

COTANGENTE



©



FEU

cotangente $\times$ conormal

Proposição. Seja $\mu : B \otimes_A B \twoheadrightarrow B$ dado por multiplicação. Então $\ker \mu$ é gerado por

$$b \otimes 1 - 1 \otimes b, b \in B.$$

Prova.

$$\begin{aligned} b_1 \otimes b'_1 + \cdots + b_r \otimes b'_r \in \ker \mu &\Rightarrow 0 = b_1 b'_1 + \cdots + b_r b'_r \Rightarrow \\ b_1 \otimes b'_1 + \cdots + b_r \otimes b'_r &= (b_1 \otimes 1 - 1 \otimes b_1)(1 \otimes b'_1) + \\ (1 \otimes b_1)(1 \otimes b'_1) &+ \cdots + (b_r \otimes 1 - 1 \otimes b_r)(1 \otimes b'_r) \\ + (1 \otimes b_r)(1 \otimes b'_r) &= \sum (b_i \otimes 1 - 1 \otimes b_i)(1 \otimes b'_i) \\ &+ \sum (1 \otimes b_i b'_i) \\ &\parallel \\ 1 \otimes \sum b_i b'_i &= 0. \end{aligned}$$

$$\ker \mu = \langle b \otimes 1 - 1 \otimes b, b \in B \rangle =: I(\Delta)$$

ideal da diagonal de

$$\mathrm{Spec}(B) \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(B) = \mathrm{Spec}(B \otimes_A B).$$

Proposição. Sejam $I = I(\Delta)$, $C = B \otimes_A B$.

Seq. exata cindida,

$$\begin{array}{ccccc} I/I^2 & \twoheadrightarrow & \Omega_{C/A} \otimes_C B & \twoheadrightarrow & \Omega_{B/A} \\ \parallel & & \parallel & & \\ \Omega_{B/A} & & \Omega_{B/A} \oplus \Omega_{B/A} & & \end{array}$$

A derivação universal $d_{B/A} : B \longrightarrow I/I^2$ pode ser escrita

$$d_{B/A}(b) = b \otimes 1 - 1 \otimes b + I^2.$$

diferenciais e mudança de base

$B, A' = A$ -álgebras,

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B' := B \otimes_A A' \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & A' \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$\Omega_{B'/A'} = \Omega_{B/A} \otimes_B B'$$

$$d_{B'/A'}(b \otimes a') := d_{B/A}(b) \otimes a'$$

$$d_{B'/A'}(b\beta \otimes a'\alpha') = d_{B/A}(b\beta) \otimes a'\alpha'$$

$$= \beta d_{B/A}(b) \otimes a'\alpha' + b d_{B/A}(\beta) \otimes a'\alpha'$$

$$= (\beta \otimes \alpha') d_{B/A}(b) \otimes a' + (b \otimes \alpha') d_{B/A}(\beta) \otimes a'.$$

as fibras de $\Omega_{B/A}$

$B = k$ -álgebra de tipo finito sobre $k =$
corpo algebricamente fechado, $\mathfrak{m} \subset B$ ideal maximal,

$$B/\mathfrak{m} = k,$$

$$\Rightarrow \Omega_{B/k} \otimes_B B/\mathfrak{m} = \Omega_{B/k/\mathfrak{m}} \Omega_{B/k} = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$$

$$I = I(\Delta) \subset B \otimes_k B \twoheadrightarrow B$$

$$(I \subset B \otimes_k B \twoheadrightarrow B) \otimes_B B/\mathfrak{m}$$

$$I \otimes_B B/\mathfrak{m} \subset B \otimes_k B \otimes_B B/\mathfrak{m} \twoheadrightarrow B \otimes_B B/\mathfrak{m}$$

$$\parallel$$

$$\mathfrak{m}$$

$$\subset$$

$$\parallel$$

$$B$$

$$\twoheadrightarrow$$

$$\parallel$$

$$B/\mathfrak{m}$$

$$\Rightarrow \Omega_{B/k} \otimes_B B/\mathfrak{m} = I/I^2 \otimes_B B/\mathfrak{m} = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

feixe cotangente relativo

$X \rightarrow Y$ mapa de esquemas $\Rightarrow$

$\Omega_{X/Y}$ feixe de $\mathcal{O}_X$ -módulos tal que, para cada carta afim $A \rightarrow B$, com $\text{Spec}(A)$ aberto em Y e $\text{Spec}(B)$ aberto em X , temos $\Omega_{X/Y}|_{\text{Spec}(B)} = \widetilde{\Omega_{B/A}}$.

