

Geometria Algébrica I

?? & Israel Vainsencher
Departamento de Matemática da UFMG

(versão muuuuuuuuito preliminar)

26 de Maio de 2010

Conteúdo

1	variedades afins	5
1.1	conjuntos algébricos	5
1.2	ideal de um subconjunto	7
1.3	a topologia de Zariski	8
1.4	subconjuntos irredutíveis	9
1.5	componentes irredutíveis	10
2	funções regulares	13
2.1	o anel de coordenadas	13
2.2	álgebras reduzidas	13
2.3	germes	14
2.4	funções regulares	15
2.5	morfismos de variedades afins	16
3	variedades	19
3.1	feixes	19
3.2	espaços anelados	20
3.3	morfismos de variedades	21
3.4	espaços projetivos	25
3.5	variedades projetivas	27
3.6	variedades quase-projetivas	28
3.7	grassmannianas	29
3.8	coordenadas de Plücker	30
4	produto de variedades	33
4.1	produto de variedades afins	33
4.2	produto de variedades arbitrárias	35
4.3	produto de variedades quase-projetivas	36
4.4	o morfismo de Segre	37

4.5	morfismos de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{P}^n$	39
4.6	morfismos de $\mathbb{P}^1$ em $\mathbb{P}^n$	40
4.7	morfismos de $\mathbb{P}^m$ em $\mathbb{P}^n$	40
5	dimensão	43
5.1	corpo de funções	43
5.2	teorema da dimensão das fibras	52
5.3	primeiras aplicações do TDF	54
5.4	mais aplicações do TDF	56
6	fibrados vetoriais	59
6.1	exemplo universal	59
6.2	funções de transição	60
6.3	homomorfismos	61
6.4	subfibrados vetoriais	64
6.5	operações com fibrados vetoriais	65
6.6	o feixe de seções	65
6.7	feixes localmente livres	70
6.8	feixes versus fibrados	72
6.9	fibrados em retas sobre $\mathbb{P}^n$	73
6.10	núcleo, imagem e quociente	75
6.11	imagem recíproca de fibrados vetoriais	78
6.12	morfismos na grassmanniana	79
6.13	fibrados projetivos	80
6.14	explosão	81
6.15	aplicação racional	82
6.16	explosão e projeção	82
6.17	Explosão e projeção, mais intrínsecas.	84
7	eliminação	87
7.1	introdução	87
7.2	$n = 1$	88
7.3	$\mathbb{P}^n$	88
7.4	aplicações	89
8	espaço tangente	91
8.1	hipersuperfície	91
8.2	tangente a uma variedade afim	92
8.3	fibrado tangente	102

Capítulo 1

variedades afins

1.1 conjuntos algébricos

Uma **variedade afim** é um subconjunto $X \subseteq \mathbb{C}^n$ definido por um sistema de equações polinomiais,

$$X = \{x \in \mathbb{C}^n \mid f(x) = 0, \forall f \in S\}.$$

Sinônimo: **conjunto algébrico afim**; também dizemos **subconjunto algébrico** ou **subvariedade afim** de $\mathbb{C}^n$, se necessário explicitar o espaço ambiente $\mathbb{C}^n$. Aqui S denota um subconjunto do anel $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ dos polinômios a coeficientes em $\mathbb{C}$. Escrevemos também $X = \mathbb{V}(S)$ para indicar que X é a variedade afim definida pelas equações provenientes de S . Quando $S = \{f\}$ para algum $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, escrevemos simplesmente $\mathbb{V}(f)$. Se f é um polinômio não constante, dizemos que $\mathbb{V}(f)$ é uma **hipersuperfície**. Se o grau de f é 1 (resp. 2, 3, ...), dizemos que $\mathbb{V}(f)$ é um hiperplano (resp. quádrlica, cúbica, ...).

Exercícios. 1. $\mathbb{V}(0) = \mathbb{C}^n$; $\mathbb{V}(1) = \emptyset$. As únicas subvariedades afins de $\mathbb{C}^1$ são $\mathbb{C}^1$ e os subconjuntos finitos.

2. Se $n \geq 2$, toda hipersuperfície de $\mathbb{C}^n$ é infinita.

3. Identificando o espaço das matrizes $\mathbb{M}(m, n) = \mathbb{C}^{mn}$, para cada $r \geq 0$ o subconjunto formado pelas matrizes de posto $\leq r$ é uma subvariedade.

4. As matrizes nilpotentes formam uma subvariedade de $\mathbb{M}(n, n)$.

5. O subconjunto $Z \subseteq \mathbb{M}(m, n) \times \mathbb{M}(n, p) \times \mathbb{M}(m, p) = \mathbb{C}^{mn+np+mp}$ formado pelas ternas de matrizes A, B, C tais que $C = AB$ é uma subvariedade afim.

6. A imagem de Z em $\mathbb{M}(m, p)$ é uma subvariedade afim.
7. A imagem de $\mathbb{C}^2 \ni (x, y) \rightarrow (x, xy) \in \mathbb{C}^2$ não é um subconjunto algébrico.
8. Um ponto de uma hipersuperfície $\mathbb{V}(f)$ que anula o gradiente ∇f é dito um ponto singular. O subconjunto dos pontos singulares de uma hipersuperfície é algébrico.

1.1.1. Proposição.

1. Toda interseção (possivelmente infinita) de subvariedades afins é uma subvariedade afim.
2. Toda união finita de subvariedades afins é uma subvariedade afim.
3. Toda subvariedade afim de $\mathbb{C}^n$ é uma interseção finita de hipersuperfícies.

Prova.

1. Sejam $X_\alpha \subset \mathbb{C}^n$ subvariedades definidas por subconjuntos $S_\alpha \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, $\alpha \in \aleph$. Verifica-se facilmente que

$$\bigcap_{\alpha} X_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} \mathbb{V}(S_{\alpha}) = \mathbb{V}(\cup S_{\alpha}).$$

2. Se $X_1 = \mathbb{V}(S_1)$, $X_2 = \mathbb{V}(S_2)$, façamos $S_1 S_2 := \{f_1 f_2 \mid f_i \in S_i\}$. Verifica-se que $X_1 \cup X_2 = \mathbb{V}(S_1 S_2)$.

3. Usaremos o seguinte

Fato. Seja $\langle S \rangle$ o ideal gerado por $S \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Então vale $\mathbb{V}(S) = \mathbb{V}(\langle S \rangle)$.

Já que $S \subseteq \langle S \rangle$, temos evidentemente $\mathbb{V}(S) \supseteq \mathbb{V}(\langle S \rangle)$ (mais equações, menos soluções!). Por outro lado, todo elemento de $\langle S \rangle$ se escreve na forma

$$f = g_1 f_1 + \dots + g_r f_r$$

para alguma escolha $g_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, $f_i \in S$. Segue portanto que, se $x \in \mathbb{V}(S)$, então cada $f_i(x) = 0$ e assim $f(x) = 0$. Isto prova a outra inclusão.

Para completar a prova da 3ª afirmação, lembramos o

Teorema da base de Hilbert. Todo ideal de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ é finitamente gerado.

Logo, escrevendo $\langle S \rangle = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$, concluímos $\mathbb{V}(S) = \cap \mathbb{V}(f_i)$, interseção finita de hipersuperfícies. $\square$

Exercícios. 9. Todo subconjunto finito de $\mathbb{C}^n$ é uma subvariedade afim.

10. Dados $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{C}^2$, 3 pontos **não** alinhados, existem cônicas q_1, q_2, q_3 tais que $\{P_1, P_2, P_3\} = \mathbb{V}(q_1, q_2, q_3)$.

11. Se $X = \{P_1, \dots, P_d\} \subset \mathbb{C}^n$ não estão alinhados, então X é definido por polinômios de grau $d - 1$.

1.2 ideal de um subconjunto

Se $X \subseteq \mathbb{C}^n$, definimos

$$\mathcal{I}(X) = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \mid f(x) = 0 \forall x \in X\}.$$

Trata-se de um ideal **radical**, i.e., para cada $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, se existir um inteiro k tal que $f^k \in \mathcal{I}(X)$, segue $f \in \mathcal{I}(X)$.

Temos evidentemente que $\mathbb{V}(\mathcal{I}(X)) \supseteq X$.

1.2.1. Proposição. Se $X \subseteq \mathbb{C}^n$ é algébrico, então $\mathbb{V}(\mathcal{I}(X)) = X$.

Prova. Se $X = \mathbb{V}(I)$, vale $I \subseteq \mathcal{I}(X)$. Daí é imediato que $\mathbb{V}(I) \supseteq \mathbb{V}(\mathcal{I}(X))$. $\square$

1.2.2. Teorema. (TZH) Seja $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal. Então $\mathcal{I}(\mathbb{V}(I)) = \text{rad}(I)$.

Trata-se de uma das versões do célebre Nullstellensatz¹ de Hilbert. Por conveniência, vamos deduzir a partir do seguinte enunciado aparentemente mais fraco.

(TZF) Seja $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$ um ideal maximal. Então $\exists (c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{C}^N$ tal que $I = \langle x_1 - c_1, \dots, x_N - c_N \rangle$.

Para provar o teorema, note que uma das inclusões é fácil. Para a outra, seja $f \in \mathcal{I}(\mathbb{V}(I))$. Consideremos em $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^1$ o subconjunto X' formado pelos pontos (x, t) tais que $x \in X$ e $f(x)t = 1$. Um minuto de reflexão nos convence que $X' = \emptyset$. Seja $I' \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, t]$ o ideal gerado por $I \cup \{f(x)t - 1\}$. Afirmamos que

$$(\star) \quad I' = \langle 1 \rangle.$$

Caso contrário, existiria ideal maximal $\mathfrak{m}' \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, t]$ tal que $\mathfrak{m}' \supseteq I'$. Seguiria pelo TZF, $\emptyset \neq \mathbb{V}(\mathfrak{m}') \subseteq \mathbb{V}(I')$, absurdo.

Tendo em vista $(\star)$, podemos escrever

$$1 = (f(x)t - 1)g_1(x, t) + f_2(x)g_2(x, t) + \dots + f_m(x)g_m(x, t)$$

¹Teorema dos zeros.

com $f_i \in I$, $g_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, t]$. Se $f = 0$, fim; caso contrário, podemos substituir na igualdade acima $t = 1/f(x)$ e deduzir uma expressão

$$1 = f_2(x)g_2(x, 1/f(x)) + \dots + f_m(x)g_m(x, 1/f(x)).$$

O resultado se deduz eliminando denominadores, todos da forma f^i para algum i . $\square$

1.3 a topologia de Zariski

A coleção dos subconjuntos algébricos de $\mathbb{C}^n$ satisfaz os axiomas de coleção dos subconjuntos fechados de uma topologia, chamada a topologia de Zariski:

1. $\emptyset, \mathbb{C}^n$ são algébricos;
2. $X_1, \dots, X_m \subset \mathbb{C}^n$ algébricos $\Rightarrow X_1 \cup \dots \cup X_m$ algébrico;
3. X_α algébrico $\forall \alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_\alpha X_\alpha$ algébrico.

Se $X \subset \mathbb{C}^n$ é um subconjunto, convencionaremos considerá-lo como subespaço topológico com a topologia de Zariski induzida.

Exercícios. 12. *Seja X um espaço topológico e seja $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ cobertura aberta. $Y \subseteq X$ é fechado se e só se $X_\alpha \cap Y$ é fechado em X_α para cada $\alpha \in \mathbb{N}$.*

13. *Seja X um espaço topológico. Considere a topologia produto em $X \times X$. Mostre que a diagonal $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ é fechada se e só se X é Hausdorff.*

1.3.1. Proposição. *Para cada $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, $X \subseteq \mathbb{C}^n$, seja $X_f = X \setminus \mathbb{V}(f)$. Então a coleção dos X_f é uma base de abertos da topologia de Zariski em X .*

Prova. Podemos supor $X = \mathbb{C}^n$. Seja U um aberto e seja $Y = X \setminus U$. Trata-se de um fechado, e assim $Y = \mathbb{V}(I)$ para algum ideal I . Logo, $Y = \bigcap_{f \in I} \mathbb{V}(f)$ e passando ao complementar, $U = \bigcup_{f \in I} X_f$. $\square$

Se $X \subseteq \mathbb{C}^n$ é uma subvariedade afim e $f \in \mathcal{O}(X)$, dizemos que X_f é um **aberto principal**.

Exercícios. 14. *Mostre que a topologia de Zariski em $\mathbb{C}^n$ não é Hausdorff. Entretanto, ela é T_1 , i.e., todo subconjunto finito é fechado.*

15. *Seja $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal. Sejam $f_1, \dots, f_m$ geradores de I . Mostre que $\bigcap_{f \in I} \mathbb{V}(f) = \mathbb{V}(f_1) \cap \dots \cap \mathbb{V}(f_m)$.*

16. Sejam $S \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ e seja $X \subseteq \mathbb{C}^n$ tais que $X = \bigcup_{f \in S} X_f$. Mostre que existe um subconjunto finito $S' \subseteq S$ tal que $X = \bigcup_{f \in S'} X_f$.

17. Sejam $X \subseteq \mathbb{C}^m, Y \subseteq \mathbb{C}^n$ subconjuntos algébricos. Mostre que $X \times Y \subseteq \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{m+n}$ é um subconjunto algébrico. Mostre que se $m, n \geq 1$, existem fechados em $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ que não são da forma $X \times Y$.

1.4 subconjuntos irredutíveis

Diremos que um espaço topológico X é **redutível** se existirem fechados X_1, X_2 tais que

- $X = X_1 \cup X_2$
- $X \not\subseteq X_1$ e $X \not\subseteq X_2$.

X é **irredutível** caso contrário. Note que irredutível $\Rightarrow \neq \emptyset$.

1.4.1. Exemplo. $X = \{0\} \subset \mathbb{C}^1$ é irredutível; todo subconjunto finito de $\mathbb{C}^n$ com mais de um elemento é redutível.

1.4.2. Lema. X é irredutível se e só se todo subconjunto aberto não vazio é denso em X .

Prova. Suponhamos X irredutível e tome $U, U' \subseteq X$ abertos não vazios.

Devemos mostrar que $U \cap U' \neq \emptyset$. Ora, $U \cap U' = \emptyset \Rightarrow U^c \cup U'^c = X$. Aqui $X \not\subseteq U^c$, caso contrário $U = \emptyset$.

Recíproca = exercício. □

Exercícios. 18. Um subespaço Y de um espaço topológico X é irredutível se e só se sua aderência $\overline{Y} \subseteq X$ o for. Irredutível $\Rightarrow$ conexo. Recíproca?

19. $\mathbb{C}^n$, com a topologia de Zariski, é irredutível. Com a topologia euclidiana, quais são os subconjuntos irredutíveis $\mathbb{R}^n$?

20. Todo aberto não vazio de irredutível é irredutível.

21. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

- (i) X é irredutível;
- (ii) existe uma cobertura aberta X_i tal que cada X_i é irredutível e não disjuntos dois a dois.
- (iii) para toda cobertura aberta $X_i \neq \emptyset$, vale $X_i \cap X_j \neq \emptyset \forall i, j$.

1.4.3. Lema. *Um subconjunto fechado não vazio $X \subset \mathbb{C}^n$ é irreduzível se e só se o ideal $\mathcal{I}(X) \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ é um ideal primo.*

Prova. Sejam f, g tais que $fg \in \mathcal{I}(X)$. Temos então $X \subseteq \mathcal{Z}(fg) = \mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{Z}(g)$.

Suponha X irreduzível; segue $X \subseteq \mathcal{Z}(f)$ ou $X \subseteq \mathcal{Z}(g)$, i.e., $f \in \mathcal{I}(X)$ ou $g \in \mathcal{I}(X)$.

Reciprocamente, suponha $\mathcal{I}(X)$ primo. Sejam f, g tais que $X_f \neq \emptyset$ e $X_g \neq \emptyset$. Devemos mostrar que $X_{fg} \neq \emptyset$. Negando, temos $\forall x \in X, f(x)g(x) = 0$. Ou seja, $fg \in \mathcal{I}(X)$, logo, digamos $f \in \mathcal{I}(X)$, contradição. $\square$

1.4.4. Lema. *Seja $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots$ uma cadeia descendente de fechados em $\mathbb{C}^n$. Então existe r tal que $X_r = X_{r+1} = \dots$. Em palavras, toda cadeia descendente de fechados em $\mathbb{C}^n$ é estacionária a partir de certa ordem.*

Prova. A cadeia de ideais $\mathcal{I}(X_1) \subseteq \mathcal{I}(X_2) \subseteq \dots$ estaciona a partir de certa ordem. Use a prop. 1.2.1 da p. 7. $\square$

Exercícios. 22. *Seja $\mathcal{C}$ uma coleção não vazia de fechados em $\mathbb{C}^n$. Mostre que existe membro minimal $X_0 \in \mathcal{C}$, i.e., tal que $\forall X \in \mathcal{C}, X \subseteq X_0 \Rightarrow X = X_0$. Que dizer se trocarmos minimal por maximal?*

1.5 componentes irreduzíveis

1.5.1. Teorema. *Seja $X \subseteq \mathbb{C}^n$ um fechado não vazio. Então existe um número finito de fechados irreduzíveis $X_1, \dots, X_r \subset \mathbb{C}^n$ tais que*

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_r.$$

Prova. Seja $\mathcal{C}$ a coleção dos contra-exemplos. Queremos mostrar que $\mathcal{C} = \emptyset$!!! Se $\mathcal{C} \neq \emptyset$, existe contra-exemplo minimal $X_0 \in \mathcal{C}$. Este não pode ser irreduzível (senão, não seria contra-exemplo...). Logo, existem Y_1, Y_2 que decompõem X_0 não trivialmente, i.e., $X_0 = Y_1 \cup Y_2$, $X_0 \neq Y_i$. Se $Y_i \in \mathcal{C}$ contradiz-se a minimalidade; se $Y_i \notin \mathcal{C}$, ambos se decompõem e $X_0 \notin \mathcal{C} \dots$ $\square$

1.5.2. Corolário. *A decomposição anterior pode ser escolhida de forma que*

$$\forall i \neq j, X_i \not\subseteq X_j.$$

*Tal decomposição **irredundante** é única a menos de permutação.*

Prova. Na decomposição $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ se ocorrer algum $X_i \subseteq X_j$, suprimimos. Suponha agora $X_1 \cup \dots \cup X_r = Y_1 \cup \dots \cup Y_s$ irredundantes. Como Y_1 é irredutível, $Y_1 \subseteq X_1 \cup \dots \cup X_r \Rightarrow \exists i \ X_i \supseteq Y_1$. Digamos $i = 1$. Analogamente, algum $Y_j \supseteq X_1$, logo $Y_j \supseteq Y_1$ e segue $X_1 = Y_1$. Repita para Y_2 . $\square$

Na decomposição irredundante acima, cada X_i é dita uma **componente irredutível** de X .

