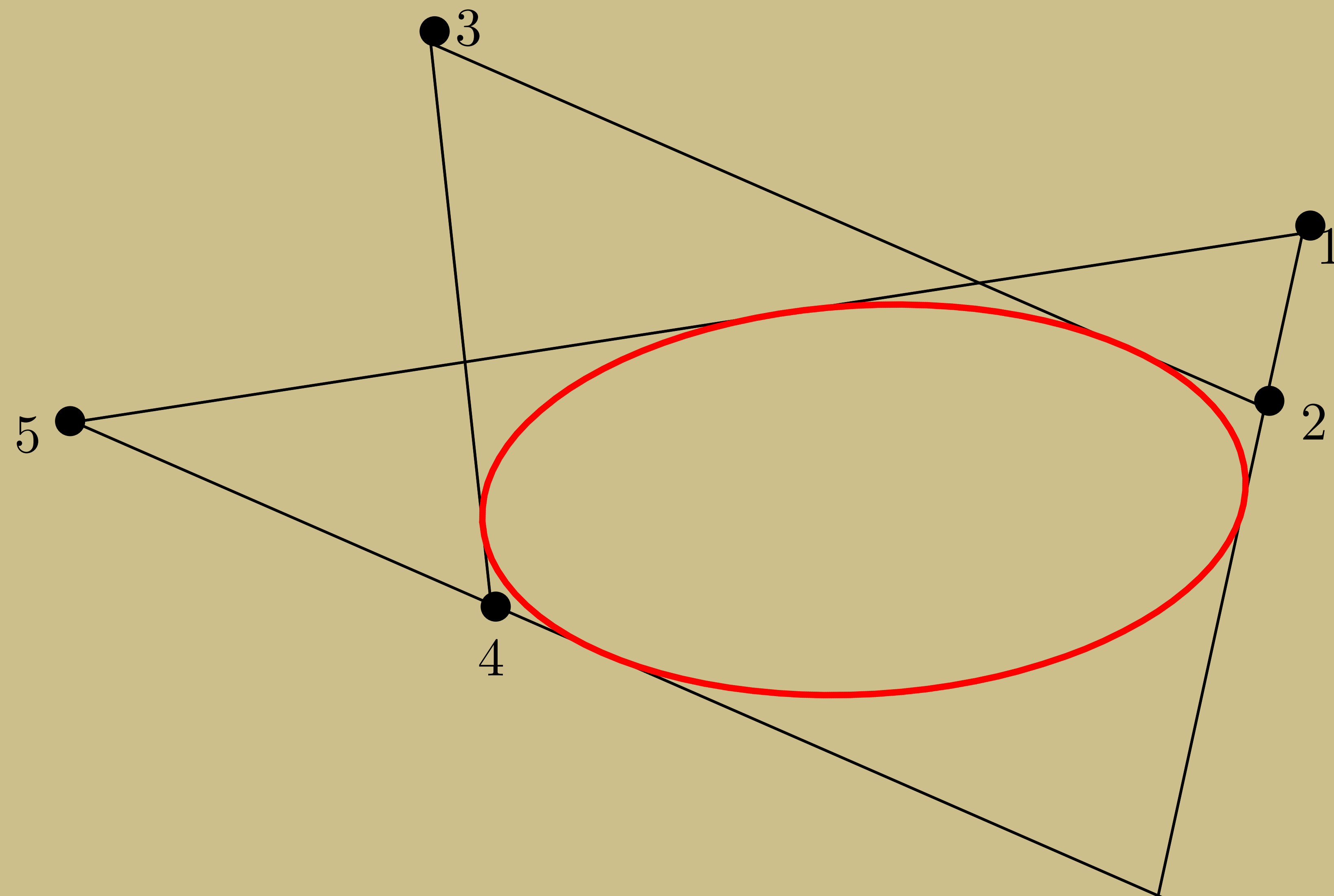


3
1
2
5
4


3
1
5
2
4


3
1
5
2
4


3
1
5
2
4



3
1
2
5
4

qual o tema?

qual o tema?

elipse

qual o tema?

elipse $=$

hipérbole

qual o tema?

elipse $=$

hipérbole $=$

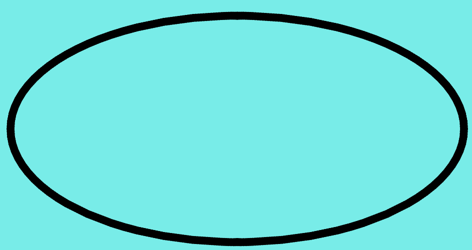
parábola...

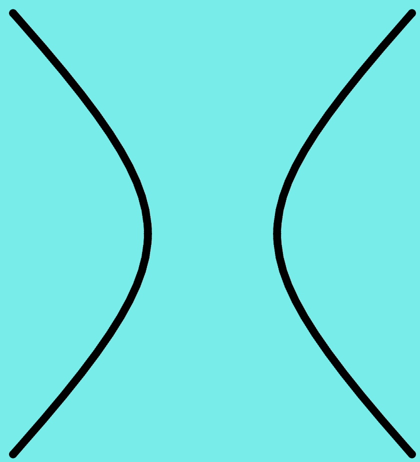
qual o tema?

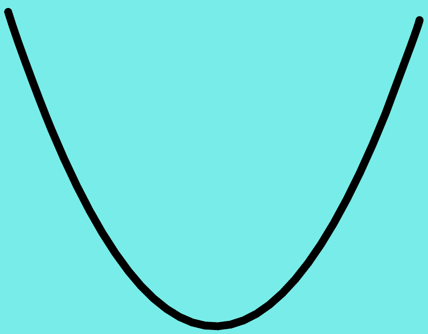
elipse =

hipérbole =

parábola...







$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

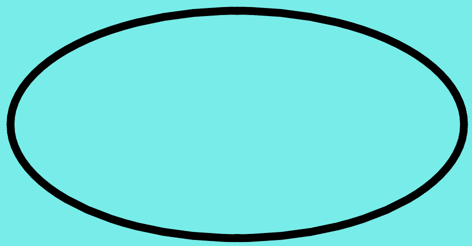
$$\boxed{\frac{x^2}{2a} - y = 0}$$

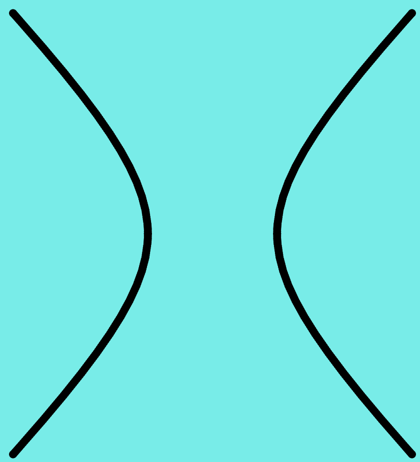
qual o tema?

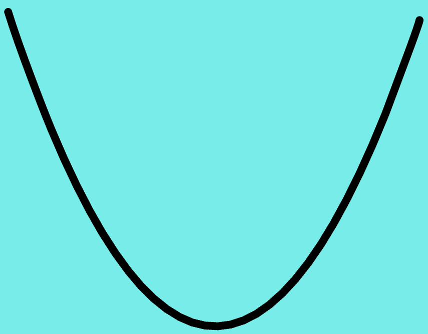
elipse $=$

hipérbole $=$

parábola...







$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{2a} - y = 0}$$

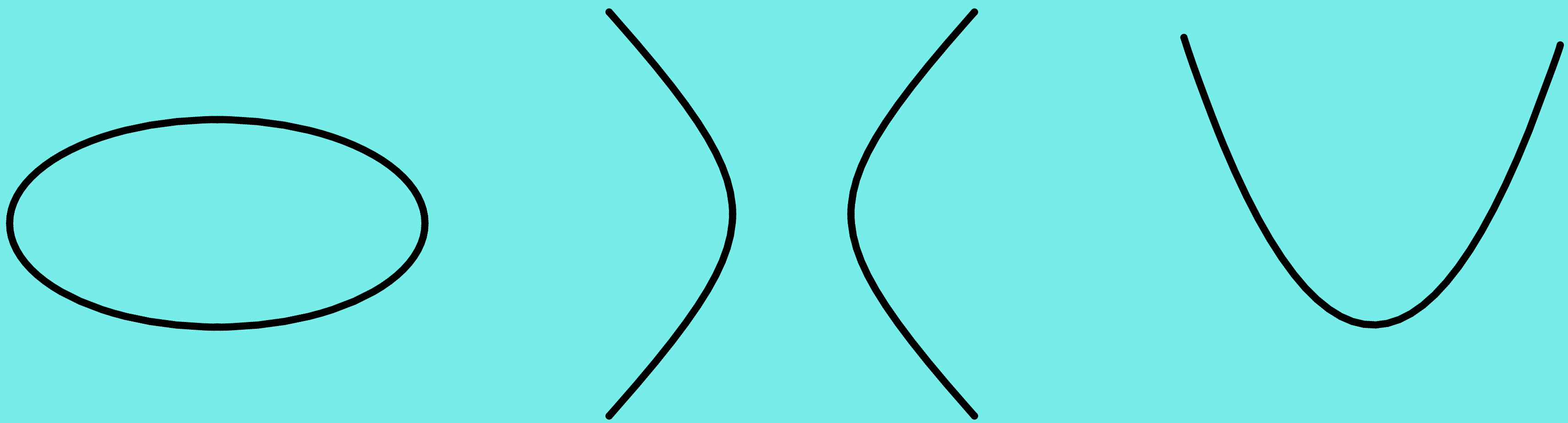
$? =$

qual o tema?

elipse $\equiv$

hipérbole $\equiv$

parábola...



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \qquad \boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1} \qquad \boxed{\frac{x^2}{2a}-y=0}$$

$$\boxed{? = \rightsquigarrow \equiv}$$

Hipérbole e parábola compartilham uma propriedade “visualmente” reconhecível: há pontos que se afastam indefinidamente.

Hipérbole e parábola compartilham uma propriedade “visualmente” reconhecível: há pontos que se afastam indefinidamente.

Na parábola, ligando um ponto, digamos o vértice, a outro que se d i s

Hipérbole e parábola compartilham uma propriedade “visualmente” reconhecível: há pontos que se afastam indefinidamente.

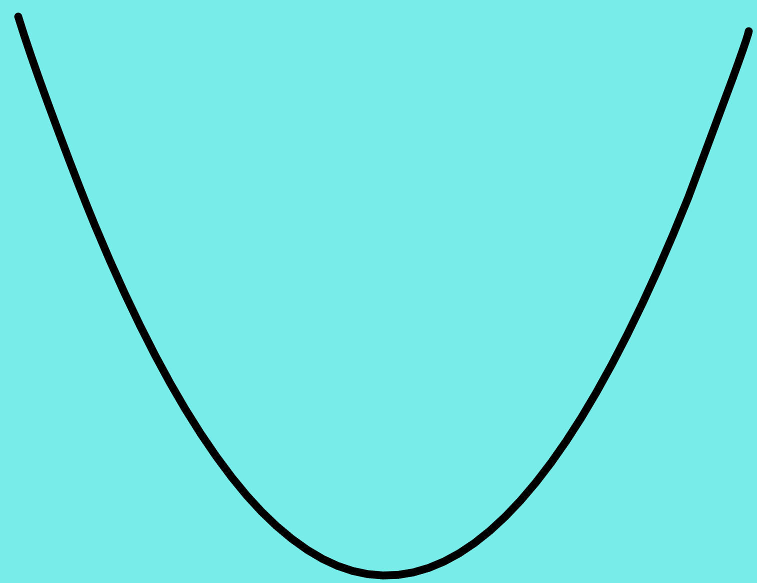
Na parábola, ligando um ponto, digamos o vértice, a outro que se d i s t a n

Hipérbole e parábola compartilham uma propriedade "visualmente" reconhecível: há pontos que se afastam indefinidamente.

Na parábola, ligando um ponto, digamos o vértice, a outro que se d i s t a n c i e,

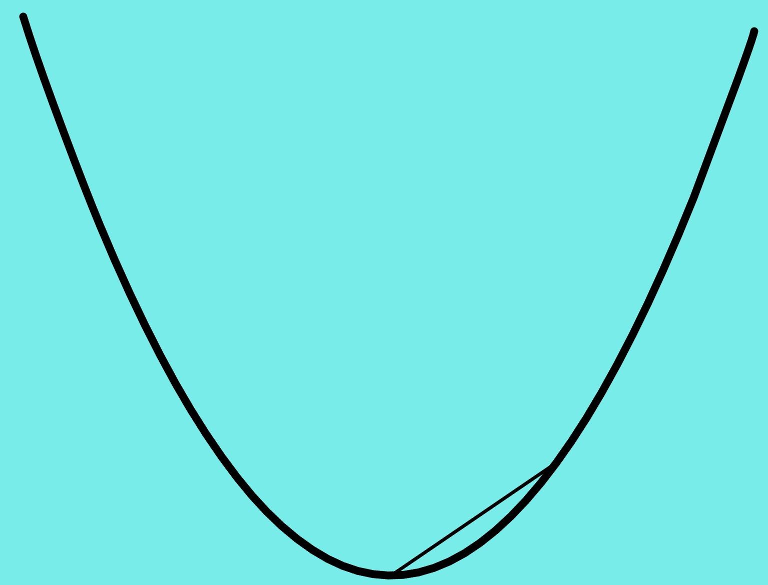
Hipérbole e parábola compartilham uma propriedade "visualmente" reconhecível: há pontos que se afastam indefinidamente.

Na parábola, ligando um ponto, digamos o vértice, a outro que se d i s t a n c i e, vemos que a reta fica cada vez "mais" v e r t i c a l:



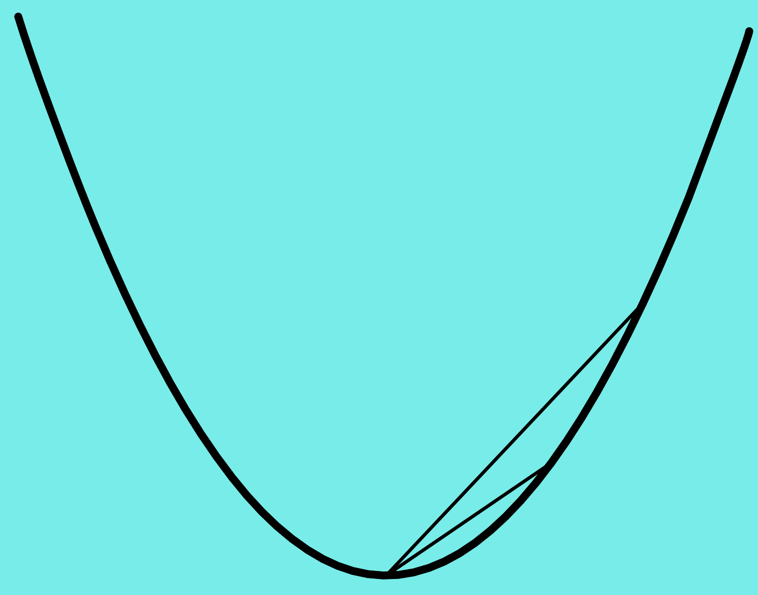
Hipérbole e parábola compartilham uma propriedade "visualmente" reconhecível: há pontos que se afastam indefinidamente.

Na parábola, ligando um ponto, digamos o vértice, a outro que se d i s t a n c i e, vemos que a reta fica cada vez "mais" v e r t i c a l:



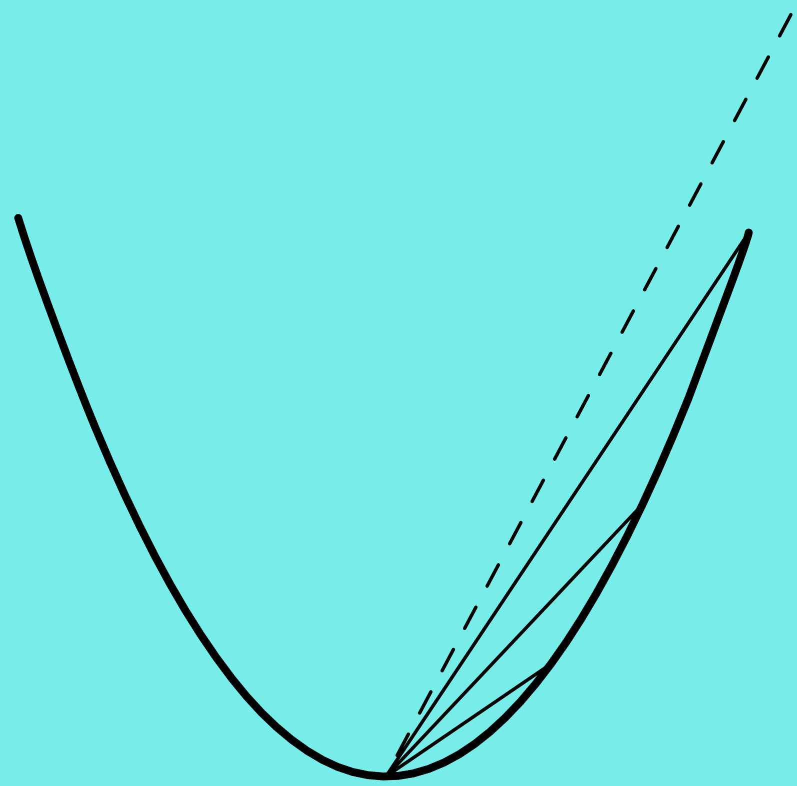
Hipérbole e parábola compartilham uma propriedade "visualmente" reconhecível: há pontos que se afastam indefinidamente.

Na parábola, ligando um ponto, digamos o vértice, a outro que se distancie, vemos que a reta fica cada vez "mais" vertical:



Hipérbole e parábola compartilham uma propriedade "visualmente" reconhecível: há pontos que se afastam indefinidamente.

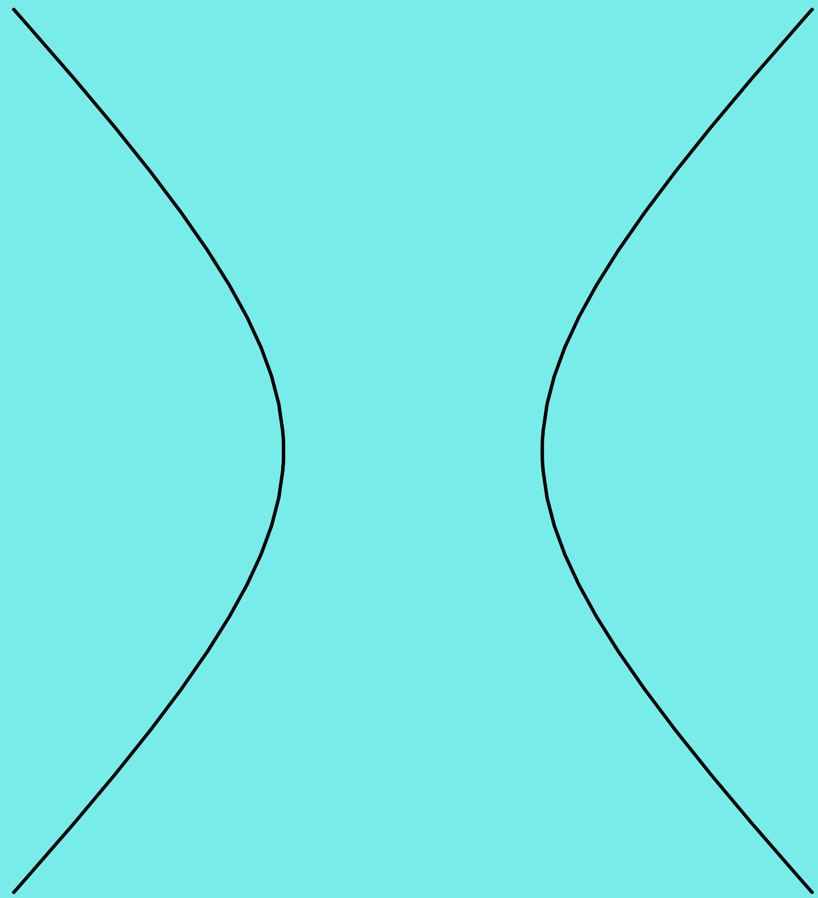
Na parábola, ligando um ponto, digamos o vértice, a outro que se d i s t a n c i e, vemos que a reta fica cada vez "mais" v e r t i c a l:



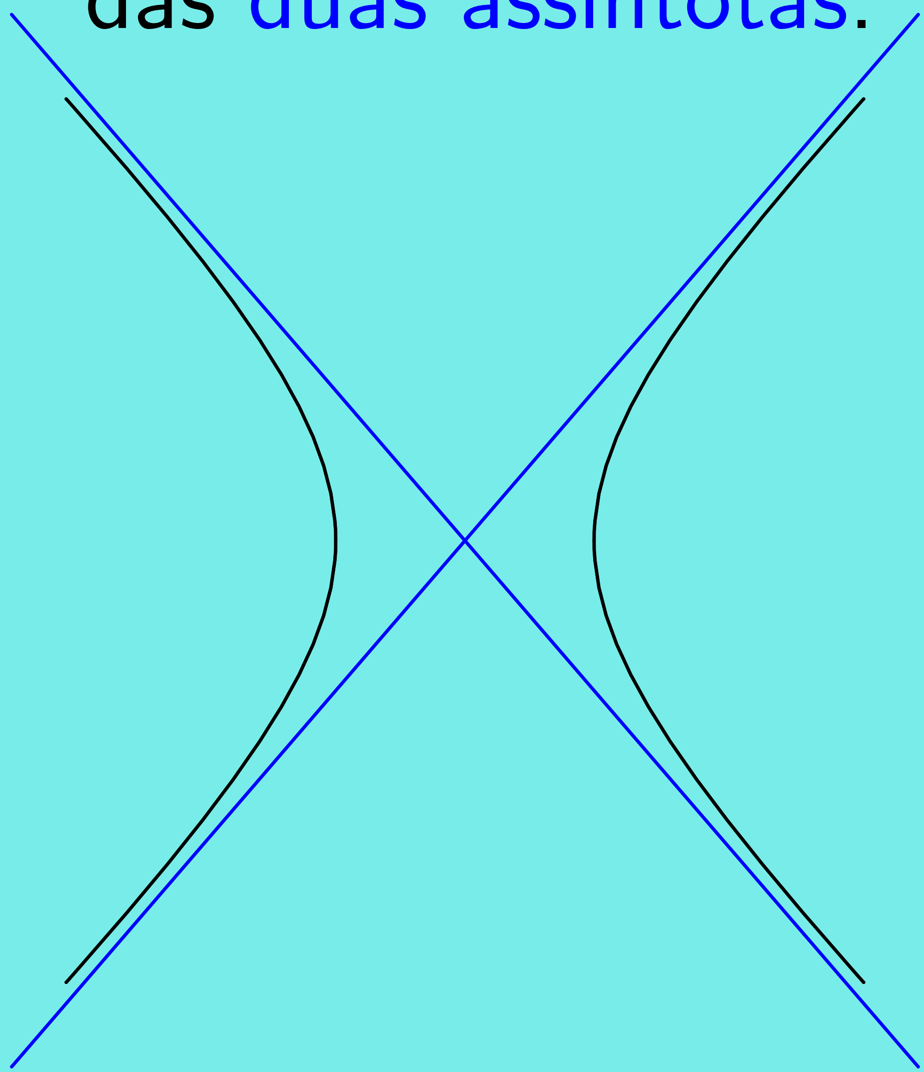
Hipérbole e parábola compartilham uma propriedade "visualmente" reconhecível: há pontos que se afastam indefinidamente.

