

EXPLOSIONES AMIGAS

Israel Vainsencher



$$A \supset I \text{ ideal, } b \in I$$

$$I_{(b)} = \left\{ \frac{a}{b^i} \mid i \geq 0, a \in I^i \right\} \subseteq A_b.$$

A -álgebra via $a \mapsto a/1$.

- O ideal gerado pela imagem de I , $I \cdot I_{(b)} = \langle b/1 \rangle$ é principal:

$$\forall \alpha \in I, \frac{\alpha}{1} = \frac{\alpha b}{b1}.$$

- $b/1$ é ndz: $\frac{a}{b^i} \cdot \frac{b}{1} = \frac{0}{1} \Rightarrow b^j ab = 0 \Rightarrow \frac{a}{b^i} = \frac{0}{1}.$

a álgebra de Rees

$$R = R(I) = A \oplus I \oplus I^2 \dots = \bigoplus_{0}^{\infty} I^i$$

A -álgebra graduada, $R_d = I^d$.

$$I^+ = 0 \oplus I \oplus I^2 \dots$$

“ideal irrelevante”.

$$Bl_I A = \text{Proj}(R(I))$$

$\text{Proj}(R)$

Em geral, $R = R_0 \oplus R_1 \oplus \cdots$

álgebra graduada.

$$\text{Proj}(R) = \{\mathfrak{p} \subset R \mid \mathfrak{p} \text{ primo homog. } \not\supseteq I^+\}$$

Abertos básicos: para cada $b \in R_d$

$$\text{Proj}(R)_b = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(R) \mid \mathfrak{p} \not\ni b\} = \text{Proj}(R) \setminus V(b)$$

são declarados abertos de $\text{Proj}(R)$.

Supor, por simplicidade, que

R_1 gera R como R_0 -álgebra.

$$\text{Segue } \text{Proj}(R) = \bigcup_{b \in R_1} \text{Proj}(R)_b$$

$$b \in R_1, R_{(b)} := \left\{ \frac{a}{b^i} \mid i \geq 0, a \in R_i \right\} \subseteq R_b.$$

$\mathfrak{p} \in \text{Proj}(R)_b \Rightarrow \mathfrak{p}R_b$ sobrevive,
e por contração ganhamos

$$\mathfrak{p}_{(b)} \in \text{Spec}(R_{(b)}).$$

(desomogeneização:-)

Reciproc., dado $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(R_{(b)})$, defina

$$\widetilde{\mathfrak{q}} = \left\{ a = a_0 + \cdots + a_m, a_i \in R_i \mid \frac{a_i}{b^i} \in \mathfrak{q} \right\}.$$

(homogeneização:-)

$$\tilde{\mathfrak{q}} = \{a = a_0 + \cdots + a_m, a_i \in R_i \mid \frac{a_i}{b^i} \in \mathfrak{q} \forall i\}.$$

- é homogêneo, $\not\subseteq R^+ = \bigoplus_{i>0} R_i$, primo é claramente ideal homog. Se $\tilde{\mathfrak{q}} \supseteq R^+$, em particular $b \in R_1 \subset \tilde{\mathfrak{q}} \Rightarrow 1 = \frac{b}{b} \in \mathfrak{q}$. primo: se $a_i \in R_i, a'_j \in R_j$ ambos $\notin \tilde{\mathfrak{q}}$ então $\frac{a_i}{b^i} \notin \mathfrak{q} \not\supseteq \frac{a'_j}{b^j} \Rightarrow a_i a'_j \notin \tilde{\mathfrak{q}}$.
- $\tilde{\mathfrak{q}}_{(b)} = \mathfrak{q}$. (exercício)

$$\widetilde{M}$$

$M = R$ -módulo graduado $\Rightarrow$ feixe
quase-coerente $\widetilde{M}$, com seções sobre
 $\text{Proj}(R)_b = \text{Spec}(R_{(b)})$ dadas por
 $M_{(b)} = \left\{ \frac{m}{b^i} \mid i \geq 0, m \in M_i \right\} \subseteq M_b$.

Exemplo importante:

$$M = \widetilde{R[d]} = R_d \oplus R_{d+1} \cdots$$

Fato: $\widetilde{R[d]}$ é invertível, *i.e.*,
localmente livre, de posto 1.

$$U := \operatorname{Proj}(R)_b \Rightarrow \widetilde{R[d]}(U) = \left\{ \frac{a}{b^i} \mid a \in R_{d+i} \right\}$$

$$\frac{a}{b^i} = \frac{a}{b^{d+i}} \cdot \frac{b^d}{1}.$$

$\frac{b^d}{1}$ é gerador livre. (exercício)

$$\mathcal{O}(d) = \widetilde{R[d]};$$

seções = frações de grau d .

Seja $S \twoheadrightarrow R$

sobrejeção de anéis graduados.