Exercícios. 23. *Determine os subconjuntos irredutíveis de $\mathbb{C}$. Idem para $\mathbb{C}^2$.*

24. *Determine as componentes irredutíveis de $\mathbb{V}(xy - zw, zy - xw) \subset \mathbb{C}^4$.*

25. *Mostre que se I é um ideal de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ gerado por polinômios lineares, então $\mathbb{V}(I)$ é irredutível (se $\neq \emptyset$).*

26. *Seja X um fechado em $\mathbb{C}^m$ e seja I o seu ideal em $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$. Mostre que o ideal do fechado $X \times \mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^{m+n} = \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ (cf. exc. 17) em $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+m}]$ é igual a ao ideal $\tilde{I} = I\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+m}]$. Mostre que $\tilde{I}$ é primo se I o for; conclua que neste caso, $X \times \mathbb{C}^n$ é irredutível, e reciprocamente.*

Capítulo 2

o feixe de funções regulares

2.1 o anel de coordenadas

Para cada subconjunto $X \subseteq \mathbb{C}^n$, denotamos por $\mathcal{F}(X)$ a coleção das funções $X \rightarrow \mathbb{C}$. Trata-se de uma $\mathbb{C}$ -álgebra com as operações naturais de soma e multiplicação de funções. Estamos interessados naquelas funções que admitem uma expressão polinomial. Precisamente, consideremos a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{F}(X) \\ f & \mapsto & f|_X \end{array}$$

que associa a cada polinômio a função definida por restrição.

Evidentemente, ρ é um homomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras; sua imagem é a subálgebra $\mathcal{O}(X)$ das funções polinomiais.

Temos, por definição, $\ker \rho = \mathcal{I}(X)$. Pelo teorema do homomorfismo, segue

$$\mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] / \mathcal{I}(X).$$

Observe que este último anel quociente depende apenas da variedade afim definida por $\mathcal{I}(X)$. Por construção, $\mathcal{O}(X)$ é a subálgebra de $\mathcal{F}(X)$ gerada pelas restrições das funções coordenadas x_i . Chamamos $\mathcal{O}(X)$ o **anel de coordenadas** de X .

Talvez a origem histórica da notação $\mathcal{O}$ para esse anel seja a palavra em italiano *olomorfa*.

2.2 álgebras reduzidas

Dizemos que uma $\mathbb{C}$ -álgebra A é **reduzida** se 0 é o único nilpotente.

2.2.1. Proposição. *Seja $X \subseteq \mathbb{C}^n$. Então $\mathcal{O}(X)$ é uma $\mathbb{C}$ -álgebra reduzida de tipo finito. Reciprocamente, para toda $\mathbb{C}$ -álgebra reduzida de tipo finito A existe uma subvariedade afim cujo anel de coordenadas é $\mathbb{C}$ -isomorfo à $\mathbb{C}$ -álgebra A .*

Prova. Seja A uma $\mathbb{C}$ -álgebra de tipo finito. Por definição, existe um homomorfismo sobrejetor de $\mathbb{C}$ -álgebras,

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \twoheadrightarrow A$$

Seja I seu núcleo. Temos assim $A \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$. É claro que A é reduzida se e só se $I = \text{rad}(I)$. Segue portanto $I = \mathcal{I}(\mathbb{V}(I))$, mostrando que A é $\mathbb{C}$ -isomorfa ao anel de coordenadas da variedade afim $\mathbb{V}(I)$. $\square$

2.3 germes

Seja X um espaço topológico e seja $x \in X$. Considerando $\mathbb{C}$ com a topologia de Zariski, denotamos por $\mathcal{F}_x$ (resp. $\mathcal{F}_x^c$) a coleção das funções $U \rightarrow \mathbb{C}$ (resp. contínuas) definidas em alguma vizinhança aberta $U \ni x$.

Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $f' : U' \rightarrow \mathbb{C}$ em $\mathcal{F}_x$. Dizemos que f é germe-equivalente a f' se existir uma vizinhança aberta $W \ni x$ tal que $W \subseteq U \cap U'$ e $f|_W = f'|_W$. Trata-se de uma relação de equivalência. (**Verificar!**) Cada classe de equivalência é chamada um **germe de função**.

Exercícios. 27. *Ache um exemplo de espaço topológico no qual a relação definida em $\mathcal{F}_x^c$ pela condição*

$$(f : U \rightarrow \mathbb{C}) \sim (f' : U' \rightarrow \mathbb{C}) \iff f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}$$

não é de equivalência.

28. *Se $x \in X$ é um ponto isolado então todo germe em x é o germe de uma função constante.*

2.3.1. Proposição. *As operações de soma e produto estão bem definidas a nível de germes. O conjunto dos germes de funções contínuas, denotado $\mathcal{G}_x$, é uma $\mathbb{C}$ -álgebra local cujo único ideal maximal, $\mathfrak{m}_x$, consiste nos germes de funções que se anulam em x .*

Prova. Os detalhes da compatibilidade das operações de soma e produto em $\mathcal{G}_x$ são rotineiros.

Se $f \in \mathcal{G}_x$ e $f(x) \neq 0$, o germe de $1/f$ em x está bem definido. Como $\mathcal{G}_x \setminus \mathfrak{m}_x$ é formado por unidades (*i.e.*, elementos inversíveis em $\mathcal{G}_x$), segue facilmente que $\mathfrak{m}_x$ é o único ideal maximal. $\square$

2.4 funções regulares

Seja $X \subseteq \mathbb{C}^n$ uma variedade afim e seja $x \in X$. Dizemos que um germe $f \in \mathcal{G}_x$ é **regular** se existem $a, b \in \mathcal{O}(X)$ tais que $b(x) \neq 0$ e $f = a/b$ em $\mathcal{G}_x$. Denotamos por $\mathcal{O}_{X,x}$ (ou simplesmente $\mathcal{O}_x$) a coleção dos germes regulares em x ; trata-se de uma $\mathbb{C}$ -subálgebra local de $\mathcal{G}_x$, chamado **anel local de X em x** .

2.4.1. Lema. *Se $a, b, c, d \in \mathcal{O}(X)$, $b(x)d(x) \neq 0$ então temos $a/b = c/d$ em $\mathcal{O}_{X,x}$ se e só se existe $f \in \mathcal{O}(X)$ tal que $f(x) \neq 0$ e $fad = fbc$ em $\mathcal{O}(X)$.*

Prova. Se os germes de $a/b, c/d$ em x são iguais, existe um aberto básico $X_f \subseteq X$ contendo x e contido em X_{bd} tal que $a/b = c/d$ em X_f . Logo, $ad = bc$ em X_f e conseqüentemente, $fad = fbc$ em X . A recíproca fica a cargo do leitor. $\square$

Seja $U \subseteq X$ um aberto. Para cada função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ e cada $x \in U$, podemos associar o germe f_x de f em x . Dizemos que f é **regular** se f_x é um germe regular para cada $x \in U$. Denotamos por $\mathcal{O}_X(U)$ o anel, de fato $\mathbb{C}$ -álgebra, das funções regulares no aberto U . Temos por definição um homomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ que associa a cada função regular o seu germe no ponto $x \in U$.

2.4.2. Proposição. *Seja X uma variedade afim e seja $\beta \in \mathcal{O}(X)$. Então $f : X_\beta \rightarrow \mathbb{C}$ é regular no aberto principal X_β se e só se existem $a \in \mathcal{O}(X)$ e $m \in \mathbb{Z}$ tais que $f(x) = a(x)/\beta^m(x) \forall x \in X_\beta$.*

Prova. É claro que se $f = a/\beta^m$ então f é regular em X_β . Para a recíproca, seja $I = \{b \in \mathcal{O}(X) \mid bf \in \mathcal{O}(X)\}$ o ideal dos denominadores de f . Basta provar que algum β^m pertence a I . Mostraremos que

$$(\star) \quad \beta \in \text{rad}(I).$$

Supondo demonstrado, obtemos $\beta^m \in I$ para algum $m \geq 1$. Assim, $\beta^m f = a \in \mathcal{O}(X)$, e portanto $f = a/\beta^m$ em X_β .

Para provar $(\star)$, lembrando o (TZH)(1.2.2, p. 7), basta ver que $\mathbb{V}(\beta) \supset \mathbb{V}(I)$. Dado $x \in \mathbb{V}(I)$, desejamos $\beta(x) = 0$. Supondo o contrário, temos $x \in X_\beta$ e f é regular em x . Logo, existem $a, b \in \mathcal{O}(X)$ tais que $b(x) \neq 0$ e $f = a/b$ como germes em x . Isto implica que existe $h \in \mathcal{O}(X)$ tal que $h(x) \neq 0$ e $f = a/b$ em $X_{\beta h}$. Daí segue $bf = a$ em $X_{\beta h}$. Logo, $h\beta bf = h\beta a$ em $X = X_{\beta h} \cup \mathbb{V}(\beta h)$. Portanto, temos $h\beta b \in I$, seguindo $h(x)\beta(x)b(x) = 0$, absurdo. $\square$

2.4.3. Corolário. *Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é regular se e só se $f \in \mathcal{O}(X)$.*

$\square$

2.5 morfismos de variedades afins

Uma aplicação contínua $\varphi : X \rightarrow Y$ de variedades afins é dita um **morfismo** se para todo aberto $V \subset Y$ e toda função regular $f \in \mathcal{O}_Y(V)$, a composta

$$\varphi^*(f) := f \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)}$$

é regular. Um morfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ é um isomorfismo se existir um morfismo $\psi : Y \rightarrow X$ tal que $\psi \circ \varphi = i_X$ e $\varphi \circ \psi = i_Y$ (aplicação idendidade).

Se $\varphi : X \rightarrow Y$ é um morfismo, temos para cada $x \in X$, $y = \varphi(x)$, um homomorfismo $\varphi^* : \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ definido de forma análoga.

Exercícios. 29. *A aplicação identidade é um morfismo. Toda aplicação constante é um morfismo. A composta de morfismos $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$ é um morfismo e se $x \in X, y = \varphi(x), z = \psi(y)$ então $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^* : \mathcal{O}_{Z,z} \xrightarrow{\psi^*} \mathcal{O}_{Y,y} \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{O}_{X,x}$.*

30. *A aplicação $\mathbb{C} \ni t \mapsto (t^2, t^3) \in \mathbb{V}(y^2 - x^3) \subset \mathbb{C}^2$ é um morfismo bijetivo, mas sua inversa não é um morfismo.*

2.5.1. Teorema. *Uma aplicação $\varphi : X \rightarrow Y$ de variedades afins é um morfismo se e só se*

(♥) $\forall f \in \mathcal{O}(Y)$, temos $f \circ \varphi \in \mathcal{O}(X)$.

Prova. Suponhamos (♥). Para cada $g \in \mathcal{O}(Y)$, temos $\varphi^{-1}(Y_g) = X_{g \circ \varphi}$. Logo φ é contínua. Seja $V \subset Y$ aberto e tome uma função regular $g \in \mathcal{O}_Y(V)$. Devemos mostrar que $g \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(U)$ onde $U = \varphi^{-1}(V)$. Seja $x \in U$, $y = \varphi(x)$. Por definição, temos uma igualdade de germes (em y), $g = a/b$, com $a, b \in \mathcal{O}(Y)$, $b(y) \neq 0$. Por hipótese, temos $\varphi^*(a), \varphi^*(b) \in \mathcal{O}(X)$. Segue a igualdade de germes (em x), $\varphi^*(g) = \varphi^*(a)/\varphi^*(b)$. $\square$

Denotaremos por $\text{Mor}(X, Y)$ a coleção dos morfismos de X em Y .

2.5.2. Corolário. *A correspondência $\varphi \rightarrow \varphi^*$ que associa a cada morfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ de variedades afins o homomorfismo de anéis de coordenadas $\varphi^* : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ é uma bijeção de $\text{Mor}(X, Y)$ sobre a coleção $\text{Hom}(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X))$ dos homomorfismos de $\mathbb{C}$ -álgebras.*

Prova. É claro que φ^* é um homomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras para cada $\varphi \in \text{Mor}(X, Y)$. Por outro lado, seja η um elemento de $\text{Hom}(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X))$. Suponhamos $Y \subseteq \mathbb{C}^n$, $X \subseteq \mathbb{C}^m$ e escrevamos

$$\mathcal{O}(Y) = \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n], \quad \mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m],$$

onde y_i, x_j denotam as (restrições das) funções coordenadas. Seja $\eta_i = \eta(y_i) \in \mathcal{O}(X)$. Cada η_i é (a restrição de) um polinômio nas variáveis $x_1, \dots, x_m$.

Visto que η é um homomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras, vale $\eta(f) = f(\eta_1, \dots, \eta_n)$, $\forall f \in \mathcal{O}(Y)$.

Definimos $\tilde{\eta} : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ fazendo, para cada $x \in \mathbb{C}^m$,

$$\tilde{\eta}(x) = (\eta_1(x), \dots, \eta_n(x)) \in \mathbb{C}^n.$$

Note que, para $x \in X$, vale $\tilde{\eta}(x) \in Y$. De fato, para cada equação $f \in \mathcal{I}(Y)$, sua classe $\bar{f}$ é nula em $\mathcal{O}(Y)$. Logo, $0 = \eta(\bar{f}) \Rightarrow 0 = f(\eta_1(x), \dots, \eta_n(x)) = f(\tilde{\eta}(x))$. segue facilmente que $\tilde{\eta}$ induz um morfismo $X \rightarrow Y$, cujo homomorfismo associado coincide com η . $\square$

2.5.3. Proposição. *Na correspondência acima, temos que*

1. *a imagem de $\varphi : X \rightarrow Y$ é densa se e só se o homomorfismo $\varphi^* : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ é injetivo;*

2. *se $\varphi^* : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ é sobrejetivo então a imagem de φ é fechada em Y e o mapa induzido $X \rightarrow \varphi(X)$ é um isomorfismo, e reciprocamente.*

Prova. 1. $\Rightarrow$ Seja $f \in \mathcal{O}(Y)$ tal que $\varphi^* f = 0$. Isto significa que $f(\varphi(x)) = 0 \forall x \in X$, ou seja, f se anula na imagem. Como esta é densa e f é contínua, segue que $f = 0$.

$\Leftarrow$ Seja U aberto não vazio de Y . Devemos mostrar que $U \cap \varphi(X) \neq \emptyset$. Podemos supor $U = Y_f$, aberto básico. Não vacuidade implica $f \neq 0$. Injetividade acarreta $\varphi^* f \neq 0$. Logo, existe $x \in X$ tal que $f(\varphi(x)) \neq 0$, ou seja $\varphi(x) \in \varphi(X) \cap Y_f$, como desejado.

2. Seja $I = \ker \varphi$. Se φ^* é sobrejetivo, temos o isomorfismo induzido

$$\mathcal{O}(Y)/I \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X).$$

Ora, $\mathcal{O}(Y)/I$ é o anel de coordenadas da subvariedade fechada $\mathbb{V}(I) \subseteq Y$, e portanto segue o isomorfismo $X \xrightarrow{\sim} \varphi(X)$. Para a recíproca, seja $I = \mathcal{I}(\varphi(X))$ o ideal da imagem, que é fechada por hipótese. Por hipótese, segue que o mapa induzido $\mathcal{O}(\mathbb{V}(I)) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ é um isomorfismo. Compondo com o mapa quociente, $\mathcal{O}(Y) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(Y)/I = \mathcal{O}(\mathbb{V}(I))$, segue o resultado. $\square$

Exercícios. 31. *Seja $\varphi : X \rightarrow Y$ um morfismo sobrejetivo de variedades afins. Mostre que φ é um isomorfismo se e só se para cada $x \in X$, $y = \varphi(x)$, o homomorfismo induzido $\varphi^* : \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ é sobrejetivo.*

32. Seja $X = \mathbb{V}(x_1x_2 = 1) \subset \mathbb{C}^2$ e seja $\varphi : X \rightarrow Y = \mathbb{C}$ a projeção $(x_1, x_2) \mapsto x_1$. Mostre que $\varphi^* : \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ é um isomorfismo para todo $x \in X$, $y = \varphi(x)$.

33. Seja $\psi : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{mn}$ a aplicação definida por

$$(x, y) \mapsto (x_1y_1, \dots, x_1y_n, \dots, x_my_n).$$

Mostre que é um morfismo. É injetivo? A imagem é fechada? Sejam $V = \mathbb{V}(x_1 - 1)$, $W = \mathbb{V}(y_1 - 1)$. Mesma questão para a restrição de ψ a $V \times W \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$.

34. Mostre que o gráfico de um morfismo de variedades afins, $\varphi : X \rightarrow Y$ é fechado em $X \times Y$.

35. Mostre que a imagem do morfismo $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definido por (x, xy) não é aberta nem fechada. Mostre que existe um aberto não vazio de $\mathbb{C}^2$ contido na imagem.

36. Mostre que todo morfismo bijetivo $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é um isomorfismo. (Falso trocando $\mathbb{C}$ por um corpo de característica > 0 .) Vale para $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $n > 1$?

Capítulo 3

variedades

3.1 feixes

Seja X um espaço topológico e seja $\mathfrak{A}$ a coleção dos seus abertos. Um **pré-feixe** de conjuntos (resp. de grupos, anéis, etc...) é uma família $\{\mathcal{F}(U)\}_{U \in \mathfrak{A}}$ de conjuntos (resp. grupos, ...), indexada pelos abertos de X , tal que, para cada par de abertos encaixados $U \supseteq U'$ é dada uma aplicação (resp. homomorfismo...)

$$\rho_{U'}^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U')$$

satisfazendo

1. $\rho_U^U = I_{\mathcal{F}(U)}$ (identidade);
2. se $U \supseteq U' \supseteq U''$ são abertos, então

$$\rho_{U''}^{U'} \circ \rho_{U'}^U = \rho_{U''}^U.$$

Cada elemento de $\mathcal{F}(U)$ é chamado uma **seção** do pré-feixe $\mathcal{F}$ sobre o aberto $U \subseteq X$.

Se f é uma seção de $\mathcal{F}$ sobre um aberto U e $U' \subseteq U$ é um aberto, dizemos que $\rho_{U'}^U(f)$ é a **restrição** de f a U' . A aplicação $\rho_{U'}^U$ é chamada de **restrição**. Por simplicidade, escrevemos também

$$f|_{U'} = \rho_{U'}^U(f).$$

Um **morfismo** de pré-feixes $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ é uma coleção aplicações

$$\mu_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}'(U), U \in \mathfrak{A}$$

compatíveis com as restrições, $\mu_U(f)|_{U'} = \mu_{U'}(f|_{U'})$.

Se $\mathcal{F}$ é um pré-feixe de grupos (anéis, etc.) exige-se igualmente que μ_U seja um homomorfismo de grupos, etc. A noção de composição de morfismos é evidente; idem para isomorfismo.

Se $f \in \mathcal{F}(U)$, $g \in \mathcal{F}(V)$ são seções sobre abertos U, V , dizemos que elas são **compatíveis** se

$$f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}.$$

Se existir uma seção $h \in \mathcal{F}(U \cup V)$ cuja restrição a U (resp. V) é igual a f (resp. g), é claro que f, g são compatíveis.

Um pré-feixe $\mathcal{F}$ é um **feixe** se, para toda coleção de abertos $\{U_i \subset X\}_{i \in I}$,
 (1) para toda escolha de seções $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ compatíveis duas a duas, existe uma seção $f \in \mathcal{F}(\bigcup U_i)$ que estende cada f_i , ou seja, tal que

$$f|_{U_i} = f_i$$

(2) para todo par de seções $f, g \in \mathcal{F}(\bigcup U_i)$ tais que $f|_{U_i} = g|_{U_i} \forall i$, vale $f = g$.

