

CHOWG(s, E)

o grupo de Chow de um fibrado projetivo

$f : E \rightarrow X$ fibrado vetorial de posto $e = \epsilon + 1$,
 $p : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ o $\mathbb{P}^\epsilon$ -fibrado associado; $h = c_1(\mathcal{O}_E(1))$

$\Rightarrow$

$$\alpha_E : \bigoplus_0^\epsilon \mathcal{A}_{k-\epsilon+i}(X) \longrightarrow \mathcal{A}_k(\mathbb{P}(E))$$

$$(a_i) \longmapsto \sum_0^\epsilon h^i \cap p^* a_i .$$

é um isomorfismo.

$$\mathcal{A}_k(\mathbb{P}(E)) \ni z = p^* a_0 + h \cap p^* a_1 + \cdots + h^{e-1} \cap p^* a_{e-1};$$

$$\mathcal{A}_*(\mathbb{P}(E)) = \mathcal{A}_*(X)[h] / \langle h^e + h^{e-1}c_1(E) + \cdots + hc_{e-1}(E) + c_e E \rangle$$

Vale a relação

$$h^e + h^{e-1}c_1(E) + \cdots + hc_{e-1}(E) + c_e E = 0$$

em $\mathcal{A}_\star(\mathbb{P}(E))$.

Lembrar Euler:

$$\mathcal{O} \twoheadrightarrow E \otimes \mathcal{O}_E(1) \twoheadrightarrow \underbrace{T(\mathbb{P}(E)/X)}_{\text{posto}=e-1} \Rightarrow$$

$$0 = c_e T(\mathbb{P}(E)/X) = h^e + h^{e-1}c_1(E) + \cdots + hc_{e-1}(E) + c_e E$$

por Whitney.

O grupo de Chow $\mathcal{A}_\star(\mathbb{G}r_s E)$ é isomorfo ao quociente do grupo

$$(\mathcal{A}_\star(X))[\mathbf{a}, \mathbf{b}] := (\mathcal{A}_\star(X)) \otimes \mathbb{Z}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

pela relação

$$a_\star \cdot b_\star = c_\star(E), \tag{1}$$

onde $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_s)$, $\mathbf{b} := (b_1, \dots, b_r)$, $(r = e - s)$

denotam vetores de indeterminadas e

$$a_\star = 1 + a_1 + \dots + a_s, \quad b_\star = 1 + b_1 + \dots + b_r$$

são os operadores descritos abaixo.

Os elementos do grupo $(\mathcal{A}_\star(X)) [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ são polinômios em $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ com coeficientes em $\mathcal{A}_\star(X)$.

$a_\star, b_\star, c_\star = c(E)$ são operadores em $(\mathcal{A}_\star(X)) [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ agindo de forma natural: a_i e b_j multiplicam as variáveis, enquanto $c_\star$ opera nos coeficientes.

a_i (resp. b_j) vão desempenhar o papel de $c_i(S)$ (resp. $c_j(Q)$).

O quociente de $(\mathcal{A}_\star(X)) [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ módulo a relação

$$a_\star \cdot b_\star = c_\star$$

significa módulo o subgrupo gerado pelas imagens dos operadores $c_k - \sum a_i b_{k-i}$.

Temos o homomorfismo de grupos,

$$\begin{aligned} \theta : (\mathcal{A}_*(X)) [\mathbf{a}, \mathbf{b}] &\longrightarrow \mathcal{A}_*(\mathbb{G}r_s E) \\ z a_1^{i_1} \cdots a_s^{i_s} b_1^{j_1} \cdots &\longmapsto c_1(S)^{i_1} \cdots c_r(Q)^{j_r} \cap p^* z. \end{aligned} \quad (2)$$

Mostrar que θ é sobre e tem núcleo igual ao subgrupo descrito anteriormente.

Vale $\theta(ab - c) = 0$ por conta da relação de Whitney

$$c(p^* E) = c(S)c(Q).$$

Indução em s . O caso $s = 1$ já vimos:

$$S = \mathcal{O}_E(-1), \quad h = c_1(S^*)$$

$$c_e(Q \otimes S^*) = h^e + c_1 h^{e-1} + \cdots + c_e = 0$$

porque o posto $Q = e - 1$. Já a relação (1) agora se lê

$$c_k = b_k + b_{k-1}a_1, \quad (k = 0, 1, \dots).$$

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}_\star(X))[a_1, b_1, \dots, b_r] / \langle b_1 + a_1 - c_1, b_2 + b_1 a_1 - c_2, \dots, b_r + b_{e-1} a_1 - c_e \rangle \\ & \simeq (\mathcal{A}_\star(X))[a_1, b_2, \dots, b_r] / \langle b_2 + (c_1 - a_1) a_1 - c_2, \dots, b_r + b_{e-1} a_1 - c_e \rangle \\ & \quad \vdots \\ & \simeq (\mathcal{A}_\star(X))[a_1] / \langle a_1^e - c_1 a_1^{e-1} + \cdots + (-1)^e c_e \rangle. \end{aligned}$$