Temos um mergulho fechado,

$$\iota : \operatorname{Proj}(R) \subseteq \operatorname{Proj}(S).$$

Por construção de ι , vale

$$\iota^* \mathcal{O}_S(1) = \mathcal{O}_R(1).$$

Voltando à álgebra de Rees

$$R = R(I) = A \oplus I \oplus I^2 \cdots = \bigoplus_{i=0}^{\infty} I^i$$

temos o ideal homog.

$$\hat{I} := I \cdot R = I \oplus I^2 \oplus \cdots = R[1].$$

Fixado $b \in I = R_1$,

as seções de $\hat{\hat{I}}$ no aberto principal $I_{(b)}$

são as frações a/b^i , $a \in R_i = I^i$,

ideal principal gerado pelo ndz $b/1$.

$$\hat{\hat{I}} = \mathcal{O}_R(1),$$

ideal do divisor excepcional.

o cone normal

$$\begin{aligned} C(I) &= R/\hat{I} = A \oplus I \oplus I^2 \oplus \dots / I \oplus I^2 \oplus I^3 \oplus \dots \\ &= A/I \oplus I/I^2 \oplus I^2/I^3 \oplus \dots \end{aligned}$$

$$\mathrm{Proj}(C(I)) \subset \mathrm{Proj}(R) = \mathrm{Bl}_I A$$

divisor excepcional = projetivização do cone normal.

Exemplo: $A = k[x, y]/\langle xy + x^3 + y^3 \rangle, I = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \subset A$
 $\Rightarrow C(I) = \bigoplus \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^i / \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^{i+1} \simeq k[x, y]/\langle xy \rangle.$

De fato, mais geralmente,

$S := k[x_1, \dots, x_n] \supset J = \text{ideal}, 0 \in V(J),$

$J_\star := \text{ideal gerado por todos os } f_d \text{ com}$

$$f = f_d + f_{d+1} + \dots \in J$$

(parte homog. de menor grau).

$$\mathfrak{m} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \rangle \subset A = S/J \Rightarrow C(\mathfrak{m}) = \bigoplus \mathfrak{m}^i / \mathfrak{m}^{i+1} \simeq S/J_\star.$$

$$\begin{aligned} \textit{Prova.} \quad \mathfrak{n} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle &\Rightarrow \bigoplus \mathfrak{m}^i / \mathfrak{m}^{i+1} = \bigoplus \mathfrak{n}^i / (\mathfrak{n}^{i+1} + J \cap \mathfrak{n}^i) \\ &= \bigoplus \mathfrak{n}^i / (\mathfrak{n}^{i+1} + J_i) = \bigoplus S_i / J_i = S/J_\star. \end{aligned}$$

propriedade universal

$$\tilde{X} := \text{Bl}_I A \xrightarrow{\mathbf{b}} X := \text{Spec}(A) \supset Y := \text{Spec}(A/I)$$

- $\mathbf{b}^{-1}Y$ é divisor de Cartier em $\tilde{X}$;
- $\forall \varphi : Z \longrightarrow X$, se $\varphi^{-1}Y$ é divisor de Cartier, então existe único $\tilde{\varphi} : Z \longrightarrow \tilde{X}$ tal que

$$\mathbf{b} \circ \tilde{\varphi} = \varphi : \quad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\varphi} & X \\ & \tilde{\varphi} \searrow & \uparrow \mathbf{b} \\ & & \tilde{X} \end{array}$$

Basta verificar a 2a. propriedade quando $Z = \text{Spec}(C)$ afim.

Seja $\varphi : Z = \operatorname{Spec}(C) \longrightarrow X$ t.q. $\varphi^{-1}Y$ é divisor de Cartier.

Isto significa que, mediante o homomorfismo

$$\varphi^\# : A \longrightarrow C$$

vale $\varphi^\#(I)C = \langle c \rangle$, c ndz.

Seguem as sobrejeções $I \otimes_A C \twoheadrightarrow \langle c \rangle$

$$(\bigoplus I^i) \otimes_A C \twoheadrightarrow \bigoplus \langle c^i \rangle.$$

Visto que c é ndz, temos $\bigoplus \langle c^i \rangle = C[t]$,

anel de polinômios na variável $t \Rightarrow$

$$\operatorname{Proj}(C[t]) = \operatorname{Spec}(C) = Z.$$

Obtemos um morfismo

$$\begin{array}{ccc} \psi : Z = \operatorname{Spec}(C) & \hookrightarrow & \operatorname{Proj}((\bigoplus I^i) \otimes_A C) \\ & & \parallel \\ & & \operatorname{Proj}(R) \times_A \operatorname{Spec}(C) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \swarrow & \\ \operatorname{Proj}(R) & = & \operatorname{Bl}_I A \end{array}$$

Tomando $Z = U := X \setminus Y \subset X$

temos $\varphi^{-1}Y = \emptyset = \text{divisor de Cartier nulo};$

agora $\tilde{\varphi} : U \rightarrow \tilde{X}$ é o isomorfismo

inverso de $\mathbf{b}|_{U'}$, com $U' = \mathbf{b}^{-1}U$.