Exercícios. 37. Seja $X = \{1, 2\}$ com a topologia discreta. Defina $\mathcal{F}(X) = X \times X$, $\mathcal{F}(\{1\}) = X$, $\mathcal{F}(\{2\}) = X$ e os mapas de restrição $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(\{i\})$ dados pelas projeções $X \times X \rightarrow X$. Mostre que $\mathcal{F}$ é um feixe. Modifique $\mathcal{F}(\{1\}) = \{1\}$; agora o pré-feixe $\mathcal{F}$ não é um feixe: existem seções distintas com as mesmas restrições na cobertura $\{i\}, i = 1, 2$.

38. Dê exemplo de pré-feixe e coleção de abertos com seções compatíveis duas a duas que não se estendem à união desses abertos.

Os exemplos básicos, de fato motivadores de toda essa terminologia, são os feixes de funções contínuas, diferenciáveis, regulares...

3.2 espaços anelados

Um **espaço anelado** é um espaço topológico munido de um feixe de anéis. Estamos inicialmente de fato interessados apenas no caso em que, para cada aberto $U \subseteq X$, $\mathcal{F}(U)$ é uma álgebra de funções $U \rightarrow \mathbb{C}$.

Um **morfismo** $\varphi : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (X', \mathcal{F}')$ de espaços anelados, consiste em uma aplicação contínua, por abuso ainda denotada $\varphi : X \rightarrow X'$, tal que, para cada aberto $U' \subseteq X'$ se $U = \varphi^{-1}U'$, para cada função $f \in \mathcal{F}'(U')$, a composição, $\varphi^*f := f \circ \varphi|_U \in \mathcal{F}(U)$. Isto define um homomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras $\mathcal{F}'(U') \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U'))$.

Define-se de maneira evidente a composição de morfismos bem como a noção de isomorfismo de espaços anelados.

Se $(X, \mathcal{F})$ é um espaço anelado, então para cada aberto $U \subseteq X$ temos uma estrutura induzida de espaço anelado, dada pela restrição do feixe de anéis $\mathcal{F}$ ao aberto U . A inclusão $U \subseteq X$ define um morfismo de espaços anelados.

Os exemplos básicos são os morfismos de variedades afins, cf. § 2.5, p. 16.

Dizemos que um espaço anelado $(X, \mathcal{F})$ é uma **variedade** se for localmente afim, *i.e.*, se existir uma cobertura aberta U_i de X tal que cada $(U_i, \mathcal{F}|_{U_i})$ é isomorfo, como espaço anelado, a uma variedade afim. Exigiremos também que X seja quase-compacto, *i.e.*, toda cobertura aberta admite uma subcobertura finita. Denotaremos por $\mathcal{O}_X$, ao invés de $\mathcal{F}$, o feixe de funções regulares de uma variedade X . Dizemos que uma variedade é afim se for isomorfa a uma variedade afim.

3.2.1. Lema. *Seja X uma variedade; sejam U, V, W abertos tais que U, V são afins e $x \in W \subseteq U \cap V$. Então existem $f \in \mathcal{O}_X(U), g \in \mathcal{O}_X(V)$ tais que*

$$x \in U_f = V_g \subseteq W.$$

Prova. Escolhemos inicialmente $x \in U_f \subseteq V_g \subseteq W$. Podemos então supor, renomeando, $U \subseteq V$ variedades afins, com $x \in U$ aberto em V . Sejam $B = \mathcal{O}_X(U) \supseteq \mathcal{O}_X(U) = B$. Temos $x \in V_a \subseteq U$ para algum $a \in A$. Temos igualmente $x \in U_b \subseteq V_a$ para algum $b \in B$. Visto que b é regular em U , sua restrição a V_a é regular; portanto se escreve na forma $b = c/a^n, c \in A, n \in \mathbb{Z}$. Temos evidentemente $U_b = V_{ac}$. $\square$

3.2.2. Proposição. *Seja X uma variedade e seja $x \in X$. Seja U um aberto afim de X contendo x . Então o anel local dos germes de funções regulares de U em x independe da escolha da vizinhança U de x .*

Prova. Temos de fato $\mathcal{O}_{U,x} = \mathcal{O}_{U_f,x}$ para cada função regular f em U não nula em x . Basta agora aplicar o lema anterior: $\mathcal{O}_{U_f,x} = \mathcal{O}_{V_g,x}$. $\square$

3.3 morfismos de variedades

Um morfismo de variedades $\varphi : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua que localmente se expressa como morfismo de variedades afins. Precisamente, para cada aberto afim $V \subseteq Y$ e para cada aberto afim $U \subseteq \varphi^{-1}V$, o morfismo induzido $\varphi|_U : U \rightarrow V$ é um morfismo de variedades afins. Corresponde portanto a um homomorfismo entre os anéis de coordenadas, $\varphi^* : \mathcal{O}(V) \rightarrow \mathcal{O}(U)$.

Em particular, se Y é uma variedade afim, cada morfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ induz no feixe de funções regulares $\mathcal{O}_X$ uma estrutura de feixe de $\mathcal{O}(Y)$ -álgebras reduzidas de tipo finito, e reciprocamente (cf. 2.2.1).

A recíproca significa o seguinte. Suponhamos que o feixe $\mathcal{O}_X$ seja um feixe de $\mathcal{O}(Y)$ -álgebras reduzidas de tipo finito. Para cada aberto afim $U \subseteq X$, o homomorfismo estrutural $\mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ corresponde a um morfismo de variedades afins $\varphi_U : U \rightarrow Y$. Se $U' \subseteq X$ é também um aberto afim, temos igualmente um morfismo, $\varphi_{U'} : U' \rightarrow Y$ correspondente ao homomorfismo $\mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}_X(U')$. Seja U'' aberto afim de $U \cap U'$.

Visto que o diagrama de homomorfismos abaixo comuta,

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{O}_X(U) & & \\
 & \nearrow \varphi_U^* & & \searrow & \\
 \mathcal{O}(Y) & & & & \mathcal{O}_X(U \cap U') \longrightarrow \mathcal{O}_X(U'') \\
 & \searrow \varphi_{U'}^* & & \nearrow & \\
 & & \mathcal{O}_X(U') & &
 \end{array}$$

temos igualmente a comutatividade do seguinte,

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U & & \\
 & \swarrow \varphi_U & & \nwarrow & \\
 Y & & & & U'' \\
 & \swarrow \varphi_{U'} & & \nwarrow & \\
 & & U' & &
 \end{array}$$

mostrando que $\varphi_U, \varphi_{U'}$ são compatíveis, portanto bem-definindo $\varphi : X \rightarrow Y$.

3.3.1. Proposição. *Seja X uma variedade e seja $U \subseteq X$ um aberto. Então a restrição do feixe de funções regulares $\mathcal{O}_X$ a U induz uma estrutura de variedade em U .*

Prova. A questão é mostrar a existência de uma cobertura de U por abertos U_α tais que cada $(U_\alpha, \mathcal{O}_{X|U_\alpha})$ seja uma variedade afim. Ora, X admite uma cobertura por abertos afins X_i . Trocando X por X_i e U por $U \cap X_i$, podemos supor X afim. Seja $f \in \mathcal{O}_X(X)$ tal que $U \supseteq X_f$. Basta mostrar que o espaço anelado $(X_f, \mathcal{O}_{X|X_f})$ é uma variedade afim. Seja $Y_f \subseteq X \times \mathbb{C}$ a variedade afim definida pela equação $tf(x) - 1 = 0, x \in X, t \in \mathbb{C}$. Seja $p : X \times \mathbb{C} \rightarrow X$ a projeção. A restrição a Y_f induz um morfismo bijetivo sobre X_f , que continuamos a denotar por p . Seja $q : X_f \rightarrow X \times \mathbb{C}$ definida por $q(x) = (x, 1/f(x))$. Temos que, para cada função regular

$$g : X \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$$

a composta q^*g é uma função regular em X_f , já que se expressa como um quociente de funções polinomiais com denominador da forma $f^m, m \in \mathbb{N}$. Logo q é um morfismo, evidentemente inverso de $p : Y_f \rightarrow X_f$. $\square$

Com a notação da prop. acima, dizemos que U é uma **subvariedade aberta** da variedade X .

Exercícios. 39. *Seja X uma variedade e seja $\psi : X \rightarrow \mathbb{C}^n, \psi(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_n(x))$ uma aplicação. Mostre que ψ é um morfismo $\iff$ cada ψ_i é uma função regular.*

40. *Seja $\varphi : X \rightarrow Y$ um morfismo de variedades. Mostre que para cada $x \in X, y = \varphi(x)$, existe um e um só homomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$*

Exercícios. 41. *Mostre que todo aberto de $\mathbb{C}$ é uma variedade afim.*

42. *Seja $U = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Mostre que U não é uma variedade afim. Idem para o complementar de uma reta em $\mathbb{C}^3$.*

3.3.2. Proposição. *Seja X uma variedade e seja $Z \subseteq X$ um fechado. Então Z admite uma estrutura de variedade caracterizada pela seguinte propriedade: para cada aberto afim $U \subset X$, o anel $\mathcal{O}_Z(U \cap Z)$ é formado pelas restrições $f|_{U \cap Z}, f \in \mathcal{O}_X(U)$.*

Prova. Por construção, como espaço topológico Z admite uma cobertura formada por abertos homeomorfos a variedades afins. Resta ver que a receita para $\mathcal{O}_Z$ define de fato um feixe de funções. Note que, para cada aberto afim U como no enunciado, já sabemos que $\mathcal{O}_{Z \cap U}$ é um feixe do tipo esperado. A questão fica resolvida com o lema mais geral enunciado a seguir. $\square$

3.3.3. Lema. *Seja Z um espaço topológico e seja $Z_i, i \in I$, uma base de abertos. Suponha cada Z_i munido de um feixe $\mathcal{F}_i$ tal que $\mathcal{F}_i|_{Z_i \cap Z_j} = \mathcal{F}_j|_{Z_i \cap Z_j}$. Então existe um único feixe $\mathcal{F}$ em Z tal que $\mathcal{F}|_{Z_i} = \mathcal{F}_i \forall i \in I$.*

Prova. Para cada aberto $U \subset Z$, definimos $\mathcal{F}(U)$ como o subconjunto de

$$\prod_{Z_i \subseteq U} \mathcal{F}_i(Z_i)$$

formado pelas famílias compatíveis, *i.e.*,

$$(f_i \in \mathcal{F}_i(Z_i)) \quad \text{tais que} \quad f_i|_{Z_i \cap Z_j} = f_j|_{Z_i \cap Z_j}.$$

Define-se para cada par de abertos $U \subseteq V$ de maneira evidente o mapa de restrição $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$, simplesmente desprezando os membros f_i tais que $V \supseteq Z_i \not\subseteq U$. Seja U_α cobertura aberta de U e seja $(f_i^\alpha) \in \prod_\alpha \mathcal{F}(U_\alpha)$ tal que $(f_i^\alpha)|_{U_{\alpha\beta}} = (f_i^\beta)|_{U_{\alpha\beta}}$. Existe uma única família compatível $(g_i) \in \mathcal{F}(U)$ cuja restrição a cada U_α coincide com (f_i^α) . De fato, fixado i tal que $Z_i \subset U$, recobrimos Z_i por $U_\alpha \cap Z_i$ e consideramos a família

$$(g_k^\alpha = f_k^\alpha), Z_k \subset U_\alpha \cap Z_i, k = k_{i\alpha}.$$

Como esses $Z_{k_{i\alpha}}$ recobrem Z_i , a condição de compatibilidade fornece $g_i \in \mathcal{F}_i(Z_i)$ que induz (g_k^α) . A unicidade é clara e fica como exercício. $\square$

Nas condições da prop. anterior, dizemos que $Z \subseteq X$ é uma **subvariedade fechada** de X . Em geral, uma **subvariedade** de X é uma subvariedade fechada de uma subvariedade aberta de X .

Exercícios. 43. *Seja $\mathcal{F}$ um pré-feixe sobre um espaço topológico X . Para cada $x \in X$, definimos o **taló** $\mathcal{F}_x$ de $\mathcal{F}$ em x de maneira análoga ao feito para germes: classes de equivalência de seções $s \in \mathcal{F}(U)$, onde U denota uma vizinhança aberta de x ; declaramos $s \sim s' \in \mathcal{F}(U')$, $U' \ni x$ aberto, se existir aberto $U'' \subseteq U \cap U'$, $x \in U''$, de maneira que $s|_{U''} = s'|_{U''} \in \mathcal{F}(U'')$. Para cada $s \in \mathcal{F}(U)$, denotamos por s_x sua classe de equivalência em $\mathcal{F}_x$. Definimos um pré-feixe $\tilde{\mathcal{F}}$ fazendo*

$$\tilde{\mathcal{F}}(U) = \{(s_x)_{x \in U}, s_x \in \mathcal{F}_x \mid \text{a família } (s_x) \text{ é localmente determinada}\}.$$

Esta condição significa que,

$$\forall x \in U \exists \text{ aberto } U' \subseteq U, U' \ni x, \exists s' \in \mathcal{F}(U') \text{ com } s_y = s'_y \forall y \in U'.$$

*Mostre que $\tilde{\mathcal{F}}$ é um feixe. Mostre que a aplicação $\mathcal{F}(U) \ni s \mapsto (s_x \in \mathcal{F}_x)_{x \in U} \in \tilde{\mathcal{F}}(U)$ define um morfismo de pré-feixes, denotado $\sigma_{\mathcal{F}}$. Mostre que $\sigma_{\mathcal{F}}$ é um isomorfismo se e só se $\mathcal{F}$ é um feixe. Mostre que para todo morfismo de pré-feixes $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, se $\mathcal{G}$ é um feixe então existe um único morfismo de feixes $\tilde{\mu} : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{G}$ tal que $\tilde{\mu} \circ \sigma_{\mathcal{F}} = \mu$. (O feixe $\tilde{\mathcal{F}}$ é dito a **feixificação** do pré-feixe $\mathcal{F}$.)*

44. *Seja $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de pré-feixes sobre X . Mostre que existe um e um só morfismo de feixes $\tilde{\mu} : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{G}$ tal que $\sigma_{\mathcal{G}} \circ \mu = \tilde{\mu} \circ \sigma_{\mathcal{F}}$.*

45. *Seja $X = \{1, 2\}$ com a topologia discreta. Defina $\mathcal{F}(U) = \mathbb{Z}$ se $U = X$, $\mathcal{F}(U) = \{0\}$ se $U \neq X$, com homomorfismos de restrição óbvios. Descreva $\tilde{\mathcal{F}}$*

46. *Seja $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de pré-feixes sobre X . Mostre que, para todo $x \in X$ existe um e um só morfismo $\mu_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ tal que, para todo aberto $U \ni x$, o diagrama abaixo comuta,*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\mu_U} & \mathcal{G}(U) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{F}_x & \xrightarrow{\mu_x} & \mathcal{G}_x
\end{array}$$

onde os mapas verticais são dados por $s \mapsto s_x$. Mostre que, se μ_U é injetivo (resp. sobrejetivo) $\forall U$, então μ_x é injetivo (resp. sobrejetivo) $\forall x$. Vale a recíproca?

47. Notações como acima, suponha que $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ são feixes. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

- (i) μ é um isomorfismo de feixes;
- (ii) μ é um isomorfismo de **pré**-feixes;
- (iii) $\mu_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ é um isomorfismo $\forall x \in X$.

48. O exercício anterior falha para pré-feixes?

Os principais exemplos de variedades serão definidos a seguir.

3.4 espaços projetivos

Como conjunto, o espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ é a coleção dos subespaços de dimensão um em $\mathbb{C}^{n+1}$. Definimos uma topologia considerando a aplicação

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^n \\
v = (x_1, \dots, x_{n+1}) & \mapsto & [v] = [x_1, \dots, x_{n+1}],
\end{array} \tag{3.1}$$

onde $[v]$ denota o subespaço gerado por $v \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus 0$. Para cada $[v] = [x_1, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n$, dizemos que $x_1, \dots, x_{n+1}$ são suas **coordenadas homogêneas**. Estas só estão determinadas a menos de fator constante.

Munimos $\mathbb{P}^n$ da topologia quociente pela aplicação π :

$$U \subset \mathbb{P}^n \text{ é aberto} \iff \pi^{-1}(U) \text{ é aberto em } \mathbb{C}^{n+1}.$$

Observe que um subconjunto $V \subseteq \mathbb{C}^{n+1} \setminus 0$ é da forma $\pi^{-1}(U)$ se e só se $\forall v \in V$ e $\forall t \in \mathbb{C}^*$, temos $tv \in V$. Suponhamos V aberto $\neq \emptyset$ e seja f uma função regular em V . Se $v \in V$, existem $a_v, b_v \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ tais que $b_v(v) \neq 0$ e $f = a_v/b_v$ numa vizinhança de v . Podemos supor que $\text{mdc}(a_v, b_v) = 1$. Se $w \in V$ e escolhemos a_w, b_w também primos relativos, segue uma igualdade $a_w/b_w = a_v/b_v$ em algum aberto $\neq \emptyset$. Logo, $a_w b_v = a_v b_w$. Fatoração única implica $a_w = a_v, b_w = b_v$ (a menos de fator constante), de maneira que a representação de $f = a/b$ é de fato única, com a, b primos entre si e $b(v) \neq 0 \forall v \in V$.

O feixe de funções regulares em $\mathbb{P}^n$ é definido pelas funções invariantes por homotetias.

Suponhamos $V = \pi^{-1}(U) \neq \emptyset$; seja $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ uma função regular tal que $f(tv) = f(v)\forall t \in \mathbb{C}^*, v \in V$. Afirmamos que $f = a/b$ com a, b polinômios homogêneos de mesmo grau, que podemos supor primos entre si. Escrevamos $a = a_0 + \dots + a_r, b = b_0 + \dots + b_s$, com cada a_i, b_i homogêneo de grau i , $a_r \neq 0 \neq b_s$. Da igualdade

$$\frac{a_0 + \dots + a_r}{b_0 + \dots + b_s} = \frac{a_0 + ta_1 + \dots + t^r a_r}{b_0 + tb_1 + \dots + t^s b_s}$$

segue, eliminando denominadores, $r = s, a = a_r, b = b_r$.

Definimos, para cada aberto $U \subseteq \mathbb{P}^n, V = \pi^{-1}(U)$,

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U) = \{f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}}(V) \mid f(tv) = f(v)\forall t \in \mathbb{C}^*, v \in V\}.$$

Segue facilmente que temos definido um feixe de funções em $\mathbb{P}^n$. Vemos de imediato que a aplicação quociente é um morfismo de espaços anelados.

Resta ver que $\mathbb{P}^n$ é localmente afim. De fato, vamos exibir uma cobertura aberta de $\mathbb{P}^n$ formada por variedades isomorfas a $\mathbb{C}^n$.