Na parábola, ligando um ponto, digamos o vértice, a outro que se d i s t a n c i e, vemos que a reta fica cada vez "mais" v e r t i c a l:

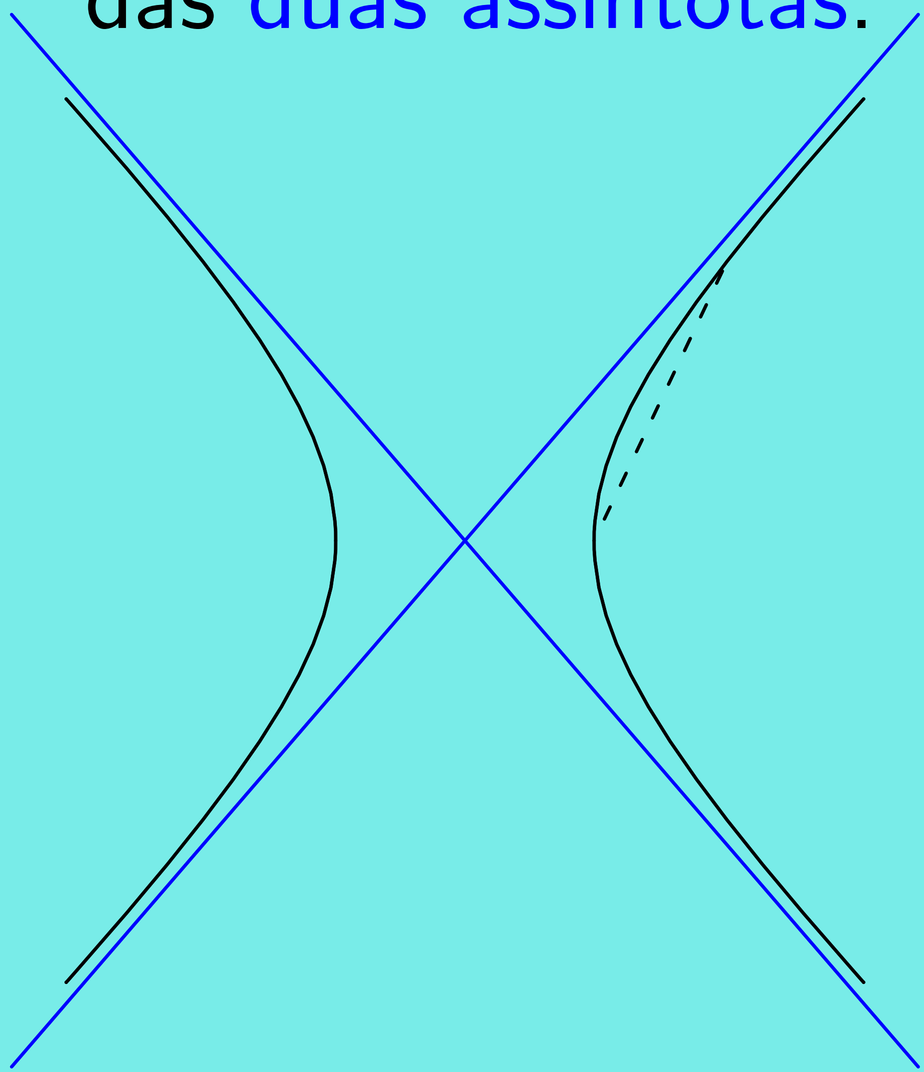
Na hipérbole, analogamente, as retas que ligam um ponto pré-fixado a outros que se afastam, vão ficando cada vez "mais paralelas" a uma das duas assíntotas.



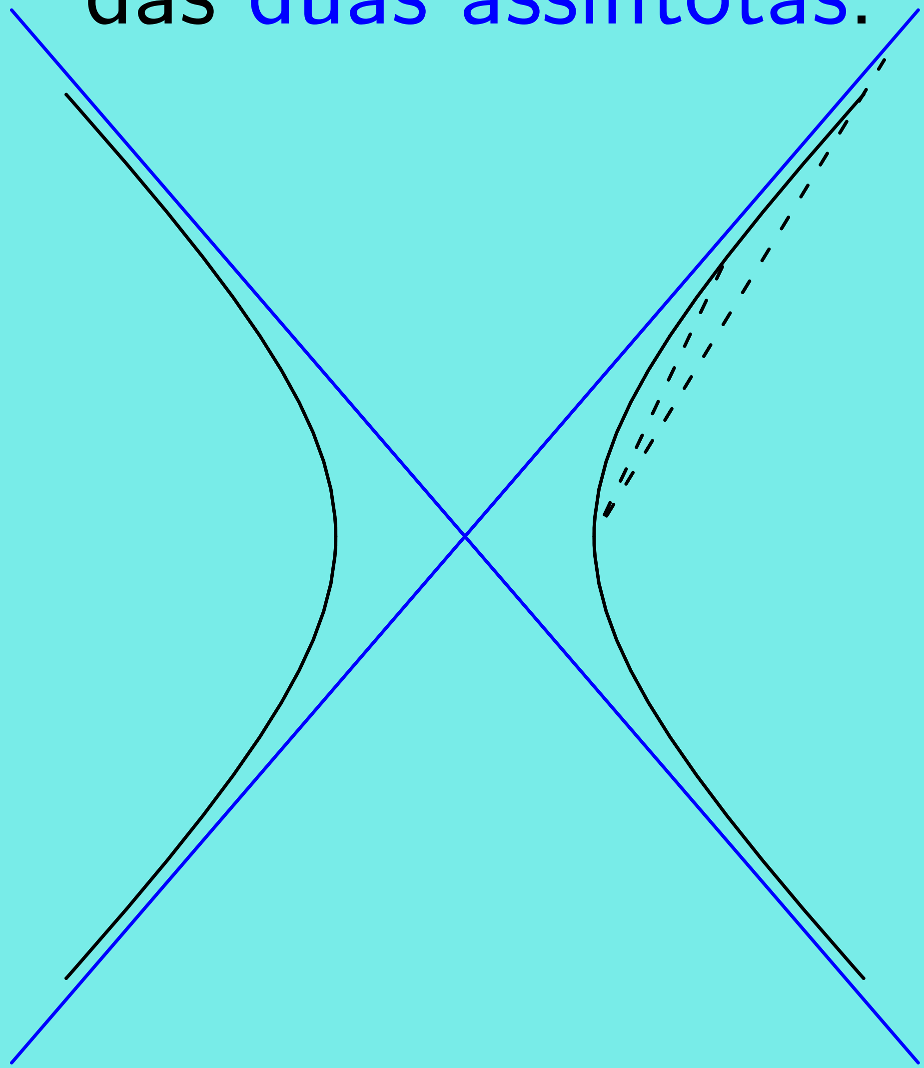
Na hipérbole, analogamente, as retas que ligam um ponto pré-fixado a outros que se afastam, vão ficando cada vez ”mais paralelas”a uma das duas assíntotas.



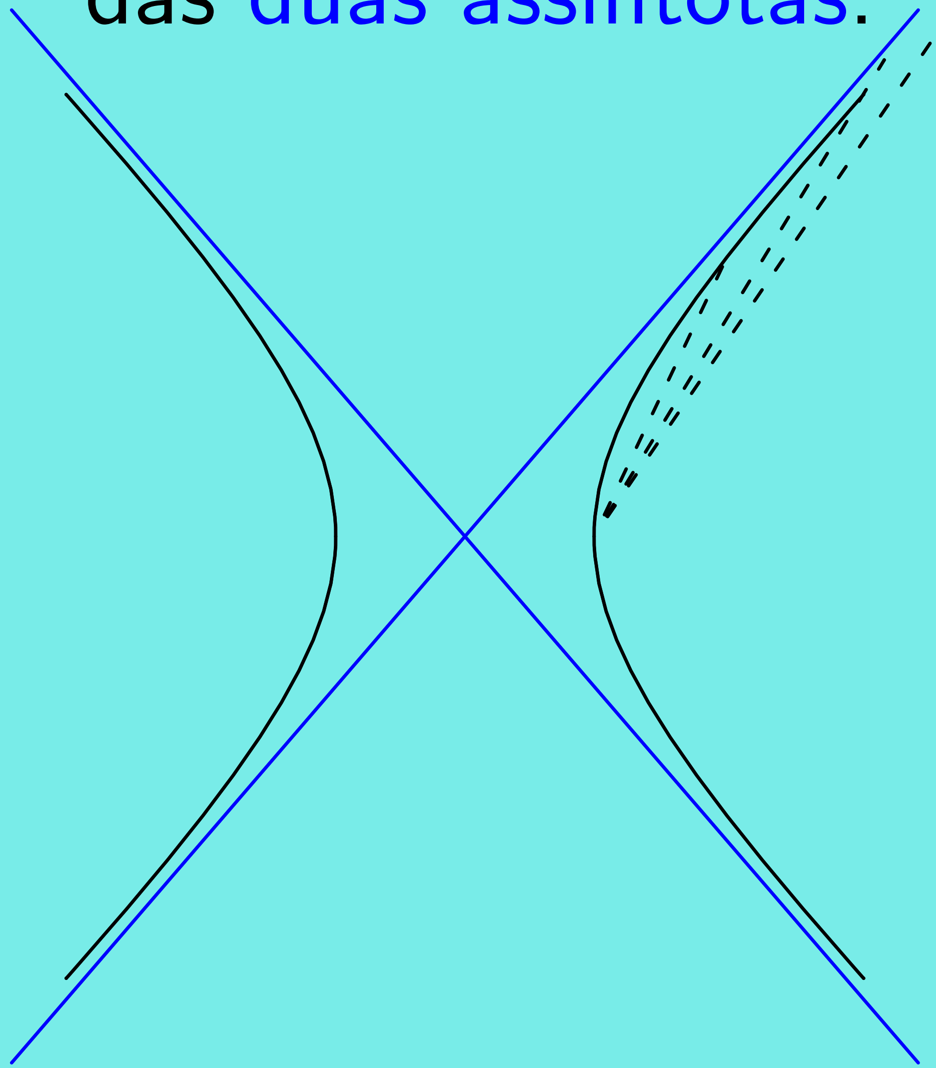
Na hipérbole, analogamente, as retas que ligam um ponto pré-fixado a outros que se afastam, vão ficando cada vez "mais paralelas" a uma das duas assíntotas.



Na hipérbole, analogamente, as retas que ligam um ponto pré-fixado a outros que se afastam, vão ficando cada vez ”mais paralelas”a uma das duas assíntotas.



Na hipérbole, analogamente, as retas que ligam um ponto pré-fixado a outros que se afastam, vão ficando cada vez "mais paralelas" a uma das duas assíntotas.



a noção de infinito em geometria

a noção de infinito em geometria
ou
um breve, brevíssimo,
intermezzo projetivo

a noção de infinito em geometria
ou
um breve, brevíssimo, *intermezzo* projetivo

A idéia do INFINITO permeia a geometria

há bastante tempo:

lembram dos pintores/arquitetos com seus "pontos de fuga"?

pontos de fuga?

pontos de fuga?

Técnicas de Desenho - Perspectiva Com 1 Ponto de Fuga

Central de Quadrinhos — Perspectiva

1 Ponto de fuga.

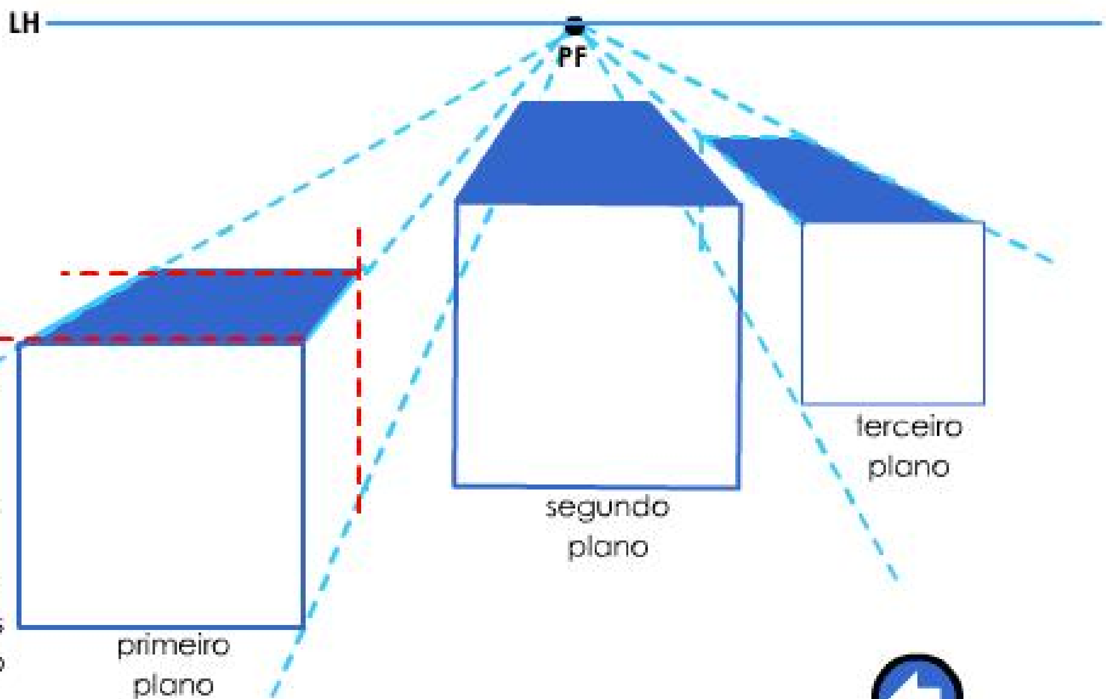
Sempre comece a construir os objetos pelo "quadrado" da frente.

Logo depois basta você traçar as linhas de profundidade. Do ponto de fuga até os vértices do quadrado.

Com as linhas prontas , basta você desenhar as linhas verticais e horizontais da imagem.

Repare também que os cubos não estão todos num mesmo plano.
Veja que existe um cubo em primeiro plano, outro em segundo e mais um em terceiro plano.

É para isso que usamos a perspectiva , para dar profundidade a uma cena. Caso contrário estes objetos estariam todos num mesmo plano e não teriamos como identificar a distância e a profundidade entre eles.



o infinito mora ao lado

Um modo simples de *trazer o infinito para perto* é por intermédio dos espaços projetivos.

o infinito mora ao lado

Um modo simples de *trazer o infinito para perto* é por intermédio dos ESPAÇOS PROJETIVOS.

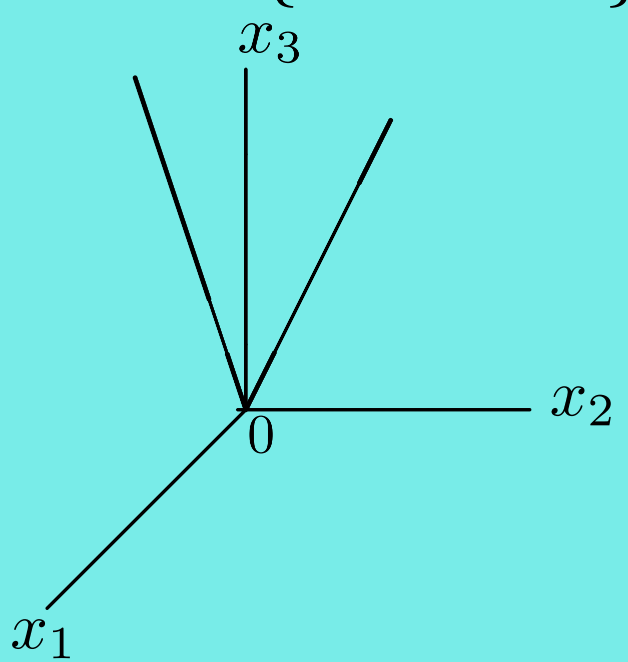
A figura abaixo ilustra a ideia da construção do *plano* $\mathbb{P}^2 =$ espaço projetivo *bi*dimensional.

o infinito mora ao lado

Um modo simples de *trazer o infinito para perto* é por intermédio dos ESPAÇOS PROJETIVOS.

A figura abaixo ilustra a ideia da construção do *plano* $\mathbb{P}^2 =$ espaço projetivo *bi*dimensional.

$$\mathbb{P}^2 := \{\text{retas} \ni 0\}$$

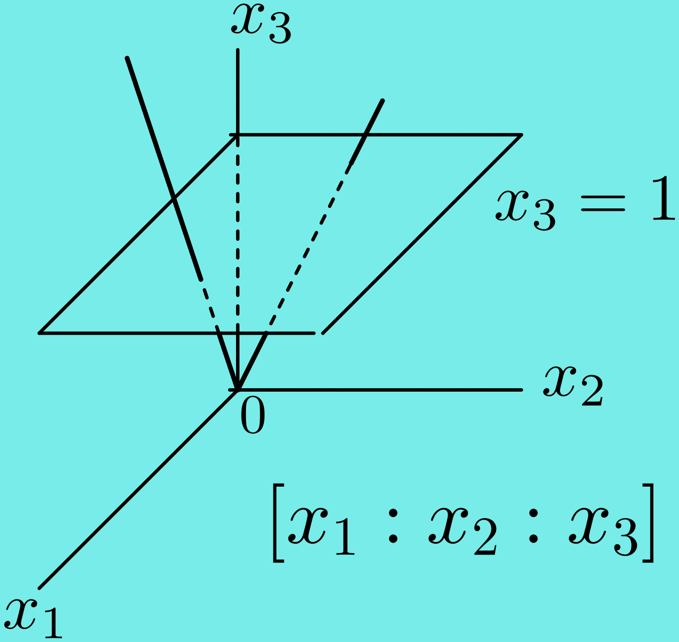


o infinito mora ao lado

Um modo simples de *trazer o infinito para perto* é por intermédio dos ESPAÇOS PROJETIVOS.

A figura abaixo ilustra a ideia da construção do *plano* $\mathbb{P}^2 =$ espaço projetivo *bi*dimensional.

$\mathbb{P}^2 := \{\text{retas} \ni 0\}$



Cada ponto de $\mathbb{P}^2$ representa uma reta passando pela origem no espaço tridimensional.

$$\mathbb{P}^2 = \{[x_1 : x_2 : x_3] \,|\, \text{algum } x_i \neq 0\}$$

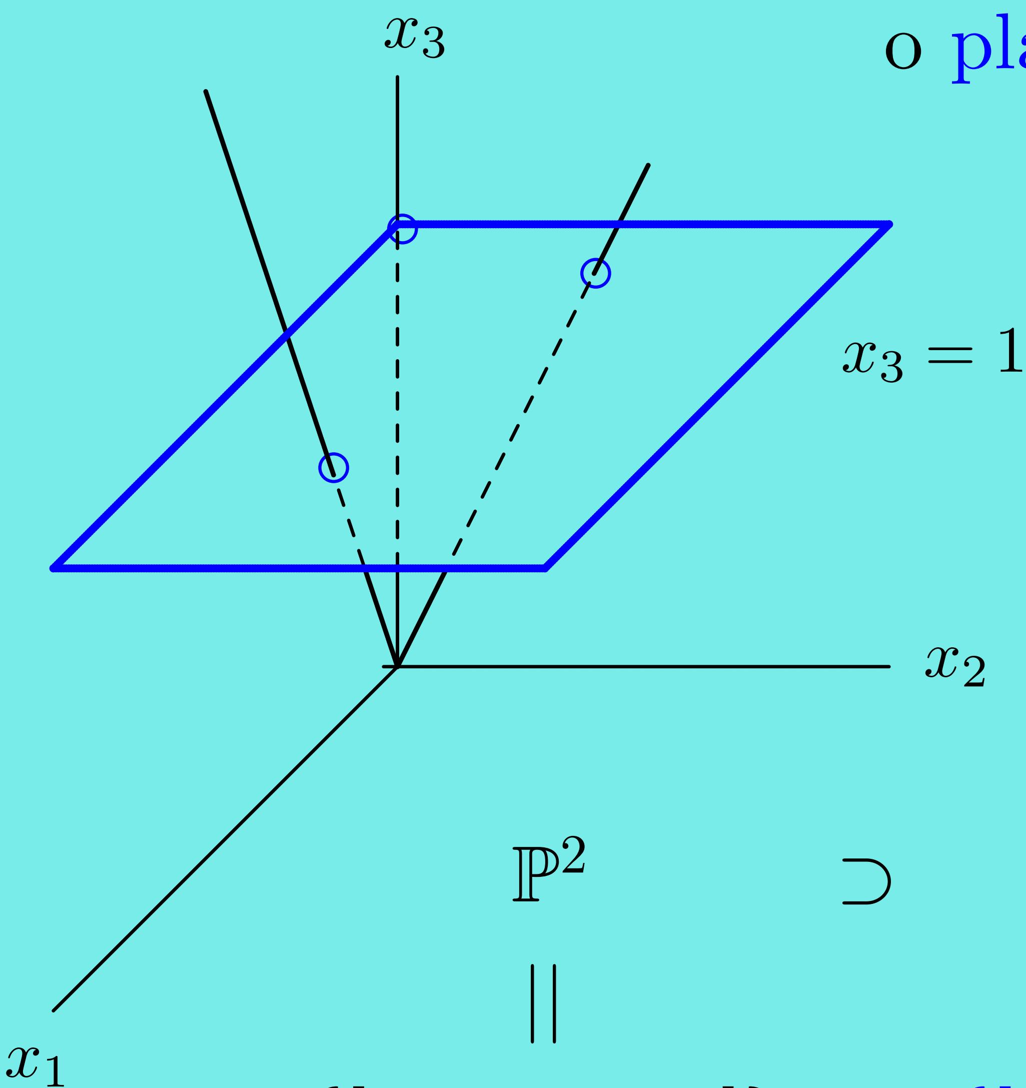
$$[x_1 : x_2 : x_3] = \text{reta gerada pelo ponto } (x_1, x_2, x_3).$$

plano afim $\subset$ plano projetivo

plano afim $\subset$ plano projetivo

$\mathbb{P}^2 = \{\text{retas} \ni 0\}$

O plano projetivo contém o plano afim:



$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{P}^2 & \supset & & & \mathbb{A}^2 \\
\| & & & & \| \\
\{[x_1 : x_2 : x_3]\} & \supset & \{[x_1 : x_2 : 1]\} & \equiv & \{(x_1, x_2)\}
\end{array}$$

coordenadas homogêneas

Cada ponto $[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^2$ admite uma infinidade de representações em coordenadas homogêneas:

$$\mathbb{P}^2_K = (K^3 \setminus 0) \big/ K^\star$$

coordenadas homogêneas

Cada ponto $[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^2$ admite uma infinidade de representações em coordenadas homogêneas:

$$\mathbb{P}^2_K = (K^3 \setminus 0)\big/K^\star$$

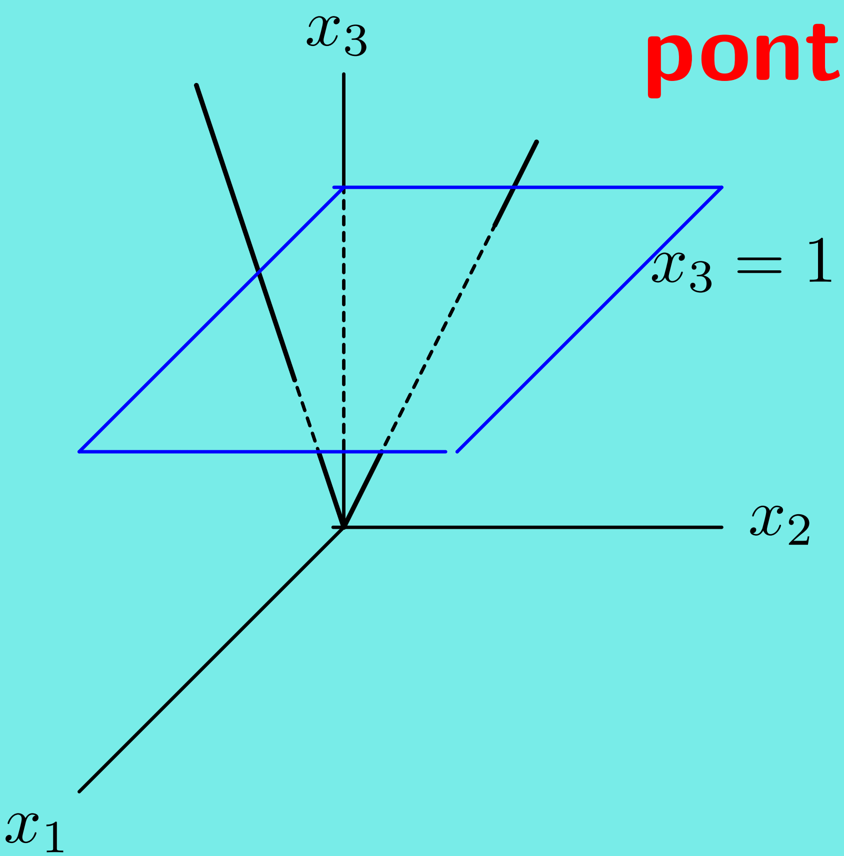
$$[x_1 : x_2 : x_3] \;=\; [y_1 : y_2 : y_3]$$

$$\Updownarrow$$

$$(x_1, x_2, x_3) \;=\; c \cdot (y_1, y_2, y_3)$$

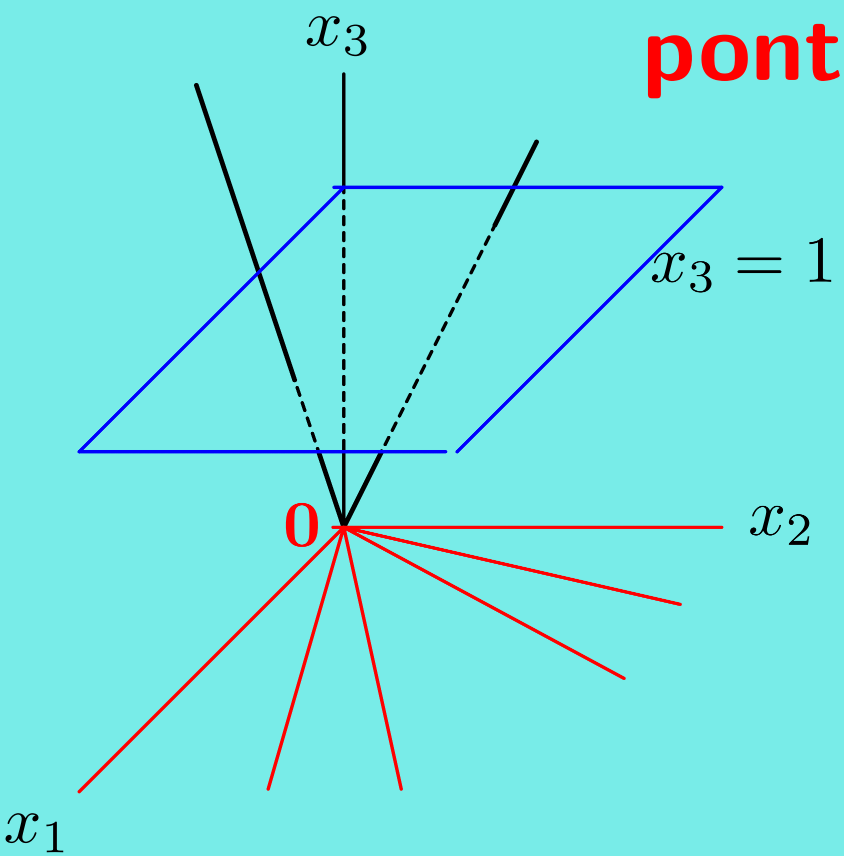
para alguma constante c.

pontos no infinito



Como vemos na figura,

pontos no infinito



Como vemos na figura, $\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{A}^2$ consiste na coleção de retas passando por $\mathbf{0}$ contidas no plano $x_3 = 0$.

pontos no infinito

são os pontos de $\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{A}^2$.

A denominação se justifica assim:

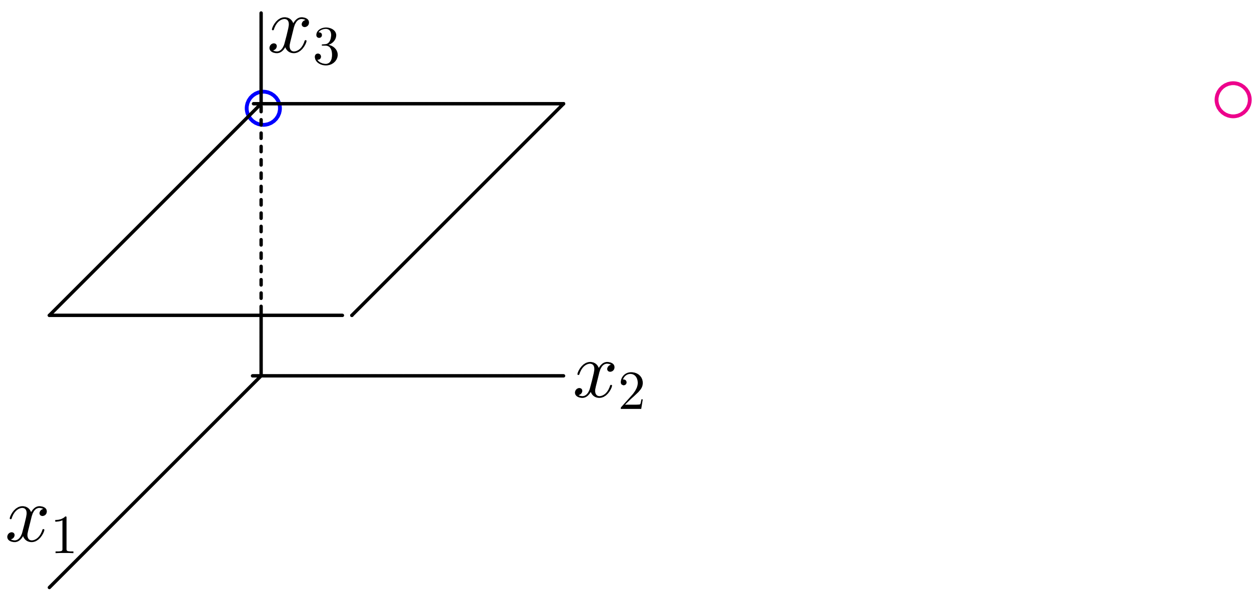
pontos no infinito

são os pontos de $\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{A}^2$.

A denominação se justifica assim:

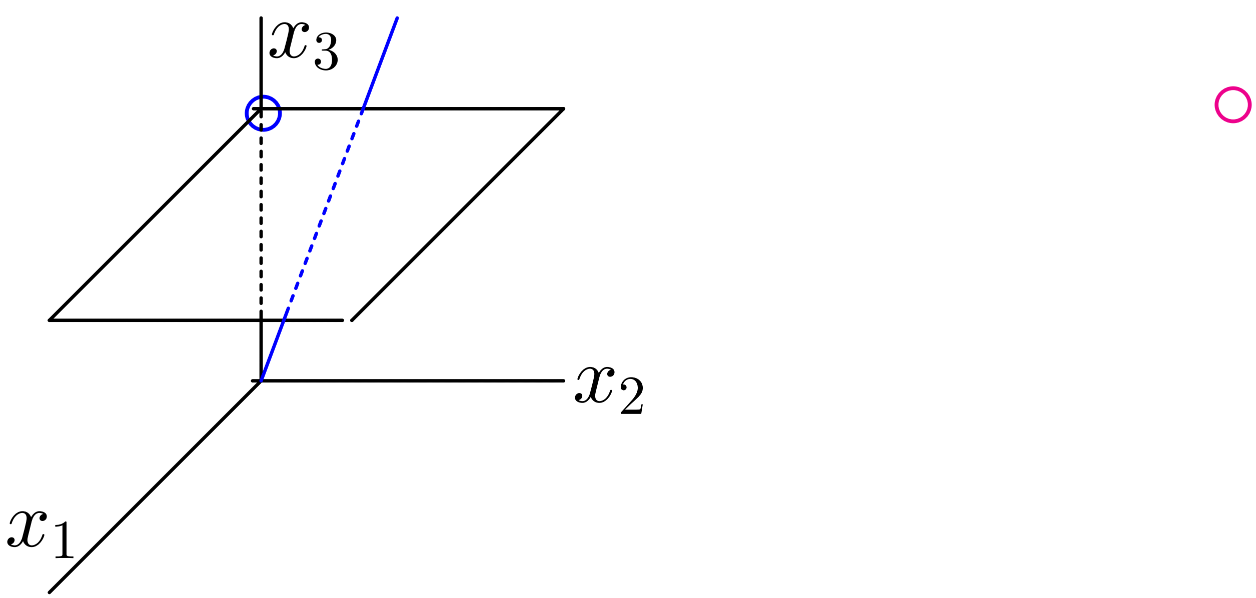
Tome por exemplo $[0:1:1] \in \mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$.

Defina $p_n = (0, n, 1)$ e faça $n \to \infty$.



pontos no infinito

são os pontos de $\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{A}^2$.
A denominação se justifica assim:
Tome por exemplo $[0 : 1 : 1] \in \mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$.
Defina $p_n = (0, n, 1)$ e faça $n \to \infty$.



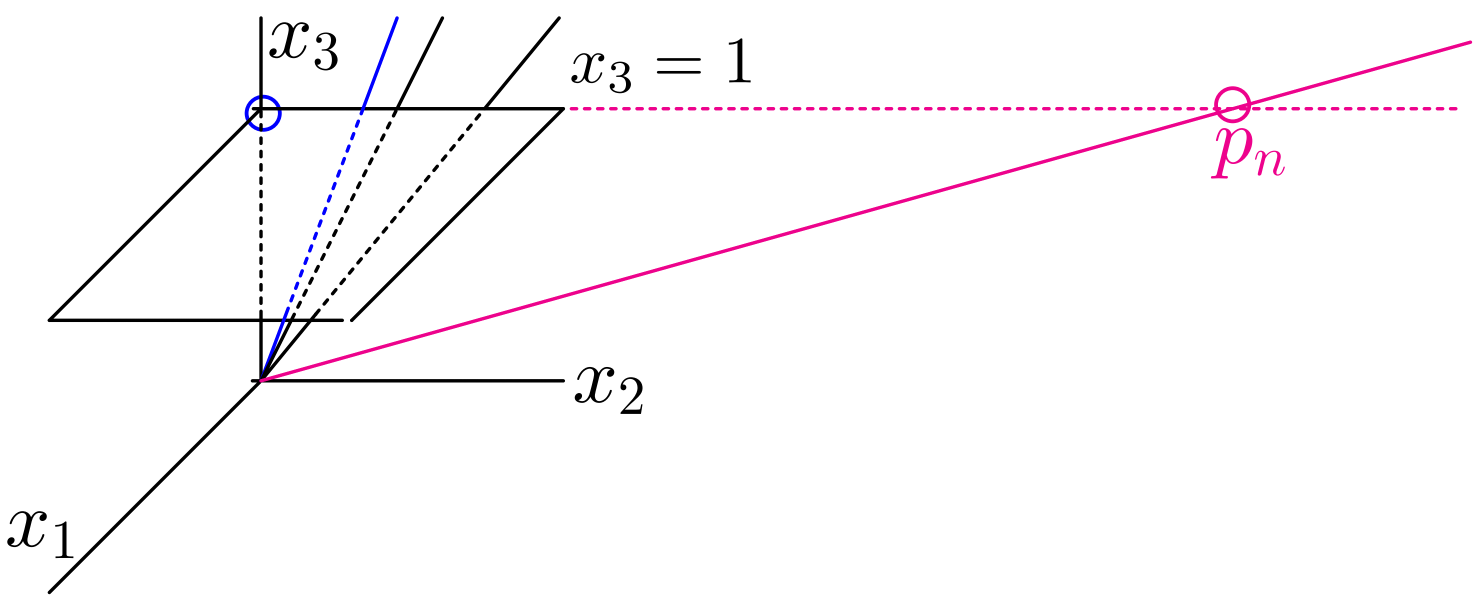
pontos no infinito

são os pontos de $\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{A}^2$.

A denominação se justifica assim:

Tome por exemplo $[0:1:1] \in \mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$.

Defina $p_n = (0, n, 1)$ e faça $n \to \infty$.



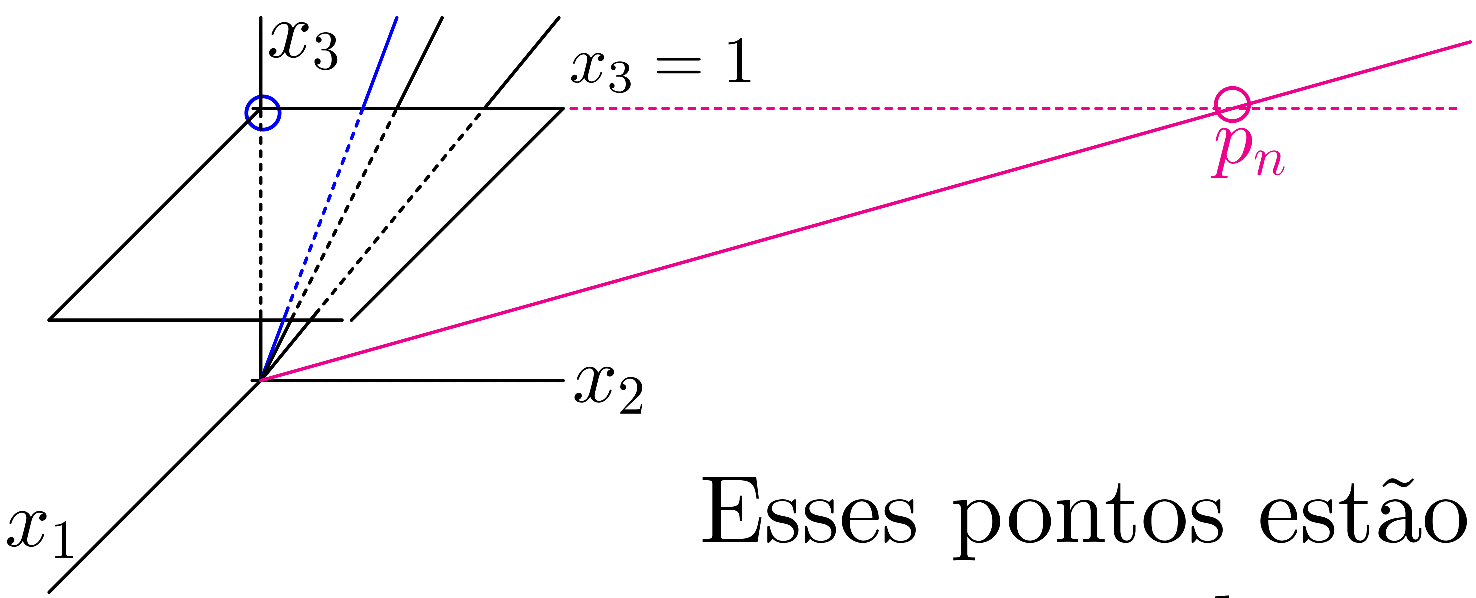
pontos no infinito

são os pontos de $\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{A}^2$.

A denominação se justifica assim:

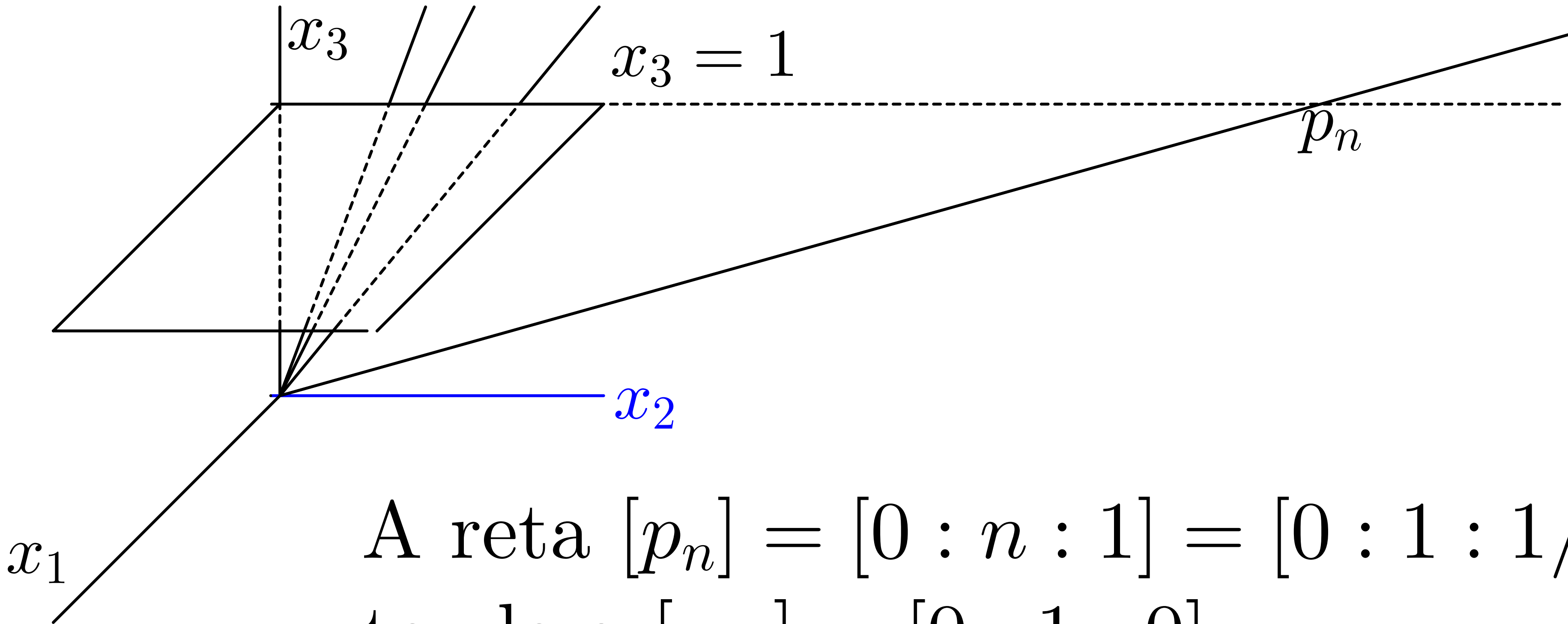
Tome por exemplo $[0:1:1] \in \mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$.

Defina $p_n = (0, n, 1)$ e faça $n \to \infty$.



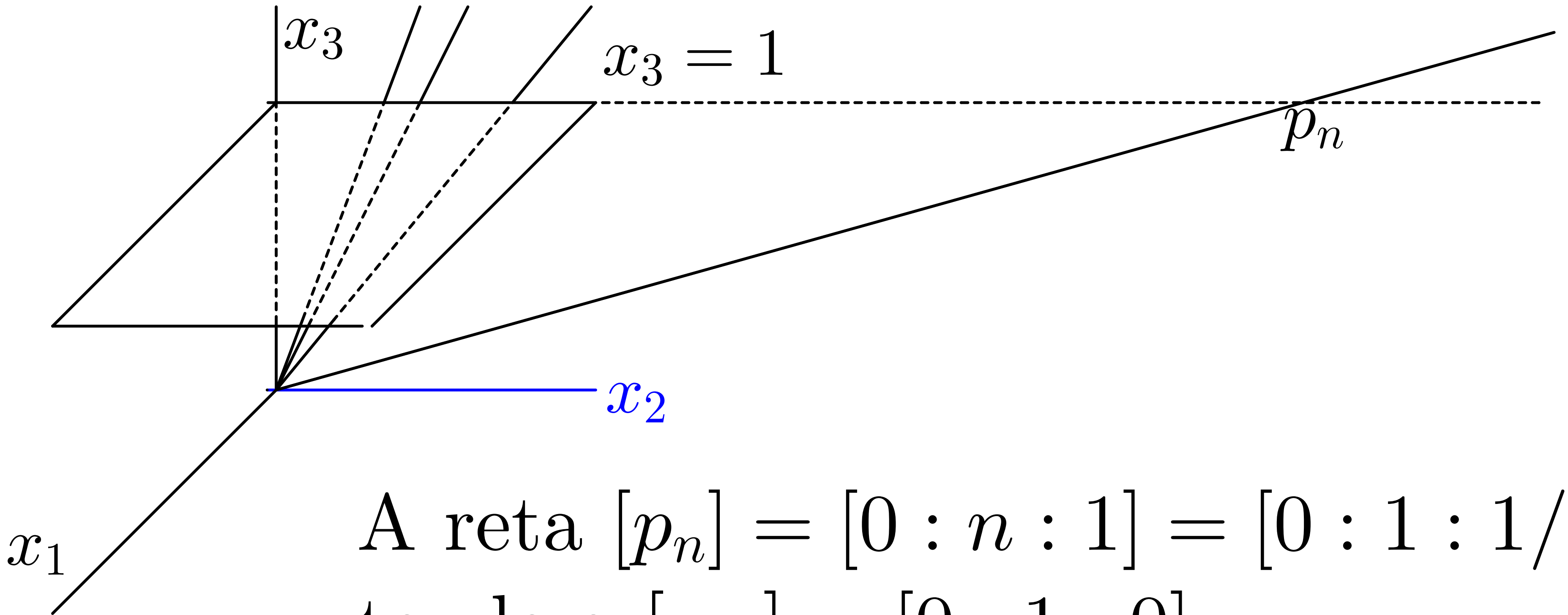
Esses pontos estão sobre o plano $x_3 = 1$ e o plano vertical $x_1 = 0$.

pontos no infinito



A reta $[p_n] = [0 : n : 1] = [0 : 1 : 1/n]$
tende a $[p_\infty] = [0 : 1 : 0]$,
eixo x_2 na figura.

pontos no infinito



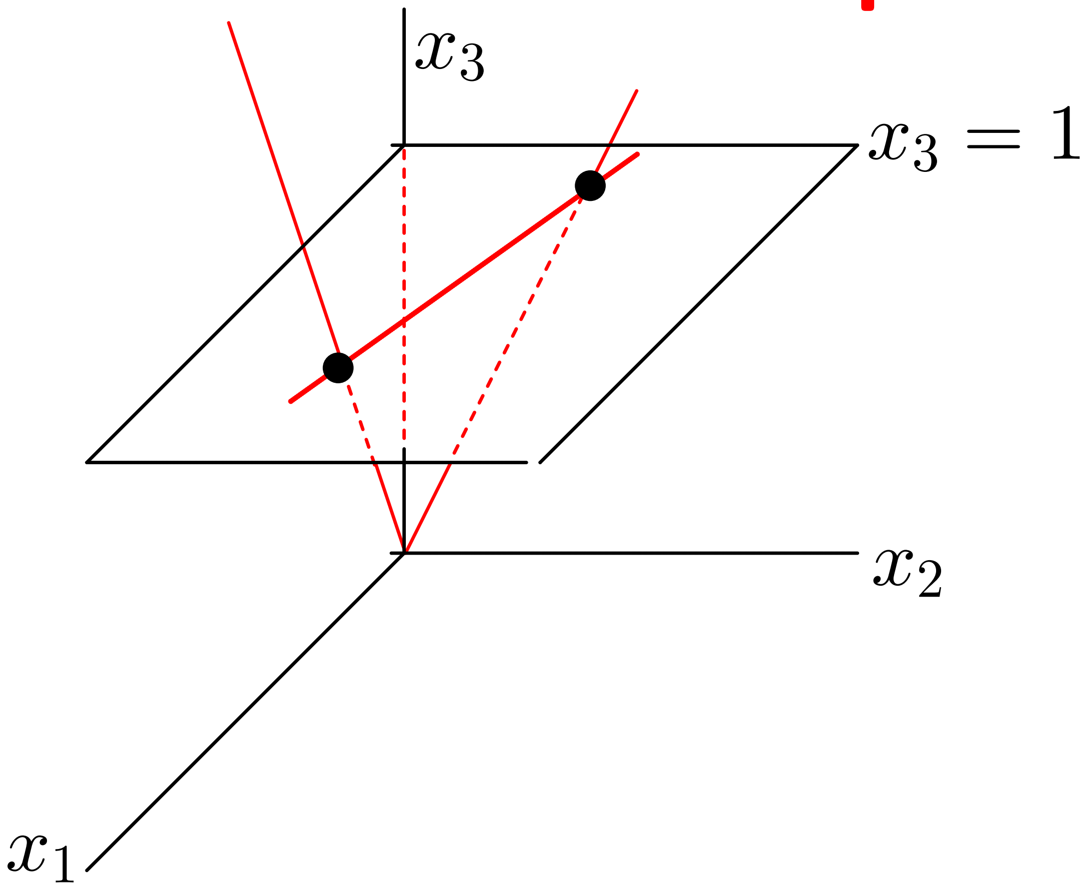
A reta $[p_n] = [0 : n : 1] = [0 : 1 : 1/n]$
tende a $[p_\infty] = [0 : 1 : 0]$,
eixo x_2 na figura.