Em termos de anéis de coordenadas, $c \in I$, $A \rightarrow I_{(c)}$

temos $\text{Spec}(A_c) \subset U$ e o mapa induzido

$$\begin{aligned} A_c &\rightarrow \left(I_{(c)}\right)_{\left(\frac{c}{1}\right)} \\ \frac{a}{c^m} &\mapsto (a/1) / \left(\frac{c}{1}\right)^m \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

aplicações

Resolução das indeterminações de um mapa racional

$X = S$ -esquema, $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}_S^n$ mapa racional dado por

- $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ -fibrado inversível,
- $s_0, \dots, s_n$ seções globais de $\mathcal{L}$,
- $U \subseteq X$ aberto denso tal que $\mathcal{O}_U^{n+1} \twoheadrightarrow \mathcal{L}|_U$
 $(a_i) \mapsto \sum a_i s_i$.

$\Rightarrow \exists \mathbf{b} : \tilde{X} \rightarrow X$ explosão com centro um subesquema fechado $Y \subseteq X \setminus U$ tal que $f' := f \circ \mathbf{b}$ é um morfismo.

Considere o mapa de feixes $\mathcal{O}_X^{n+1} \xrightarrow{s} \mathcal{L}$ definido pelas seções $s_0, \dots, s_n$. Temos um mapa induzido

$$\mathcal{O}_X^{n+1} \otimes \mathcal{L}^\vee \xrightarrow{s \otimes \mathcal{L}^\vee} \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^\vee = \mathcal{O}_X$$

cuja imagem é um subfeixe de $\mathcal{O}_X$, feixe de ideais.

Seja $Y \subset X$ o subesquema associado.

Como $s|_U$ é sobre, segue $Y \subset X \setminus U$.

A sobrejeção $\mathcal{O}_X^{n+1} \otimes \mathcal{L}^\vee \twoheadrightarrow I := I(Y)$ induz, em X ,

$\mathrm{Sym}((\mathcal{L}^{n+1})^\vee) \twoheadrightarrow \mathrm{Sym}(I) \twoheadrightarrow R(I) =: R$. Daí vem $\tilde{X} := \mathrm{Proj}(R) \subseteq \mathbb{P}(\mathcal{L}^{n+1}) = \mathbb{P}_X^n = \mathbb{P}_S^n \times_S X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$.

Em $\tilde{X}$, $\mathcal{O}_{\tilde{X}}^{n+1} \otimes \mathcal{L}^\vee \twoheadrightarrow I \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}}(1) = \underbrace{\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E)}_{\text{ideal excepcional}}$

Temos, por construção, $f'^* \mathcal{O}_S(1) = \mathcal{O}_R(1) \otimes \mathcal{L}$.

fecho do gráfico

Voltando ao mergulho fechado

$$\tilde{X} := \text{Proj}(R) \subseteq \mathbb{P}_X^n = \mathbb{P}_S^n \times_S X,$$

note que a restrição sobre o aberto U

$$\tilde{X}_U := U \subseteq \mathbb{P}_U^n = \mathbb{P}_S^n \times_S U,$$

é o gráfico de $f|_U : U \rightarrow \mathbb{P}_S^n$.

Como U é denso, resulta que $\tilde{X}$ é o fecho do gráfico.

mais sobre gráficos

$\varphi : A \rightarrow B$ homo de C -álgebras $\leftrightarrow$

$\mathrm{Spec}(B) \rightarrow \mathrm{Spec}(A) \Rightarrow$

$\mathrm{Spec}(B) \rightarrow \mathrm{Spec}(B) \times_C \mathrm{Spec}(A)$

gráfico, imersão fechada correspondente à sobrejeção

$$B \leftarrow B \otimes_C A$$

$$ab \leftarrow b \otimes_C a$$

$$(\star) \quad D \cdot [D'] = D' \cdot [D]$$

igualdade em $\mathcal{A}_{n-2}(|D| \cap |D'|)$, ($n = \dim X$)

divisores de Cartier sobre uma variedade X .

(1) *Supor X normal e D, D' efetivos e com interseção própria.*

Agora, $D \cdot [D']$, $D' \cdot [D]$ estão bem definidos como ciclos, não apenas como classes. Tome W subvariedade de codimensão 2 em X ; mostrar que o coeficiente de $[W]$ nos dois lados é o mesmo. Escreva $B = \mathcal{O}_{X,W}$:
é um domínio normal de dimensão 2, logo
Cohen-Macaulay (C-M: prof=dim).

Sejam $a, b \in B = \mathcal{O}_{X,W}$ equações locais de D, D' resp.

O ideal $\mathcal{J} = \langle a, b \rangle$ define a interseção de D e D'
numa vizinhança do ponto genérico de W .

Se $\mathcal{J} = B$, então W não está no suporte de $|D| \cap |D'|$
e o coeficiente de W em ambos os lados de $(\star)$ é zero.

Se $\mathcal{J} \neq B$, então $B/\mathcal{J}$ é artiniano pois
 $\mathcal{J}$ não está contido em primo de altura 1 (inters. própria).

Como B é C-M, segue que a é ndz mod b .