3.4.1. Lema. *Seja $V \subseteq \mathbb{C}^{n+1} \setminus 0$ um aberto invariante por homotetias, e seja $X = \mathbb{C}^{n+1} \setminus V$. Então $\mathcal{I}(X)$ é gerado por polinômios homogêneos.*

Prova. Se $X = 0$, óbvio. Seja agora $x \in X, x \neq 0$. Temos $\mathbb{C}^* \cdot x \subset X$.

Seja $f \in \mathcal{I}(X)$. Escrevemos $f = f_0 + \dots + f_m$, soma de polinômios homogêneos. Calculamos, $\forall t \in \mathbb{C}^*, 0 = f(tx) = f_0 + tf_1(x) + \dots + t^m f_m(x)$. Segue $0 = f_0 = f_1(x) = \dots = f_m(x)$ e portanto deduzimos que cada $f_i \in \mathcal{I}(X)$. $\square$

Para cada polinômio homogêneo $H \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$, temos um aberto $\mathbb{P}_H^n \subseteq \mathbb{P}^n$ tal que $\pi^{-1}(\mathbb{P}_H^n) = \mathbb{C}_H^{n+1} = \{H(x) \neq 0\}$

3.4.2. Proposição. *A coleção $\{\mathbb{P}_H^n\}$ é uma base da topologia de $\mathbb{P}^n$.*

Prova. Segue do lema anterior. De fato, se $V = \pi^{-1}(U)$ é aberto, seu complementar é interseção de hipersuperfícies definidas por polinômios homogêneos. $\square$

3.4.3. abertos canônicos.

Seja $U_i = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\} = \mathbb{P}_{x_i}^n$.
Seja $V_i^* = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid x_i = 1\} \subset \pi^{-1}\mathbb{P}_{x_i}^n$.

Mostremos que $\psi := \pi|_{V_i^*} : V_i^* \rightarrow U_i$ é um homeomorfismo.
Por simplicidade, tomamos $i = n + 1$ e abreviamos $U = U_i, V = V_i^*$.

Continuidade e bijetividade, fácil.

Agora é suficiente mostrar que ψ é uma aplicação aberta.

O anel de coordenadas de V é naturalmente o anel de polinômios $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, mediante o isomorfismo natural com $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]/\langle x_{n+1} - 1 \rangle$. Uma base de abertos de V é dada por V_f , $f \in \mathcal{O}(V)$. Seja F a homogeneização de f com respeito à variável suprimida, x_{n+1} . É imediato que $\psi(V_f) = U_F$, e portanto ψ é aberta.

Vejamos o que se passa a nível dos feixes de funções regulares. Seja $U' \subseteq U$ um aberto e seja $V' = \psi^{-1}U' \subseteq V$. Cada função regular em U' é da forma $g = G/F$, com G homogêneo de grau $\deg G = \deg F$, e F não nula em U' . Sejam G_*, F_* as restrições de G, F a V ; trata-se da desomogeneização com respeito a x_{n+1} . É claro que $\psi^*(g) = G_*/F_* \in \mathcal{O}_V(V')$.

Reciprocamente, seja $g' \in \mathcal{O}(V')$. Visto que V' é um aberto de $V \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$, podemos escrever $g' = G'/F'$, com $F', G' \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, $G'(x) \neq 0 \forall x \in V'$. Homogeneizando com respeito a x_{n+1} e, se necessário, completando grau multiplicando por uma potência de x_{n+1} , obtemos polinômios homogêneos G, F do mesmo grau, de maneira que G/F restrito a V' coincide com g' .

Exercícios. 49. $\mathbb{P}^n$ é uma variedade irredutível.

50. Notação como em 3.1, um subconjunto Y de $\mathbb{P}^n$ é irredutível se e só se $\pi^{-1}Y \subset \mathbb{C}^{n+1}$ o for.

3.5 variedades projetivas

Em $\mathbb{P}^n$, os subconjuntos fechados são definidos como zeros de ideais homogêneos em $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Com efeito, se $X \subseteq \mathbb{P}^n$ é fechado, sua imagem inversa por π é dada pelos zeros em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0$ de um ideal homogêneo, como já comentado na prova da proposição anterior.

Se $X \subseteq \mathbb{P}^n$ é fechado, definimos o **anel de coordenadas homogêneas**

$$A_h(X) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]/\mathcal{I}(X).$$

Embora os elementos de $A_h(X)$ não possam ser interpretados como funções, aqueles que provêm de polinômios homogêneos desempenham importante papel. Se $\overline{F} \in A_h(X)$ é a classe de um polinômio homogêneo, a condição $\overline{F}(x) = 0$ faz sentido para $x \in X$.

Definimos $X_{\overline{F}} = \{x \in X \mid \overline{F}(x) \neq 0\}$.

Como no caso afim, cada subconjunto de $\mathbb{P}^n$ herda a topologia induzida de Zariski. Se $X \subseteq \mathbb{P}^n$ é fechado, uma base de abertos para a topologia de Zariski em X é dada pelos subconjuntos da forma $X_{\overline{F}}$, $\overline{F} \in A_h(X)$ homogêneo.

Uma subvariedade **projetiva** de $\mathbb{P}^n$ é, como espaço topológico, um subconjunto fechado $X \subseteq \mathbb{P}^n$; o feixe de funções regulares se define como na prop. 3.3.2. Podemos explicitar da seguinte maneira. Para cada ponto $x \in X$, dizemos que um germe de função f é regular em x se existirem polinômios homogêneos F, G do mesmo grau, tais que $G(x) \neq 0$ e $f = F/G$ como germes em x .

A exemplo do caso afim, para cada aberto $U \subseteq X$, o anel de funções regulares $\mathcal{O}_X(U)$ é formado pelas funções $U \rightarrow \mathbb{C}$ cujos germes são regulares em cada $x \in U$.

Temos assim um espaço anelado $(X, \mathcal{O}_X)$ que é de fato uma variedade.

Para verificar, consideramos a cobertura aberta $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n+1}$ definida pondo $X_i = X \cap U_i$ (veja 3.4, p. 26).

Cada X_i é fechado na variedade afim U_i . Além disso, mostra-se que o isomorfismo de variedades $U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$ induz um isomorfismo de X_i na sua imagem, subvariedade afim de $\mathbb{C}^n$.

3.6 variedades quase-projetivas

Dizemos que uma variedade é **projetiva** se for isomorfa a uma subvariedade projetiva de $\mathbb{P}^n$.

Uma variedade é dita **quase-projetiva** se for isomorfa a um aberto de uma variedade projetiva.

Toda variedade afim, e mesmo toda subvariedade aberta de uma variedade afim, é uma variedade quase-projetiva.

Em linhas gerais, a passagem **afim** $\leftrightarrow$ **quase-projetiva** é feita

- a nível de espaços topológicos, tomando uma inclusão

$$X \subseteq \mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n;$$

- e quanto às funções regulares, expressando um germe seja como quociente de elementos do anel de coordenadas, seja como restrição de quociente de polinômios homogêneos.

3.6.1. Lema. *Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$ subvariedade quase-projetiva. Então X é aberto em sua aderência $\overline{X}$ em $\mathbb{P}^n$.*

Prova. Temos por definição $X = U \cap Y$ com U aberto e Y fechado em $\mathbb{P}^n$. Logo, X é fechado em U . Mostremos que $X = U \cap \overline{X} =: X'$. Temos $\overline{X} \subseteq Y$, logo $X' \subseteq X$. Se $X \setminus X' \neq \emptyset$ então $U \setminus X'$, que é aberto em U , logo aberto, encontra X . Logo encontra $\overline{X}$:

$$(U \setminus X') \cap \overline{X} \neq \emptyset = (U \setminus X') \cap (U \cap \overline{X}) = (U \setminus X') \cap X' = \emptyset.$$

□

3.7 grassmannianas

As variedades de Grassmann generalizam os espaços projetivos. Como conjunto, definimos

$$\mathbb{G}r_r \mathbb{C}^n = \{\text{subespaços de dimensão } r \text{ em } \mathbb{C}^n\}$$

Em particular, $\mathbb{G}r_1 \mathbb{C}^n = \mathbb{P}^{n-1}$.

A estrutura de variedade pode ser construída como no caso de $\mathbb{P}^n$. Consideramos o aberto $\mathbb{M}(r, n)^0$ de $\mathbb{M}(r, n)$ formado pelas matrizes $r \times n$ de posto r . O mapa natural

$$\pi : \mathbb{M}(r, n)^0 \rightarrow \mathbb{G}r_r \mathbb{C}^n \quad (3.2)$$

que associa a cada matriz o espaço gerado pelas linhas induz a topologia quociente. Os abertos de $\mathbb{G}r_r \mathbb{C}^n$ definidos pela escolha de posição de menor $r \times r \neq 0$ são homeomorfos a fatias $\mathbb{C}^{r(n-r)} \subset \mathbb{M}(r, n)$, *e.g.*, do tipo

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,r+1} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,r+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{r,r+1} & \dots & a_{r,n} \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{r(n-r)}. \quad (3.3)$$

Nesta fatia, escolhemos o “primeiro” bloco $r \times r$ normalizado como a matriz identidade. É claro que V se aplica bijetivamente sobre sua imagem em $\mathbb{G}r_r \mathbb{C}^n$. Para ver que o mapa $\varphi : V \rightarrow \pi(V) = U$ induzido por π é um homeomorfismo, é novamente suficiente mostrar que se trata de uma aplicação aberta. Seja $V' \subseteq V$ um aberto na topologia de Zariski e ponha $U' = \varphi(V')$. Seja $\delta : \mathbb{M}(r, n) \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\det(x_{ij})_{1 \leq i, j \leq r} \neq 0$. Seja $\mathbb{M}_\delta$ o aberto principal. Temos o isomorfismo

$$\mathrm{GL}(r) \times V \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(r) \cdot V = \bigcup gV = \pi^{-1}U = \mathbb{M}_\delta.$$

Visto que $\mathrm{GL}(r) \times V'$ é aberto em $\mathrm{GL}(r) \times V$, segue que $\mathrm{GL}(r) \cdot V' = \bigcup gV' = \pi^{-1}U'$ é aberto e portanto φ é aberta.

Seja $\tilde{V}$ um aberto de $\mathbb{M}(r, n)^0$ invariante pela ação de $\mathrm{GL}(r)$. Temos assim $\tilde{V} = \pi^{-1}\pi\tilde{V}$. Como no caso de $\mathbb{P}^n$, definimos o feixe de funções regulares em

$\mathbb{G}r_r \mathbb{C}^n$ como o subfeixe das funções regulares de $\mathbb{M}(r, n)^0$ invariantes por $\mathrm{GL}(r)$. Verifiquemos que $\mathbb{G}r_r \mathbb{C}^n$ fica assim munido de estrutura de variedade. A questão central é verificar o caráter localmente afim. Ora, temos a cobertura aberta formada pelos subconjuntos do tipo $U = \varphi(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{r(n-r)}$. Seja $U' \subseteq U$ aberto. Seja $f : U' \rightarrow \mathbb{C}$ uma função regular. Por definição, $\pi^* f$ é uma função regular em $\pi^{-1}U'$ invariante por $\mathrm{GL}(r)$. O ponto agora é perceber que $\pi^* f$ é completamente determinada por sua restrição, $\bar{f}$, a $V' = \pi^{-1}U' \cap V \subseteq V \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{r(n-r)}$. Mas isto decorre da invariância! De fato, para cada $x \in \pi^{-1}U'$, existe um e um só $g \in \mathrm{GL}(r)$ tal que $v = g^{-1}x \in V$: basta tomar g como o “primeiro” bloco $r \times r$ da matriz x . Temos assim $\pi^* f(x) = \bar{f}(g^{-1}x)$. Reciprocamente, para cada $\bar{f} \in \mathcal{O}_V(\pi^{-1}U' \cap V)$, a fórmula anterior $(\mathrm{GL}(r) \times V \ni (g, v) \mapsto \bar{f}(v))$ define uma extensão invariante de $\bar{f}$ ao aberto $\pi^{-1}U'$ (Usar o isomorfismo $\mathrm{GL}(r) \times V \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(r) \cdot V$). Em conclusão, a restrição do feixe de funções invariantes ao aberto típico U fornece um isomorfismo de espaços anelados com $V \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{r(n-r)}$, completando a verificação de que a grassmanniana $\mathbb{G}r_r \mathbb{C}^n$ é uma variedade.

Veremos em seguida que $\mathbb{G}r_r \mathbb{C}^n$ é de fato uma variedade projetiva.

3.8 coordenadas de Plücker

Iniciamos com uma revisão de álgebra multilinear. Seja V um espaço vetorial. Denota-se por $\bigwedge^r V$ a r -ésima potência exterior de V . Se $\dim V = n$ então

$$\dim \bigwedge^r V = \binom{n}{r}.$$

Temos uma aplicação r -linear alternada universal

$$\begin{aligned} V \times \cdots \times V &\longrightarrow \bigwedge^r V \\ (v_1, \dots, v_r) &\mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_r. \end{aligned}$$

A imagem de uma r -upla de vetores $v_1, \dots, v_r \in V$ se escreve $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$, chamado um r -**vetor decomponível**. Se $v_1, \dots, v_n \in V$ formam uma base de V , os vetores $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_r}$, com $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$ formam uma base de $\bigwedge^r V$.

3.8.1. Lema. *Seja $W \subseteq V$ um subespaço de dimensão r . Sejam $v_1, \dots, v_r$ e $v'_1, \dots, v'_r$ bases de W . Então $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$ e $v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_r$ são múltiplos não nulos um do outro.*

Prova. Sabemos que se passa de uma base a outra por operações elementares, e.g., $v_1 \rightsquigarrow v_1 + cv_2, c \in \mathbb{C}$. Cada operação deste tipo fornece um múltiplo não nulo. $\square$

O lema mostra que, para cada subespaço $W \subseteq \mathbb{C}^n$ de dimensão r , temos bem definido um ponto $\wedge^r W \in \mathbb{P}(\bigwedge^r \mathbb{C}^n) = \mathbb{P}(\binom{n}{r})^{-1}$. Temos de fato o **mergulho de**

Plücker.

3.8.2. Proposição. *O mapa de Plücker $\Pi : W \mapsto \wedge^r W$ acima definido é um isomorfismo de $\mathbb{G}r_r \mathbb{C}^n$ em uma subvariedade projetiva de $\mathbb{P}(\wedge^r \mathbb{C}^n)$.*

Prova. Seja $e_1, \dots, e_n$ a base canônica de $\mathbb{C}^n$. As linhas da matriz $x = (x_{ij})$, $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n$, que geram W se expressam na forma $\sum x_{ij} e_j$, com $i = 1..r$. Escrevamos z_J para a coordenada homogênea correspondente ao r -vetor $e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r}$. Então $\Pi(W) = \wedge^r W$ tem coordenadas homogêneas $z_J(x) = \det x_J$, menor determinante $r \times r$ obtido pela escolha das colunas em $J = j_1 < \dots < j_r$. Seja $J_0 = 1 < \dots < r$ correspondente ao “primeiro” bloco de x . A imagem inversa do aberto básico $U_{J_0} = \{z_{J_0} \neq 0\} \subset \mathbb{P}^{\binom{n}{r}-1}$ é igual à imagem U da fatia (3.3) V . A expressão de Π restrita a $U \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{r(n-r)}$ inclui, entre as coordenadas,

$$z_{J_{ik}} = \pm a_{i,r+k}, \quad 1 \leq i \leq r, 1 \leq k \leq n-r,$$

que é o subdeterminante com escolha de colunas

$$J_{ik} = 1 < 2 < \dots < \widehat{i} < \dots < r < r+k$$

em que omitimos i das r primeiras colunas consecutivas e incluímos $r+k$. Isto mostra que o homomorfismo $\Pi_U^* : \mathcal{O}(U_{J_0}) \rightarrow \mathcal{O}(U)$ é sobrejetivo. Segue de (2.5.3, p. 17) que $\Pi_U : U \rightarrow \Pi(U)$ é um isomorfismo sobre o fechado $\Pi(U) \subseteq U_{J_0}$. $\square$

3.8.3. Exemplo. $\mathbb{G}r_2 \mathbb{C}^4 \subset \mathbb{P}^5$. Para cada matriz $x \in \mathbb{M}(2, 4)$, seja

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix}$$

matriz obtida repetindo as duas linhas. Temos $\det \tilde{x} = 0$. Desenvolvendo pelos menores 2×2 das 2 primeiras linhas, obtemos a equação

$$z_{12}z_{34} - z_{13}z_{24} + z_{14}z_{23} = 0.$$

Trata-se de uma hipersuperfície quádrlica em $\mathbb{P}^5$, chamada de quádrlica de Plücker-Klein. Este é o único caso em que a grassmanniana mergulha como uma hipersuperfície.

O método para achar equações para a imagem de $\mathbb{G}r_r \mathbb{C}^n$ em geral é semelhante. Supondo $2r \leq n$ fazemos $\tilde{x}$ a matriz $2r \times n$ obtida repetindo as r linhas que geram um subespaço. Calculamos os $\binom{n}{r}$ subdeterminantes (nulos!) $2r \times 2r$ de $\tilde{x}$, expandindo pelos menores das r primeiras linhas. Veja as equações para $\mathbb{G}r_2 \mathbb{C}^5 \subset \mathbb{P}^9$, calculadas usando SINGULAR, [?].

$$z_7z_8 - z_6z_9 - z_5z_{10}, z_4z_8 - z_3z_9 - z_2z_{10}, \\ z_4z_6 - z_3z_7 + z_1z_{10}, z_4z_5 - z_2z_7 - z_1z_9, z_3z_5 - z_2z_6 - z_1z_8$$

As rotinas utilizadas acima estão disponíveis em

<http://www.mat.ufmg.br/~israel/Sing/myprocs.sing>

Exercícios. 51. Prove que, se V é um espaço vetorial de dimensão n então $\mathrm{Gr}_r V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}_{n-r} V^*$. Mostre que $\mathbb{P}^n$ é isomorfo a $\mathrm{Gr}_1 \mathbb{C}^{n+1}$.

52. Se V é um subespaço de V' então a aplicação natural de $\mathrm{Gr}_r V$ em $\mathrm{Gr}_r V'$ é um morfismo. Prove que a imagem é fechada e o mapa induzido sobre a imagem é um isomorfismo.

53. Se V um espaço vetorial de dimensão n e seja $W \subseteq V$ um subespaço de dimensão $n - r$. Mostre que a coleção dos subespaços $W' \in \mathrm{Gr}_r V$ tais que $W' \cap W = 0$ é um aberto de $\mathrm{Gr}_r V$.

54. Notação como no exc. (65, p. 38), descreva em coordenadas o mapa $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathrm{Gr}_2 \mathbb{C}^4 \subset \mathbb{P}^5$ que associa a cada x o ponto (que representa a reta) L_x . Mostre que a imagem é igual à interseção da quádriga de Plücker com um plano de $\mathbb{P}^5$.

55. Considere o mapa $\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ dado em coordenadas afins por $t \mapsto (t, t^2, t^3)$. Para cada t , seja L_t a reta passando por $\varphi(t)$ e direção $\varphi'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, i.e., dada parametricamente por $s \mapsto (t, t^2, t^3) + s(1, 2t, 3t^2)$. Descreva a imagem do mapa induzido $t \mapsto L_t \in \mathrm{Gr}_2 \mathbb{C}^4$.