Dizemos que os pontos com

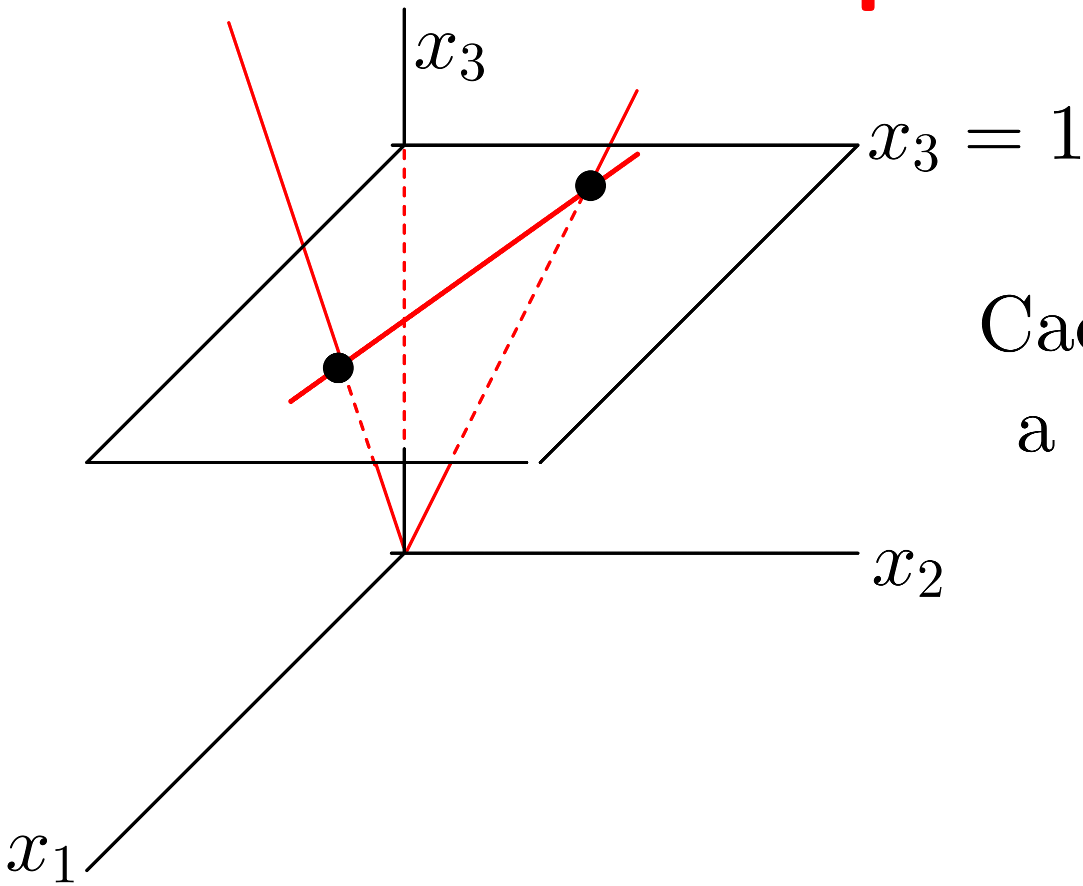
$$x_3 = 1$$

estão a DISTÂNCIA FINITA.

retas no plano projetivo

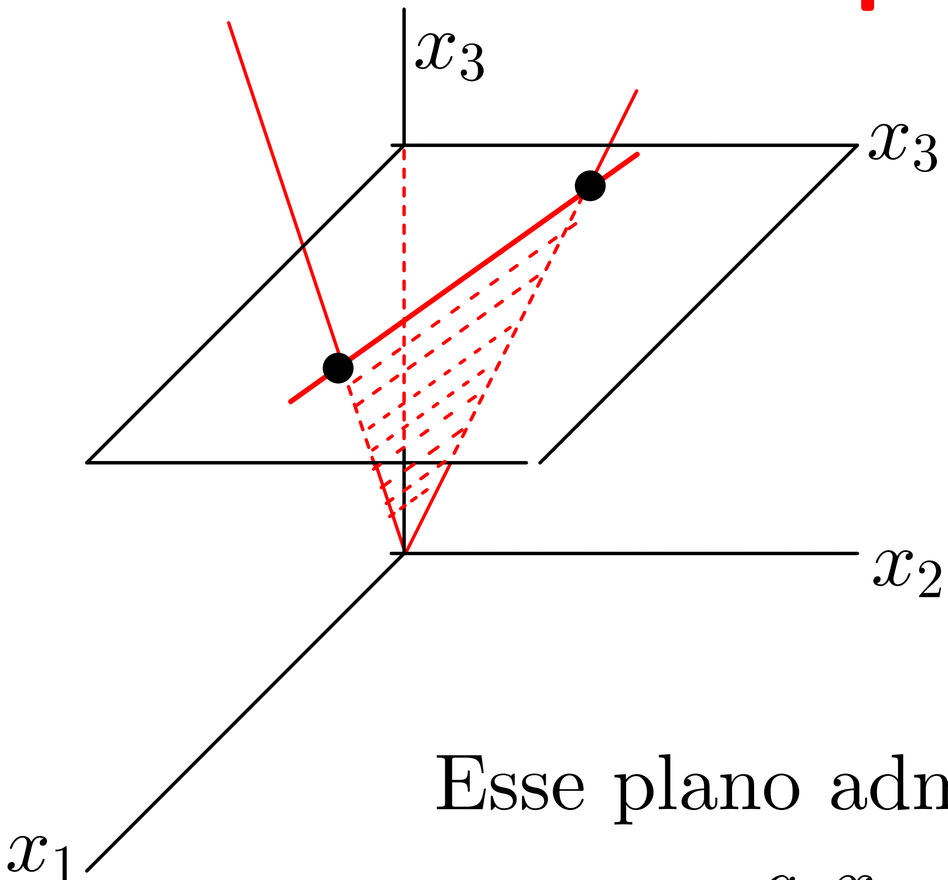


retas no plano projetivo



Cada reta do plano $x_3 = 1$ é a interseção com um plano que passa pela origem.

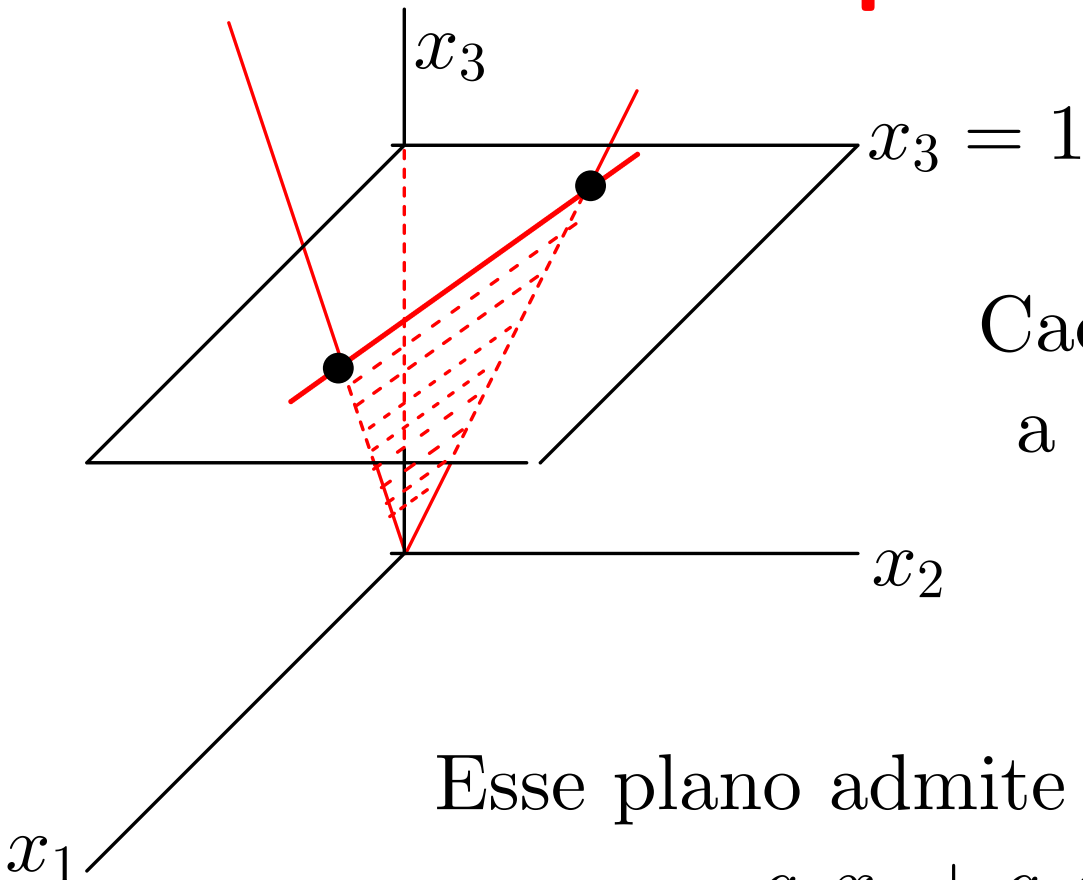
retas no plano projetivo



Cada reta do plano $x_3 = 1$ é a interseção com um plano que passa pela origem.

Esse plano admite uma equação da forma
$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0;$$

retas no plano projetivo



Cada reta do plano $x_3 = 1$ é
a interseção com um plano
que passa pela origem.

Esse plano admite uma equação da forma
$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$;

aqui a_1 ou $a_2 \neq 0$, do contrário coincidiria
com o plano $x_3 = 0$, o qual não corta $x_3 = 1$.

Isso motiva a definição de

RETAS NO PLANO PROJETIVO:

são os subconjuntos de $\mathbb{P}^2$ da forma

$$R = \{[x_1 : x_2 : x_3] \,|\, a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\}$$

onde os a_i são constantes não todas nulas.

Isso motiva a definição de

RETAS NO PLANO PROJETIVO:

são os subconjuntos de $\mathbb{P}^2$ da forma

$$R = \{[x_1 : x_2 : x_3] \,|\, a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\}$$

onde os a_i são constantes não todas nulas.

Se a_1 ou a_2 for $\neq 0$, recuperamos as retas de antigamente...

Isso motiva a definição de

RETAS NO PLANO PROJETIVO:

são os subconjuntos de $\mathbb{P}^2$ da forma

$$R = \{[x_1 : x_2 : x_3] \,|\, a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\}$$

onde os a_i são constantes não todas nulas.

Se a_1 ou a_2 for $\neq 0$, recuperamos as retas de antigamente...

(-:basta fazer $x_3 = 1$:-)

nesse caso, note que o ponto

$[a_2 : -a_1 : 0]$ pertence à reta R.

A reta $x_3 = 0$ é a RETA NO INFINITO.

Cada reta distinta da reta no infinito corta esta última exatamente em um ponto.

Isso motiva a definição de

RETAS NO PLANO PROJETIVO:

são os subconjuntos de $\mathbb{P}^2$ da forma

$$R = \{[x_1 : x_2 : x_3] \,|\, a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\}$$

onde os a_i são constantes não todas nulas.

Se a_1 ou a_2 for $\neq 0$, recuperamos as retas de antigamente...
(-:basta fazer $x_3 = 1$:-)

nesse caso, note que o ponto

$[a_2 : -a_1 : 0]$ pertence à reta R.

A reta $x_3 = 0$ é a RETA NO INFINITO.

Cada reta distinta da reta no infinito corta
esta última exatamente em um ponto.

ACABOU O PARALELISMO!

curvas planas projetivas

são os subconjuntos definidos por uma equação polinomial homogênea,

$$C = \{[x_1 : x_2 : x_3] \mid F(x_1, x_2, x_3) = 0\}$$

onde

$$F(x_1, x_2, x_3) := \sum a_{ij} x_1^i x_2^j x_3^{d-i-j}.$$

curvas planas projetivas

são os subconjuntos definidos por uma equação polinomial homogênea,

$$C = \{[x_1 : x_2 : x_3] \mid F(x_1, x_2, x_3) = 0\}$$

onde

$$F(x_1, x_2, x_3) := \sum a_{ij} x_1^i x_2^j x_3^{d-i-j}.$$

O inteiro $d \geq 1$ é o grau da curva.

$d = 1 \Leftrightarrow$ reta.

curvas planas projetivas

são os subconjuntos definidos por uma equação polinomial homogênea,

$$C = \{[x_1 : x_2 : x_3] \mid F(x_1, x_2, x_3) = 0\}$$

onde

$$F(x_1, x_2, x_3) := \sum a_{ij} x_1^i x_2^j x_3^{d-i-j}.$$

O inteiro $d \geq 1$ é o grau da curva.

$d = 2 \Leftrightarrow$ cônica.

fecho projetivo

Cada curva plana à moda antiga,

por exemplo o círculo de equação

$$C: \; x_1^2 + x_2^2 = 1,$$

admite um FECHO PROJETIVO, no caso

$$\overline{C} = \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}.$$

fecho projetivo

Cada curva plana à moda antiga,

por exemplo o círculo de equação

$$C: \; x_1^2 + x_2^2 = 1,$$

admite um FECHO PROJETIVO, no caso

$$\overline{C} = \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}.$$

(homogeneizar)

fecho projetivo

Cada curva plana à moda antiga,

por exemplo o círculo de equação

$$C: \; x_1^2 + x_2^2 = 1,$$

admite um FECHO PROJETIVO, no caso

$$\overline{C} = \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}.$$

(homogeneizar)

Pontos no infinito: $x_3 = 0$

fecho projetivo

Cada curva plana à moda antiga,

por exemplo o círculo de equação

$$C: \;\; x_1^2 + x_2^2 = 1,$$

admite um FECHO PROJETIVO, no caso

$$\overline{C} = \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}.$$

(homogeneizar)

Pontos no infinito: $x_3 = 0 \Rightarrow [1 : \pm i : 0]$.

fecho projetivo

O fecho projetivo de uma curva definida por uma equação polinomial de grau d,

$$f(x_1, x_2) := \sum_{i+j \leq d} a_{ij} x_1^i x_2^j$$

fecho projetivo

O fecho projetivo de uma curva definida por uma equação polinomial de grau d,

$$f(x_1, x_2) := \sum_{i+j \leq d} a_{ij} x_1^i x_2^j$$

é obtido pela homogeneização

$$\sum a_{ij} x_1^i x_2^j x_3^{d-i-j}.$$

recap: pontos no infinito sobre uma curva plana

recap: pontos no infinito sobre uma curva plana

$$\rightsquigarrow \quad \text{fazer} \quad x_3 = 0.$$

recap: pontos no infinito sobre uma curva plana

$$\rightsquigarrow \quad \text{fazer} \quad x_3 = 0.$$

Como visto, na equação do círculo,

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \rightsquigarrow x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$$

recap: pontos no infinito sobre uma curva plana

$$\rightsquigarrow \quad \text{fazer} \quad x_3 = 0.$$

Como visto, na equação do círculo,

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \rightsquigarrow x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 \rightsquigarrow \text{no infinito}\ldots$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 0,$$

recap: pontos no infinito sobre uma curva plana

$$\rightsquigarrow \quad \text{fazer} \quad x_3 = 0.$$

Como visto, na equação do círculo,

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \rightsquigarrow x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 \rightsquigarrow \text{no infinito...}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 0,$$

cujas soluções são os *pontos circulares do infinito*,

$$[1 : \pm i : 0].$$

recap: pontos no infinito sobre uma curva plana

$\rightsquigarrow$ fazer $x_3 = 0$.

Como visto, na equação do círculo,

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \rightsquigarrow x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 \rightsquigarrow \text{no infinito}\ldots$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 0,$$

cujas soluções são os *pontos circulares do infinito*,

$$[1 : \pm i : 0].$$

O fato desses pontos não serem reais "explica" porque o círculo se mostra $\mathbb{R}$ealmente limitado...

recap: pontos no infinito sobre uma curva plana

$\leadsto$ fazer $x_3 = 0$.

Como visto, na equação do círculo,

$x_1^2 + x_2^2 = 1 \leadsto x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 \leadsto$ no infinito...

$$x_1^2 + x_2^2 = 0,$$

cujas soluções são os *pontos circulares do infinito*,

$$[1 : \pm i : 0].$$

O fato desses pontos não serem reais "explica" porque o círculo se mostra $\mathbb{R}$ealmente limitado...

(:- idem para elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

recap: pontos no infinito sobre uma curva plana

$$\rightsquigarrow \quad \text{fazer} \quad x_3 = 0.$$

Como visto, na equação do círculo,

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \rightsquigarrow x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 \rightsquigarrow \text{no infinito}\ldots$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 0,$$

cujas soluções são os *pontos circulares do infinito*,

$$[1 : \pm i : 0].$$

O fato desses pontos não serem reais "explica" porque o círculo se mostra $\mathbb{R}$ealmente limitado...

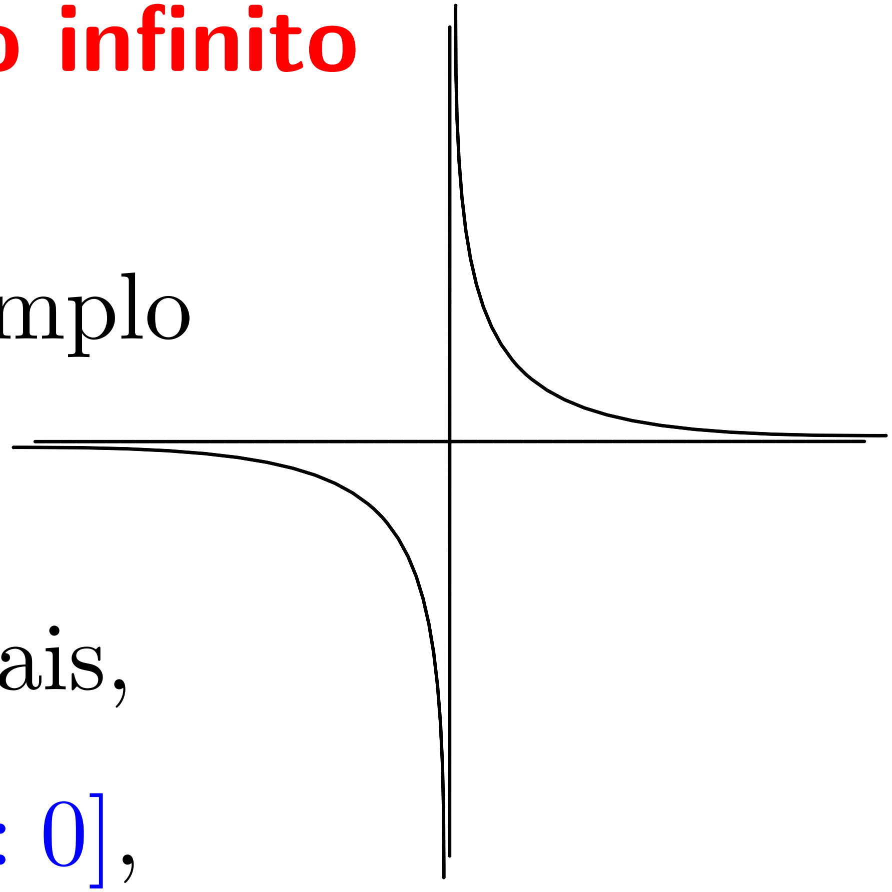
(:- idem para elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightsquigarrow [a : \pm bi : 0]$:-)

visibilidade no infinito

Já uma hipérbole, por exemplo

$$x_1 x_2 = 1,$$

visibilidade no infinito



Já uma hipérbole, por exemplo

$$x_1 x_2 = 1,$$

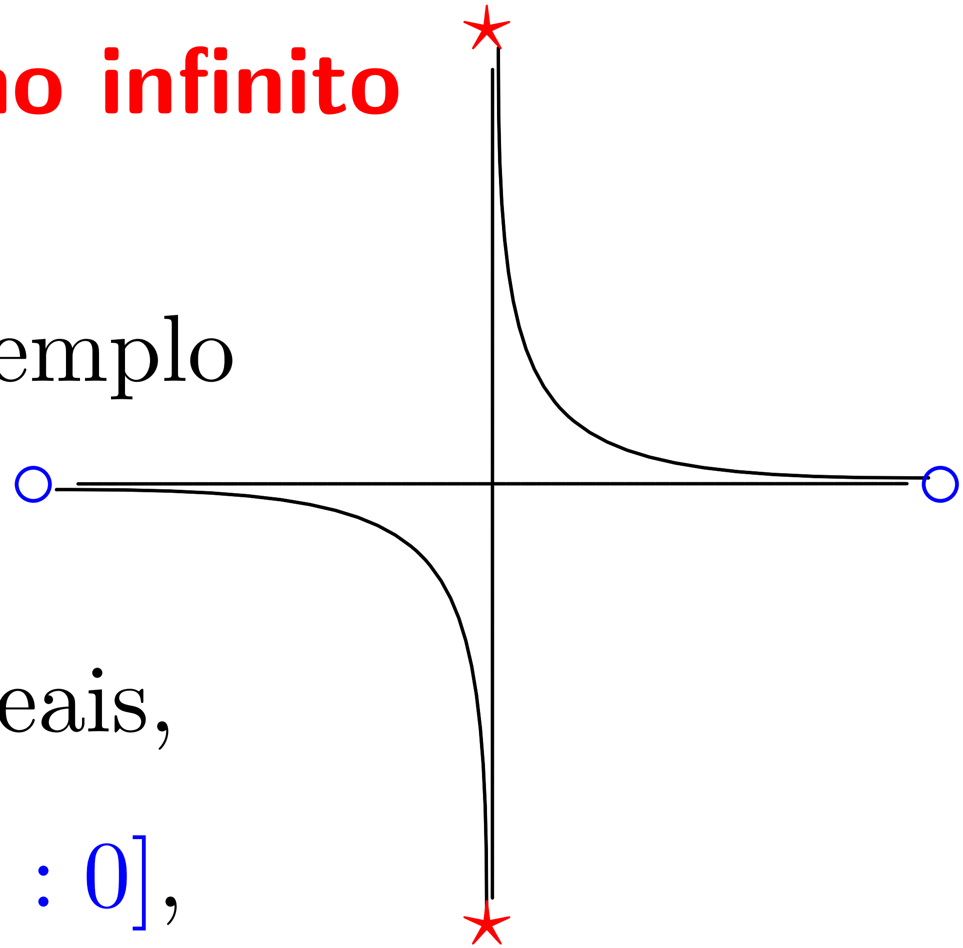
tem pontos no infinito reais,

$$\star = [0 : 1 : 0], \quad \circ = [1 : 0 : 0],$$

exatamente os pontos no infinito

das suas assíntotas!

visibilidade no infinito



Já uma hipérbole, por exemplo

$$x_1 x_2 = 1,$$

tem pontos no infinito reais,

$$\star = [0 : 1 : 0], \quad \circ = [1 : 0 : 0],$$

exatamente os pontos no infinito

das suas assíntotas!

