

$CHOW^{\mathbb{P}}(E)$

# Discriminantes

Para hipersuperfícies de grau  $d$  arbitrário em  $\mathbb{P}^n$ ,

$$F = \sum a_i \underline{x}^i$$

$$i = (i_0, \dots, i_n), |i| := \sum i_j = d$$

$$N + 1 = \binom{n+d}{n} \text{ coeficientes}$$

$$F = F(\underline{a}, \underline{x}) = 0$$

divisor de Cartier em  $\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n$

$$\text{seção do fibrado } \mathcal{O}(F) = \underbrace{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)}_{a_i} \otimes \underbrace{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)}_{\underline{x}^i}$$

o fibrado conormal de  $F \subset \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n$  é  $\mathcal{O}(\textcolor{red}{-}F)_F$

sequência conormal – cotangentes ao longo das fibras /  $\mathbb{P}^N$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{O}(-F)_F & \longrightarrow & \left( \Omega_{\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n / \mathbb{P}^N} \right)_{|F} & \longrightarrow & \Omega_{F/\mathbb{P}^N} \\
 \parallel & & & & \\
 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(-1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d) & \xrightarrow{s} & (\Omega_{\mathbb{P}^n})_{|F} & & 
 \end{array}$$

A **seção**  $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(-1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d))_F \xrightarrow{s} (\Omega_{\mathbb{P}^n})_{|F}$

se anula nos pontos  $(f, x) \in \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n$  tais que  $f(x) = 0$   
 e a fibra  $\Omega_{F/\mathbb{P}^N}(f, x) = \Omega_f(x) = \Omega_{\mathbb{P}^n}(x)/df(x)$  tem posto  $n$ ,  
 (ao invés de posto  $n - 1$  do caso não singular).

O esquema de zeros  $Z := \mathcal{Z}(s)$  tem a dimensão esperada,

$$N + n - 1 - n$$

$$\Rightarrow [Z] = c_n(\Omega_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)_F) \cap [F]$$

$$\begin{aligned}
[Z] &= c_n (\Omega_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)_F) \cap [F] \\
&= \sum c_i \Omega_{\mathbb{P}^n} \cdot (H + dh)^{n-i} \cap [F]
\end{aligned}$$

$$= \sum c_i \Omega_{\mathbb{P}^n} \cdot (H + dh)^{n-i} \cdot (H + dh) \cap [\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n]$$

$$\text{Euler}^\vee : \Omega_{\mathbb{P}^n} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{n+1} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \Rightarrow c\Omega_{\mathbb{P}^n} = (1 - h)^{n+1}$$

$$\Rightarrow [Z] = \sum \binom{n+1}{i} (-h)^i (H + dh)^{1+n-i} \cap [\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n]$$

$$= \sum \binom{n+1}{i} (-h)^i ((1+n-i)H(dh)^{n-i} + \dots) \cap [\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n]$$

$$= H \sum \binom{n+1}{i} (-1)^i ((n-i+1)(d)^{n-i}h^n + \dots) \cap [\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n]$$

$$= ((n+1)(d-1)^n h^n H + \dots) \cap [\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n]$$

$$\leadsto (n+1)(d-1)^n H \cap [\mathbb{P}^N]$$

$$\text{grau do discriminante} = (n+1)(d-1)^n :-)$$

## o grupo de Chow de um fibrado projetivo

$f : E \rightarrow X$  fibrado vetorial de posto  $e = \epsilon + 1$ ,  
 $p : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$  o  $\mathbb{P}^\epsilon$ -fibrado associado;  $h = c_1(\mathcal{O}_E(1))$   
 $\Rightarrow$

$$\alpha_E : \bigoplus_0^\epsilon \mathcal{A}_{k-\epsilon+i}(X) \longrightarrow \mathcal{A}_k(\mathbb{P}(E))$$
$$(a_i) \longmapsto \sum_0^\epsilon h^i \cap p^* a_i .$$

é um isomorfismo.

$$\mathcal{A}_k(\mathbb{P}(E)) \ni z = p^* a_0 + h \cap p^* a_1 + \cdots + h^{e-1} p^* a_{e-1}$$

*Prova.* Supor primeiro  $E = \mathbb{A}_X^e$ , fibrado trivial de posto  $e$ .

Considere  $\iota : \mathbb{P}_X^{\epsilon-1} \hookrightarrow \mathbb{P}_X^\epsilon$ ,  $j : \mathbb{A}_X^\epsilon \hookrightarrow \mathbb{P}_X^\epsilon$  as inclusões naturais.