56. Notação como no item anterior, seja P_t o plano que contém L_t e é paralelo a $\varphi''(t) = (0, 2, 6t)$, i.e., dado parametricamente por $(s_1, s_2) \mapsto (t, t^2, t^3) + s_1(1, 2t, 3t^2) + s_2(0, 2, 6t)$. Mostre que P_t é o único plano que passa por $\varphi(t)$ e só corta $\varphi(\mathbb{P}^1)$ neste ponto; trata-se do plano osculador. O plano osculador P_t corresponde a um ponto no espaço projetivo dual $\check{\mathbb{P}}^3$. Descreva em coordenadas o mapa $\mathbb{P}^1 \ni t \mapsto P_t \in \check{\mathbb{P}}^3$.

Capítulo 4

produto de variedades

4.1 produto de variedades afins

Observemos que na topologia produto de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$, os fechados são as uniões finitas de subconjuntos da forma $X \times Y$, com $X \subseteq \mathbb{C}^m, Y \subseteq \mathbb{C}^n$ fechados. Por exemplo, para $m = n = 1$, resultam apenas as uniões finitas de retas horizontais ou verticais ou pontos. Enquanto isso, em $\mathbb{C}^2$, cada polinômio não constante define uma curva, $f(x, y) = 0$.

Essas considerações levam a definir a topologia de Zariski no produto cartesiano como a induzida pela bijeção natural

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^{m+n} \\ (\underline{x}, \underline{y}) &\longmapsto (\underline{x}, \underline{y}) \end{aligned}$$

onde abreviamos $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m), \underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$. Como vimos, essa topologia é **mais fina** do que a topologia produto.

Observe também que, no anel de polinômios $\mathbb{C}[\underline{x}, \underline{y}]$ com dois blocos de variáveis, cada elemento se escreve como soma de elementos da forma $f(\underline{x})g(\underline{y})$.

4.1.1. Lema. *A projeção $p_1 : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ é um morfismo aberto.*

Prova. A projeção é o morfismo correspondente ao homomorfismo de inclusão natural $\mathbb{C}[\underline{x}] \hookrightarrow \mathbb{C}[\underline{x}, \underline{y}]$. Para provar que é aberto, basta examinar a imagem de um aberto principal $U = (\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n)_f$. Escrevemos $f = f_1 g_1 + \dots + f_r g_r$, com $f_i \in \mathbb{C}[\underline{x}], g_i \in \mathbb{C}[\underline{y}]$. Podemos supor $g_1, \dots, g_r$ linearmente independentes/ $\mathbb{C}$. Se $f(x, y) \neq 0$, é claro que algum $f_i(x) \neq 0$. Reciprocamente, se algum $f_i(x) \neq 0$, então $f(x, \underline{y}) \neq 0$, e portanto existe $y \in \mathbb{C}^n$ tal que $f(x, y) \neq 0$. Em resumo, vale $p_1(U) = \bigcup (\mathbb{C}^m)_{f_i}$. $\square$

4.1.2. Proposição. *Sejam $X \subseteq \mathbb{C}^m, Y \subseteq \mathbb{C}^n$ subvariedades afins, e sejam p_1, p_2 as projeções de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$. Então*

1. $X \times Y \subseteq \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{m+n}$ é uma subvariedade afim;
2. cada função regular $X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ é soma de funções da forma

$$p_1^* f(x) p_2^* g(y)$$
tais que f (resp. g) é regular em X (resp. Y).

Prova. O ideal $\mathcal{I}(X) \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$ se estende a um ideal

$$J_X = \mathcal{I}(X)\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n],$$

tal que $\mathbb{V}(J_X) = X \times \mathbb{C}^n$. Analogamente, temos $\mathbb{V}(J_Y) = \mathbb{C}^m \times Y$. Portanto, $\mathbb{V}(J_X + J_Y) = X \times Y$, o que prova 1.

O 2º item segue da observação ao final do §4.1, p. 33. □

4.1.3. Lema. *Notação como acima, temos*

1. $\mathcal{I}(X \times Y) = J_X + J_Y \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{m+n}]$.
2. Se X e Y são irredutíveis então $X \times Y$ também é.

Prova. Para a 1ª afirmação, basta ver que $\mathbb{C}[\bar{x}, \bar{y}] = \mathbb{C}[\underline{x}, \underline{y}]/(J_X + J_Y)$ é uma álgebra reduzida (cf. 2.2.1, p. 14).

Seja $\bar{f} \in \mathbb{C}[\bar{x}, \bar{y}]$ não nulo. Devemos mostrar que $\bar{f}^r \neq 0 \forall r$; equivalente: $f \notin \mathcal{I}(X \times Y)$. Temos um homomorfismo natural $\mathcal{O}(X) \rightarrow \mathbb{C}[\bar{x}, \bar{y}]$, idem para $\mathcal{O}(Y)$. Escreva $\bar{f} = \bar{a}_1 \bar{b}_1 + \dots + \bar{a}_s \bar{b}_s$, com $a_i \in \mathbb{C}[\bar{x}] = \mathbb{C}[\underline{x}]/\mathcal{I}(X)$, $b_i \in \mathbb{C}[\bar{y}]$ com s mínimo. Segue que $a_1, \dots, a_s$ são l.i./ $\mathbb{C}$, idem para os b_i .

Em particular, $a_1 \neq 0$, ou seja, existe $x \in X$ tal que $a_1(x) \neq 0$. Seja $f_x(\bar{y}) = \sum a_i(x) b_i(\bar{y}) \in \mathcal{O}(Y)$.

Temos $f_x \neq 0$, logo existe $y \in Y$ tal que $f(x, y) \neq 0$.

A 2ª afirmação se prova de maneira análoga, verificando que $\bar{f}$ é não divisor de zero. □

Exercícios. 57. *Prove a 2ª afirmação acima.*

58. *Sejam $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m], J \subset \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$ ideais primos nos anéis de polinômios nas variáveis indicadas. Mostre que o ideal gerado por I, J em $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n]$ é primo.*

4.1.4. Lema. *Sejam X, Y, Z variedades com X, Y afins. Então para todo par de morfismos $\varphi : Z \rightarrow X, \psi : Z \rightarrow Y$ a aplicação $\rho : Z \rightarrow X \times Y$ dada por $\rho(z) = (\varphi(z), \psi(z))$ é um morfismo.*

Prova. Podemos supor Z afim. Os homomorfismos $\varphi^* : \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}(Z)$ e $\psi^* : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(Z)$ induzem $\rho^* : A[X \times Y] \rightarrow \mathcal{O}(Z)$ tal que $\rho^*(f(x)g(y)) = \varphi^*(f(x))\psi^*(g(y))$. Bem definido por conta do lema (4.1.3, p. 34). (Considerar inicialmente $\mathbb{C}[\underline{x}, \underline{y}] \rightarrow \mathcal{O}(Z)$ e passar ao quociente.) $\square$

Exercícios. 59. *Sejam $\varphi, \psi : X \rightarrow Y$ morfismos de variedades afins. Mostre que $\{x \in X \mid \varphi(x) = \psi(x)\}$ é fechado em X .*

60. *Sejam $\varphi_i : X_i \rightarrow Y_i, i = 1, 2$ morfismos de variedades afins. Mostre que a função $\varphi_1 \times \varphi_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$ dada por $(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$ é um morfismo.*

4.2 produto de variedades arbitrárias

Sejam X, Y variedades não necessariamente afins. Definiremos no conjunto $X \times Y$ uma estrutura de variedade caracterizada pelas seguintes propriedades:

1. as projeções $p_1 : X \times Y \rightarrow X, p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ são morfismos;
2. para todo par de morfismos $\varphi : Z \rightarrow X, \psi : Z \rightarrow Y$ a aplicação $\rho : Z \rightarrow X \times Y$ dada por $\rho(z) = (\varphi(z), \psi(z))$ é um morfismo.

Devemos verificar que as propriedades 1&2 determinam **tanto a topologia como o feixe** de funções regulares de $X \times Y$.

Sejam $U \subseteq X, V \subseteq Y$ abertos. Segue de 1. que $U \times V = p_1^{-1}U \cap p_2^{-1}V$ é aberto em $X \times Y$.

Suponhamos U, V ambos afins. Então $U \times V$ é uma variedade afim. Além disso, $U \times V \rightarrow U \hookrightarrow X$ é um morfismo.

Por 2., a inclusão $U \times V \hookrightarrow X \times Y$ é um morfismo.

Seja $W \subseteq X \times Y$ um aberto arbitrário e seja $\widetilde{W} = W \cap (U \times V)$.

Segue que toda função regular $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ se restringe a uma função regular em $\widetilde{W}$, cujo repertório é conhecido. Como W pode ser recoberto por $\widetilde{W}$'s, vemos que a topologia e o feixe de funções estão bem determinados.

Para *construir* $X \times Y$, não há surpresa. Recobrimos X, Y por abertos afins X_α, Y_β , e declaramos um subconjunto $W \subseteq X \times Y$ aberto se cada $W \cap (X_\alpha \times Y_\beta)$ é aberto na variedade afim $X_\alpha \times Y_\beta$. **(Verificar que define uma topologia!)**

Define-se função regular de maneira evidente: um germe f é regular em $(x, y) \in X \times Y$ se o for como germe em $(x, y) \in X_\alpha \times Y_\beta$ para algum α, β . Isto significa que $f = \sum g_i h_i$, soma de produtos de germes g_i regulares em x e h_i regulares em y . Essa caracterização é independente da escolha das vizinhanças afins X_α, Y_β .

Segue que $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ é um morfismo, já que a restrição a cada $X_\alpha \times Y_\beta$ é um morfismo.

Por fim, sejam $\varphi : Z \rightarrow X, \psi : Z \rightarrow Y$ morfismos. Mostremos que a aplicação $\rho : Z \rightarrow X \times Y$ dada por $\rho(z) = (\varphi(z), \psi(z))$ é um morfismo. Seja $Z_{\alpha\beta} = \varphi^{-1}X_\alpha \cap \psi^{-1}Y_\beta = \rho^{-1}(X_\alpha \times Y_\beta)$. Então $Z_{\alpha\beta} \xrightarrow{\rho} X_\alpha \times Y_\beta$ é um morfismo (cf. Lema 4.1.4, p. 34), completando a verificação.

Exercícios. 61. *Sejam $\varphi_i : X_i \rightarrow Y_i, (i = 1, 2)$ morfismos de variedades. Mostre que $\varphi_1 \times \varphi_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$ é um morfismo.*

62. *Se $U \subset X, V \subset Y$ são abertos (resp. fechados), mostre que $U \times V \subset X \times Y$ é aberto (resp. fechado).*

63. *Se X, Y, Z são variedades, mostre que $X \times (Y \times Z)$ e $(X \times Y) \times Z$ são isomorfas.*

64. *Se X, Y são variedades irredutíveis, mostre que $X \times Y$ é irredutível.*

4.3 produto de variedades quase-projetivas

Um polinômio $F \in \mathbb{C}[\underline{x}, \underline{y}]$ é dito bi-homogêneo de bi-grau (a, b) se

$$F(t\underline{x}, s\underline{y}) = t^a s^b F(\underline{x}, \underline{y}).$$

Equivalente, todo monômio que ocorre em F é da forma $\prod x_i^{m_i} \prod y_i^{n_i}$ com $\sum m_i = a, \sum n_i = b$.

Cada polinômio do tipo acima define um subconjunto

$$(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n)_F = \{(x, y) \in \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \mid F(x, y) \neq 0\}.$$

4.3.1. Proposição. *Sejam $X \subseteq \mathbb{P}^m, Y \subseteq \mathbb{P}^n$ subvariedades quase-projetivas e sejam $x \in X, y \in Y$. Então*

1. *uma base de abertos de $X \times Y$ é dada pelas interseções com os subconjuntos da forma $(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n)_F$ definidos acima;*
2. *um germe de função f em $(x, y) \in X \times Y$ é regular se e só se existem polinômios $G, H \in \mathbb{C}[\underline{x}, \underline{y}]$ bi-homogêneos nas variáveis $x_1, \dots, x_{m+1}, y_1, \dots, y_{n+1}$ e de mesmo bi-grau tais que $H(x, y) \neq 0$ e $f = G/H$ como germes em (x, y) .*

Prova. Suponhamos, por simplicidade $x \in \mathbb{P}_{x_{m+1}}^m$, $y \in \mathbb{P}_{y_{n+1}}^n$. Assim, (x, y) pertence a um aberto U de $X \times Y$, o qual podemos supor contido em $X \times Y \cap \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$. Trata-se de um aberto do fechado $\overline{U} \subseteq \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ (cf. 3.6.1, p. 28). Logo, existe um polinômio $f(\underline{x}, \underline{y})$ nas variáveis $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ tal que $f(x, y) \neq 0$ e $\overline{U}_f \subseteq U$. Bi-homogeneizando com respeito a $x_{m+1}, y_{n+1} \dots$

Se f é um germe regular em $(x, y) \in X \times Y$, então cf. (4.2, p. 35) existem polinômios $g(\underline{x}, \underline{y}), h(\underline{x}, \underline{y})$ tais que $h(x, y) \neq 0$ e $f = g/h$. Bi-homogeneizamos g, h com respeito a x_{m+1}, y_{n+1} e completamos bi-graus multiplicando por potências dessas variáveis.

Recíproca: exercício. □

4.3.2. Proposição. *A diagonal $\Delta \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ é uma subvariedade fechada.*

Prova. Basta ver que Δ é o conjunto das soluções do sistema de equações bi-homogêneas $x_i y_j = x_j y_i, 1 \leq i, j \leq n+1$ que expressam a proporcionalidade dos vetores x, y . □

Dizemos que uma variedade X é **separada** se a diagonal $\Delta \subseteq X \times X$ é fechada.

4.3.3. Corolário. *Toda variedade quase-projetiva é separada.*

4.4 o morfismo de Segre

Para cada par de inteiros $m, n \geq 0$, consideramos a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}^{(m+1) \times (n+1) - 1} \\ (x, y) & \mapsto & (z_{ij}) = (x_i y_j) \\ \parallel & & \parallel \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_{n+1} \end{pmatrix} \right) & & \left(\begin{array}{ccc} x_1 y_1 & \dots & x_1 y_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m+1} y_1 & \dots & x_{m+1} y_{n+1} \end{array} \right) \end{array}$$

4.4.1. Teorema. *A aplicação de Segre acima definida é um isomorfismo de $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ sobre uma subvariedade projetiva $\Sigma_{m,n} \subseteq \mathbb{P}^{mn+m+n}$, chamada variedade de Segre, e definida pelas equações*

$$z_{ij} z_{kl} = z_{il} z_{kj} \quad (1 \leq i, k \leq m+1, 1 \leq j, l \leq n+1).$$

Prova. Escrevamos z_{ij} para as coordenadas homogêneas do contra-domínio $Z = \mathbb{P}^{mn+m+n}$. Seja Z_{ij} o aberto básico $z_{ij} \neq 0$. Seja Σ a imagem de σ . A imagem inversa $\sigma^{-1} Z_{ij}$ é igual a $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ mediante as identificações habituais, $\mathbb{C}^m = \mathbb{P}_{x_i}^m, \mathbb{C}^n = \mathbb{P}_{y_j}^n$.

Fazendo $i = m + 1, j = n + 1$ por simplicidade, vemos que na última linha e coluna da matriz (z_{ij}) aparecem

$$y_1 = z_{m+1,1}, \dots, y_n = z_{m+1,n}$$

e

$$x_1 = z_{1,n+1}, \dots, x_m = z_{m,n+1}.$$

Isto mostra que $\Sigma_{11} = \Sigma \cap Z_{11}$ é a subvariedade de $Z_{11} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{mn+m+n}$ dada pelas equações $z_{ij} = z_{i,n+1}z_{m+1,j}$, $i = 1..m, j = 1..n$. Concluimos que o anel de coordenadas de Σ_{11} é isomorfo ao anel de polinômios em $m + n$ variáveis. A função inversa $\Sigma_{11} \rightarrow \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ corresponde ao isomorfismo de anéis $\mathbb{C}[\underline{x}, \underline{y}] \rightarrow \mathbb{C}[\dots z_{i,n+1}, \dots, z_{m+1,j}, \dots]$ dado por $x_i, y_j \leftrightarrow z_{i,n+1}, z_{m+1,j}$. Detalhes restantes, exercício. $\square$

Exercícios. 65. *Descreva a imagem da diagonal pelo morfismo de Segre.*

66. $\Sigma_{0,n} \xrightarrow{\sim} \Sigma_{n,0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n.$

67. $\Sigma_{1,1}$ é uma superfície quádrlica não degenerada em $\mathbb{P}^3$. Para cada $x \in \mathbb{P}^1$, a imagem de $\{x\} \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ pelo morfismo de Segre é uma reta $L_x \subset \Sigma_{1,1}$; idem para $\sigma(\mathbb{P}^1 \times \{y\})$. Mostre que toda reta de $\Sigma_{1,1}$ é de um desses dois tipos. Mostre que, se $x, x', x'' \in \mathbb{P}^1$ são 2 a 2 distintos, então cada ponto de $\Sigma_{1,1}$ está sobre exatamente uma reta incidente às 3 retas $L_x, L_{x'}, L_{x''}$.

68. Se $L, L', L'' \subset \mathbb{P}^3$ são retas 2 a 2 não coplanares, existe uma e só uma quádrlica que as contém; ache explicitamente para sua escolha favorita de 3 retas distintas dos eixos coordenados ($x_i = x_j = 0$).

69. Seja Z uma variedade, Z_i cobertura aberta afim. Mostre que a diagonal $\Delta_Z = \{(z, z) \in Z \times Z\}$ é fechada no aberto $\bigcup Z_i \times Z_i$. (Veja patologia no exc. 71 mais adiante.)

70. Mostre que, para toda variedade quase-projetiva $X \subseteq \mathbb{P}^n$, a diagonal $\Delta_X \subseteq X \times X$ é fechada em $X \times X$.

71. (Patologia) Seja $Z = \mathbb{C} \cup \{0'\}$ o conjunto formado pela união de $\mathbb{C}$ com um ponto extra, $0' \notin \mathbb{C}$. Declare aberto em Z todo subconjunto $U \subseteq Z$ tal que $U \setminus \{0'\}$ é aberto de Zariski em $\mathbb{C}$. Mostre que isso define de fato uma topologia tal que todo subconjunto finito de Z é fechado. Se $U \subseteq Z$ é aberto, $0' \notin U$, defina $\mathcal{F}(U)$ como o anel das funções regulares de $U \subseteq \mathbb{C}$. Se $0' \in U$, ponha $U' = U \setminus \{0'\}$ e defina $\mathcal{F}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid \exists \tilde{f} \in \mathcal{F}(\{0\} \cup U') \text{ com } f|_{U'} = \tilde{f}|_{U'}, f(0) = f(0')\}$. Mostre que Z é uma variedade. Sejam $\varphi, \varphi' : \mathbb{C} \rightarrow Z$ as inclusões óbvias em $\mathbb{C}$ e $Z \setminus \{0\}$, $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 0'$. Mostre que a diagonal de Z não é fechada.