As subvariedades V de codimensão um em X
contendo W correspondem aos primos, P , de altura 1 em B .

O coeficiente de V no ciclo $[D']$ é $\ell_{B_P}(B_P/bB_P)$.

O coeficiente de W em $D \cdot V$ é $\ell_{B/P}(B/(P + aB))$.

Por fim, o coeficiente de W em $D \cdot [D']$ é igual a

$$\sum_P \ell_{B_P}(B_P/bB_P) \ell_{B/P}(B/(P + aB)). \quad (1)$$

Usando (2) com $M = B/bB =: A$,
reconhecemos (1) como sendo

$$e(a, A) = \ell_A(A/aA)$$

pois ${}_aM = 0$ já que a é ndz mod. b .

Lembrando $\ell_A(A/aA) = \ell_B(B/\langle a, b \rangle)$

vemos que (1) coincide com o coeficiente de W em $D' \cdot [D]$.

Seja A um anel de dimensão 1. Sejam $P_1, \dots, P_s$ os primos mínimos de A . Seja $a \in A$ ndz.

Para cada A -módulo f.g. M defina

$${}_aM = \{x \in M \mid ax = 0\} \quad \text{and} \quad M_a = M / (aM).$$

Então temos

- ${}_aM$ e M_a são de comprimento finito;
- $e(a, M) := \ell_A(M_a) - \ell_A({}_aM)$ é uma função aditiva sobre sequências exatas;
- $$e(a, M) = \sum \ell_{A_{P_i}}(M_{P_i}) \ell_{A/P_i}(A / (P_i + \langle a \rangle)). \quad (2)$$

(2) *Supor D, D' efetivos e com inters. própria.*

Seja $f : X' \rightarrow X$ normalização de X . A imagem recíproca f^*D é um divisor de Cartier bem definido.

Pelo caso anterior, $f^*D \cdot [f^*D'] = f^*D' \cdot [f^*D]$.

Aplicando f_* , fórmula de projeção
(e sua forma refinada, a nível de ciclos) $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccc} D \cdot f_*[f^*D'] & = & D' \cdot f_*[f^*D] \\ || & & || \\ D \cdot [D'] & & D' \cdot [D]. \end{array}$$

(3) *Supor* D, D' efetivos. Vamos explodir (o lugar de) excesso!

Definimos o excesso de $D \cap D'$ como

$$e(D, D') = \max_{\text{codim } V = 1 \text{ em } X} \{\text{ord}_V(D) \text{ord}_V(D') \mid V \subset X\}$$

$e(D, D') \geq 0$, com igualdade apenas quando
 $\dim(D \cap D') = \dim X - 2$. (inters. própria)

Argumentar por indução no excesso.

Prá fazer baixar, usaremos o

Lema. Sejam D, D' divisores de Cartier efetivos;

$$Z := D \cap D' \text{ (como esquemas);}$$

$p : X' \rightarrow X$ explosão ao longo de Z , $E = p^{-1}Z \Rightarrow$

- (i) $p^*D = C + E$, $p^*D' = C' + E$,
com C, C' divisores de Cartier disjuntos e efetivos tais
que a restrição de p a C (resp. C') é um isomorfismo
sobre um subesquema fechado de D (resp. D').
- (ii) Se $e(D, D') = \varepsilon > 0$ então $e(C, E)$ e $e(C', E)$ são
ambos $< \varepsilon$.

(i) Alguns fatos sobre explosão. $U = \text{Spec}(A)$ aberto afim de X ; $a, b \in A$ equações locais para $D, D' \Rightarrow I = \langle a, b \rangle$ é o ideal local do esquema de interseção Z .

Para cada $c \in I$, temos

$$I_{(c)} = \left\{ \frac{d}{c^n} \mid d \in I^n, n \geq 0 \right\},$$

subanel do anel de frações $(\bigoplus_n I^n)_c$. Os esquemas afins

$$U'_c = \text{Spec}(I_{(c)})$$

fornece uma cobertura aberta afim para $U' = p^{-1}U$.

$$\frac{a}{1} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{1} \quad \text{em } I_{(c)}.$$

$\frac{a}{1}$ (resp. $\frac{c}{1}$) é equação local para p^*D (resp. E) em $I_{(c)}$.

Logo, $\frac{a}{c}$ define um divisor de Cartier efetivo C tal que $p^*D = E + C$. Idem $\frac{b}{c}$ para $C' : p^*D' = E + C'$.

Uma relação da forma $c = ax + by$ em A implica

$$1 = \frac{a}{c} \cdot \frac{x}{1} + \frac{b}{c} \cdot \frac{y}{1} \quad \text{em } I_{(c)}.$$

Isso mostra que C e C' são disjuntos. Fazendo $c = a$, vemos que $C \cap U'_a = \emptyset$, e assim $C \cap U' = C \cap U'_b$.

Aqui a equação local para C é a/b .

Temos o seguinte diagrama comutativo
de anéis de coordenadas

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & I_{(b)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/\langle a \rangle & \xrightarrow{\pi} & I_{(b)}/\langle \frac{a}{b} \rangle \end{array}$$

O mapa π corresponde à restrição de $p : X' \rightarrow X$ a $C \cap U'_b$.