Lembre da sequência exata de excisão,

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}_k(\mathbb{P}_X^{\epsilon-1}) & \xrightarrow{\iota_*} & \mathcal{A}_k(\mathbb{P}_X^\epsilon) & \xrightarrow{j^*} & \mathcal{A}_k(\mathbb{A}_X^\epsilon) \\ & & \uparrow p^* & \nearrow f^* & \\ & & \mathcal{A}_{k-\epsilon}(X) & & \end{array}$$

Mostrar que  $\alpha_E : \bigoplus_0^\epsilon \mathcal{A}_{k-\epsilon+i}(X) \longrightarrow \mathcal{A}_k(\mathbb{P}(E))$  é sobrejetivo.

Se  $z \in \mathcal{A}_k(\mathbb{P}_X^\epsilon)$ , temos  $j^*z = f^*a$

para algum  $a \in \mathcal{A}_{k-\epsilon}(X)$  pois  $f^*$  é sobre.

Logo  $z - p^*a = \iota_*b$  para algum  $b \in \mathcal{A}_k(\mathbb{P}_X^{\epsilon-1})$ .

Por indução sobre  $\epsilon$ , temos

$$b = \sum_0^{\epsilon-1} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\epsilon-1}}(1))^i \cap q^* a_i$$

$a_i \in \mathcal{A}_r(X)$ ,  $r = k - (\epsilon - 1) + i$ , com  $q = p \circ \iota$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_X^{\epsilon-1} & \overset{\iota}{\subset} & \mathbb{P}_X^{\epsilon} \\ q=p \circ \iota \downarrow & \swarrow p & \\ X & & \end{array}$$

Logo, lembrando  $z - p^*a = \iota_* b$ ,

$$\begin{aligned} z &= p^*a + \iota_* \sum_0^{\epsilon-1} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\epsilon-1}}(1))^i \cap q^* a_i \\ &= p^*a + \sum_0^{\epsilon-1} h^i \cap \iota_* q^* a_i \\ &= p^*a + \sum_1^{\epsilon} h^i \cap p^* a_i. \end{aligned}$$

A última igualdade decorre da seguinte

**afirmação:**  $\iota_* q^* a = h \cap p^* a, \forall a \in \mathcal{A}_*(X). \quad (1)$

Basta verificar para  $a = [V]$ , classe de uma subvariedade.

Neste caso,  $q^*[V] = [q^{-1}V] = [\mathbb{P}_V^{\epsilon-1}]$ . Temos  $\iota_*[\mathbb{P}_V^{\epsilon-1}] = h \cap [\mathbb{P}_V^\epsilon]$ , por construção da classe hiperplana.

De volta à prova da sobrejetividade de  $\alpha_E$  no caso geral, argumentamos por indução sobre  $m = \dim X$ . Se  $m = 0$  então  $X = \operatorname{Spec}(A)$  para algum anel artiniano  $A$ .

Aqui vale que todo  $A$ –módulo localmente livre de posto constante é livre, e assim o fibrado  $E$  é trivial.

Para a etapa indutiva, afirmamos que

existe um aberto denso  $U \subseteq X$  tal que  $E_U \simeq \mathcal{O}_U^e$ .

Comece com  $U' \subseteq X$  um aberto não vazio que trivializa  $E$ .

Suponha que exista componente irredutível  $X'$  de  $X$  disjunta de  $U'$ . Tome um subesquema  $U''$  aberto de  $X$  contido em  $X'$  que trivialize  $E$ . É claro que  $U' \cup U''$

trivializa  $E$ . Destarte, chega-se a  $U$  denso. Ponha  $Y = X \setminus U$ .

Então  $\dim Y < m$ . O diagrama,

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{A}_k(\mathbb{P}(E)_Y) & \longrightarrow & \mathcal{A}_k(\mathbb{P}(E)) & \longrightarrow & \mathcal{A}_k(\mathbb{P}_U^\epsilon) \\
 \alpha_{E_Y} \uparrow & & \alpha_E \uparrow & & \alpha_{E_U} \uparrow \\
 \bigoplus_{0}^{\epsilon} \mathcal{A}_{k-\epsilon+i}(Y) & \longrightarrow & \bigoplus_{0}^{\epsilon} \mathcal{A}_{k-\epsilon+i}(\mathbb{P}(E)) & \longrightarrow & \bigoplus_{0}^{\epsilon} \mathcal{A}_{k-\epsilon+i}(\mathbb{P}_U^\epsilon)
 \end{array}$$

é comutativo. Agora  $\alpha_{E_Y}$  (resp.  $\alpha_{E_U}$ ) é sobrejetivo por indução (resp. pelo caso anterior), seguindo  $\alpha_E$  também é sobrejetivo.