4.5 morfismos de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{P}^n$

Sejam $f_1, \dots, f_{n+1} \in \mathbb{C}[t]$ polinômios sem raiz comum. Podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ t &\longmapsto [f_1(t), \dots, f_{n+1}(t)] \end{aligned}$$

A imagem inversa $f^{-1}U_i$ é formada pelos $t \in \mathbb{C}$ tais que $f_i(t) \neq 0$. Trata-se de um aberto afim principal de $\mathbb{C}$. Fazendo $i = n + 1$ por simplicidade, temos o mapa induzido

$$f^{-1}U_{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^n$$

definido por $t \mapsto (f_1(t)/f_{n+1}(t), \dots, f_n(t)/f_{n+1}(t))$, claramente um morfismo.

Note que se $g_1, \dots, g_{n+1} \in \mathbb{C}[t]$ são primos relativos e definem a mesma aplicação, *i.e.*,

$$[f_1(t), \dots, f_{n+1}(t)] = [g_1(t), \dots, g_{n+1}(t)] \forall t$$

então valem as relações

$$f_i g_j = f_j g_i \forall i < j.$$

Em particular, $f_i g_{n+1} = g_i f_{n+1}$, $i = 1..n$; por fatoração única, vem $f_{n+1} = g_{n+1}$ e portanto $f_i = g_i$, a menos de fator constante.

4.5.1. Lema. *Seja $U \subseteq \mathbb{C}$ aberto não vazio. Todo morfismo $U \rightarrow \mathbb{P}^n$ é restrição de um (e só um) morfismo $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n$. Reciprocamente, todo morfismo $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n$ é do tipo anterior.*

Prova. De fato, suponha $V = f^{-1}U_{n+1} \neq \emptyset$. Temos um homomorfismo induzido $f^* : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(V)$. Sabemos que $V = \mathbb{C}_g$, complementar dos zeros de algum $g \in \mathbb{C}[t]$. Logo, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(V) = \mathbb{C}[t]_g$, anel das frações com denominadores potências de g . Seja $f^*(x_i) = f_i/g^r$. Temos que $f|_V : \mathbb{C}_g \rightarrow \mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n$ é dado por $t \mapsto [f_1(t)/g^r(t), \dots, f_n(t)/g^r(t), 1]$. A menos de eliminação de fator comum, segue que f coincide com $[f_1, \dots, f_n, g^r]$. Isto é consequência do seguinte resultado.

4.5.2. Proposição. *Sejam $\varphi, \psi : X \rightarrow Y$ morfismos de variedades quase-projetivas. Se existir um aberto denso $U \subseteq X$ tal que $\varphi_U = \psi_U$, então $\varphi = \psi$.*

Prova. A diagonal $\Delta \subset Y \times Y$ é fechada pois Y é quase-projetiva. Seja $\rho = (\varphi, \psi) : X \rightarrow Y \times Y$. Então $\rho^{-1}\Delta$ é fechado e contém um aberto denso. $\square$

4.6 morfismos de $\mathbb{P}^1$ em $\mathbb{P}^n$

4.6.1. Proposição. *Sejam $F_1, \dots, F_{n+1} \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ polinômios homogêneos de mesmo grau e sem fator comum. Então $[x_1, x_2] \mapsto [F_1(x_1, x_2), \dots, F_{n+1}(x_1, x_2)]$ define um morfismo de $\mathbb{P}^1$ em $\mathbb{P}^n$. Reciprocamente...*

Prova. Seja $\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ um morfismo. Sua restrição ao aberto $\mathbb{C} = \{x_2 \neq 0\}$ é um morfismo. Logo, tem o aspecto $x \mapsto [f_1(x), \dots, f_{n+1}(x)]$, onde os f_i são polinômios sem fator comum. Homogeneizar e ajustar grau. $\square$

Exercícios. 72. *Estenda $t \mapsto (t, t^2)$ a um morfismo de $\mathbb{P}^1$ em $\mathbb{P}^2$ e descreva sua imagem. Qual a imagem do ponto no infinito de $\mathbb{P}^1$? Idem para (t, t^3) .*

73. *Estenda $t \mapsto (t, t^2, t^3)$ a um morfismo de $\mathbb{P}^1$ em $\mathbb{P}^3$ e descreva sua imagem. Qual a interseção da imagem com o hiperplano no infinito, $x_4 = 0$?*

74. *Considere as retas $L : x = 0, z = 1$, $M : y = z = 0$. Escolha uma bijeção linear de L em M e descreva o lugar dos pontos definido pela união das retas que ligam pontos correspondentes, tanto em $\mathbb{C}^3$ como em $\mathbb{P}^3$.*

4.7 morfismos de $\mathbb{P}^m$ em $\mathbb{P}^n$

4.7.1. Teorema. *Seja $\varphi : \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^n$ um morfismo **não constante**. Então $m \leq n$ e existem polinômios homogêneos $F_1, \dots, F_{n+1} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{m+1}]$ do mesmo grau tais que $\bigcap \mathbb{V}(F_i) = \emptyset$ e $\varphi = [F_1, \dots, F_{n+1}]$, únicos a menos de fator constante.*

Prova. A imagem inversa $\varphi^{-1}\mathbb{C}^n$, ($\mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n$) contém um aberto básico U dado por $F_{n+1} \neq 0$. O morfismo $U \rightarrow \mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n$ restrição de φ tem a receita

$$[F_1/F_{n+1}, \dots, F_n/F_{n+1}, 1] = [F_1, \dots, F_{n+1}],$$

em que podemos e vamos supor homogêneos do mesmo grau e $\text{mdc}=1$. Se $[G_1, \dots, G_{n+1}]$ é outra expressão válida em algum aberto, seguem relações $F_i G_j = F_j G_i$. Isto implica $[F_1, \dots, F_{n+1}] = [G_1, \dots, G_{n+1}]$ i.e.,

$$F_i = c G_i, i = 1..n+1, c \in \mathbb{C}.$$

Se os F_i 's admitissem um zero comum, forçosamente outra expressão para φ leva a contradição por conta da relação acima. Como os F_i 's são não constantes, temos que em $\mathbb{P}^m$,

$$\bigcap_{1 \leq i \leq n+1} \mathbb{V}(F_i) = \emptyset \Rightarrow m \leq n.$$

De fato, pelo corolário 5.1.19...

□

Exercícios. 75. (Veronese) Seja $v_d : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^d$ definido por $[x_1, x_2] \mapsto [x_1^d, x_1^{d-1}x_2, \dots, x_2^d]$. Mostre que v_d é um morfismo. Mostre que sua imagem é a subvariedade definida pelos menores 2×2 da matriz $\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_d \\ y_2 & \dots & y_{d+1} \end{pmatrix}$.

76. Seja $v : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5$ definido por $[x_1, x_2, x_3] \mapsto [x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2]$. Mostre que v é um isomorfismo sobre sua imagem. Mostre que esta é definida pelos menores 2×2 de uma matriz simétrica.

77. Sejam m, d inteiros positivos e sejam $z_i = x_1^{i(1)} \dots x_m^{i(m)}$ os monômios de grau d nas variáveis $x_1, \dots, x_{m+1}$ ordenados lexicograficamente. Seja

$$v : \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^{N-1}$$

$$[x_1, \dots, x_{m+1}] \mapsto [z_{i_1}, \dots, z_{i_N}].$$

Mostre que v é um isomorfismo sobre sua imagem. Mostre que esta é definida pelas equações quadráticas $y_i y_j = y_k y_l$, onde i, j, k, l denotam vetores tais que $i + j = k + l$, ou seja, $z_i z_j = x_1^{i(1)+j(1)} \dots x_m^{i(m)+j(m)} = z_k z_l$.

Capítulo 5

dimensão

5.1 corpo de funções

Seja X uma variedade irredutível. Para cada aberto afim $U \subseteq X$, seu anel de coordenadas $R_U = \mathcal{O}_X(U)$ é um domínio de tipo finito sobre $\mathbb{C}$. Ou seja, existe um homomorfismo sobrejetivo de $\mathbb{C}$ -álgebras, $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \twoheadrightarrow R_U$, cujo núcleo é um ideal primo. Seja K_U o corpo de frações de R_U . Note que, passando a um aberto principal qualquer de U , o corpo de frações não muda. Segue do lema abaixo que o corpo K_U independe da escolha do aberto afim (Leitor: verificar!). Denotaremos por $K(X)$ ou simplesmente K se claro no contexto, e chamamos de **corpo de funções racionais** de X .

5.1.1. Lema. *Sejam U, U' abertos afins de uma variedade e sejam R, R' seus anéis de coordenadas. Seja $x \in U \cap U'$. Então existem $f \in R, f' \in R'$ tais que $x \in U'_{f'} = U_f$.*

Prova. Existe um aberto afim $V \subseteq U \cap U'$ tal que $x \in V$. Seja $A = \mathcal{O}(V)$. Certamente temos $x \in U_g \subseteq V, x \in U'_{g'} \subseteq U_g$ para algum $g \in R, g' \in R'$. Podemos escolher $h \in A$ tal que $x \in V_h \subseteq U'_{g'}$. A restrição de h a U_g se escreve $h = k/g^n, k \in R$; idem $h = k'/g'^n, k' \in R'$. Se $y \in U_{kg}$ então $y \in V_h \subseteq U'_{k'g'}$. Reciprocamente, se $y \in U'_{k'g'}$, então $y \in U_{g'} \subseteq U_g$ e $h(y) \neq 0$. Segue $U_f = U'_{f'}$ com $f = kg, f' = k'g'$. $\square$

Por construção, o corpo de funções K é uma extensão finitamente gerada de $\mathbb{C}$. Sabe-se então que existe uma extensão intermediária,

$$\mathbb{C} \subseteq L \subseteq K$$

tal que

- $L|\mathbb{C}$ é uma extensão transcendente pura;
- $K|L$ é uma extensão algébrica finita.

A primeira condição acima significa que $L = \mathbb{C}(x_1, \dots, x_r)$, extensão gerada por elementos algebricamente independentes sobre $\mathbb{C}$, formando uma base de transcendência de $K|\mathbb{C}$. O número r , chamado o grau de transcendência, independe da base de transcendência. A **dimensão** de X é definida como o grau de transcendência de $K|\mathbb{C}$. Em símbolos,

$$\dim X = \text{trdeg}_{\mathbb{C}} K.$$

Exercícios. 78. $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{P}^n$ têm dimensão n . Qual a dimensão da grassmanniana?

79. Temos $\dim X = 0 \iff X$ se reduz a um ponto.

5.1.2. Lema. A dimensão de qualquer hipersuperfície irredutível em $\mathbb{C}^n$ é igual a $n - 1$.

Prova. Seja $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, irredutível. Podemos supor que a variável X_n ocorre efetivamente em f . O anel de coordenadas da hipersuperfície $\mathbb{V}(f)$ se escreve

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/\langle f \rangle.$$

O corpo de frações $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$ é algébrico sobre $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_{n-1})$, já que $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. Essa relação de dependência algébrica de x_n sobre os demais x_i é honesta pelo mesmo argumento que usaremos para mostrar que $x_1, \dots, x_{n-1}$ são algebricamente independentes sobre $\mathbb{C}$. Se fossem dependentes, haveria um polinômio $g(X_1, \dots, X_{n-1})$ tal que $g(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$. Isso implica que f divide g em $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, absurdo pois X_n não figura em g . Concluimos que o grau de transcendência de $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$ sobre $\mathbb{C}$ vale $n - 1$, como queríamos. $\square$

Para o caso geral, necessitaremos de alguns preliminares algébricos.

5.1.3. Lema. Seja $L \supseteq K$ uma extensão finita de corpos, e seja M um L -espaço vetorial de dimensão finita. Seja $T : M \rightarrow M$ um operador L -linear. Então vale a fórmula de transitividade para os determinantes,

$$\det_K(T) = \det_K(\det_L(T)),$$

onde $\det_L(T)$ é considerado como o operador K -linear em L definido por multiplicação.

Prova. O resultado é trivial ($0=\det(0)$) se T não for bijetivo.

Suponhamos então T bijetivo. Nesse caso, podemos escrever T como a composição de operadores elementares, *i.e.*, cuja matriz, μ , com respeito a uma base de M como L -espaço é elementar. Pela multiplicatividade do determinante, segue que basta provar a fórmula para operadores elementares. Suponha inicialmente a matriz na forma

$$\mu_L(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

correspondente à operação “somar à 2ª linha x vezes a 1ª”, para algum $x \in L$. Temos claramente $\det_K(\det_L(T)) = 1$. Já no 1º membro da fórmula, devemos calcular o determinante da matriz de T considerado como operador K -linear. Seja $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ base de L sobre K e seja $\{m_1, \dots, m_s\}$ base de M sobre L . Temos então a base $\{\lambda_1 m_1, \dots, \lambda_r m_1, \lambda_1 m_2, \dots, \lambda_r m_2, \dots\}$ de M sobre K . Calculamos $T\lambda_i m_1 = \lambda_i(m_1 + x m_2)$, $T\lambda_i m_2 = \lambda_i m_2$. Isso mostra que a matriz acima deve ser substituída agora pela matriz formada por blocos $r \times r$,

$$\mu_K(T) = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu_K(x) & I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix}$$

colocando um bloco identidade no lugar de cada 1 diagonal, e mais o bloco $\mu_K(x) = (\kappa_{ij})$ do operador K -linear definido pela multiplicação por x em L , *i.e.*, $x\lambda_i = \sum \kappa_{ij}\lambda_j$. Segue facilmente $\det_K = 1$, completando a verificação no presente caso. Para a operação elementar “multiplicação de uma linha (digamos a 1ª) por $x \in L$, $x \neq 0$ ” procede-se de forma análoga. A matriz $\mu_L(T)$ é agora diagonal, com x na posição (1,1) e bloco identidade no restante. A matriz $\mu_K(T)$ apresenta o bloco $r \times r$ dado por $\mu_K(x)$ e blocos identidade no restante. Achamos $\det_K(x)$ em ambos os membros da fórmula. $\square$

Suponhamos na proposição acima que

- o espaço M é também uma extensão finita do corpo L e
- o operador T é dado pela multiplicação por um elemento m de M .

Concluimos em particular a seguinte fórmula de transitividade para a norma de uma extensão de corpos.

5.1.4. Corolário. *Seja $M \supseteq L \supseteq K$ uma torre de extensões finitas de corpos. Seja $\nu_{M|L} : M \rightarrow L$ a norma, i.e., a aplicação multiplicativa definida por $\nu_{M|L}(m) = \det_L(m)$. Então temos*

$$\nu_{M|K}(m) = \nu_{L|K}(\nu_{M|L}(m))$$

para cada $m \in M$. □

Exercícios. 80. *Seja k um corpo, $M = k(x) =$ corpo de funções racionais em uma variável. Sejam $L = k(x^2), K = k(x^6)$. Calcule $\nu_{M|L}(x)$. Idem para $\nu_{M|K}(x)$.*

5.1.5. Lema. *Seja $M \supseteq K$ uma extensão finita e seja $\mu \in M$. Seja $p_\mu(t) = t^r + \kappa_1 t^{r-1} + \dots + \kappa_r$ o polinômio mínimo de μ sobre K . Então a norma $\nu_{M|K}(\mu) = \pm(\kappa_r)^s$ para algum inteiro s .*

Prova. Usamos a transitividade, considerando a extensão intermediária, $M \supseteq L := K(\mu) \supseteq K$. Temos evidentemente $\nu_{M|L}(\mu) = \mu^s$ onde $s = [M : L]$. Daí vem $\nu_{M|K}(\mu) = \nu_{L|K}(\nu_{M|L}(\mu)) = \nu_{L|K}(\mu^s) = \nu_{L|K}(\mu)^s$. Por fim, lembre que se o grau do polinômio mínimo de um operador linear for igual ao grau do polinômio característico (o qual coincide com a dimensão do espaço $K(\mu)$ sobre K), esses polinômios são idênticos. Ora, o termo constante do polinômio característico é igual a $\pm$ o determinante. □

5.1.6. Lema. *Seja $A \subset B$ uma extensão de domínios. Seja $b \in B$ inteiro sobre A . Seja $K \subseteq L$ a extensão dos corpos de frações de A e B . Se A for integralmente fechado então os coeficientes do polinômio mínimo de b sobre K estão todos em A .*

Prova. Por simplicidade, daremos o argumento apenas no caso em que A é um DFU. Seja $p(t) = t^r + a_1 t^{r-1} + \dots + a_r \in A[t]$ um polinômio de grau mínimo que expressa a integralidade de b sobre A . Afirmamos que $p(t)$ é irredutível em $A[t]$. Com efeito, se existir uma decomposição $p(t) = f(t)g(t)$ com $f(t), g(t) \in A[t]$, ambos não constantes, segue que os coeficientes líderes de $f(t)$ e de $g(t)$ são unidades em A . Poderíamos então ajustar para que $f(t), g(t)$ sejam ambos mônicos. Lembrando que $f(b)g(b) = 0$ e B é um domínio, deduziríamos uma relação inteira de grau menor. Pelo lema de Gauss, $p(t)$ continua irredutível em $K[t]$ e portanto, coincide com o polinômio mínimo. □

Na aplicação que apresentamos a seguir, basta o caso DFU. O caso geral pode ser visto em ??.

5.1.7. Lema. *Seja $S = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ um anel de polinômios a coeficientes no corpo $\mathbb{C}$. Seja $I \subset S$ um ideal tal que S/I é um espaço vetorial de dimensão finita d . Então $\mathbb{V}(I)$ contém no máximo d elementos.*

Prova. Lembramos (TZH) que os pontos de $\mathbb{V}(I)$ estão em bijeção com a coleção dos ideais maximais de S contendo o ideal I . Sejam $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_t$ ideais maximais contendo I , distintos dois a dois. Assim, temos $I \subseteq \cap \mathfrak{m}_i$. Segue a sobrejeção $S/I \twoheadrightarrow S/\cap \mathfrak{m}_i$. Portanto, $\dim(S/\cap \mathfrak{m}_i) \leq d$. Por um argumento semelhante ao da prova do teorema dos restos chinês, vale $S/\cap \mathfrak{m}_i \xrightarrow{\sim} \prod S/\mathfrak{m}_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^t$. (Alternativamente, dados t pontos distintos $P_1, \dots, P_t$ em $\mathbb{C}^n$ e dados t elementos quaisquer $c_1, \dots, c_t \in \mathbb{C}$, existe polinômio $f \in S$ tal que $f(P_i) = c_i$, $i = 1..t$.) Logo $t \leq d$. $\square$

5.1.8. Teorema. *Seja X uma variedade afim irredutível e seja $f \in \mathcal{O}_X(X)$, $f \neq 0$. Então cada componente de $\mathbb{V}(f)$ tem dimensão igual a $\dim X - 1$.*

Prova. Seguimos o roteiro indicado por D. Mumford, *The red book*. Para aquecer, já vimos o caso em que $X = \mathbb{C}^n$.

Para o caso geral, seja W uma componente de $\mathbb{V}(f)$. Passando a um aberto afim se necessário, podemos supor $\mathbb{V}(f)=W$. Seja $R = \mathcal{O}(X)$, anel de coordenadas.