Alternativamente, sem colagem,

$$\begin{aligned}\Delta &\subset X \times_Y X, \\ I &= I(\Delta) \subset \mathcal{O}_{X \times_Y X} \Rightarrow \\ \Omega_{X/Y} &= I/I^2\end{aligned}$$

cotangente = conormal da diagonal

conormal de interseção completa local

Dizemos que um subesquema fechado $Z \subset X$ é uma interseção completa local (icl, lci) se numa vizinhança afim de cada ponto $z \in Z$ o ideal $I(Z) = \langle a_1, \dots, a_r \rangle$ é gerado por uma seq. regular, *i.e.*,

$$\begin{aligned} a_1 &\text{ é ndz, } a_2 \text{ é ndz mod. } a_1, \\ &\dots \\ a_r &\text{ é ndz mod. } \langle a_1, \dots, a_{r-1} \rangle. \end{aligned}$$

Exemplo importante: $D \subset X$ divisor de Cartier efetivo.

Fato: $x \in X$ é não singular $\Leftrightarrow$

$$\Delta \subset X \times X \text{ é lci em } (x, x).$$

Fato: se $Z \subset X$ é lci de codimensão r então o conormal $I(Z)/I(Z)^2$ é localmente livre, de posto r .

Por exemplo, se $a \in A$ é ndz, $\Rightarrow$

$\langle a \rangle / \langle a^2 \rangle$ é livre sobre $\overline{A} = A / \langle a \rangle$:

$$\alpha a = \beta a^2 \Rightarrow \alpha = \beta a \Rightarrow \alpha = 0 \pmod{a}.$$

Analogamente, se a, b é seq. reg.,

$$\begin{aligned} \alpha a + \beta b &= a'a^2 + b'ab + c'b^2 \Rightarrow \beta b = c'b^2 \pmod{a} \\ &\Rightarrow \beta = c'b \pmod{a} \Rightarrow \beta = 0 \pmod{\langle a, b \rangle} \dots \end{aligned}$$

o conormal dos zeros de uma seção regular

Prop. Seja $E \rightarrow X$ um fibrado vetorial. Seja $Z \subset X$ o esquema de zeros de uma seção regular s de E .

Seja $I = I(Z)$ o feixe de ideais.

$$\begin{array}{ccc} E & \supset & E_Z \\ s \uparrow \downarrow & & \downarrow \\ X & \supset & Z := \mathcal{Z}(s) \end{array}$$

Então existe um isomorfismo natural

$$E_Z^\vee = E \otimes \mathcal{O}_Z \twoheadrightarrow I/I^2$$

Localmente, a seção s é dada por
 $f_1, \dots, f_e \in A$, $\text{Spec}(A) \subseteq X$ aberto afim.

A seção s é regular se $f_1, \dots, f_e$ é uma seq. regular.

Interpretando s como mapa de fibrados, $s : \mathcal{O}_X \rightarrow E$,
sua co-seção $s^\vee : E^\vee \rightarrow \mathcal{O}_X$ tem como imagem o feixe
de ideais $I(Z)$, localmente dado por $\langle f_1, \dots, f_e \rangle$.

A imagem da co-seção $s^\vee : E^\vee \rightarrow \mathcal{O}_X$, $I = I(Z) \Rightarrow$

$$E_Z^\vee = E \otimes \mathcal{O}_Z \rightarrow I/I^2$$

é de fato um isomorfismo pois ambos são
feixes localmente livres de mesmo posto e . $\square$

o (co-)tangente de uma grassmanniana

X =esquema, E =fibrado vetorial de posto e sobre X .

$G(r, E) \longrightarrow X$ fibrado em grassmannianas:

cada ponto de $G(r, E)$ sobre um dado $x \in X$
corresponde a um subespaço de dimensão r da fibra E_x .