Para mostrar a injetividade, suponhamos uma relação

$$p^*a_0 + h \cap p^*a_1 + \cdots + h^\epsilon \cap p^*a_\epsilon = 0.$$

Aplicando  $p_*$  e lembrando Segre, vem  $a_\epsilon = 0$ .

Multiplicando por  $h$  e repetindo, . . .

□

O resultado seguinte é basilar para a construção de classes de interseção para codimensões maior que um.

**Prop.** *Seja  $f : E \rightarrow X$  um fibrado vetorial de posto  $e$ . Então  $f^* : \mathcal{A}_k(X) \longrightarrow \mathcal{A}_{k+e}(E)$  é um **isomorfismo**  $\forall k$ .*

*Prova.* Seja  $F = E \oplus \mathcal{O}$ . Considere o diagrama,

$$\begin{array}{ccccc} E & \xhookrightarrow{j} & \mathbb{P}(F) & \xleftarrow{i} & \mathbb{P}(E) \\ & f \searrow & g \downarrow & \swarrow p & \\ & & X & & \end{array}$$

onde  $j$  (resp.  $i$ ) denota a imersão natural aberta (resp. fechada). Tome  $z \in \mathcal{A}_{k+e}(E)$ . Existe  $y \in \mathcal{A}_{k+e}(\mathbb{P}(F))$  tal que  $z = j^*y$ . Ponha

$$h_F = c_1(\mathcal{O}_F(1)).$$

Escrevamos  $y$  pela receita  $\alpha_F$ ,

$$y = g^*x_k + h_F \cap (g^*x_{k+1} + \cdots + h_F^e \cap g^*x_{k+e}),$$

com  $x_i \in \mathcal{A}_i(X)$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 E & \xrightarrow{j} & \mathbb{P}(F) & \xleftarrow{i} & \mathbb{P}(E) \\
 & f \searrow & g \downarrow & \swarrow p & \\
 & & X & & 
 \end{array}$$

$$y = g^*x_k + h_F \cap (g^*x_{k+1} + \cdots + h_F^e \cap g^*x_{k+e}), \quad x_i \in \mathcal{A}_i(X).$$

Lembrando  $i_*p^*a = h_F \cap g^*a$ ,  $\forall a \in \mathcal{A}_*(X)$ ,

vemos que  $h_F \cap (\cdots) = i_*w$

para algum  $w \in \mathcal{A}_*(\mathbb{P}(E))$ .

Excisão  $\Rightarrow j^*i_* = 0$ ,  $\Rightarrow z = j^*y = j^*g^*x_k = f^*x_k$ .

Isso mostra que  $f^*$  é sobrejetivo (já sabido para  $E$  trivial.)

Por fim, se  $f^*x_k = 0$  então  $g^*x_k = i_*w$ , com  $w \in \mathcal{A}_*(\mathbb{P}(E))$ .

Usando  $\alpha_E$ , denotando  $h_E = c_1\mathcal{O}_E(1)$ ,

podemos escrever  $w = p^*x'_0 + h_E \cap w' \Rightarrow$

$$i_*w = i_*(p^*x'_0 + h_E \cap p^*x'_1 + \cdots + h_E^{e-1}p^*x'_{e-1}) =$$

$$h_F \cap g^*x'_0 + \cdots + h_F^e g^*x'_{e-1}) \Rightarrow g^*x_k = 0 .$$

□

Listamos a seguir algumas fórmulas úteis para a inversa de  $f^*$ .

$V \subseteq X$  subesquema de dimensão pura  $k$ ;

$s : V \rightarrow E$  uma seção.  $\Rightarrow$

$$(f^*)^{-1}s_*[V] = c_e(E) \cap [V] \text{ em } \mathcal{A}_{k-n}(V).$$

*Prova.* Podemos supor  $V = X$ . Agora a fórmula se lê

$$\begin{aligned} s_*[X] &= f^*(c_e(E) \cap [X]) \\ &= c_e(f^*E) \cap [E] \text{ em } \mathcal{A}_k(E). \end{aligned}$$

$s$  induz uma seção  $\tilde{s}$  de  $f^*E = E \times_X E$  definida por

$$v \longmapsto (v, v - s(f(v))).$$

Verifica-se que  $\tilde{s}$  é regular, nula precisamente em  $s(X)$ .  $\square$