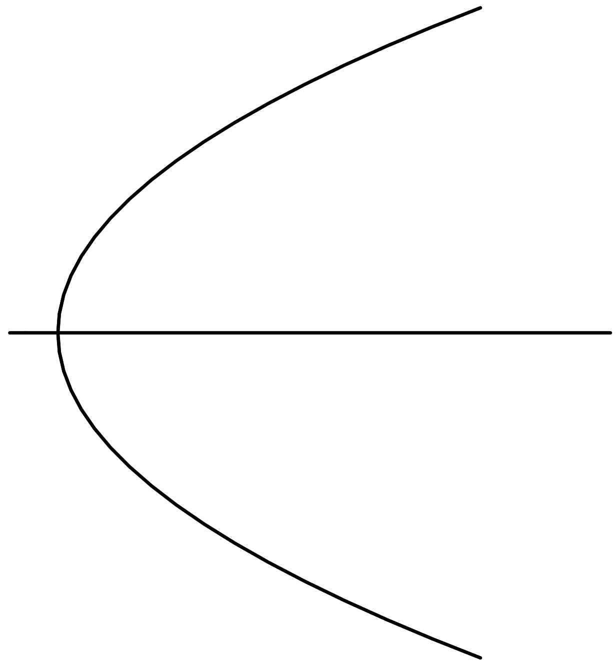
visibilidade no infinito

O fecho projetivo da parábola

tem um só ponto no ∞.

$(x_2^2 = x_1 \quad \rightsquigarrow \quad x_2^2 = x_1 x_3.)$

$[1 : 0 : 0]$



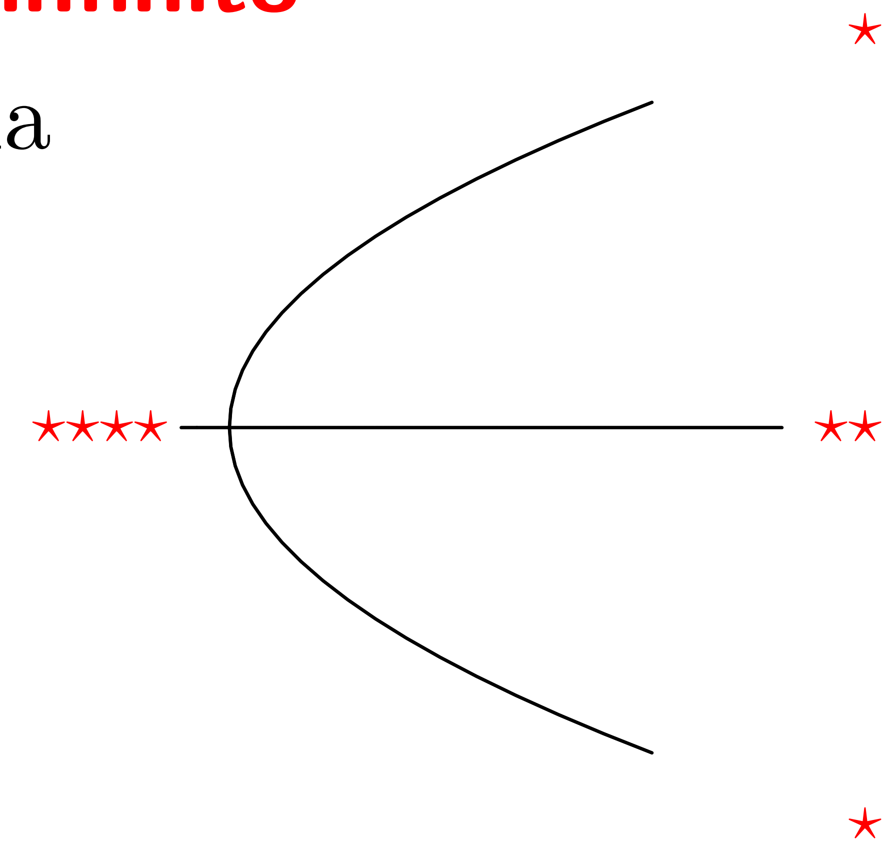
visibilidade no infinito

O fecho projetivo da parábola

tem um só ponto no ∞.

$$(x_2^2 = x_1 \quad \rightsquigarrow \quad x_2^2 = x_1 x_3.)$$

$$[1 : 0 : 0]$$



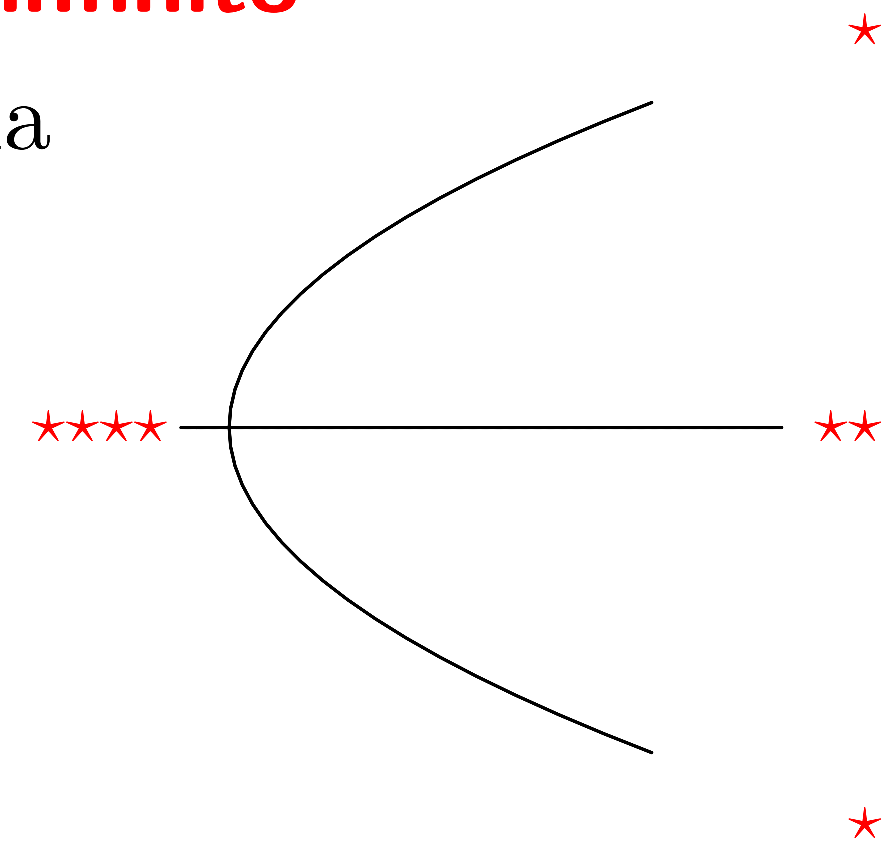
visibilidade no infinito

O fecho projetivo da parábola

tem um só ponto no ∞.

$$(x_2^2 = x_1 \quad \rightsquigarrow \quad x_2^2 = x_1 x_3.)$$

$$[1 : 0 : 0]$$



Em geral, uma curva de grau d

admite d pontos no infinito,

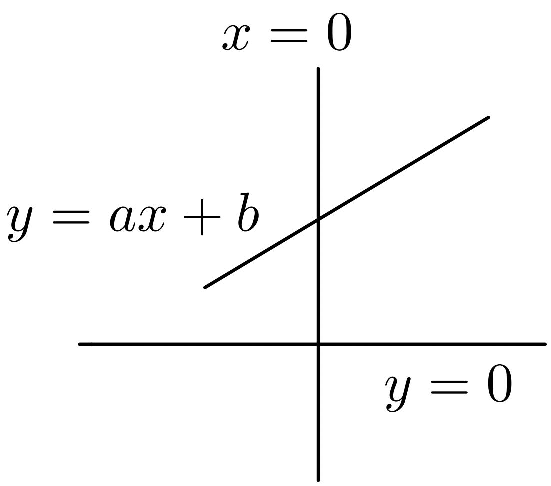
contados com multiplicidades.

geometria afim $\times$ geometria projetiva

Geometria analítica plana

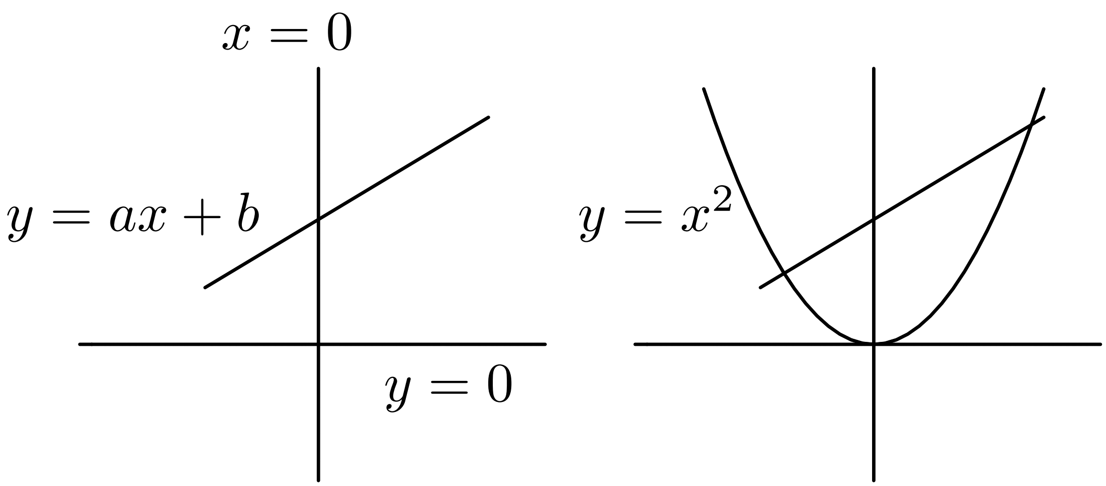
geometria afim $\times$ geometria projetiva

Geometria analítica plana



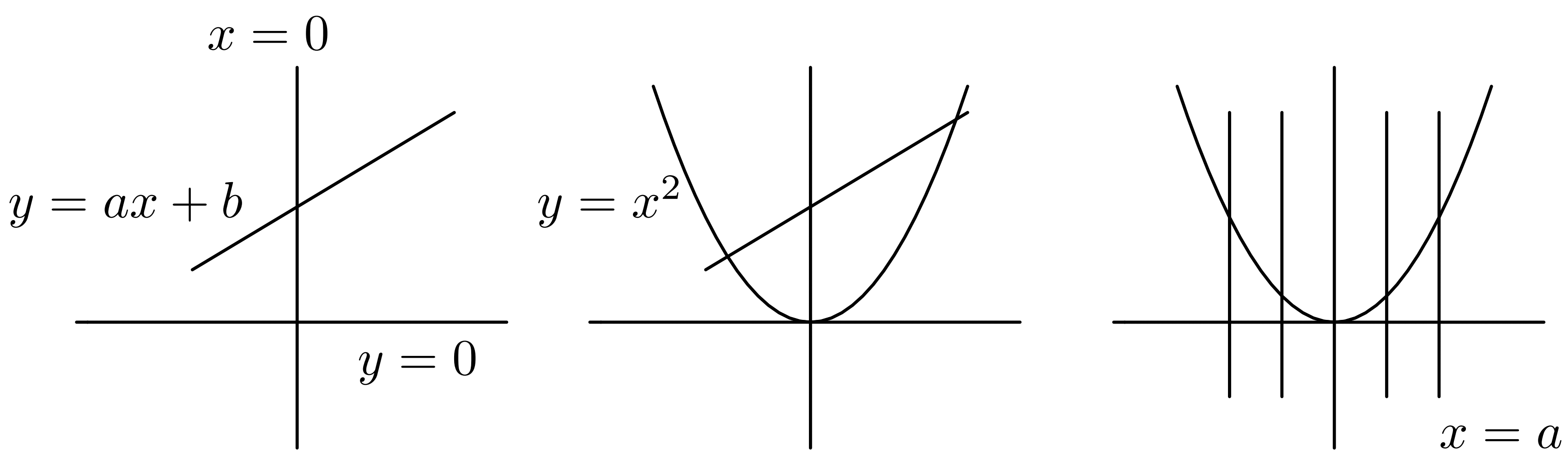
geometria afim $\times$ geometria projetiva

Geometria analítica plana



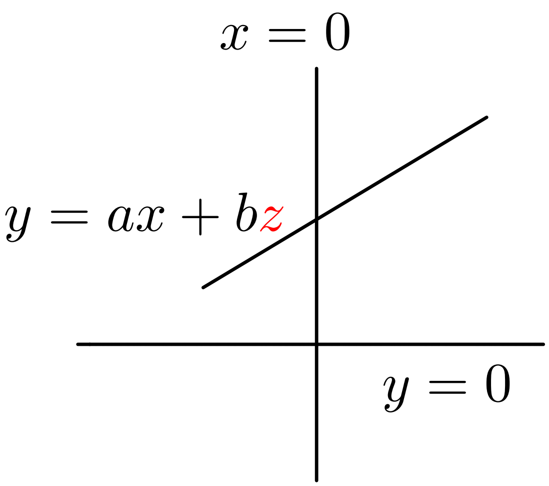
geometria afim $\times$ geometria projetiva

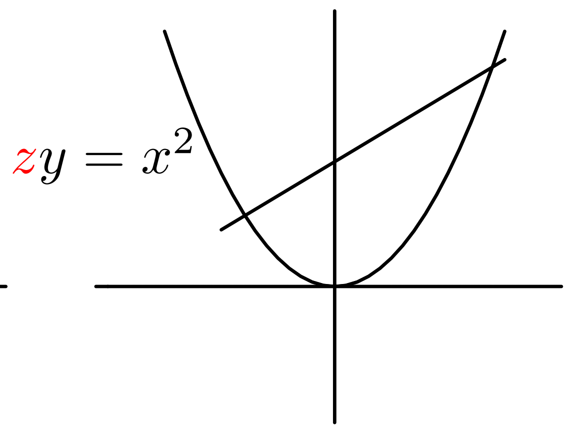
Geometria analítica plana

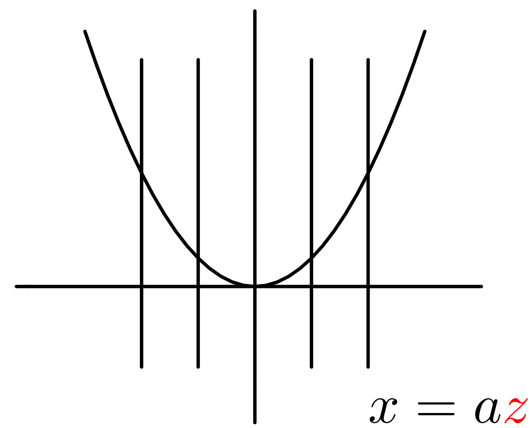


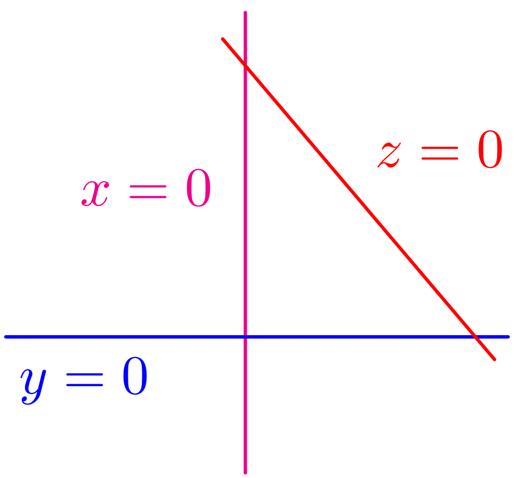
geometria afim $\times$ geometria projetiva

Geometria analítica plana projetiva, ...



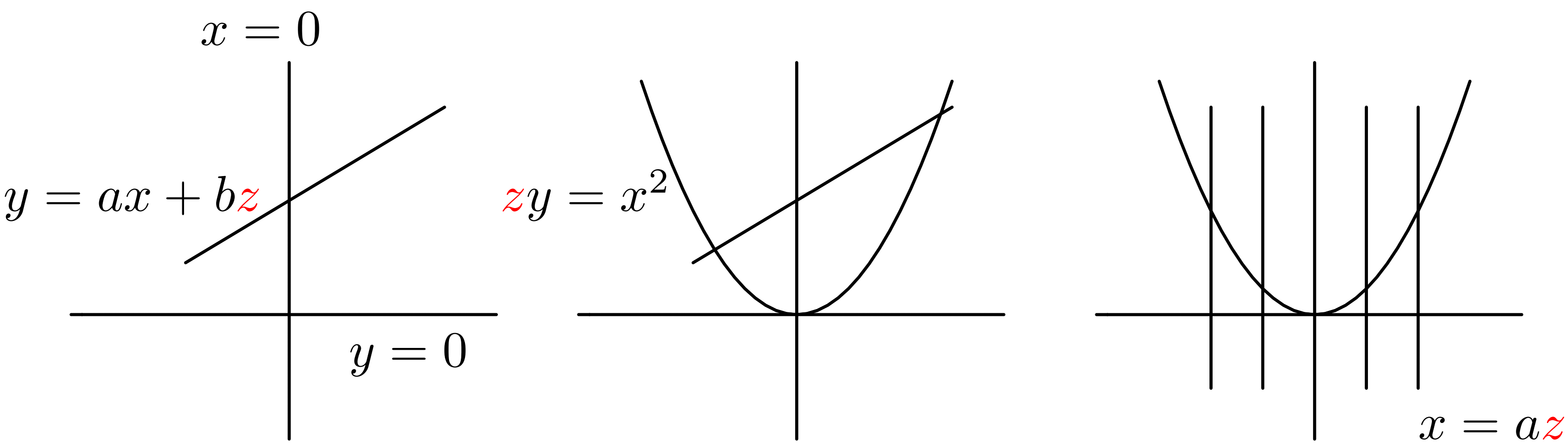


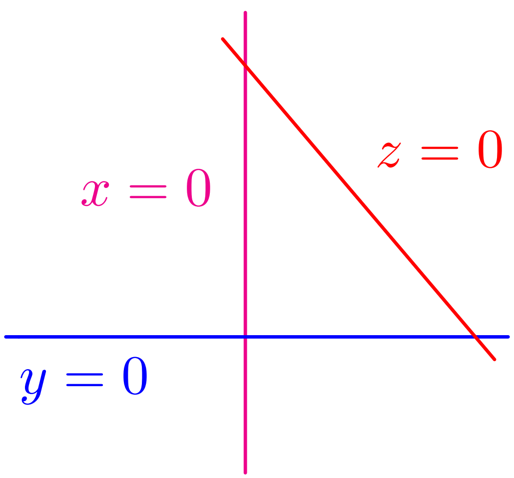




geometria afim $\times$ geometria projetiva

Geometria analítica plana projetiva, . . .