Normalização de Noether: $\exists S = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \hookrightarrow R$, extensão inteira do anel de polinômios. Seja $\mathfrak{q} = \sqrt{f}$ o ideal de W em R e seja $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap S$. Temos a extensão inteira $S/\mathfrak{p} \hookrightarrow R/\mathfrak{q}$. Logo, $\dim W$ é igual a $\dim \mathbb{V}(\mathfrak{p})$. Pelo caso já visto, resta mostrar que $\mathfrak{p}$ é principal. Seja $t^m + g_{m-1}t^{m-1} + \dots + g_0$ o polinômio mínimo de f sobre $K = \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$. Pelo lema 5.1.6, temos que cada $g_i \in S$. A relação $f^m + g_{m-1}f^{m-1} + \dots + g_0 = 0$ implica que $g_0 \in \mathfrak{p}$. Mostraremos que $\mathfrak{p} = \sqrt{\langle g_0 \rangle}$. Ora, dado $h \in \mathfrak{p}$, temos $h \in \mathfrak{q} = \sqrt{\langle f \rangle}$; logo vale $h^r = af$ para algum $a \in R$. Aqui entra a norma $\nu : K(X) \rightarrow K(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$. Sabemos que a norma numa torre de extensões $K \hookrightarrow E \hookrightarrow F$ satisfaz (1) a regra de transitividade, $\nu_{F/K}(\varphi) = \nu_{E/K}(\nu_{F/E}(\varphi))$; (2) $\nu_{K(f)/K} = \pm g_0$. Logo, calculamos $\nu(h^r) = \nu(a)\nu(f)$. Pelo argumento de que os coeficientes do polinômio mínimo estão em S , deduzimos que uma potência de h é um múltiplo, em S , de uma potência de g_0 , como desejado. $\square$

Definimos a dimensão de uma variedade como o máximo das dimensões de suas componentes irredutíveis.

Exercícios. 81. Veja na página 69 do Atiyah-MacDonald um exercício-roteiro para demonstração do lema de normalização de Noether.

82. Seja X uma variedade irredutível. Mostre que se $Z \subseteq X$ é fechado e $Z \neq X$ então $\dim Z < \dim X$.

5.1.9. Exemplo. Seja $X = \mathbb{V}(xy - zw) \subset \mathbb{C}^4$. Temos então $\dim X = 3$, $\dim \mathbb{V}(xy - zw, x) = 2 = \dim \mathbb{V}(xy - zw, x, z)$.

5.1.10. Corolário. Seja X uma variedade irredutível e sejam $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}(X)$. Então cada componente de $\mathbb{V}(f_1, \dots, f_r)$ tem dimensão $\geq \dim X - r$.

Prova. Seja Z uma componente irredutível de $\mathbb{V}(f_1, \dots, f_r)$. Passando a um aberto afim adequado, podemos supor X afim. Procedemos por indução sobre r . Suponhamos $r = 1$. Se $f_1 = 0$, temos $Z = X$ e mais nada a verificar. Se $f_1 \neq 0$, podemos usar 5.1.8. Para a etapa indutiva, substituímos X por uma componente de $\mathbb{V}(f_1)$ contendo Z . $\square$

5.1.11. Observação. O resultado anterior é falso para X redutível: tome em $\mathbb{C}^3$ a união do plano $z = 0$ com a reta $x = y = 0$, e considere a interseção com plano $z = 1$.

5.1.12. Lema. Sejam X e Y variedades e sejam $Z \subseteq X, W \subseteq Y$ componentes irredutíveis. Então $Z \times W$ é componente irredutível de $X \times Y$ e toda componente aqui é desta forma.

Prova. O lema (4.1.3, p. 34) mostra que $Z \times W$ é irredutível. Suponha $Z \times W \subseteq T$ para algum fechado irredutível $T \subseteq X \times Y$. Seja $T_1 \subseteq X$ o fecho da imagem de T em X . Temos assim $Z \subseteq T_1$ e portanto $Z = T_1$. Similarmente, $W = T_2$. Segue $T \subseteq Z \times W$ e portanto, $Z \times W$ é uma componente. O restante da argumentação fica como exercício. $\square$

5.1.13. Lema. Sejam X e Y variedades. Então

$$\dim X \times Y = \dim X + \dim Y.$$

Prova. Podemos supor X, Y afins e irredutíveis. As projeções induzem inclusões naturais $K(X) \subseteq K(X \times Y) \supseteq K(Y)$. Sabemos que o anel de coordenadas de $X \times Y$ é gerado pelas funções coordenadas provenientes de X e de Y . Segue facilmente que, se $x_1, \dots, x_r$ e $y_1, \dots, y_s$ são bases de transcendência de $K(X)$ e de $K(Y)$ respectivamente, então $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s$ é base de transcendência de $K(X \times Y)$. $\square$

5.1.14. Proposição. *Sejam X e Y subvariedades de $\mathbb{C}^n$ de codimensões r, s . Então cada componente de $X \cap Y$ tem codimensão $\leq r + s$.*

Prova. Sabemos que $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$. Temos também $X \cap Y \xrightarrow{\sim} (X \times Y) \cap \Delta$, $\Delta = \text{diagonal de } \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. Como Δ é definida por n equações, segue o resultado. $\square$

5.1.15. Observação. Note que o resultado anterior não afirma que exista uma componente irredutível de $X \cap Y$. Efetivamente, essa interseção pode ser vazia, e.g., $\mathbb{V}(xy - 1) \cap \mathbb{V}(x)$.

Observe também que o ambiente em que a interseção ocorre é importante para a validade da prop. 5.1.14. Por exemplo, considere o cone $Z = \mathbb{V}(xy - zw) \subset \mathbb{C}^4$. Sejam $X = \mathbb{V}(x, z), Y = \mathbb{V}(y, w)$, ambos de codimensão 1 em Z (e de codimensão 2 em $\mathbb{C}^4$). Temos entretanto $\text{codim}_Z X \cap Y = 3 > \text{codim}_Z X + \text{codim}_Z Y = 2$. A singularidade de Z (no vértice) é o vilão da estória, como veremos oportunamente.

5.1.16. Lema. *Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$ uma subvariedade fechada e seja $\hat{X} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ o cone associado. Então $\dim \hat{X} = \dim X + 1$.*

Prova. Lembramos que o cone associado é a subvariedade de $\mathbb{C}^{n+1}$ dada pelo ideal homogêneo que define X em $\mathbb{P}^n$. Podemos supor X irredutível e $X_1 = X \cap \mathbb{P}_{x_1}^n \neq \emptyset$. Seja $\hat{X}_1 = \hat{X} \cap \mathbb{V}(x_1 - 1)$. Sabemos que $\mathbb{V}(x_1 - 1)$ é isomorfo ao aberto básico $\mathbb{P}_{x_1}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$. É claro que $\hat{X}_1$ e X_1 se correspondem por esse isomorfismo. Logo, suas dimensões coincidem. Segue que

$$\dim X = \dim X_1 = \dim \hat{X}_1 = \dim \hat{X} - 1.$$

$\square$

5.1.17. Observação. O resultado acima decorre também do teorema da dimensão das fibras.

5.1.18. Corolário. *Sejam X e Y subvariedades fechadas de $\mathbb{P}^n$ de codimensões r, s . Se $r + s \leq n$ então $X \cap Y \neq \emptyset$ e cada componente de $X \cap Y$ tem codimensão $\leq r + s$.*

Prova. Só a não vacuidade da interseção merece cuidado. Passamos aos cones $\hat{X}, \hat{Y} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$. As codimensões não mudam. Mas agora temos o vértice $0 \in \hat{X} \cap \hat{Y}$ garantindo a existência de alguma componente irredutível. Observando que o cone sobre a interseção é evidentemente a interseção dos cones, podemos escrever $\text{codim } X \cap Y = \text{codim } \widehat{X \cap Y} \leq r + s$. $\square$

5.1.19. Corolário. *Sejam $F_1, \dots, F_n$ hipersuperfícies em $\mathbb{P}^n$. Então*

$$\bigcap F_i \neq \emptyset.$$

□

5.1.20. Observação. O teorema de Bézout afirma que, caso a interseção de n hipersuperfícies seja finita, então o número de pontos, contados com multiplicidades naturais, é igual ao produto dos graus. A finitude da interseção vale para escolha genérica de hipersuperfícies, como mais uma feliz consequência do teorema da dimensão das fibras.

5.1.21. Lema. *Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo. Se $\dim X < \dim Y$ então $f(X)$ está contida em uma subvariedade fechada própria de Y .*

Prova. Substituindo X, Y por abertos afins de componentes que realizam a dimensão, podemos supô-los afins, irredutíveis. (Leitor: detalhes?) Se $f : X \rightarrow Y$ fosse dominante, teríamos uma inclusão de anéis de coordenadas, $\mathcal{O}(Y) \subseteq \mathcal{O}(X)$. Passando aos corpos de frações, temos a extensão de corpos $K(Y) \subseteq K(X)$. Mas isso acarreta a desigualdade de graus de transcendência, $\dim Y \leq \dim X$. □

5.1.22. Lema. *Seja X uma variedade afim, $\dim X = d$, $x \in X$. Então $\exists f_0, f_1, \dots, f_d \in \mathcal{O}(X)$ tal que*

- $f_0(x) \neq 0$ e
- $\mathbb{V}(f_1, \dots, f_d) \cap X_{f_0} = \{x\}$.

Podemos assim interpretar a dimensão de uma variedade X como o número mínimo de equações necessárias para definir qualquer ponto $x \in X$ em alguma vizinhança afim de x .

Prova. Mais uma vez, normalização de Noether:

$$\begin{array}{ccccc} X & \mathcal{O}(X) & = & B & \supset & \mathfrak{m}_x & \text{maximal} \\ \downarrow & & & \cup & \text{inteira} & & \\ \mathbb{C}^r & & & S & = & \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d], & d = \dim V \end{array}$$

Note que $\mathfrak{m}_x \cap S = \mathfrak{n} = \langle f_1, \dots, f_d \rangle$, ideal maximal de S , correspondente à imagem do ponto $x \in X$ em $\mathbb{C}^d$. A inclusão $S \subseteq B$ dada por normalização de Noether corresponde a um morfismo $V \rightarrow \mathbb{C}^d$. Visto que B é um S -módulo finitamente gerado, segue que $B/\mathfrak{n}B$ é um $S/\mathfrak{n}(= \mathbb{C})$ -espaço vetorial de dimensão finita. Pelo lema (5.1.7, p. 47), temos que $\mathbb{V}(\mathfrak{n}B) = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_d)$ é finito e contém x (pois $\mathfrak{m}_x \supseteq \mathfrak{n}B$). Temos assim

$$\mathbb{V}(\mathfrak{n}B) = \mathbb{V}(\mathfrak{m}_x) \cup \mathbb{V}(\mathfrak{m}_1) \cup \cdots \cup \mathbb{V}(\mathfrak{m}_t) = \mathbb{V}(\mathfrak{m}_x \cap \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_t)$$

para alguma escolha de ideais maximais distintos $\mathfrak{m}_i$. Agora tome

$$f_0 \in \left(\bigcap_{i \neq x} \mathfrak{m}_i \right) \setminus \mathfrak{m}_x.$$

Temos assim $\mathbb{V}(f_1, \dots, f_d) \cap X_{f_0} = \{x\}$. □

5.1.23. Observação. Um argumento mais geométrico é o seguinte. Sejam $X_1, \dots, X_r$ as componentes irredutíveis de X que passam por x . Seja $m = \max\{\dim X_i \mid i = 1..r\}$. Se $m = 0$ então $r = 1, X_1 = \{x\}$. Escolhemos f_0 de maneira a evitar as demais componentes fora de x . Se $d = \dim X > 0$, fazemos $f_1 = \cdots = f_d = 0$; se $d = 0$ interpretamos $f_1, \dots, f_d$ como a lista vazia e $\mathbb{V}(\emptyset) = X$. Se $m > 0$, escolhemos um hiperplano de equação f_1 contendo x e nenhuma dessas componentes. Trocamos X por $\mathbb{V}(f_1)$ e procedemos por indução.

Se X é uma variedade e $x \in X$, definimos $\dim_x X$ como o máximo das dimensões de componentes de X contendo x .

O argumento delineado acima mostra efetivamente o resultado seguinte.

5.1.24. Lema. *Seja x um ponto de uma variedade afim X e seja $m = \dim_x X$. Então existem m funções regulares que definem x em uma vizinhança de X . Reciprocamente, se $f_0, f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}(X)$ são tais que $f_0(x) \neq 0$ e $\mathbb{V}(f_1, \dots, f_m) \cap X_{f_0} = \{x\}$, então $\dim_x X \leq m$.*

Prova. Para a recíproca, trocando X por X_{f_0} podemos supor $f_0 = 1$. Basta agora aplicar (5.1.10, p. 48) a cada componente de X passando por x . □

5.1.25. Lema. *Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo dominante de variedades afins tal que $f^* : \mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ é uma extensão inteira. Então $f(X) = Y$, i.e., f é sobrejetivo.*

Prova. Sejam $A = \mathcal{O}(Y)$, $B = \mathcal{O}(X)$. Podemos escrever $B = A[b_1, \dots, b_r]$. Isto corresponde a uma fatoração de f como composição de morfismos,

$$X = X_r \xrightarrow{f_r} \cdots \xrightarrow{f_2} X_1 \xrightarrow{f_1} Y,$$

com anéis de coordenadas $\mathcal{O}(X_1) = A[b_1]$, $\mathcal{O}(X_2) = A[b_1, b_2]$, etc. Basta mostrar agora que f é sobrejetivo sob a hipótese adicional de que $B = A[b]$, com b satisfazendo uma relação da forma

$$(\heartsuit) \quad b^n + a_1(y)b^{n-1} + \cdots + a_n(y) = 0, \quad a_i \in A.$$

Dado $y \in Y$, seja $\mathfrak{m}_y \subset A$ o ideal maximal correspondente. Mostremos que existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$; equivalente: queremos $f^{\star-1}\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_y$. Basta encontrar ideal maximal $\mathfrak{m}_x \subset B$ tal que $\mathfrak{m}_x \supseteq f^{\star}\mathfrak{m}_y$. Isto é garantido desde que $1 \notin \mathfrak{m}_y B$. Ora, se $1 \in \mathfrak{m}_y \cdot B$, escrevemos uma relação

$$1 = m_0 + m_1 b + \cdots + m_{n-1} b^{n-1}, \quad m_i \in \mathfrak{m}_y,$$

usando $(\heartsuit)$.

Multiplicando por b e sempre usando $(\heartsuit)$, vem

$$b^i = m_{i,0} + m_{i,1}b + \cdots + m_{i,n-1}b^{n-1}.$$

Matricialmente,

$$\begin{pmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} & \cdots & m_{0,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n-1,0} & m_{n-1,1} & \cdots & m_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ \vdots \\ b^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ \vdots \\ b^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Isto significa que 1 é autovalor. Resulta uma relação

$$0 = \det(I - (m_{ij})) = 1 + m, \quad m \in \mathfrak{m}_y,$$

absurdo. □

5.2 teorema da dimensão das fibras.

(TDF) *Seja $\pi : V \longrightarrow W$ morfismo dominante, V, W irredutíveis. Então*

- (1) *toda componente de $\pi^{-1}(w)$, ($w \in W$) tem $\dim \geq \dim V - \dim W$;*
- (2) *$\exists W_0 \subseteq W$ aberto denso tal que $W_0 \subseteq f(V)$ e vale “=” no ítem anterior.*

Prova. (1) $w \in W \Rightarrow \exists W_w$ aberto afim tal que

$$\{w\} = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_n) \cap W_w, \quad \text{onde } n = \dim W,$$

e as f_i são funções regulares em W_w . Logo, $\pi^{-1}(w) = \mathbb{V}(\pi^{\star}f_1, \dots, \pi^{\star}f_n)$. Pelo corolário 5.1.10, deduzimos que cada componente tem $\dim \geq \dim V - n$.

(2) (Shafarevich) Primeiro, reduziremos ao caso em que é tudo afim. De fato, valendo na situação afim, recobrimos W por um número finito de W_i 's abertos afins e cada $\pi^{-1}W_i$ por abertos afins V_{ij} . É claro que os V_{ij} recobrem

V . Por hipótese, para cada restrição $\pi : V_{ij} \rightarrow W_i$ existe um aberto denso W_{0ij} que funciona. Façamos $W_0 = \cap W_{0ij}$. Tome $w \in W_0$ e seja Z componente de $\pi^{-1}w$. Se Z encontra V_{ij} , o caso afim aplicado a $V_{ij} \rightarrow W_i$ mostra que $\dim Z = \dim V - \dim W$.

Doravante, tudo afim.

$$\begin{array}{ccc} K & \hookrightarrow & L \quad (\text{corpos de funções}) \\ \cup & & \cup \\ A & \hookrightarrow & B \quad (\text{anéis de coordenadas}) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{O}(W) & & \mathcal{O}(V) \end{array}$$

Seja $b_1, \dots, b_d \in L$ uma base de transcendência de $L|K$. Passando a um aberto principal de V , podemos supor $b_1, \dots, b_d \in B$. Escrevamos

$$\begin{aligned} B &= A[b_1, \dots, b_d, b_{d+1}, \dots, b_N] \text{ com } d = \dim B - \dim A, \\ b_1, \dots, b_d &\text{ algebricamente independentes sobre } K \text{ e} \\ b_{d+1}, \dots, b_N &\text{ algébricos sobre } K(b_1, \dots, b_d). \end{aligned}$$

Note que essa escritura de B corresponde a uma fatoração de $V \xrightarrow{\pi} W$,

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\pi_2} W \times \mathbb{C}^d \xrightarrow{\pi_1} W \\ (B &\supseteq A[b_1, \dots, b_d] \supseteq A) \end{aligned}$$

Tomamos, para cada $\underline{j} = 1 \leq j_1 < \dots < j_{d+1} \leq N$ um polinômio não nulo $F_{\underline{j}}(x_1, \dots, x_{d+1}) \in A[x_1, \dots, x_{d+1}]$ tal que $F_{\underline{j}}(b_{j_1}, \dots, b_{j_{d+1}}) = 0$, garantido pelo grau de transcendência de $L|K$. Destaquemos $\underline{i} = 1, \dots, d, d+i$, $F_{\underline{i}}(x_1, \dots, x_d, y) = \alpha_{i,0}(x_1, \dots, x_d)y^{e_i} + \dots \in A[x_1, \dots, x_d, y]$, $\alpha_{i,0} \neq 0$. Seja $\mathcal{I}_{\underline{j}} \subseteq A$ o ideal gerado pelos coeficientes do polinômio $F_{\underline{j}}$. Seja Z a união dos fechados próprios $\mathbb{V}(\mathcal{I}_{\underline{j}})$. Existe $a \in A$ tal que o aberto principal $W_a \neq \emptyset$ é disjunto de Z . Passemos a esse aberto, renomeando $W = W_a$. Assim, para todo $w \in W$, cada polinômio $\overline{\alpha_{i,0}}(x_1, \dots, x_d)$ é não nulo, onde indicamos por $\overline{\alpha_{i,0}}$ a restrição à fibra sobre w ; consequentemente, o mesmo vale para o polinômio $\overline{F_i}(x_1, \dots, x_d, y) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d, y]$. Seja $U \subseteq \mathbb{C}^d \times W$ o aberto principal dado por $\alpha = \prod \alpha_{i,0}$. A imagem de U em W é um aberto W_0 (cf. exercício ??, p. ??). Para cada $w \in W_0$, por construção, a restrição de $\pi_2 : V \rightarrow \mathbb{C}^d \times W$ sobre este aberto é um mapa finito, logo sobrejetor (cf. 5.1.25). Em particular, temos $\pi^{-1}(w) \neq \emptyset$, e portanto o aberto W_0 está contido na imagem. O anel de coordenadas de cada componente da fibra $\pi^{-1}(w)$ é um quociente, $\overline{B}$, de B . Temos evidentemente $\overline{B} = \mathbb{C}[\overline{b}_1, \dots, \overline{b}_N]$. Visto que $F_{\underline{j}}(b_{j_1}, \dots, b_{j_{d+1}}) = 0$ em B , segue $\overline{F_{\underline{j}}}(\overline{b}_{j_1}, \dots, \overline{b}_{j_{d+1}}) = 0$ em $\overline{B}$. Isto fornece uma relação não trivial para a escolha de $d+1$ quaisquer entre os $\overline{b}_1, \dots, \overline{b}_N$. $\square$

5.2.1. Observação. Note que, na afirmação (1) do TDF, se $\pi^{-1}(w) = \emptyset$ então a conclusão vale por vacuidade, já que não existe componente para contradizer o enunciado. Reveja em detalhes o exemplo do morfismo $\mathbb{C}^2 \ni (x, y) \mapsto (x, xy) \in \mathbb{C}^2$.