A fibra $G(r, E)_x =$ grassmanniana
de r -subespaços da fibra E_x :

$$G(r, E)_x = G(r, E_x).$$

Por construção, $G(r, E)$ vem munido de uma sequência exata (tautológica) de fibrados,

$$\mathcal{S} \rightrightarrows E \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$$

onde $\text{rank } \mathcal{S} = r, \text{rank } \mathcal{Q} = e - r$.

Cada mapa de esquemas $f : Y \longrightarrow G(r, E)$ corresponde *biunivocamente* a uma sequência exata de fibrados,

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{S}' & \rightrightarrows & E & \twoheadrightarrow & \mathcal{Q}' \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ f^*\mathcal{S} & \rightrightarrows & E & \twoheadrightarrow & f^*\mathcal{Q} \end{array}$$

$G(r, E)$ representa o funtor

$$\text{Sch}_X \ni Y \rightsquigarrow \{\text{subfibrado } \mathcal{S}' \subset E_Y, \text{rank } \mathcal{S}' = r\}$$

Prop. $G = G(r, E) \rightarrow X$ fibrado em grassmannianas
com seq. tautológica

$$\mathcal{S} \twoheadrightarrow E \twoheadrightarrow \mathcal{Q}.$$

$$\Rightarrow \Omega_{G/X} = \text{Hom}(\mathcal{Q}, \mathcal{S}).$$

Vamos exhibir a diagonal de $G \times_X G$ como
esquema de zeros de uma seção regular de

$$\text{Hom}(p_1^* \mathcal{S}, p_2^* \mathcal{Q}) = \text{Hom}(p_2^* \mathcal{Q}, p_1^* \mathcal{S})^\vee.$$

$$\begin{array}{ccccc} p_2^* \mathcal{S} & \longrightarrow & E_{G \times_X G} & \longrightarrow & p_2^* \mathcal{Q} \\ & \searrow & \uparrow & \nearrow & \\ & & p_1^* \mathcal{S} & & \end{array}$$

$\mathcal{S}$

$$\begin{array}{ccccc}
 p_2^* \mathcal{S} & \longrightarrow & E_{G \times_X G} & \longrightarrow & p_2^* \mathcal{Q} \\
 & \searrow & \uparrow & \nearrow & \\
 & & p_1^* \mathcal{S} & &
 \end{array}$$

s

Em um aberto trivializante adequado,

$$U = \operatorname{Spec}(A) \subseteq X, \quad G_U \supseteq \operatorname{Spec}(A[x_{ij}]_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq e-r}) =: V$$

$$\mathcal{S}_V = \begin{array}{l} \text{subespaço gerado} \\ \text{pelas linhas de} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_{11} & \cdots & x_{1, e-r} \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{r1} & \cdots & x_{r, e-r} \end{pmatrix}$$

$$V \times_U V = \operatorname{Spec}(A[x_{ij}, y_{ij}]_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq e-r})$$

A diagonal encontra

$$V \times_U V = \operatorname{Spec}(A[x_{ij}, y_{ij}]_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq e-r})$$

no subesquema de ideal

$$\langle x_{ij} - y_{ij}, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq e - r \rangle.$$

seq. regular . . .

o fibrado tangente de $\mathbb{P}^n$

É um caso particular importante,

$$\mathbb{P}^n = Grass(1, E = k^{n+1}) \longrightarrow X = \text{Spec}(k),$$

com seq. tautológica

$$\mathcal{S} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \mathbb{P}^n \times k^{n+1} \longrightarrow \mathcal{Q}$$

$$T\mathbb{P}^n = \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1), \mathcal{Q}) = \mathcal{Q} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$$

$\Rightarrow$ seq. Euler

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathbb{P}^n \times \mathcal{O}(1)^{n+1} \longrightarrow T\mathbb{P}^n$$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathbb{P}^n \times \mathcal{O}(1)^{n+1} \longrightarrow T\mathbb{P}^n$$

$$1 \longmapsto \underline{x} = (x_0, \dots, x_n)$$

$$\underline{a} := (a_0, \dots, a_n) \longmapsto \nabla_{\underline{a}}$$

onde $a_i = \frac{F_i}{G_i}$ é uma seção local de $\mathcal{O}(1)$,

quociente de polinômios homogêneos, $\deg F_i = 1 + \deg G_i$,

e $\nabla_{\underline{a}}$ denota a derivada direcional,

$$\nabla_{\underline{a}}\left(\frac{F}{G}\right) = \frac{G \sum a_i \partial_{x_i} F - F \sum a_i \partial_{x_i} G}{G^2}.$$

Note que $\nabla_{\underline{x}} = 0$.