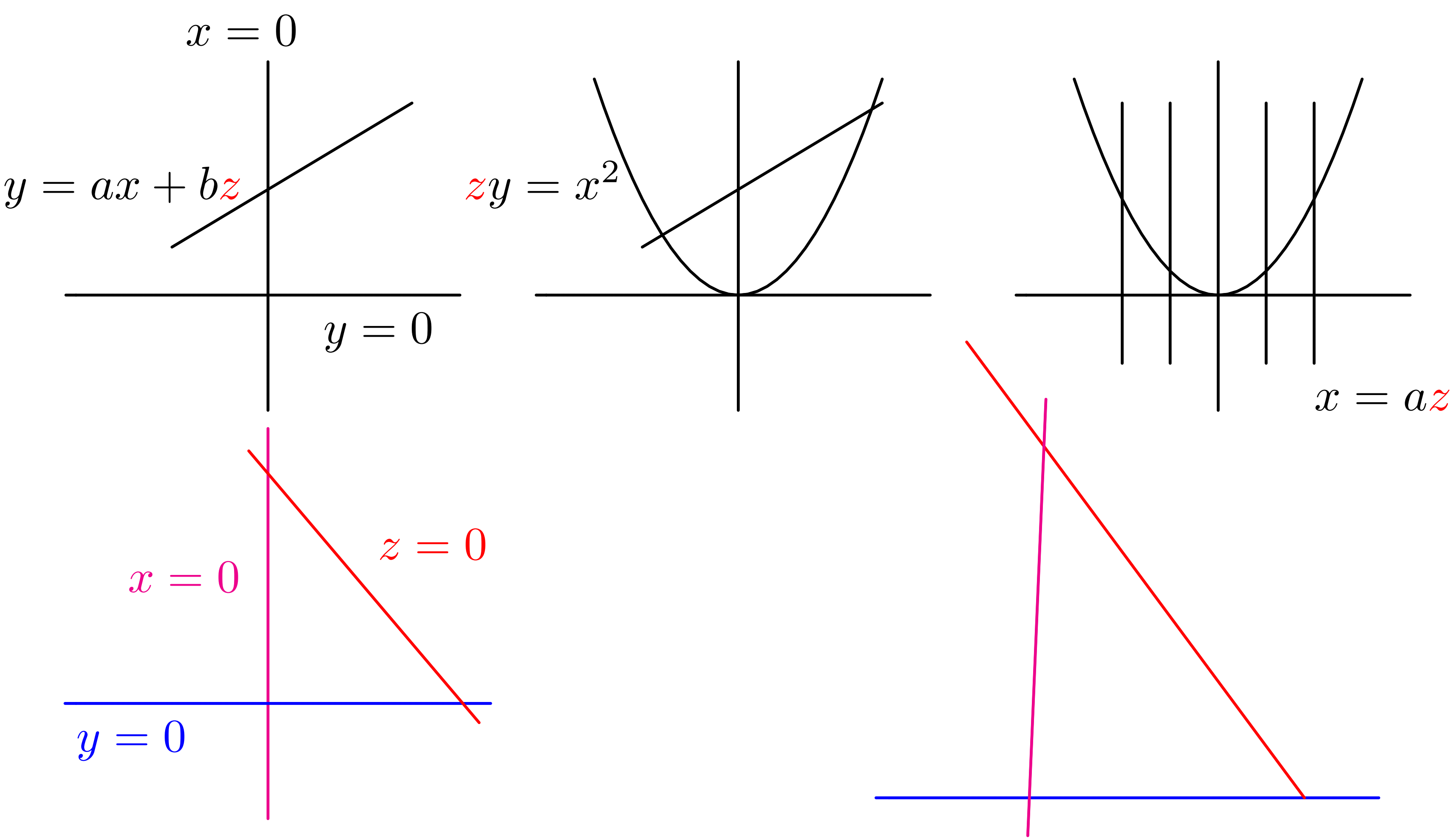




$\mathbb{P}^2$, o plano projetivo; coordenadas homogêneas $[x : y : z]$

geometria afim $\times$ geometria projetiva

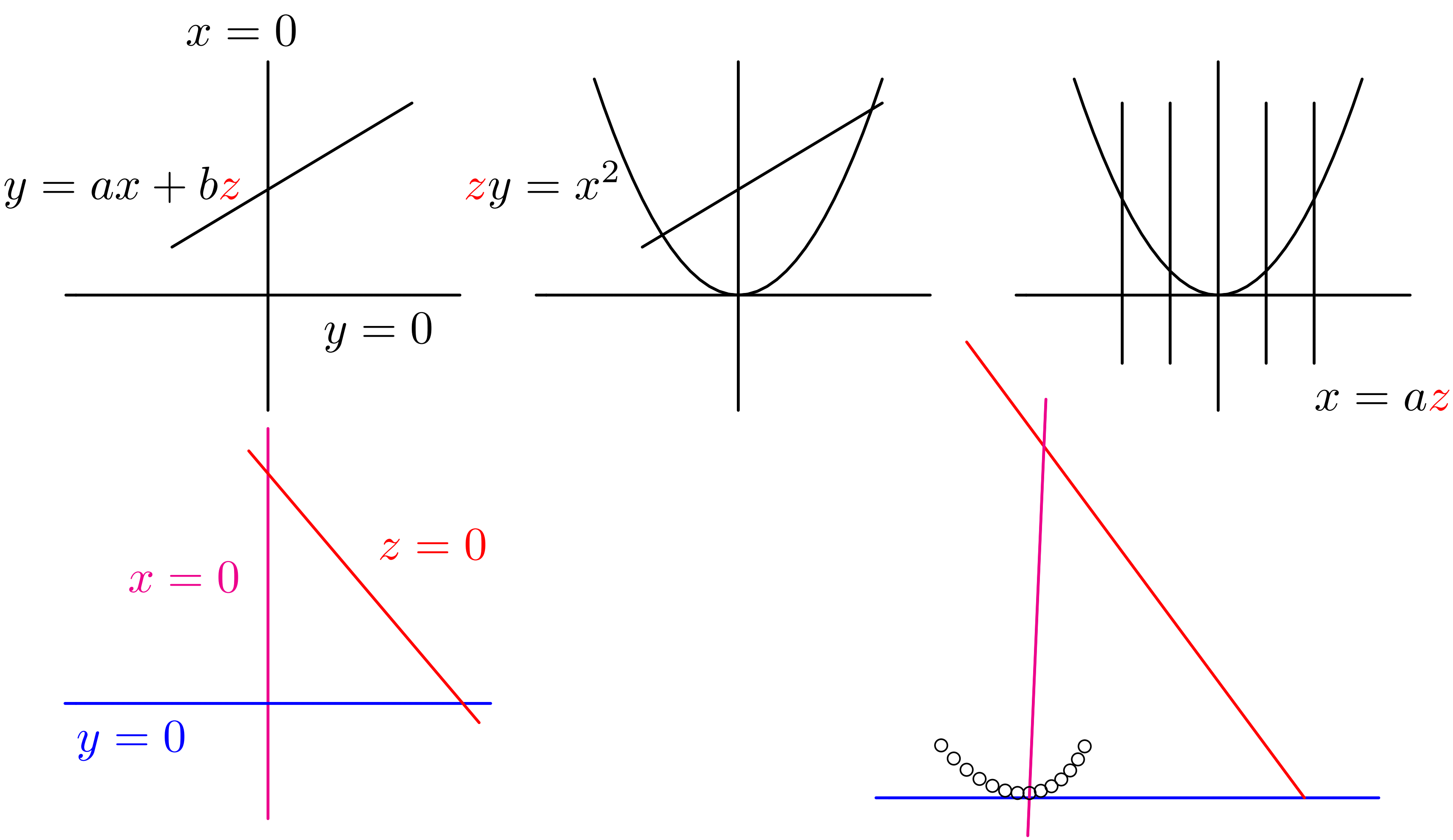
Geometria analítica plana projetiva, ...



$\mathbb{P}^2$, o plano projetivo; coordenadas homogêneas $[x : y : z]$

geometria afim × geometria projetiva

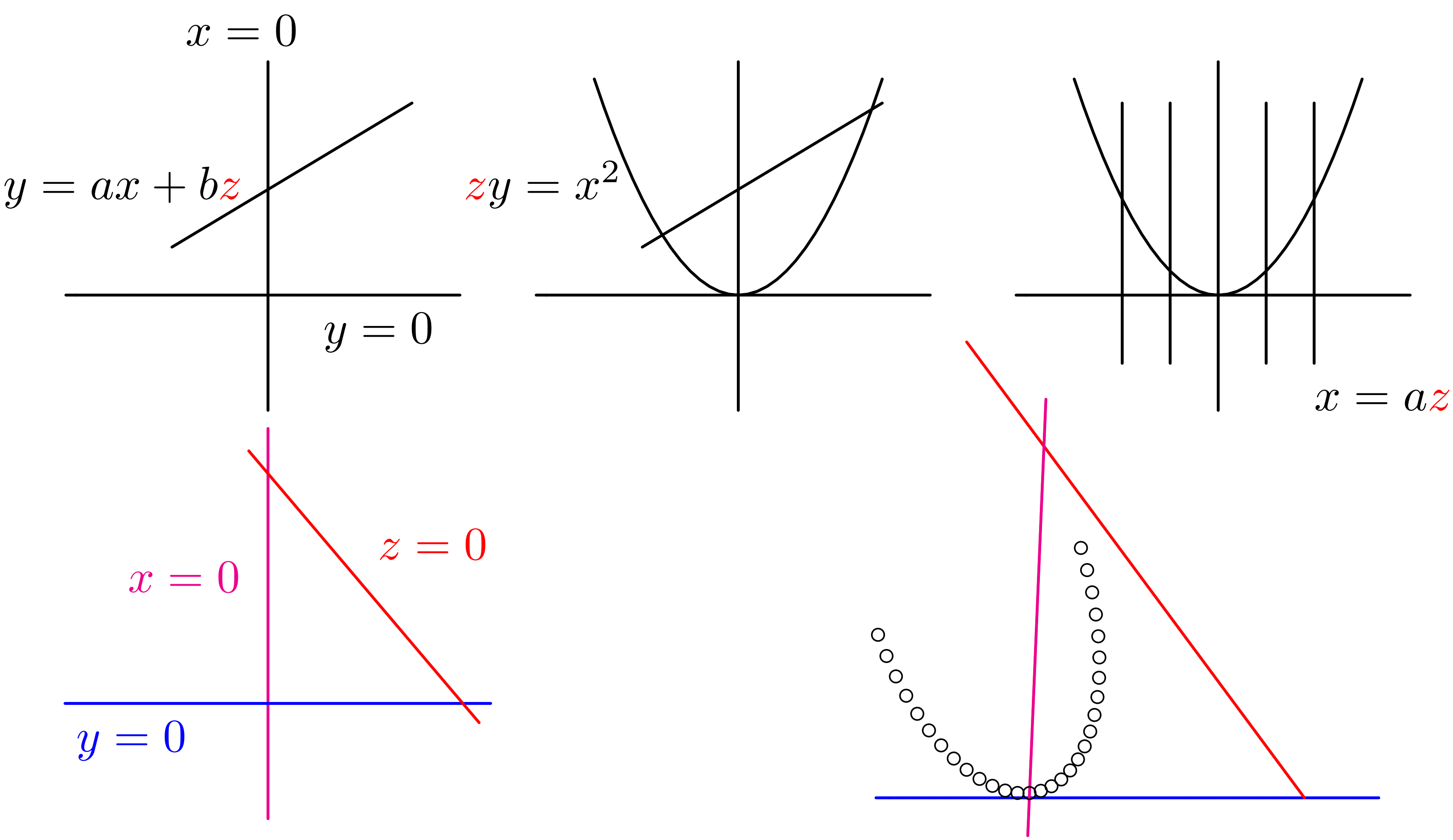
Geometria analítica plana projetiva, ...



$\mathbb{P}^2$, o plano projetivo; coordenadas homogêneas $[x : y : z]$

geometria afim $\times$ geometria projetiva

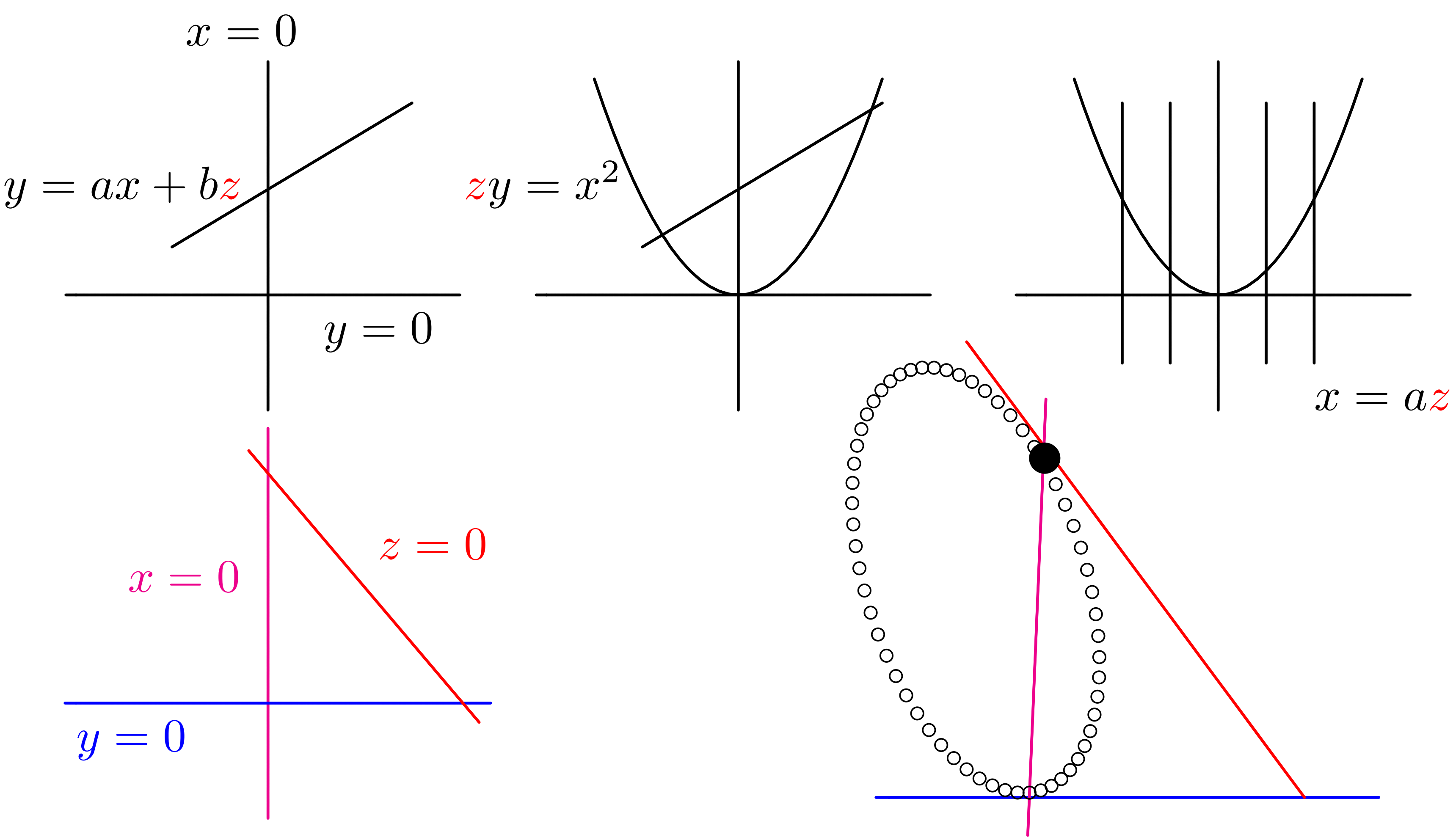
Geometria analítica plana projetiva, . . .



$\mathbb{P}^2$, o plano projetivo; coordenadas homogêneas $[x : y : z]$

geometria afim $\times$ geometria projetiva

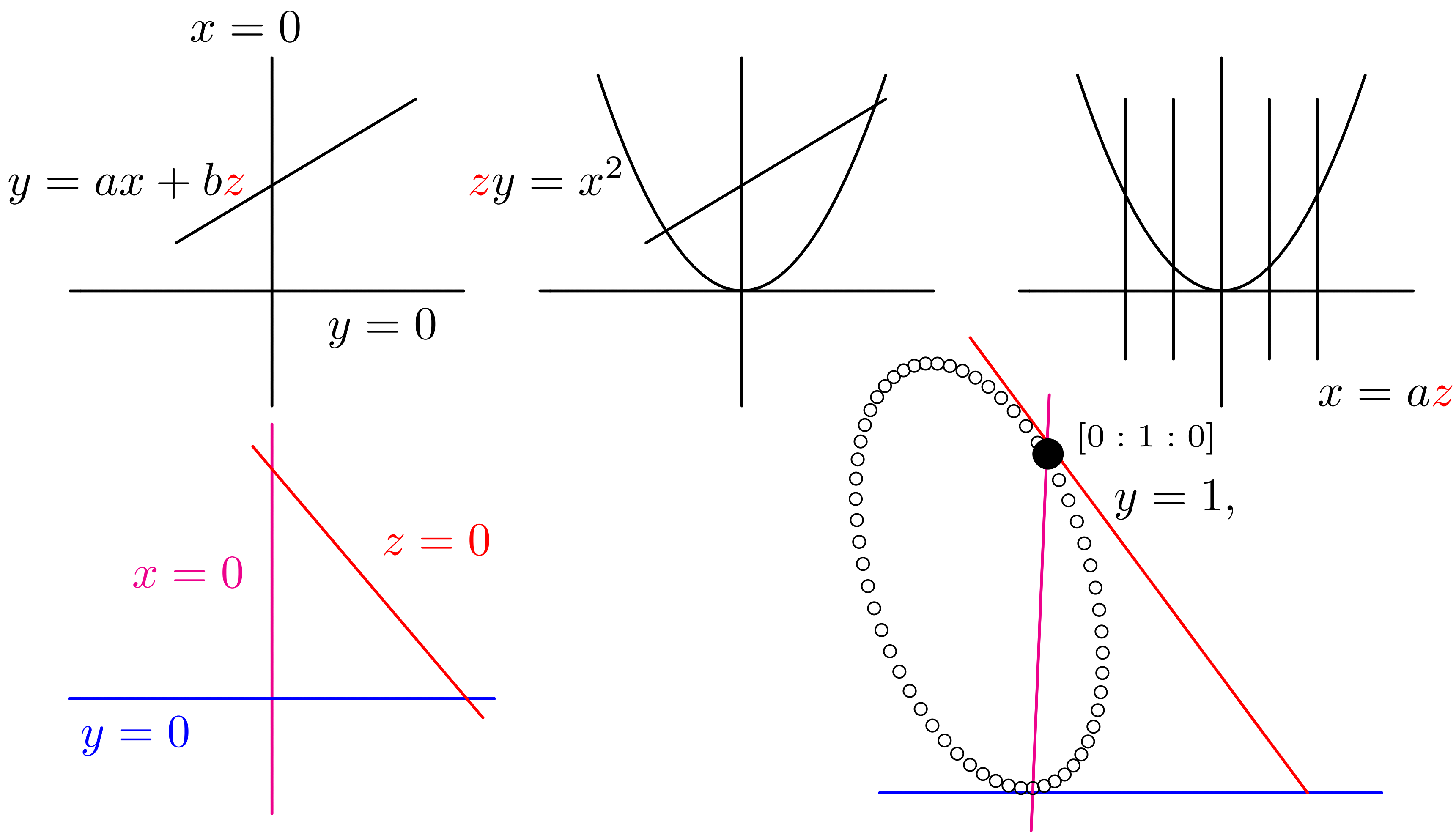
Geometria analítica plana projetiva, . . .



$\mathbb{P}^2$, o plano projetivo; coordenadas homogêneas $[x : y : z]$

geometria afim × geometria projetiva

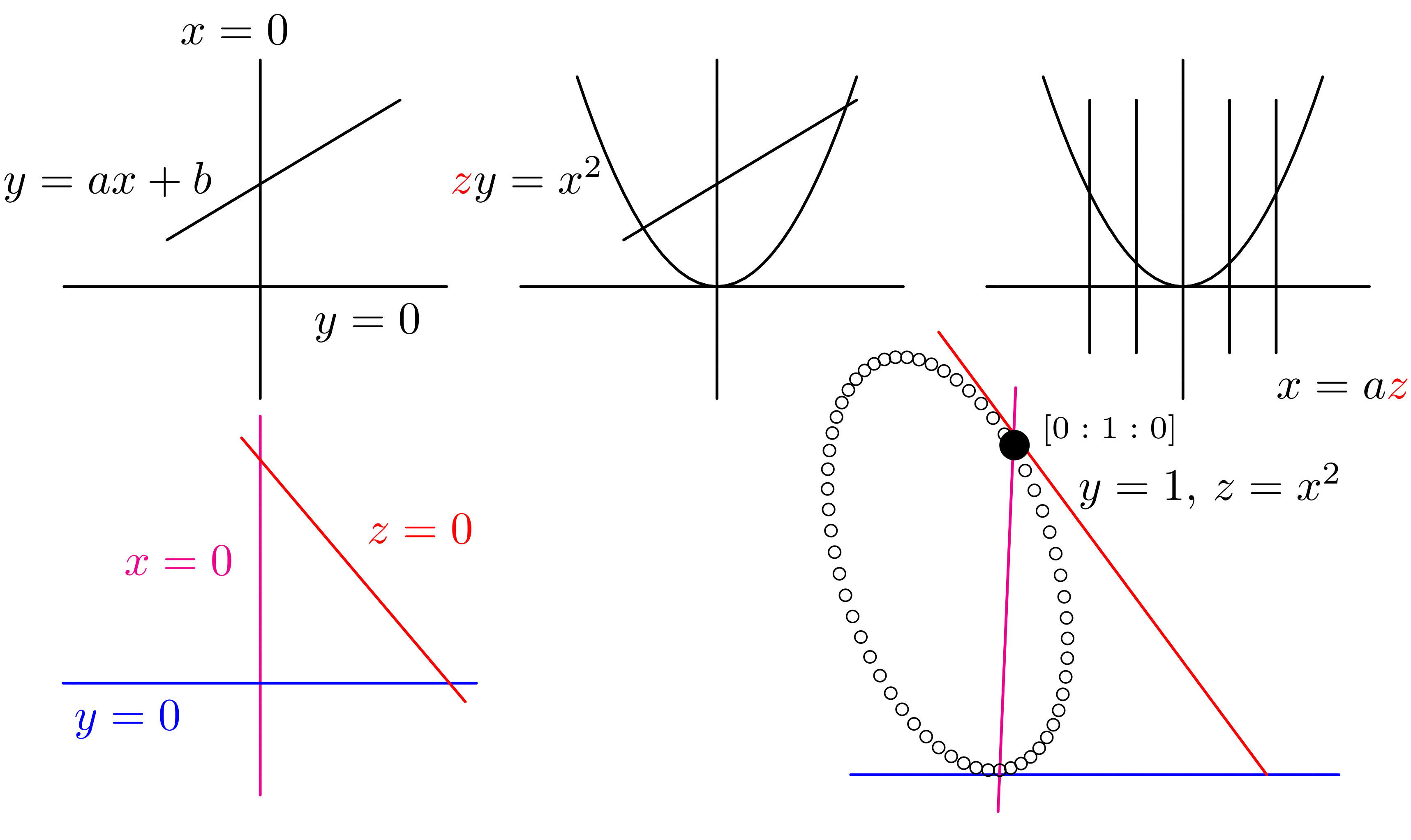
Geometria analítica plana projetiva, ...



$\mathbb{P}^2$, o plano projetivo; coordenadas homogêneas $[x : y : z]$

geometria afim $\times$ geometria projetiva

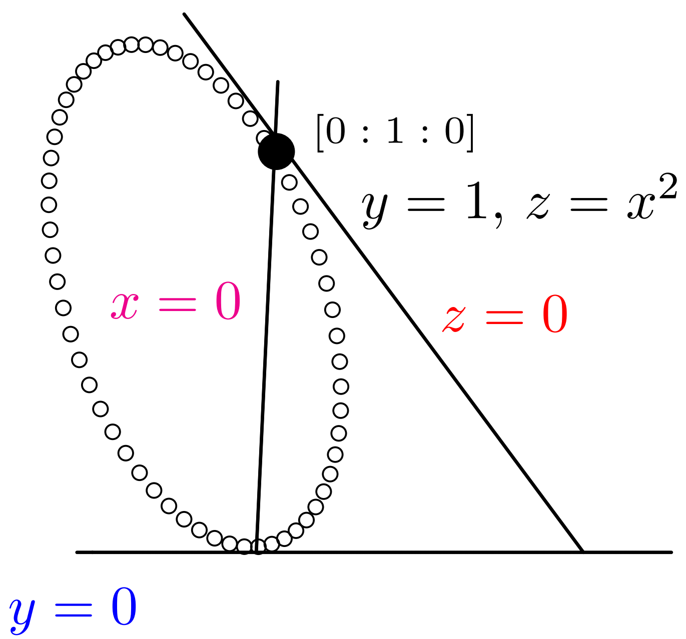
Geometria analítica plana projetiva, ...