Os isomorfismos provêm de

$$\begin{aligned} b_1 & \longmapsto c_1 - a_1, \\ b_2 & \longmapsto c_2 - a_1 b_1, \text{ etc } \dots \end{aligned}$$

Etapa indutiva. Supondo $e \geq 2$, construímos o fibrado projetivo

$$q : \mathbb{P}(S) \longrightarrow \mathbb{G}r_s E,$$

com seq. taut. $L = \mathcal{O}_S(-1) \rightrightarrows q^*S \rightrightarrows Q'$

Acoplamos com o pullback da seq. taut. da grassmanniana,

$$\begin{array}{ccccc} L & \rightrightarrows & q^*S & \rightrightarrows & Q' \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ L & \rightrightarrows & q^*p^*E & \rightrightarrows & g^*T \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & q^*Q & = & q^*Q. \end{array} \tag{3}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{O}_S(-1) = & L & \longrightarrow & q^*S & \longrightarrow & Q' \\
& \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{O}_E(-1) = & L & \longrightarrow & q^*p^*E & \longrightarrow & g^*T \\
& & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & q^*Q & = & q^*Q.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Gr}_{s-1}T = \mathbb{P}(S) & \hookrightarrow & \mathrm{Gr}_rE \times \mathbb{P}(E) & & \\
& \searrow q & \searrow g & \searrow & \\
\mathrm{Gr}_rE & & X & & \mathbb{P}(E) \\
& \searrow p & \nwarrow h & & \\
& & X & &
\end{array}$$

O fibrado L é identificado como $g^*\mathcal{O}_E(-1)$.

O fibrado vetorial T é igual ao quociente
 $h^*E / (\mathcal{O}_E(-1)).$

Agora o ponto principal é ver que a sequência exata

$$Q' \longrightarrow g^*T \longrightarrow q^*Q$$

define um mapa

$$\mathbb{P}(S) \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}r_{s-1}T \quad (4)$$

que é de fato um isomorfismo, por conta da propriedade universal dos fibrados em grassmannianas.

Assim, podemos identificar $\mathbb{P}(S)$ e $\mathbb{G}r_{s-1}T$, de modo que o diagrama (3) exhibe as relações entre os respectivos fibrados tautológicos. Em particular, o subfibrado tautológico S_T de g^*T é identificado com Q' e o fibrado quociente Q_T é o “mesmo” que q^*Q .

Por indução, a estrutura de $\mathcal{A}_\star(\mathbb{G}r_{s-1}T)$ é conhecida pela receita (2) em termos do grupo de Chow $\mathcal{A}_\star(\mathbb{P}(E))$ da nova base e das classes de Chern de T . Para decifrar a estrutura de $\mathcal{A}_\star(\mathbb{G}r_s E)$, consideramos o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}_\star(\mathbb{G}r_s E) & \xrightarrow{q^\star} & \mathcal{A}_\star(\mathbb{P}(S)) = \mathcal{A}_\star(\mathbb{G}r_{s-1}T) \\
 p^\star \uparrow & & \uparrow g^\star \\
 \mathcal{A}_\star(X) & \xrightarrow{h^\star} & \mathcal{A}_\star(\mathbb{P}(E))
 \end{array}$$

onde $q : \mathbb{P}(S) \rightarrow \mathbb{G}r_s E$ é um fibrado projetivo e $g : \mathbb{G}r_{s-1}T \rightarrow \mathbb{P}(E)$ é um fibrado de Grassmann com dimensão de subespaços menor.

Para ver que θ (2) é sobre, tome um ciclo $y \in \mathcal{A}_\star(\text{Gr}_s E)$.

Por indução em s ,

$$q^\star y = P(c_1(S_T), \dots, c_r(Q_T)) \cap q^\star p^\star z,$$

onde P denota um polinômio a coeficientes inteiros em $(s-1) + r = e-1$ variáveis. Lembrando

$$S_T = Q' \text{ e } Q_T = q^\star Q,$$

a expressão acima se reescreve

$$q^\star y = P(c_1(q^\star S) - c_1(L), \dots, c_r(q^\star Q)) \cap q^\star p^\star z,$$

Agora, pondo $t = c_1(L^\star)$, temos

$$y = q_\star(t^{s-1} \cap q^\star y).$$

Usando a fórmula de projeção e a identidade $c(S_T) = c(q^\star S)s(L)$, verifica-se que o lado direito cai efetivamente na imagem de θ .