Exercício: preencher os detalhes.

discriminantes

Quádricas em $\mathbb{P}^n$, car. $\neq 2$:

$$F(\underline{x}) = \sum a_{ij}x_i x_j = (x_0, \dots, x_n)(a_{ij}) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

admite ponto singular $\Leftrightarrow \det(a_{ij}) = 0$.

Equação de grau $n + 1$ em

$\mathbb{P}^N$ = espaço projetivo dos coeficientes
(ou das matrizes simétricas),

$$N = \binom{n+2}{2} - 1.$$

$$\begin{aligned}
 n = 1 : F &= ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 \\
 &= (x_0, x_1) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} ;
 \end{aligned}$$

$$\nabla F = (2ax_0 + bx_1, bx_0 + 2cx_1) = 2 \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} ;$$

$$\text{admite ponto singular} \Leftrightarrow \nabla F = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 4ac = 0.$$

grau 2.

Para hipersuperfícies de grau d arbitrário em $\mathbb{P}^n$,

$$F = \sum a_i \underline{x}^i$$

$$i = (i_0, \dots, i_n), |i| := \sum i_j = d$$

$$N + 1 = \binom{n+d}{n} \text{ coeficientes}$$

$$F = F(\underline{a}, \underline{x}) = 0$$

divisor de Cartier em $\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n$

$$\text{seção do fibrado } \mathcal{O}(F) = \underbrace{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)}_{a_i} \otimes \underbrace{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)}_{\underline{x}^i}$$

o fibrado conormal de $F \subset \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n$ é $\mathcal{O}(\textcolor{red}{-}F)_F$

sequência conormal – cotangentes ao longo das fibras / $\mathbb{P}^N$:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{O}(-F)_F & \xrightarrow{\quad} & \left(\Omega_{\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n / \mathbb{P}^N} \right)_{|F} & \longrightarrow & \Omega_{F/\mathbb{P}^N} \\
 \parallel & \searrow \scriptstyle s & \parallel & & \\
 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(-1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d) & & (\Omega_{\mathbb{P}^n})_{|F} & &
 \end{array}$$

A seção $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(-1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d))_F \xrightarrow{s} (\Omega_{\mathbb{P}^n})_{|F}$

se anula nos pontos $(f, x) \in \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n$ tais que $f(x) = 0$
 e a fibra $\Omega_{F/\mathbb{P}^N}(f, x) = \Omega_f(x) = \Omega_{\mathbb{P}^n}(x)/df(x)$ tem posto n ,
 (ao invés de $n - 1$ do caso não singular).

O esquema de zeros $Z := \mathcal{Z}(s)$ tem a dimensão esperada,

$$N + n - 1 - n$$

$$\Rightarrow [Z] = c_n(\Omega_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)_F) \cap [F]$$

$$\begin{aligned}
[Z] &= c_n (\Omega_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)_F) \cap [F] \\
&= \sum c_i \Omega_{\mathbb{P}^n} \cdot (H + dh)^{n-i} \cap [F]
\end{aligned}$$

$$= \sum c_i \Omega_{\mathbb{P}^n} \cdot (H + dh)^{n-i} \cdot (H + dh) \cap [\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n]$$

$$\text{Euler}^\vee : \Omega_{\mathbb{P}^n} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{n+1} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \Rightarrow c\Omega_{\mathbb{P}^n} = (1 - h)^{n+1}$$

$$\Rightarrow [Z] = \sum \binom{n+1}{i} (-h)^i (H + dh)^{1+n-i} \cap [\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n]$$

$$= \sum \binom{n+1}{i} (-h)^i ((1+n-i)H(dh)^{n-i}) \cap [\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n]$$

$$= H \sum (1+n-i) \binom{n+1}{i} (-1)^i ((d)^{n-i} h^n) \cap [\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n]$$

$$= ((n+1)(d-1)^n h^n H + \dots) \cap [\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n]$$

$$\leadsto (n+1)(d-1)^n H \cap [\mathbb{P}^N]$$

$$\text{grau do discriminante} = (n+1)(d-1)^n :-)$$