Mostrar que π é sobre.

Seja $c \in I^n$; escrevemos $c = F(a, b)$ com

$F(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y \cdots + a_ny^n$ homogêneo, $a_i \in A$.

Temos $\frac{c}{b^n} = F(\frac{a}{b}, 1) = a_0(\frac{a}{b})^n + a_1(\frac{a}{b})^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\frac{a}{b} + a_n$ em $I_{(b)}$.

Como $F(\frac{a}{b}, 1) \equiv a_n \pmod{\frac{a}{b}I_{(b)}}$, segue que π é sobre.

Logo, $p|_C : C \rightarrow X$ é um mergulho fechado.

(ii) Digamos $\varepsilon' := e(C, E) \geq e(D, D') = \varepsilon > 0$. Seja V' subvariedade de codimensão 1 de X' para a qual vale

$$\varepsilon' = \text{ord}_{V'}(C) \text{ord}_{V'}(E).$$

Visto que $p|_C : C \simeq p(C)$ e $V' \subseteq C$, sua imagem $V = p(V')$ é uma subvariedade de D de codimensão 1 em X . Temos, por outro lado, (fproj.)

$$D = p_*[p^*D] = p_*[C + E].$$

Daí $\text{ord}_V(D) \geq \text{ord}_{V'}(C + E)$; idem para D' .

Podemos calcular

$$\begin{aligned} \varepsilon \geq \text{ord}_V(D) \text{ord}_V(D') &\geq \text{ord}_{V'}(C + E) \text{ord}_{V'}(C' + E) = \\ &\text{ord}_{V'}(C) \text{ord}_{V'}(E) + \text{ord}_{V'}(C) \text{ord}_{V'}(C') + \text{ord}_{V'}(E) \text{ord}_{V'}(C') \\ &+ \text{ord}_{V'}(E)^2 \geq e(C, E) + (\text{ord}_{V'}(E))^2 > \varepsilon'. \end{aligned}$$

A última desigualdade é estrita porque $\text{ord}_{V'}(E) > 0$.

Isso contradiz a hipótese $\varepsilon' \geq \varepsilon$.

Continuando com a prova da comutatividade, sejam D, D' divisores de Cartier efetivos com excesso positivo.

$$p' : p^{-1}(|D| \cap |D'|) \longrightarrow |D| \cap |D'|$$

o mapa induzido por $p : X' \rightarrow X$.

$$\begin{aligned} D \cdot [D'] &= p'_\star(p^\star D \cdot [p^\star D']) \quad \text{em } \mathcal{A}_{n-2}(|D| \cap |D'|) \\ &= p'_\star((C + E) \cdot [C' + E]) \\ &= p'_\star(C \cdot [E] + E \cdot [C'] + E \cdot [E]) \\ &\quad (\text{indução sobre o excesso}) \\ &= p'_\star(E \cdot [C] + C' \cdot [E] + E \cdot [E]) \\ &\quad (\text{revertendo o cálculo anterior}) \\ &= D' \cdot [D]. \end{aligned}$$

(3) *caso geral*. Tome $U = \text{Spec}(A)$ aberto afim de X onde ambos D, D' admitem eq. local $a, b \in R(X)$. Seja

$$\mathcal{I}(U) = \{d \in A \mid da, db \in A\}$$

(ideal dos denominadores).

Mostra-se que a receita acima define um feixe de ideais em X , associado a um subesquema fechado $Z \subseteq X$.

Se $Z = \emptyset$ então D, D' são efetivos.

Se $Z \neq \emptyset$, faça a explosão $p : X' \rightarrow X$ ao longo de Z .

Um argumento local similar ao do lema anterior mostra que os divisores de Cartier,

$$C = p^*D + E, \quad C' = p^*D' + E$$

são efetivos. O argumento agora se completa por redução ao caso anterior, conta análoga. □

$$c_1 \cdot \mathcal{R}_\star = 0$$

$\mathcal{L} \rightarrow X$ fibrado em retas;

$$z \in \mathcal{R}_\star(X) \Rightarrow c_1(\mathcal{L}) \cap z = 0 \text{ em } \mathcal{A}_\star(X).$$

Prova. Podemos supor $z = [r]$, divisor de alguma função racional $r \in R(V)$, $V \subset X$ subvariedade (fechada, irredutível).

Sejam D um divisor de Cartier associado a $\mathcal{L}|_V$;

D' = divisor de Cartier principal definido pela função racional r .

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_1(\mathcal{L}) \cap z &= D \cdot [D'] && \text{em } \mathcal{A}_\star(|D| \cap |D'|) \\ &= D' \cdot [D] \\ &= c_1(\mathcal{O}_V) \cap [D] = 0 && \text{em } \mathcal{A}_\star(|D|) \end{aligned}$$

pois $\mathcal{O}(D') = \mathcal{O}_V$, fibrado trivial. □

Portanto, a 1ª classe de Chern induz um operador,

$$\text{ainda denotado } c_1(\mathcal{L}) : \mathcal{A}_\star(X) \longrightarrow \mathcal{A}_\star(X)$$

que leva classes de k -ciclos em classes de $k - 1$ -ciclos.