$\mathbb{P}^2$, o plano projetivo; coordenadas homogêneas $[x : y : z]$

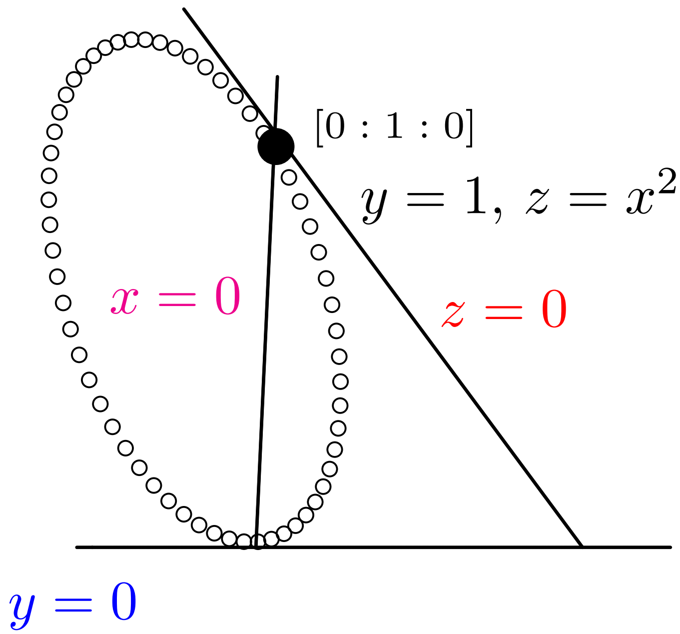
(parênteses, projetivo)

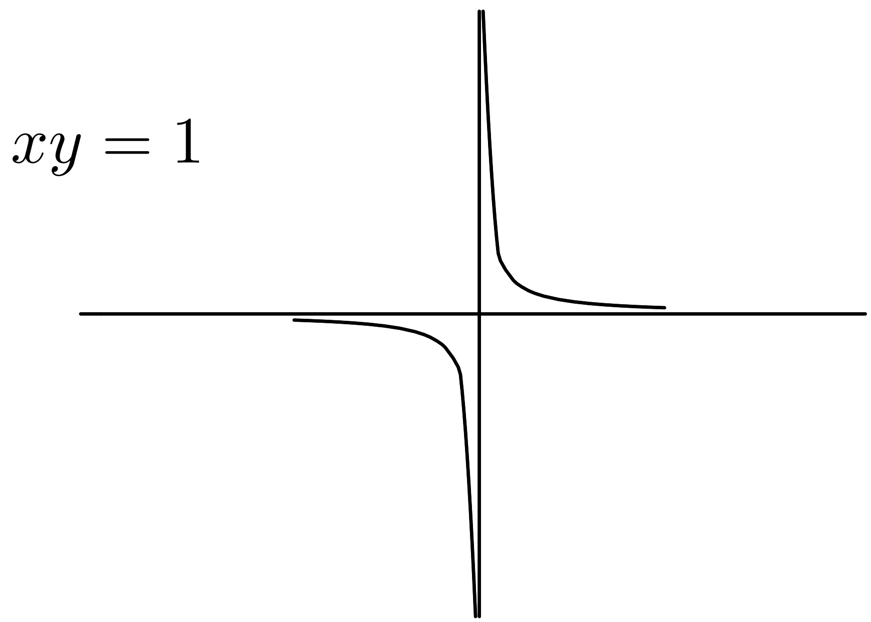
Geometria analítica plana projetiva, . . .



(parênteses, projetivo)

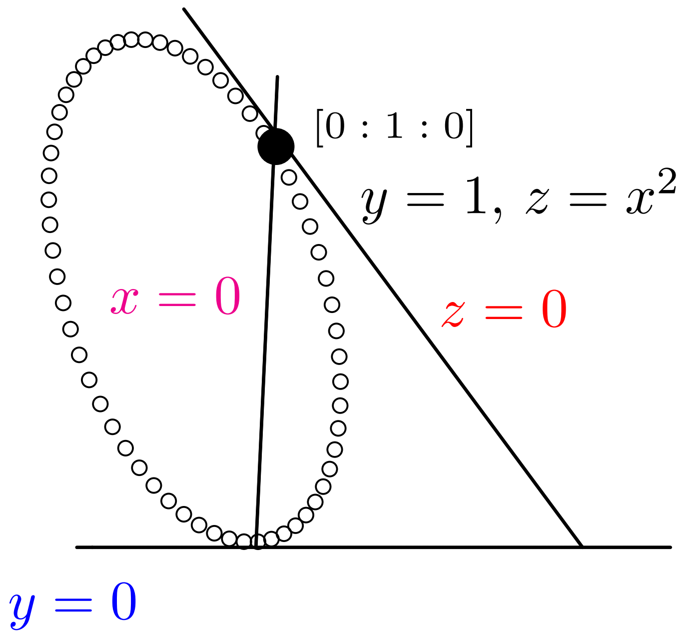
Geometria analítica plana projetiva, ...

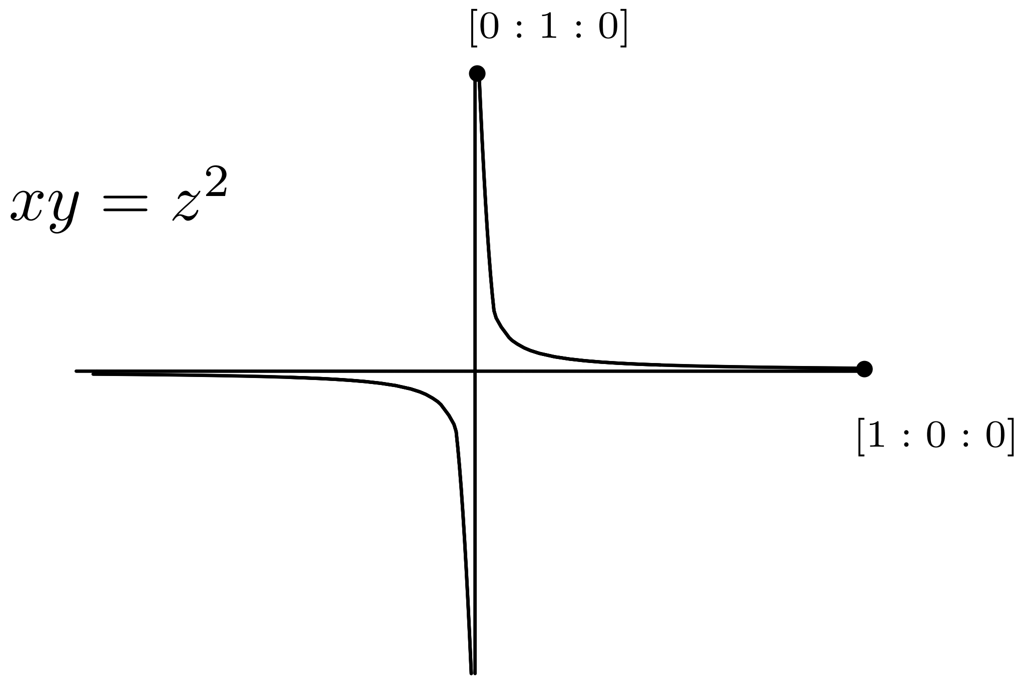




(parênteses, projetivo)

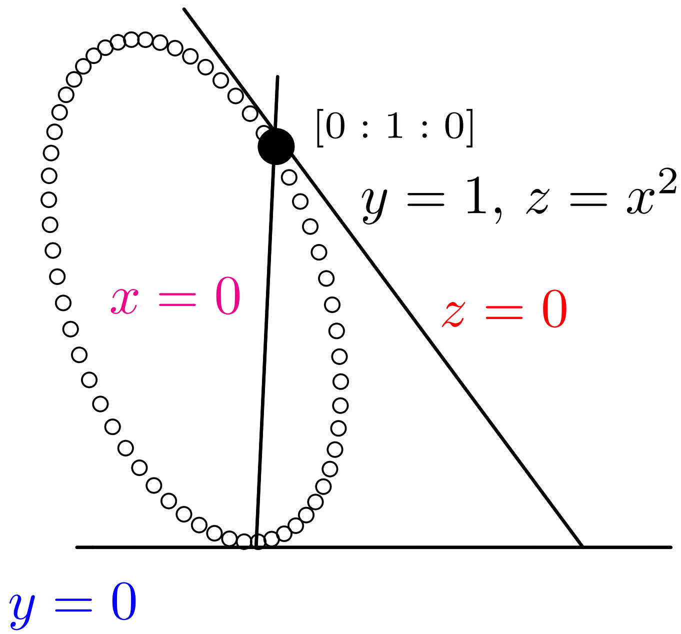
Geometria analítica plana projetiva, . . .

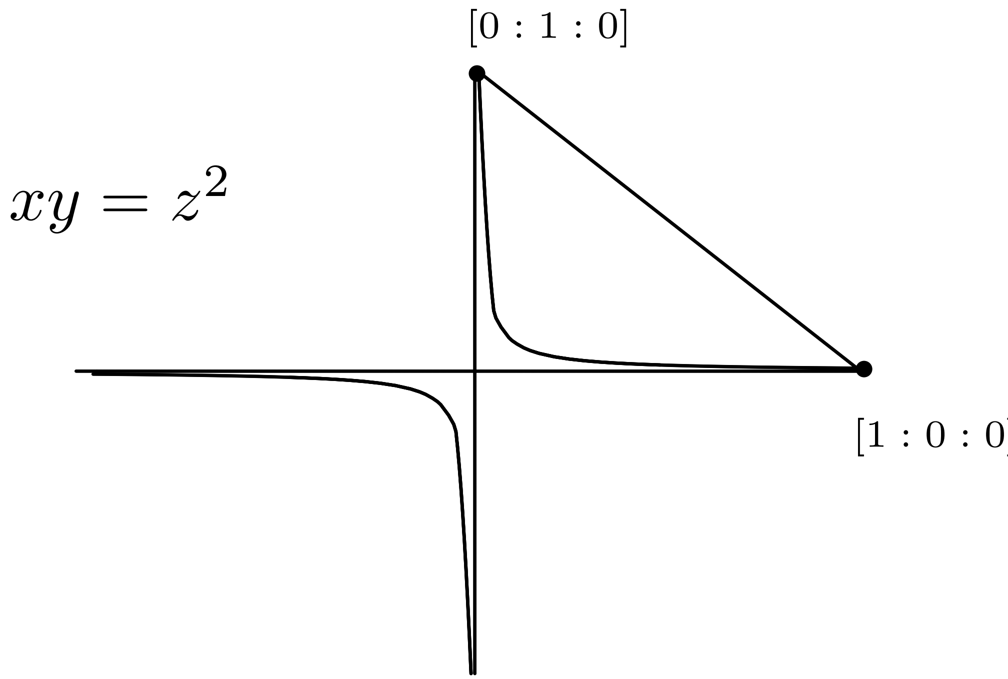




(parênteses, projetivo)

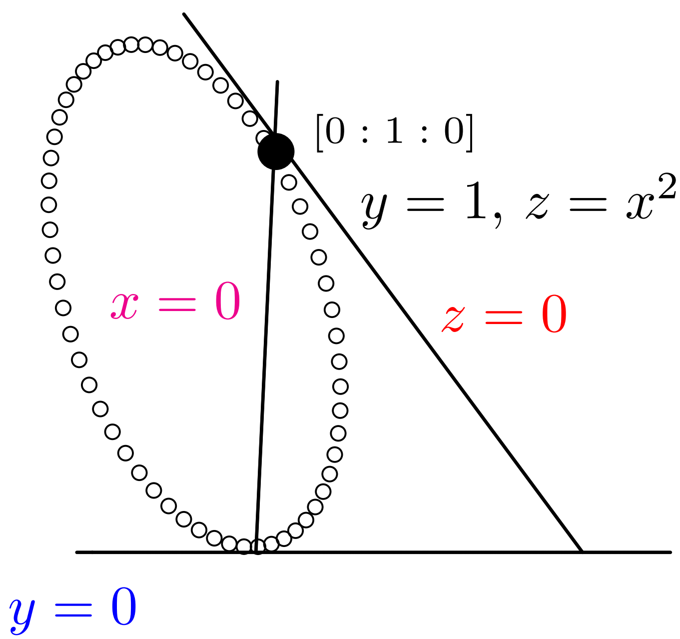
Geometria analítica plana projetiva, ...

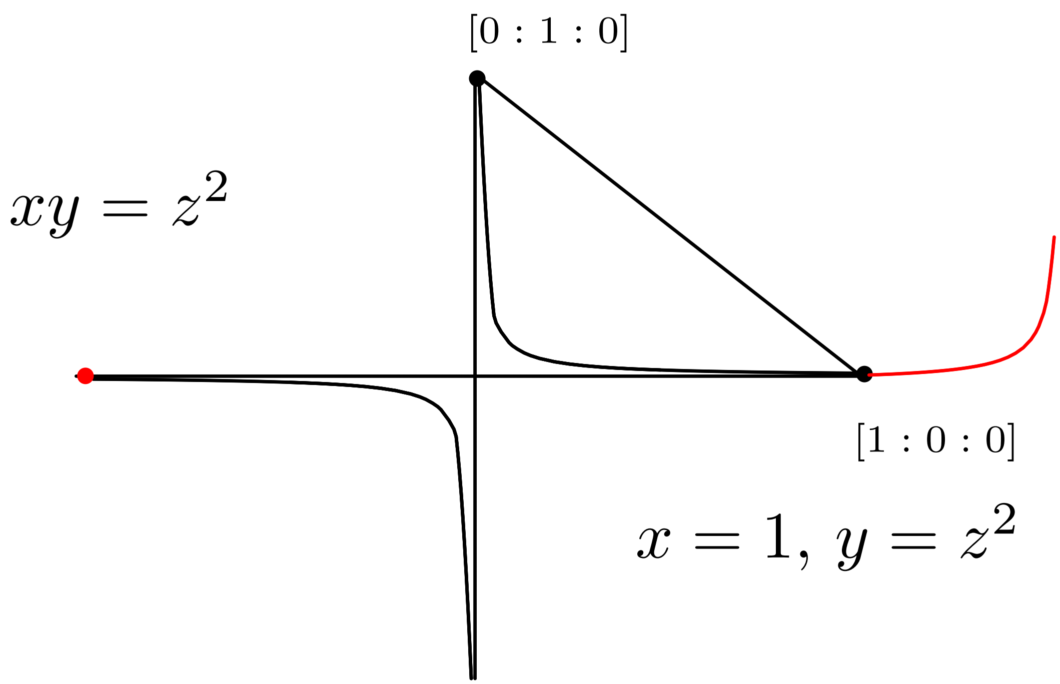




(parênteses, projetivo)

Geometria analítica plana projetiva, ...





elipse, parábola, hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

elipse, parábola, hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\rightsquigarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

elipse, parábola, hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\rightsquigarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\rightsquigarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2z^2$$

elipse, parábola, hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\rightsquigarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\rightsquigarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2z^2$$

$$\rightsquigarrow b^2x^2 = a^2b^2z^2 - a^2y^2$$

elipse, parábola, hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\rightsquigarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\rightsquigarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2z^2$$

$$\rightsquigarrow b^2x^2 = a^2b^2z^2 - a^2y^2$$

$$\rightsquigarrow a^2b^2z^2 - a^2y^2 = b^2$$

elipse, parábola, hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\leadsto b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\leadsto b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2z^2$$

$$\leadsto b^2x^2 = a^2b^2z^2 - a^2y^2$$

$$\leadsto a^2b^2z^2 - a^2y^2 = b^2$$

$$y = x^2$$

elipse, parábola, hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\rightsquigarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\rightsquigarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2z^2$$

$$\rightsquigarrow b^2x^2 = a^2b^2z^2 - a^2y^2$$

$$\rightsquigarrow a^2b^2z^2 - a^2y^2 = b^2$$

$$y = x^2 \rightsquigarrow zy = x^2$$

elipse, parábola, hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\leadsto b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

$$\leadsto b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2z^2$$

$$\leadsto b^2x^2=a^2b^2z^2-a^2y^2$$

$$\leadsto a^2b^2z^2-a^2y^2=b^2$$

$$y=x^2 \leadsto zy=x^2 \leadsto zy=1$$

Em resumo, *no mundo projetivo,*

e aceitando também coordenadas complexas,

só há um tipo de cônica não degenerada.

Em resumo, *no mundo projetivo,*

e aceitando também coordenadas complexas,

só há um tipo de cônica não degenerada.

Por meio de uma mudança de coordenadas,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto X' := \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = P \cdot X$$

podemos transformar elipse,

em parábola, ou em hipérbole...

dualidade para cônicas

dualidade para cônicas

A coleção das retas tangentes a uma curva plana descreve a curva dual.

A reta $ax + by = 1$

dualidade para cônicas

A coleção das retas tangentes a uma curva plana descreve a curva dual.

A reta $ax + by = 1$
é tangente ao círculo
$$x^2 + y^2 = 1$$

dualidade para cônicas

A coleção das retas tangentes a uma curva plana descreve a curva dual.

A reta $ax + by = 1$

é tangente ao círculo

$x^2 + y^2 = 1$

se e só se

$a^2 + b^2 = 1.$

dualidade para cônicas

A coleção das retas tangentes a uma curva plana descreve a curva dual.

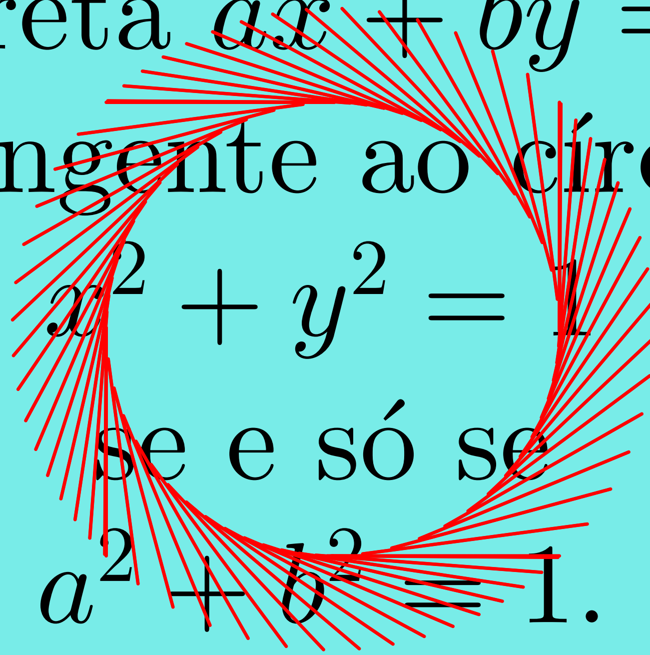
A reta $ax + by = 1$

é tangente ao círculo

$$x^2 + y^2 = 1$$

se e só se

$$a^2 + b^2 = 1.$$



a cônica dual

Teorema. *A curva dual de uma cônica*

a cônica dual

Teorema. *A curva dual de uma cônica é uma cônica no plano dual.*

a cônica dual

Teorema. *A curva dual de uma cônica é uma cônica no plano dual.*

Vamos reescrever a forma quadrática

$$q := \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 +$$

a cônica dual

Teorema. *A curva dual de uma cônica é uma cônica no plano dual.*

Vamos reescrever a forma quadrática

$$q := \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 + 2(\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{13}x_1x_3 + \alpha_{23}x_2x_3)$$

usando a matriz simétrica associada, (α_{ij}),

a cônica dual

Teorema. *A curva dual de uma cônica é uma cônica no plano dual.*

Vamos reescrever a forma quadrática

$$q := \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 + 2(\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{13}x_1x_3 + \alpha_{23}x_2x_3)$$

usando a matriz simétrica associada, (α_{ij}),

$$q = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

a cônica dual

Examinemos o exemplo $C : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

a cônica dual

Examinemos o exemplo $C : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Olhando o gradiente, a reta tangente num ponto $[z_1, z_2, z_3] \in C$

a cônica dual

Examinemos o exemplo $C : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Olhando o gradiente, a reta tangente num ponto $[z_1, z_2, z_3] \in C$ é dada por $\sum z_i x_i$;

a cônica dual

Examinemos o exemplo $C : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Olhando o gradiente, a reta tangente num ponto $[z_1, z_2, z_3] \in C$ é dada por $\sum z_i x_i$; fica claro que $\sum z_i^2 = 0$.

a cônica dual

Examinemos o exemplo $C : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Olhando o gradiente, a reta tangente num

ponto $[z_1, z_2, z_3] \in C$ é dada por $\sum z_i x_i$;

fica claro que $\sum z_i^2 = 0$.

Logo, a curva dual é dada pela equação

a cônica dual

Examinemos o exemplo $C : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Olhando o gradiente, a reta tangente num

ponto $[z_1, z_2, z_3] \in C$ é dada por $\sum z_i x_i$;

fica claro que $\sum z_i^2 = 0$.

Logo, a curva dual é dada pela equação

$$\check{C} : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$$

no plano dual, $\check{\mathbb{P}}^2$, com coordenadas $[y_1 : y_2 : y_3]$.

a cônica dual

Examinemos o exemplo $C : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Olhando o gradiente, a reta tangente num

ponto $[z_1, z_2, z_3] \in C$ é dada por $\sum z_i x_i$;

fica claro que $\sum z_i^2 = 0$.

Logo, a curva dual é dada pela equação

$$\check{C} : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$$

no plano dual, $\check{\mathbb{P}}^2$, com coordenadas $[y_1 : y_2 : y_3]$.

No presente caso especial, a matriz associada tanto à cônica C como à sua dual $\check{C}$ é a matriz identidade.

Vamos reduzir o caso geral ao caso anterior fazendo uma mudança de coordenadas.

Vamos reduzir o caso geral ao caso anterior fazendo uma mudança de coordenadas.

Se C é uma cônica geral, com matriz $A = (\alpha_{ij})$,

Vamos reduzir o caso geral ao caso anterior fazendo uma mudança de coordenadas. Se C é uma cônica geral, com matriz $A = (\alpha_{ij})$, sabemos da álgebra linear que existe uma matriz inversível P tal que

$$ {}^{\mathrm{T}}P\,A\,P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, $$

Vamos reduzir o caso geral ao caso anterior fazendo uma mudança de coordenadas. Se C é uma cônica geral, com matriz $A = (\alpha_{ij})$, sabemos da álgebra linear que existe uma matriz inversível P tal que

$$ {}^{\mathrm{T}}P\, A\, P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, $$

$I_r =$ matriz identidade de tamanho $r =$ posto de A.

Vamos reduzir o caso geral ao caso anterior fazendo uma mudança de coordenadas. Se C é uma cônica geral, com matriz $A = (\alpha_{ij})$, sabemos da álgebra linear que existe uma matriz inversível P tal que

$$ {}^{\mathrm{T}}P\,A\,P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, $$

I_r = matriz identidade de tamanho r = posto de A.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Vamos reduzir o caso geral ao caso anterior fazendo uma mudança de coordenadas.

Se C é uma cônica geral, com matriz $A = (\alpha_{ij})$, sabemos da álgebra linear que existe uma matriz inversível P tal que

$$^{\mathrm{T}}P\,A\,P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$I_r =$ matriz identidade de tamanho $r =$ posto de A.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \color{blue}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$

Vamos reduzir o caso geral ao caso anterior fazendo uma mudança de coordenadas.

Se C é uma cônica geral, com matriz $A = (\alpha_{ij})$, sabemos da álgebra linear que existe uma matriz inversível P tal que

$$^{\mathrm{T}}P\,A\,P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

I_r = matriz identidade de tamanho r = posto de A.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Vamos reduzir o caso geral ao caso anterior fazendo uma mudança de coordenadas. Se C é uma cônica geral, com matriz $A = (\alpha_{ij})$, sabemos da álgebra linear que existe uma matriz inversível P tal que

$$^{\mathrm{T}}P\,A\,P = \left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),$$

I_r = matriz identidade de tamanho r = posto de A.

Exemplo: $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow {\color{blue}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{smallmatrix}\right)$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{smallmatrix}\right) {\color{blue}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} = {\color{red}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{-2i} \end{pmatrix} {\color{red}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{-2i} \end{pmatrix} = I_2.$$

Se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ são novas coordenadas homogêneas tais que

Se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ são novas coordenadas homogêneas tais que

$$\boxed{X = PX',}$$

Se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ são novas coordenadas homogêneas tais que

$$\boxed{X = PX',}$$

$(P \in \mathrm{GL}_3)$

então podemos escolher P e escrever

$$C : {}^{\mathrm{T}}XAX = {}^{\mathrm{T}}X' \underbrace{{}^{\mathrm{T}}PAP}_{I} X'.$$

Se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ são novas coordenadas homogêneas tais que

$$\boxed{X = PX',}$$

$$(P \in \mathrm{GL}_3)$$

então podemos escolher P e escrever

$$C : {}^{\mathrm{T}}XAX = {}^{\mathrm{T}}X' \underbrace{{}^{\mathrm{T}}PAP}_{I} X'.$$

Agora, para retas, como se processa a mudança de coordenadas duais?

$$\text{Se } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ e } X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \text{ são}$$

novas coordenadas homogêneas tais que

$$\boxed{X = PX',}$$

$$(P \in \mathrm{GL}_3)$$

então podemos escolher P e escrever

$$C : {}^{\mathrm{T}}XAX = {}^{\mathrm{T}}X' \underbrace{{}^{\mathrm{T}}PAP}_{I} X'.$$

Agora, para retas, como se processa a mudança de coordenadas duais?

$$L : y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 =$$

Se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ são novas coordenadas homogêneas tais que

$$\boxed{X = PX',}$$

$(P \in \mathrm{GL}_3)$

então podemos escolher P e escrever

$$C : {}^{\mathrm{T}}XAX = {}^{\mathrm{T}}X' \underbrace{{}^{\mathrm{T}}PAP}_{I} X'.$$

Agora, para retas, como se processa a mudança de coordenadas duais?

$$L : y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 = {}^{\mathrm{T}}YX$$

Se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ são novas coordenadas homogêneas tais que

$$\boxed{X = PX',}$$

$(P \in \mathrm{GL}_3)$

então podemos escolher P e escrever

$$C : {}^{\mathrm{T}}XAX = {}^{\mathrm{T}}X' \underbrace{{}^{\mathrm{T}}PAP}_{I} X'.$$

Agora, para retas, como se processa a mudança de coordenadas duais?

$$L : y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 = {}^{\mathrm{T}}YX = {}^{\mathrm{T}}Y(PX')$$

Se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ são novas coordenadas homogêneas tais que

$$\boxed{X = PX',}$$

$(P \in \mathrm{GL}_3)$

então podemos escolher P e escrever

$$C : {}^{\mathrm{T}}XAX = {}^{\mathrm{T}}X' \underbrace{{}^{\mathrm{T}}PAP}_{I} X'.$$

Agora, para retas, como se processa a mudança de coordenadas duais?

$$L : y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 = {}^{\mathrm{T}}YX = {}^{\mathrm{T}}Y(PX') = \underbrace{{}^{\mathrm{T}}YP}_{{}^{\mathrm{T}}Y'} X'.$$

Se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ são novas coordenadas homogêneas tais que

$$\boxed{X = PX',}$$

$$(P \in \mathrm{GL}_3)$$

então podemos escolher P e escrever

$$C : {}^{\mathrm{T}}XAX = {}^{\mathrm{T}}X' \underbrace{{}^{\mathrm{T}}PAP}_{I} X'.$$

Agora, para retas, como se processa a mudança de coordenadas duais?

$$L : y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 = {}^{\mathrm{T}}Y X = {}^{\mathrm{T}}Y(PX') = \underbrace{{}^{\mathrm{T}}YP}_{{}^{\mathrm{T}}Y'} X'.$$

$$\boxed{Y = {}^{\mathrm{T}}P^{-1}Y'.}$$

$$\boxed{Y = {}^{\mathrm{T}}P^{-1}Y'.}$$

Em outras palavras, a mudança de coordenadas $X = PX'$ em $\mathbb{P}^2$

$$\boxed{Y = {}^{\mathrm{T}}P^{-1}Y'.}$$

Em outras palavras, a mudança de coordenadas $X = PX'$ em $\mathbb{P}^2$ induz $Y = ({}^{\mathrm{T}}P)^{-1}Y'$ no plano dual $\check{\mathbb{P}}^2$.

$$\boxed{Y = {}^{\mathrm{T}}P^{-1}Y'.}$$

Em outras palavras, a mudança de coordenadas $X = PX'$ em $\mathbb{P}^2$ induz $Y = ({}^{\mathrm{T}}P)^{-1}Y'$ no plano dual $\check{\mathbb{P}}^2$.

A mudança de coordenadas $X = PX'$ em $\mathbb{P}^2$ também induz

$$\boxed{Y = {}^{\mathrm{T}}P^{-1}Y'.}$$

Em outras palavras, a mudança de coordenadas $X = PX'$ em $\mathbb{P}^2$ induz $Y = ({}^{\mathrm{T}}P)^{-1}Y'$ no plano dual $\check{\mathbb{P}}^2$.

A mudança de coordenadas $X = PX'$ em $\mathbb{P}^2$ também induz

$$\boxed{A' = {}^{\mathrm{T}}PAP \text{ em } \mathbb{P}^5.}$$

$$\boxed{Y = {}^{\mathrm{T}}P^{-1}Y'.}$$

Em outras palavras, a mudança de coordenadas $X = PX'$ em $\mathbb{P}^2$ induz $Y = ({}^{\mathrm{T}}P)^{-1}Y'$ no plano dual $\check{\mathbb{P}}^2$.

A mudança de coordenadas $X = PX'$ em $\mathbb{P}^2$ também induz

$$\boxed{A' = {}^{\mathrm{T}}PAP \text{ em } \mathbb{P}^5.}$$

Analogamente, trocando P por ${}^{\mathrm{T}}P^{-1}$,

$$\boxed{Y = {}^{\mathrm{T}}P^{-1}Y'.}$$

Em outras palavras, a mudança de coordenadas $X = PX'$ em $\mathbb{P}^2$ induz $Y = ({}^{\mathrm{T}}P)^{-1}Y'$ no plano dual $\check{\mathbb{P}}^2$.

A mudança de coordenadas $X = PX'$ em $\mathbb{P}^2$ também induz

$$\boxed{A' = {}^{\mathrm{T}}PAP \text{ em } \mathbb{P}^5.}$$

Analogamente, trocando P por ${}^{\mathrm{T}}P^{-1}$, a matriz da cônica dual muda pela regra

$$\boxed{Y = {}^{\mathrm{T}}P^{-1}Y'.}$$

Em outras palavras, a mudança de coordenadas $X = PX'$ em $\mathbb{P}^2$ induz $Y = ({}^{\mathrm{T}}P)^{-1}Y'$ no plano dual $\check{\mathbb{P}}^2$.

A mudança de coordenadas $X = PX'$ em $\mathbb{P}^2$ também induz

$$\boxed{A' = {}^{\mathrm{T}}PAP \text{ em } \mathbb{P}^5.}$$

Analogamente, trocando P por ${}^{\mathrm{T}}P^{-1}$, a matriz da cônica dual muda pela regra

$$\boxed{(\check{A})' = {}^{\mathrm{T}}({}^{\mathrm{T}}P^{-1})\check{A}\,{}^{\mathrm{T}}P^{-1} \text{ em } \check{\mathbb{P}}^5.}$$

$$\boxed{Y = {}^{\mathrm{T}}P^{-1}Y'.}$$

Em outras palavras, a mudança de coordenadas $X = PX'$ em $\mathbb{P}^2$ induz $Y = ({}^{\mathrm{T}}P)^{-1}Y'$ no plano dual $\check{\mathbb{P}}^2$.

A mudança de coordenadas $X = PX'$ em $\mathbb{P}^2$ também induz

$$\boxed{A' = {}^{\mathrm{T}}PAP \text{ em } \mathbb{P}^5.}$$

Analogamente, trocando P por ${}^{\mathrm{T}}P^{-1}$, a matriz da cônica dual muda pela regra

$$\boxed{(\check{A})' = {}^{\mathrm{T}}({}^{\mathrm{T}}P^{-1})\check{A}\,{}^{\mathrm{T}}P^{-1} \text{ em } \check{\mathbb{P}}^5.}$$

Se $A' = {}^{\mathrm{T}}PAP = I$

$$\boxed{Y = {}^{\mathrm{T}}P^{-1}Y'.}$$

Em outras palavras, a mudança de coordenadas $X = PX'$ em $\mathbb{P}^2$ induz $Y = ({}^{\mathrm{T}}P)^{-1}Y'$ no plano dual $\check{\mathbb{P}}^2$.

A mudança de coordenadas $X = PX'$ em $\mathbb{P}^2$ também induz

$$\boxed{A' = {}^{\mathrm{T}}PAP \text{ em } \mathbb{P}^5.}$$

Analogamente, trocando P por ${}^{\mathrm{T}}P^{-1}$, a matriz da cônica dual muda pela regra

$$\boxed{(\check{A})' = {}^{\mathrm{T}}({}^{\mathrm{T}}P^{-1})\check{A}\,{}^{\mathrm{T}}P^{-1} \text{ em } \check{\mathbb{P}}^5.}$$

Se $A' = {}^{\mathrm{T}}PAP = I$ então $\check{A}' = I$

$$\boxed{Y = {}^{\mathrm{T}}P^{-1}Y'.}$$

Em outras palavras, a mudança de coordenadas $X = PX'$ em $\mathbb{P}^2$ induz $Y = ({}^{\mathrm{T}}P)^{-1}Y'$ no plano dual $\check{\mathbb{P}}^2$.

A mudança de coordenadas $X = PX'$ em $\mathbb{P}^2$ também induz

$$\boxed{A' = {}^{\mathrm{T}}PAP \text{ em } \mathbb{P}^5.}$$

Analogamente, trocando P por ${}^{\mathrm{T}}P^{-1}$, a matriz da cônica dual muda pela regra

$$\boxed{(\check{A})' = {}^{\mathrm{T}}({}^{\mathrm{T}}P^{-1})\check{A}\,{}^{\mathrm{T}}P^{-1} \text{ em } \check{\mathbb{P}}^5.}$$

Se $A' = {}^{\mathrm{T}}PAP = I$ então $\check{A}' = I$ e $A = ({}^{\mathrm{T}}P^{-1})P^{-1}$.

$$\boxed{Y = {}^{\mathrm{T}}P^{-1}Y'.}$$

Em outras palavras, a mudança de coordenadas $X = PX'$ em $\mathbb{P}^2$ induz $Y = ({}^{\mathrm{T}}P)^{-1}Y'$ no plano dual $\check{\mathbb{P}}^2$.

A mudança de coordenadas $X = PX'$ em $\mathbb{P}^2$ também induz

$$\boxed{A' = {}^{\mathrm{T}}PAP \text{ em } \mathbb{P}^5.}$$

Analogamente, trocando P por ${}^{\mathrm{T}}P^{-1}$, a matriz da cônica dual muda pela regra

$$\boxed{(\check{A})' = {}^{\mathrm{T}}({}^{\mathrm{T}}P^{-1})\check{A}\,{}^{\mathrm{T}}P^{-1} \text{ em } \check{\mathbb{P}}^5.}$$

Se $A' = {}^{\mathrm{T}}PAP = I$ então $\check{A}' = I$ e $A = ({}^{\mathrm{T}}P^{-1})P^{-1}$.

$$\boxed{\check{A} = P({}^{\mathrm{T}}P) = A^{-1}.}$$

a correspondência $C \leftrightarrow \check{C}$

Vimos acima que a cônica dual de uma cônica é definida pela matriz simétrica inversa.

a correspondência $C \leftrightarrow \check{C}$

Vimos acima que a cônica dual de uma cônica

é definida pela matriz simétrica inversa.

Se a cônica $C \subset \mathbb{P}^2$ corresponde à

matriz simétrica A,

a correspondência $C \leftrightarrow \check{C}$

Vimos acima que a cônica dual de uma cônica

é definida pela matriz simétrica inversa.

Se a cônica $C \subset \mathbb{P}^2$ corresponde à

matriz simétrica A,

então a cônica dual $\check{C} \subset \check{\mathbb{P}}^2$ corresponde

à matriz $\quad \check{A} = A^{-1}$.

A (bi)dualidade nos diz também que,

A (bi)dualidade nos diz também que,
se um ponto $P \in C$ tem reta tangente $L \in \check{C}$,

A (bi)dualidade nos diz também que, se um ponto $P \in C$ tem reta tangente $L \in \check{C}$, então a reta tangente à curva dual $\check{C}$ no ponto L corresponde ao ponto $P \in \check{\check{C}}$

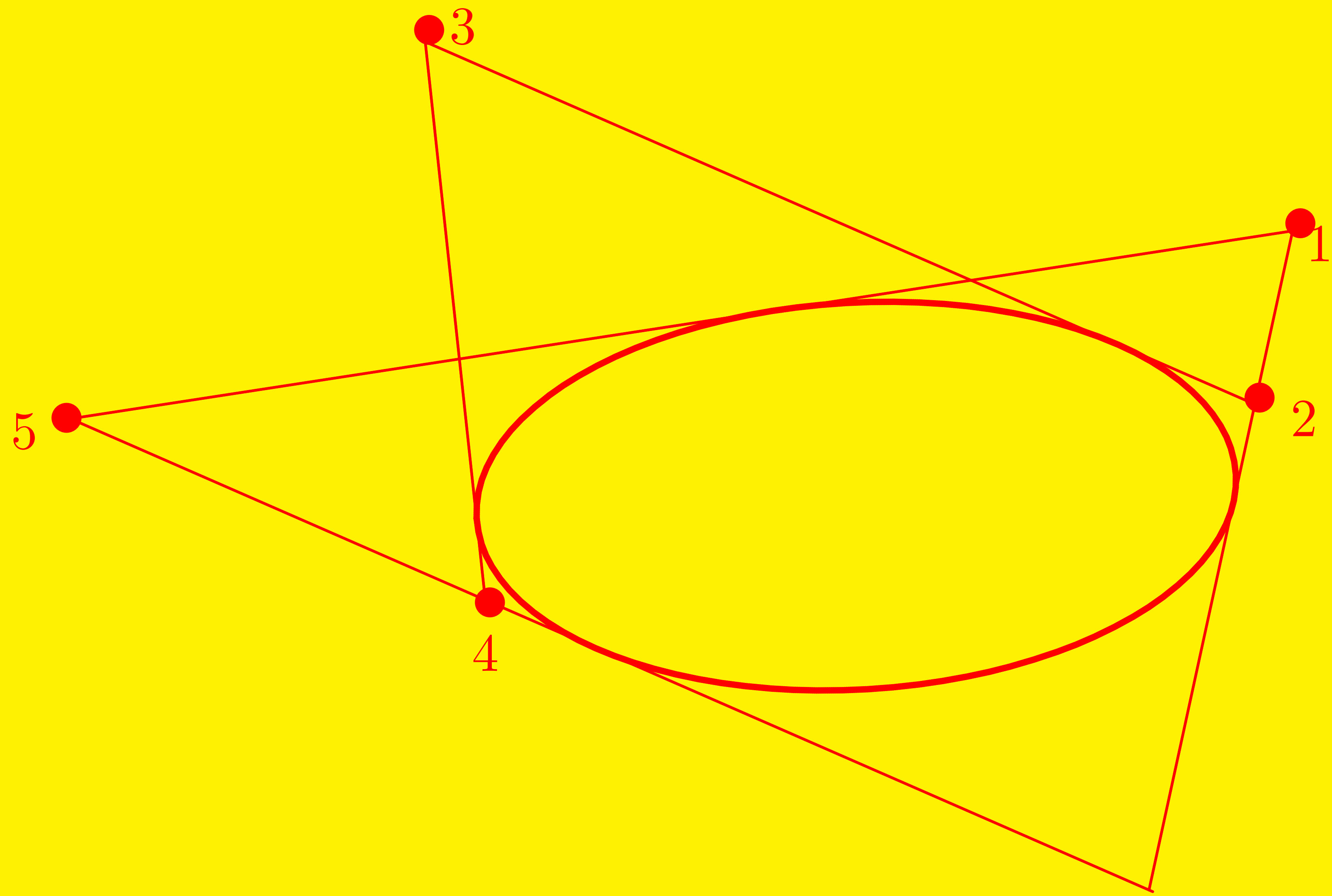
A (bi)dualidade nos diz também que, se um ponto $P \in C$ tem reta tangente $L \in \check{C}$, então a reta tangente à curva dual $\check{C}$ no ponto L corresponde ao ponto $P \in \check{\check{C}} = C$.

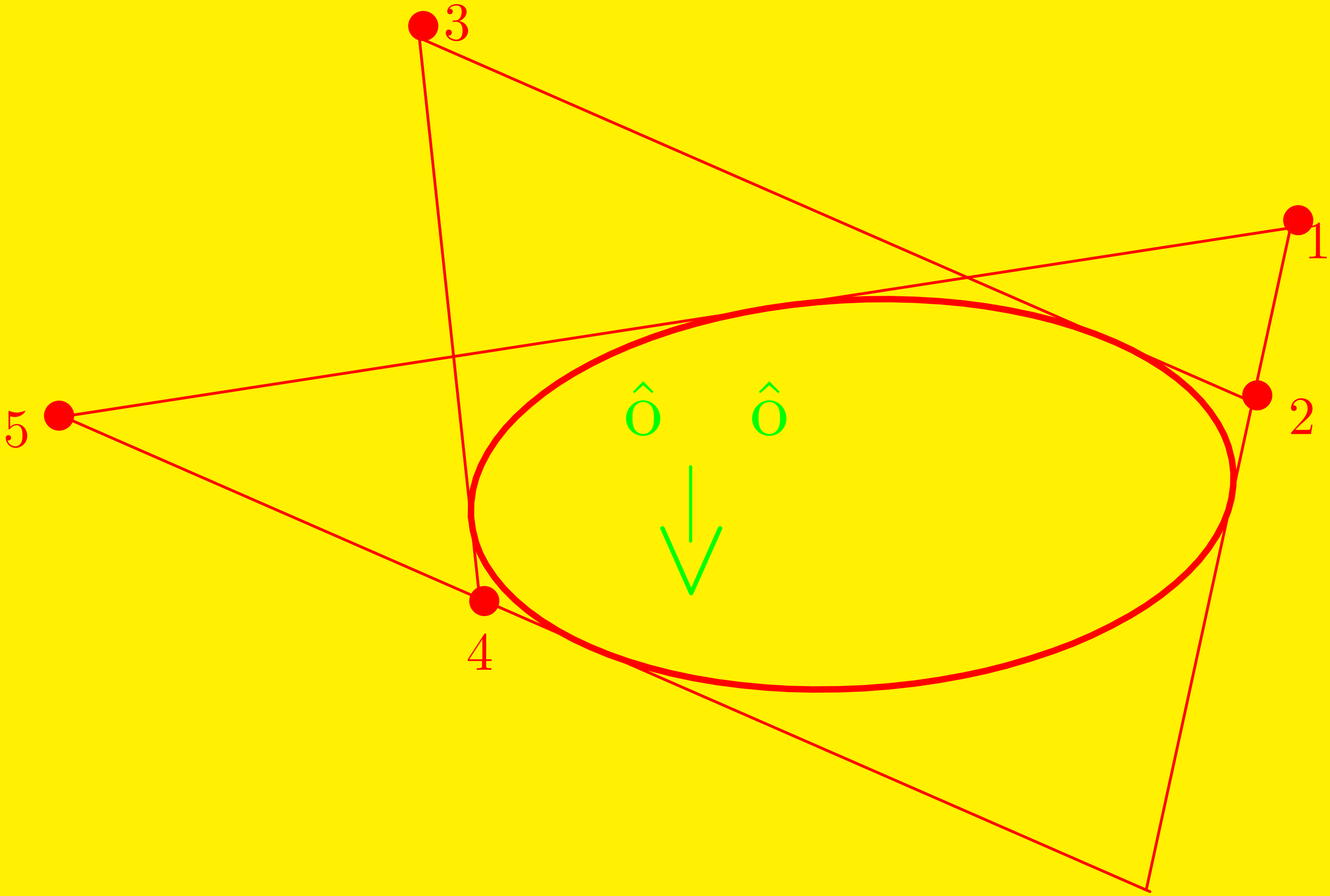
A (bi)dualidade nos diz também que, se um ponto $P \in C$ tem reta tangente $L \in \check{C}$, então a reta tangente à curva dual $\check{C}$ no ponto L corresponde ao ponto $P \in \check{\check{C}} = C$. Portanto, a condição para que uma cônica C seja tangente a uma reta $L \subset \mathbb{P}^2$ é equivalente a exigir

A (bi)dualidade nos diz também que,
se um ponto $P \in C$ tem reta tangente $L \in \check{C}$,
então a reta tangente à curva dual $\check{C}$ no
ponto L corresponde ao ponto $P \in \check{\check{C}} = C$.
Portanto, a condição para que uma
cônica C seja tangente a uma reta $L \subset \mathbb{P}^2$
é equivalente a exigir
que a cônica dual $\check{C}$ contenha o ponto $L \in \check{\mathbb{P}}^2$.

A (bi)dualidade nos diz também que,
se um ponto $P \in C$ tem reta tangente $L \in \check{C}$,
então a reta tangente à curva dual $\check{C}$ no
ponto L corresponde ao ponto $P \in \check{\check{C}} = C$.
Portanto, a condição para que uma
cônica C seja tangente a uma reta $L \subset \mathbb{P}^2$
é equivalente a exigir
que a cônica dual $\check{C}$ contenha o ponto $L \in \check{\mathbb{P}}^2$.
Logo, existe uma e só uma cônica
tangente a 5 retas gerais.

A questão análoga para curvas de grau$> 4 \ldots$


3
1
2
5
4



OBRIGADO PELA ATENÇÃO!