(re)visitando a fórmula de projeção

$\mathcal{L} \rightarrow X$ fibrado em retas, $p : Y \rightarrow X$ mapa próprio

$$\begin{array}{ccc} p^* \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathcal{L} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

$$\Rightarrow p_*(c_1 p^* \mathcal{L} \cap z) = c_1 \mathcal{L} \cap p_* z, \forall z \in \mathcal{A}_*(Y).$$

Aditividade $\Rightarrow$ podemos supor $z = [V]$, $V \subseteq Y$ subvariedade.

Argumento habitual $\Rightarrow$ podemos supor $Y = V$. De fato,

seja $\iota : V \subseteq Y$ a inclusão, e suponha mostrado que

$$\star (p\iota)_*(c_1 \iota^* p^* \mathcal{L} \cap [V]) = c_1 \mathcal{L} \cap p_*[V].$$

$$\star (p\iota)_*(c_1\iota^*p^*\mathcal{L} \cap [V]) = c_1\mathcal{L} \cap p_*[V].$$

Seja D divisor de Cartier tal que $\iota^*p^*\mathcal{L} = \mathcal{O}(D)$. O lado esquerdo em $\star$ vale $(p\iota)_*[D] = p_*c_1p^*\mathcal{L} \cap [V]$ como desejado.

Doravante, $Y = V, X = p(V)$.

Agora $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ para algum divisor de Cartier. Como p é dominante, $D' = p^*(D)$ é divisor de Cartier, e

$$p^*\mathcal{L} = \mathcal{O}_Y(D').$$

Assim, basta mostrar a igualdade, a nível de ciclos,

$$p_*[p^*D] = \deg p[D].$$

$$p_*[p^*D] = \deg p[D].$$

A verificação é local em X , em torno do ponto genérico de cada subvariedade $V \subset X$ de codim.1.

Logo, podemos supor D principal, com equação $r \in R(X)$.

Ponha $d = \deg p$. Se $d = 0$, então $\dim Y > \dim X \Rightarrow$ todas as fibras de p têm $\dim > 0$. Assim, p contrai a dim. de cada componente de $p^{-1}V$ e ambos os **lados** valem 0.

Por fim, $d > 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} p_*[p^*r] &= [r^d] \quad (\text{norma}) \\ &= d[r]. \end{aligned}$$

projeção $\times$ explosão

seq. exatas de fibrados $\mathcal{F} \rightrightarrows \mathcal{E} \rightarrow \bar{\mathcal{E}}$

1. $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ é o esquema de indeterminação do mapa racional $\psi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \dashrightarrow \mathbb{P}(\bar{\mathcal{E}})$ definido por projeção;
2. o fibrado normal do mergulho $\mathbb{P}(\mathcal{F}) \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ é $\mathcal{N} = \bar{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(1)$;

3. a explosão $\widetilde{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$ de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ ao longo de $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ é naturalmente isomorfa ao fibrado projetivo $\mathbb{P}(\mathcal{E}_{\mathcal{F}})$ com base $\mathbb{P}(\overline{\mathcal{E}})$, onde $\mathcal{E}_{\mathcal{F}} := \phi^{-1}\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{E}}}(-1)$ é o fibrado vetorial definido no diagram abaixo:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{F} & \searrow & \mathcal{E}_{\mathcal{F}} & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{E}}}(-1) \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{F} & \searrow & \mathcal{E} & \xrightarrow{\phi} & \overline{\mathcal{E}} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{E}}} & = & \mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{E}}}
 \end{array} \tag{3}$$

$$4. \tilde{\psi} : \widetilde{\mathbb{P}(\mathcal{E})} = \mathbb{P}(\mathcal{E})_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{P}(\overline{\mathcal{E}}) \text{ mapa estrutural} \Rightarrow$$

$$\tilde{\psi}^* \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{E}}}(1) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1) \otimes \mathcal{O}(-E),$$

onde E denota o divisor excepcional. (cf. (4))

Estude o diagrama de mapas de fibrados vetoriais sobre $\mathbb{P}(\mathcal{E})$

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-1) & & \\ & & \downarrow & \searrow^{\textcolor{red}{u}} & \\ \mathcal{F} & \twoheadrightarrow & \mathcal{E} & \xrightarrow{\phi} & \overline{\mathcal{E}} \\ & & \downarrow & & \\ & & \mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{E}}} & & \end{array}$$

$\mathbb{P}(\mathcal{F})$ é o esquema de zeros do mapa $\textcolor{red}{u}$, seção de $\text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-1), \overline{\mathcal{E}}) = \overline{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1)$.

Temos assim a sobrejeção

$$\overline{\mathcal{E}}^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-1) \twoheadrightarrow I(\mathbb{P}(\mathcal{F})) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}.$$

Passando às álgebras simétricas e tomando $\text{Proj}()$,

$$\text{Proj}(\text{Sym}(\overline{\mathcal{E}}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-1))) \supset \widetilde{\mathbb{P}(\mathcal{E})} = \text{Bl}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}\mathbb{P}(\mathcal{E})$$

$$\begin{array}{ccc} & \parallel & \\ & \mathbb{P}(\overline{\mathcal{E}}) \times_X \mathbb{P}(\mathcal{E}) & \\ & \swarrow & \\ \mathbb{P}(\overline{\mathcal{E}}) & \longleftarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}_{\mathcal{F}}) \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathcal{E}) \end{array}$$

Agora temos a seq. exata sobre $\mathbb{P}(\overline{\mathcal{E}})$,

$$\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{E}}}(-1) \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{E}} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{E}}}. \quad (4)$$

Daí resulta o diagrama (3) o qual produz o subfibrado

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F} \times_X \mathbb{P}(\overline{\mathcal{E}}) \text{ e sua projetivização } \mathbb{P}(\mathcal{E}_{\mathcal{F}}).$$

A imagem inversa de $\mathbb{P}(\mathcal{F}) \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ em $\mathbb{P}(\mathcal{E}_{\mathcal{F}})$ é o divisor de Cartier definido pelos zeros de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathcal{F}}}(-1) \xrightarrow{\text{blue}} \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{E}}}(-1)$ (veja o diagrama (5)).

Segue que o mergulho $\mathbb{P}(\mathcal{E}_{\mathcal{F}}) \subset \mathbb{P}(\overline{\mathcal{E}}) \times_X \mathbb{P}(\mathcal{E})$

se fatora por $\widetilde{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$ e com ele coincide.

Além disso, o ideal excepcional $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{P}(\mathcal{E})}}(1) = \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathcal{F}}}(-1) \otimes \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{E}}}(1)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathcal{F}}}(-1) & & \\
 & & \downarrow & \searrow \text{blue} & \\
 \mathcal{F} & \twoheadrightarrow & \mathcal{E}_{\mathcal{F}} & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{E}}}(-1) \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{F} & \twoheadrightarrow & \mathcal{E} & \xrightarrow{\phi} & \overline{\mathcal{E}} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{E}}} & = & \mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{E}}}
 \end{array}
 \tag{5}$$

(volte4)

$$\begin{array}{ccccc}
& & \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathcal{F}}}(-1) & & \\
& & \downarrow & \searrow & \\
\mathcal{F} & \twoheadrightarrow & \mathcal{E}_{\mathcal{F}} & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{E}}}(-1) \\
\parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{F} & \twoheadrightarrow & \mathcal{E} & \xrightarrow{\phi} & \overline{\mathcal{E}} \\
& & \downarrow & & \downarrow \\
& & \mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{E}}} & = & \mathcal{Q}_{\overline{\mathcal{E}}}
\end{array} \tag{5}$$

Segue que o mergulho $\mathbb{P}(\mathcal{E}_{\mathcal{F}}) \subset \mathbb{P}(\overline{\mathcal{E}}) \times_X \mathbb{P}(\mathcal{E})$ se fatora por $\widetilde{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$ e com ele coincide, pois são idênticos sobre um aberto denso.

Além disso, o ideal excepcional

$$\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{P}(\mathcal{E})}}(1) = \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathcal{F}}}(-1) \otimes \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{E}}}(1).$$

cordas de uma curva

$$\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V) \dashrightarrow G(2, V)$$

$$\mathcal{O}_V(-1) \succrightarrow V \times \mathbb{P}(V) \twoheadrightarrow \overline{V}$$

Projetivizando,

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}_V(-1)) \hookrightarrow \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V)$$

mergulho diagonal.

(Trata-se de um caso particular de subfibrado projetivo!)

O mapa racional

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V) & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}(\overline{V}) \\ p_1 \searrow & & \swarrow q \\ & \mathbb{P}(V) & \end{array}$$

Para cada $[v] \in \mathbb{P}(V)$, a restrição de π à fibra é a projeção

$$\{[v]\} \times \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\pi|_{[v]}} \mathbb{P}(V/[v])$$

Fazendo a explosão, ganhamos

$$\begin{array}{ccc}
 \widetilde{\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V)} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \mathbb{P}(\overline{V}) \\
 \tilde{p}_1 \searrow & & \swarrow q \\
 & \mathbb{P}(V) &
 \end{array}$$

O divisor excepcional $E = \mathbb{P}(T\mathbb{P}(V)) \subset \widetilde{\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V)}$.

A restrição à fibra nos dá

$$\begin{array}{ccccc}
 E_{[v]} & \subset & Bl_{[v]}\mathbb{P}(V) & \xrightarrow{\tilde{\pi}|_{[v]}} & \mathbb{P}(V/[v]) \ni [\overline{w}] \\
 || & & & \nearrow & \cap \qquad \downarrow \\
 \mathbb{P}(T_{[v]}\mathbb{P}(V)) & & & & G(2, V) \ni [v] + [w]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \widetilde{\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V)} & \longrightarrow & \mathbb{P}(\overline{V}) \\
 \parallel & \nearrow \alpha & \downarrow \beta \\
 \mathbb{P}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\gamma} & G(2, V)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 p_1^* \mathcal{O}_V(-1) & \twoheadrightarrow & \mathcal{U} & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}_{\overline{V}}(-1) \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 p_1^* \mathcal{O}_V(-1) & \twoheadrightarrow & V & \xrightarrow{\phi} & \overline{V} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathcal{Q}_{\overline{V}} & = & \mathcal{Q}_{\overline{V}}
 \end{array}$$

A **seq. vertical central** provém de $G(2, V)$.

$\mathbb{P}(\overline{V})$ = projetivização do fibrado tangente; cada elemento corresponde a um ponto de $\mathbb{P}(V)$ e uma direção; $\Rightarrow$

β = “reta universal”.

Agora sobre $\mathbb{P}(\mathcal{U}) = \mathbb{P}(\widetilde{V}) \times \mathbb{P}(V)$,

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{O}_{\mathcal{U}}(-1) & = & p_2^* \mathcal{O}_V(-1) \\
 \downarrow & & \downarrow^s \\
 p_1^* \mathcal{O}_V(-1) & \twoheadrightarrow & \mathcal{U} & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}_{\overline{V}}(-1) \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 p_1^* \mathcal{O}_V(-1) & \twoheadrightarrow & V & \xrightarrow{\phi} & \overline{V} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathcal{Q}_{\overline{V}} & = & \mathcal{Q}_{\overline{V}}
 \end{array}$$

Por um argumento “habitual”, $\mathcal{Z}(s) = E$, divisor excepcional,
e assim, $\mathcal{O}(-E) = p_2^* \mathcal{O}_V(-1) \otimes \mathcal{O}_{\overline{V}}(1)$.

restringir a uma curva $C \subset \mathbb{P}^3$

C não singular $\Rightarrow \Delta C \subset C \times C$ é divisor de Cartier.

$$\text{Logo, } \widetilde{C \times C} \simeq C \times C \subset \widetilde{\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3} \longrightarrow G(2, 4)$$

Na identificação acima, $\mathcal{O}(-E)$ se restringe a Δ_C .

Anotamos as seguintes relações, com notação abusada:

$$\bar{h} := c_1 \mathcal{O}_{\bar{V}}(1) = h_2 - E, \quad c(\mathcal{U}) = (1 - h_1)(1 - \bar{h})$$

Para calcular a classe da imagem S de $C \times C$ em $G(2, 4)$ note que $p : C \times C \longrightarrow S$ é genericamente 2:1 pois se mostra que a (bi)secante genérica não é tri-secante, já que por hipótese C gera $\mathbb{P}^3$; ver Hartshorne.

$$\sigma_2 = [\{\ell \mid \ell \ni \mathbb{P}^0\}] = c_2 \mathcal{Q} \cap [G]$$

$$\sigma_{1,1} = [\{\ell \mid \ell \subset \mathbb{P}^2\}] = c_2 \mathcal{U} \cap [G]$$

$$p_*[C \times C] = 2[S]; [S] = \alpha \sigma_2 + \beta \sigma_{1,1}$$

$$\alpha = \sigma_2 \cap [S], \quad \beta = \sigma_{1,1} \cap [S]$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{2}p_*(p^*\sigma_2 \cap [C \times C]) = \frac{1}{2}seg_2(p^*\mathcal{U}) \cap [C \times C]$$

$$seg_2 = [(1 + h_1)(1 + \bar{h} + \bar{h}^2)]_2$$

$$= [(1 + h_1)(1 + h_2 - \Delta + (h_2 - \Delta)^2)]_2$$

$$= h_1 h_2 - h - 2h + \Delta^2 = d^2 - 3d + 2 - 2g$$

$$\Delta^2 = \iota_*(c_1 \iota^* \mathcal{O}(\Delta) \cap \Delta), \quad \iota^* \mathcal{O}(\Delta) = (\text{normal de } \Delta) = TC$$

$$\sigma_2 : \left\{ \begin{array}{ccccc} & & \mathcal{O}_G & & \\ & \swarrow \textcolor{red}{\alpha} & \downarrow \alpha & \searrow \textcolor{red}{\beta=0} & \\ \mathcal{U} & \twoheadrightarrow & V \times G & \twoheadrightarrow & \mathcal{Q} \\ & & (\alpha = \text{ponto}) & & \end{array} \right.$$

$$\sigma_{1,1} : \left\{ \begin{array}{ccccc} & & \mathcal{O}_G^3 & & \\ & \swarrow \textcolor{red}{\alpha} & \downarrow \alpha & \searrow (\alpha = \text{plano}) & \\ \mathcal{U} & \twoheadrightarrow & V \times G & \twoheadrightarrow & \mathcal{Q} \\ & \searrow \textcolor{red}{\beta=0} & \downarrow & & \\ & & \mathcal{O}_G & & \end{array} \right.$$