A coleção W' dos pontos $w \in W$ tais que a desigualdade da afirmação (1) é estrita, *i.e.*, onde $\dim \pi^{-1}(w) > \dim V - \dim W$, está contida no complementar de um aberto denso de W (garantido pela afirmação (2) do TDF). Note entretanto que o lugar onde vale “=” no (TDF)(5.2, p. 52) pode não ser aberto, cf. a observação (5.3.7, p. 56).

Exercícios. 83. *Seja $\phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por $(\phi_1, \phi_2), \phi_i \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$. Suponha que existem polinômios $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ tais que*

$$x_1^n + a_1(\phi_1, \phi_2)x_1^{n-1} + a_2(\phi_1, \phi_2)x_1^{n-2} + \dots + a_n(\phi_1, \phi_2) = 0.$$

$$x_2^m + b_1(\phi_1, \phi_2)x_2^{m-1} + b_2(\phi_1, \phi_2)x_2^{m-2} + \dots + b_m(\phi_1, \phi_2) = 0.$$

Mostre que (i) ϕ é sobrejetivo e (ii) para todo polinômio irredutível $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ existe um polinômio irredutível g tal que $\phi(\mathbb{V}(f)) = \mathbb{V}(g)$. Exemplo explícito com $m, n \geq 2$.

5.3 primeiras aplicações do TDF

Inicialmente, um resultado sobre a natureza topológica da imagem.

5.3.1. Proposição. *Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo de variedades e seja $Z = \overline{f(X)}$ a aderência de sua imagem. Então existe um aberto não vazio de Z contido em $f(X)$.*

Prova. Visto que a aderência de uma união finita é a união das aderências, podemos supor X irredutível e, trocando Y por Z , supor f dominante. Pelo TDF, existe um aberto de Y contido em $f(X)$. $\square$

5.3.2. Corolário. (Construtibilidade da imagem.) *Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo de variedades. Então, a imagem $f(X)$ é um subconjunto construtível de Y , *i.e.*, uma união finita de interseções de abertos e fechados.*

Prova. Reduz-se facilmente ao caso X irredutível e f dominante. O caso $\dim Y = 0$ não oferecendo dificuldade, suponhamos $\dim Y > 0$. Seja $U \subset f(X)$ subconjunto não vazio e aberto em Y , como garantido pelo tdf (5.2, p. 52). Seja $Z = Y \setminus U$. Temos $\dim Z < \dim Y$. Por indução, $f(f^{-1}(Z))$ é construtível em Z , e portanto também em Y . O resultado segue notando que $f(X) = U \cup f(f^{-1}(Z))$. $\square$

5.3.3. semicontinuidade da dimensão das fibras..

5.3.4. Proposição. *Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo de variedades. Então, para cada inteiro k , o subconjunto*

$$f^{(k)} = \{x \in X \mid \dim_x f^{-1}(f(x)) \geq k\}$$

é fechado em X .

Prova. Argumentamos por indução sobre $n = \dim Y$. Se $n = 0$, óbvio. Para a etapa indutiva, podemos supor X irredutível e f dominante. De fato, valendo nesse caso, podemos restringir f a cada componente irredutível X_i de X . Seja Y_i a aderência de $f(X_i)$ em Y e denotemos $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ o morfismo induzido. Se $x \in f_i^{(k)}$, é claro que $\dim_x f^{-1}(f(x)) \geq \dim_x f_i^{-1}(f_i(x)) \geq k$. Reciprocamente, se $x \in f^{(k)}$, seja $X_i \subseteq X$ uma componente contendo uma componente de $f^{-1}(f(x))$ com dimensão $\geq k$. É imediato que $x \in f_i^{(k)}$. Segue que $f^{(k)} = \bigcup f_i^{(k)}$, união finita de fechados. Seja $r = \dim X - \dim Y$. Doravante, vamos supor X irredutível e f dominante. Se $k \leq r$ então $f^{(k)} = X$. Por outro lado, para $k \geq r + 1$, temos que $f^{(k)}$ está contido em algum fechado $Z \subset X$, imagem inversa de um fechado próprio $W \subset Y$, complementar do aberto denso em que cada componente da fibra tem dimensão r . Aplicamos indução ao morfismo $Z \rightarrow W$. $\square$

5.3.5. Observação. O resultado é particularmente interessante quando o morfismo $f : X \rightarrow Y$ é fechado, *i.e.*, aplica fechados em fechados. Nesse caso, vale o seguinte enunciado de semi-continuidade no contradomínio.

5.3.6. Proposição. *Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo fechado sobrejetivo. Então, para cada inteiro k , o subconjunto $f_{(k)} = \{y \in Y \mid \dim f^{-1}(y) \geq k\}$ é fechado em Y .*

Prova. Novamente, argumentamos por indução sobre $n = \dim Y$ e reduzimos ao caso X (logo Y) irredutível. De fato, valendo nesse caso, podemos restringir f a cada componente irredutível X_i de X e agora tomar $Y_i = f(X_i)$, fechado por hipótese. Denotemos $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ o morfismo induzido. Se $y \in (f_i)_{(k)}$, é claro que $\dim f^{-1}(y) \geq \dim f_i^{-1}(y) \geq k$. Reciprocamente, se $y \in f_{(k)}$, seja $X_i \subseteq X$

uma componente contendo uma componente de $f^{-1}(y)$ com dimensão $\geq k$. É imediato que $y \in (f_i)_{(k)}$. Segue que $f_{(k)} = \bigcup (f_i)_{(k)}$, união finita de fechados. Seja $r = \dim X - \dim Y$. Doravante, vamos supor X irredutível e f sobrejetiva. Se $k \leq r$ então $f^{(k)} = X$. Por outro lado, para $k \geq r + 1$, temos que $f_{(k)}$ está contido em algum fechado próprio $W \subset Y$, complementar do aberto denso em que cada componente da fibra tem dimensão r . Aplicamos indução ao morfismo $f^{-1}W \rightarrow W$. $\square$

5.3.7. Observação. A semi-continuidade falha se omitirmos a hipótese de morfismo fechado. Aprendi o exemplo seguinte com a Carolina Araújo. Seja $g : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ definida por (x, y, z^2) . Note que a imagem inversa da reta $y = 0, z = 1$ tem duas componentes conexas, $L_{\pm} : y = 0, z = \pm 1, x \in \mathbb{C}$. Seja $h : X \rightarrow \mathbb{C}^3$ a explosão de L_+ . A imagem inversa de L_+ é $L_+ \times \mathbb{P}^1$. Seja X^0 obtida pela remoção do subconjunto $\{(0, 0, 1)\} \times \mathbb{P}^1 \subset L_+ \times \mathbb{P}^1$. Por fim, seja $f = g \circ h : X^0 \rightarrow \mathbb{C}^3$ a composição. Agora $f_{(1)} = \{(x, 0, 1) \mid x \neq 0\}$.

Exercícios. 84. *Seja f como na observação acima. Encontre um fechado $Z \subset X^0$ tal que $f(Z)$ não é fechado em $\mathbb{C}^3$. Identifique $f_{(0)} \setminus f_{(1)}$. É aberto?*

85. *Seja n um inteiro > 0 e seja*

$$X = \{(A, V) \in \mathbb{M}(n, n) \times \mathbb{G}\mathbb{r}_1 \mathbb{C}^n \mid AV = 0\}.$$

Todas as fibras de $X \rightarrow \mathbb{G}\mathbb{r}_1 \mathbb{C}^n$ são da mesma dimensão. Qual? Já as fibras de X sobre $Y := \mathbb{M}(n, n)$ são vazias sobre o aberto das matrizes não singulares. A imagem de X em Y é o fechado irredutível formado pelas matrizes de posto $< n$. As fibras sobre a variedade das matrizes de posto $n - 1$ são todas reduzidas a um só ponto. Descreva as fibras sobre a variedade das matrizes de posto $n - k$ para os demais casos. Idem para a situação de matrizes retangulares. Idem para matrizes simétricas.

86. *Seja Y o espaço projetivo cujos pontos correspondem aos coeficientes de polinômios homogêneos de grau d nas variáveis $x_1, \dots, x_4$. Seja $G = \mathbb{G}\mathbb{r}_2 \mathbb{C}^4$ a grassmanniana de retas de $\mathbb{P}^3$. Seja $X = \{(F, \ell) \in Y \times G \mid \ell \subset \mathbb{V}(F)\}$. Mostre que $X \rightarrow G$ (induzida por projeção no 2º fator) tem como fibras um espaço projetivo. Deduza que X é irredutível e calcule sua dimensão. Examine as fibras de X sobre Y para $d = 1, 2, 3, 4$.*

5.4 mais aplicações do TDF

O resultado seguinte generaliza (4.1.3, p. 34); veja também (5.1.13, p. 48).

5.4.1. Proposição. *Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo fechado de variedades. Suponha Y irredutível e que cada fibra é irredutível e de dimensão constante. Então X é irredutível.*

Prova. Sejam $X_1, \dots, X_r \subseteq X$ as componentes irredutíveis distintas. Para cada i tal que $f(X_i) = Y$, seja Y_i um aberto de Y não vazio tal que

$$\dim f_{|X_i}^{-1}(y) = \dim X_i - \dim Y, \forall y \in Y_i,$$

a dimensão esperada, garantido pelo TDF (5.2). Se $f(X_i) \neq Y$, defina $Y_i = Y - f(X_i)$. Seja $U = \bigcap Y_i$. Então U é um aberto denso de Y . Escolha $y_0 \in U$. A irreducibilidade das fibras implica $f^{-1}y_0 \subseteq X_{i_0}$ para algum i , digamos $i = 1$, com $f(X_1) = Y$ em virtude da escolha de y_0 . Logo, $(f_{|X_1})^{-1}(y_0) = f^{-1}y_0$. Para $x \in X_1$ arbitrário, temos $(f_{|X_1})^{-1}(f(x)) \subseteq f^{-1}f(x)$. Comparando dimensões concluímos que esta inclusão é uma igualdade, $(f_{|X_1})^{-1}(f(x)) = f^{-1}f(x)$, $\forall x \in X_1$. Como $f(X_1) = Y$, se $x' \in X$ é arbitrário, segue que existe $x \in X_1$ tal que $f(x') = f(x)$. Logo, temos $x' \in f^{-1}f(x) \subseteq X_1$, e portanto $X = X_1$. $\square$

5.4.2. Observação. $X = \mathbb{V}(xy - 1) \cup \mathbb{V}(x, y) \rightarrow Y = \mathbb{C}$, projeção no eixo dos x tem fibras irredutíveis e de mesma dimensão, mas...

Exercícios. 87. *Seja $\mathbb{P}^N$ o espaço de parâmetros para hipersuperfícies de grau d em $\mathbb{P}^n$ e seja $r \geq 1$. Estamos interessados nas hipersuperfícies que contêm algum subespaço $\mathbb{P}^r$ de $\mathbb{P}^n$. Seja $X = \{(F, \ell) \in \mathbb{P}^N \times \mathbb{G}r_{r+1}\mathbb{C}^{n+1} \mid \ell \subset \mathbb{V}(F)\}$. Mostre que X é irredutível e calcule sua dimensão.*

88. *Mostre que toda superfície cúbica em $\mathbb{P}^3$ contém pelo menos uma reta. Mostre que a superfície quártica genérica não contém retas. Idem para grau maior que 4.*

Capítulo 6

fibrados vetoriais

6.1 exemplo universal

Lembramos que cada $x \in \mathbb{P}^n$ representa uma reta passando pela origem em $\mathbb{C}^{n+1}$. Seja

$$\mathcal{L} = \{(x, v) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid v \in x\} \quad (6.1)$$

Sejam p_1, p_2 as projeções de $\mathcal{L}$ em $\mathbb{P}^n, \mathbb{C}^{n+1}$. A imagem inversa $p_1^{-1}(x) \subseteq \{x\} \times \mathbb{C}^{n+1}$ se identifica, mediante o isomorfismo natural $\{x\} \times \mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{n+1}$, com o subespaço de $\mathbb{C}^{n+1}$ que o ponto x representa. A imagem inversa $p_2^{-1}(v)$ de cada $v \neq 0$ consiste exatamente no par $([v], v)$, onde $[v] \in \mathbb{P}^n$ representa a reta gerada. (Leitor: $p_2^{-1}(0)$?)

Notemos que $\mathcal{L}$ é de fato uma subvariedade quase-projetiva, definida pelo sistema de equações

$$x_i y_j = x_j y_i, \quad 1 \leq i, j \leq n+1, \quad (6.2)$$

onde os x_i denotam coordenadas homogêneas em $\mathbb{P}^n$ e os y_j coordenadas afins em $\mathbb{C}^{n+1}$.

Seja $U_i \subset \mathbb{P}^n$ o aberto básico $x_i \neq 0$. Vamos mostrar que

$$p_1^{-1}U_i \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{C}.$$

Lembramos que $U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$, mediante $(x_1, \dots, x_{n+1}) \leftrightarrow (\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i})$ (omitir $\frac{x_i}{x_i} = 1$). O sistema (6.2) fornece então $(y_1, \dots, y_{n+1}) = y_i(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i})$. A aplicação

$$\begin{aligned} U_i \times \mathbb{C} &\xrightarrow{\varphi_i} p_1^{-1}U_i \subset U_i \times \mathbb{C}^{n+1} \\ (x, t) &\mapsto (x, t(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i})) \end{aligned}$$

é o isomorfismo prometido.

6.2 funções de transição

Mais geralmente, seja $\psi : E \rightarrow X$ um morfismo de variedades. Diremos que ψ (ou simplesmente E) é um **fibrado vetorial** com base X e posto r se existir uma cobertura de X por abertos U_α de maneira que

1. para cada α existe um isomorfismo $\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{\sim} \psi^{-1}U_\alpha$ tal que

$$\psi(\psi_\alpha(x, v)) = x, \forall (x, v) \in U_\alpha \times \mathbb{C}^r;$$

2. para cada α, β , escrevendo $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$, a composição

$$U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{\psi_\alpha} \psi^{-1}U_{\alpha\beta} \xrightarrow{\psi_\beta^{-1}} U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^r$$

é um isomorfismo da forma $(x, v) \mapsto \psi_\beta^{-1}\psi_\alpha(x, v) = (x, \psi_{\beta\alpha}(x)v)$, onde

$$\psi_{\beta\alpha} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \text{GL}(r)$$

é um morfismo. Cada ψ_α é dito uma **trivialização local**; as composições, $\psi_\beta^{-1}\psi_\alpha|_{U_{\alpha\beta}}$ bem como $\psi_{\beta\alpha}$ são chamadas **funções de transição**. O morfismo $\psi : E \rightarrow X$ é chamado de **morfismo estrutural**. Para cada subconjunto $U \subseteq X$ escrevemos $E_U = \psi^{-1}U$ para indicar a restrição de E sobre U .

Note que, restringindo a uma interseção tripla $U_{\alpha\beta\gamma}$, temos $\psi_\gamma^{-1}\psi_\beta\psi_\beta^{-1}\psi_\alpha = \psi_\gamma^{-1}\psi_\alpha$, e portanto, $\psi_{\gamma\beta}\psi_{\beta\alpha} = \psi_{\gamma\alpha}$, chamada **condição de cociclo**.

A restrição de ψ_α a $\{x\} \times \mathbb{C}^r$ equipa cada $E_x = \psi^{-1}(x) \subset E$, $x \in U_\alpha$, com uma estrutura de espaço vetorial. Visto que $\psi_{\beta\alpha}(x)$ é um isomorfismo linear, vemos que a estrutura de espaço vetorial independe da escolha de α .

Um fibrado de posto 1 é também chamado um **fibrado em retas**.

Verifiquemos que $\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{P}^n$ é um fibrado em retas, chamado de fibrado **tautológico** sobre $\mathbb{P}^n$. Para $x \in U_{ij}$, temos $x_i \neq 0 \neq x_j$. Calculamos

$$\begin{aligned} \varphi_j^{-1}\varphi_i(x, t) &= \varphi_j^{-1}\left(x, t\left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)\right) \\ &= \varphi_j^{-1}\left(x, \frac{x_j}{x_i}t\left(\frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, 1, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_j}\right)\right) \\ &= (x, \frac{x_j}{x_i}t). \end{aligned}$$

Temos aqui

$$\varphi_{ji}(x) = \frac{x_j}{x_i} \in \text{GL}(1) = \mathbb{C}^*. \quad (6.3)$$

6.3 homomorfismos

Um **homomorfismo** de fibrados vetoriais $\psi_i : E_i \rightarrow X$ ($i = 1, 2$) sobre uma variedade X é um morfismo $\lambda : E_1 \rightarrow E_2$ tal que

$$1. \psi_2 \lambda = \psi_1;$$

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\lambda} & E_2 \\ & \searrow \psi_1 \quad \swarrow \psi_2 & \\ & X & \end{array} \quad (6.4)$$

$$2. \text{ a restrição } \lambda_x : E_{1x} \rightarrow E_{2x} \text{ às fibras sobre cada } x \in X \text{ é linear.}$$

Um **isomorfismo** de fibrados vetoriais é um homomorfismo que é um isomorfismo de variedades. É imediato que se um homomorfismo λ é isomorfismo, então λ^{-1} também é um homomorfismo.

Exercícios. 89. A composição de homomorfismos de fibrados vetoriais é um homomorfismo de fibrados vetoriais. Idem para a composição de isomorfismos.

90. Seja $\lambda : E_1 \rightarrow E_2$ um homomorfismo bijetivo de fibrados vetoriais. A aplicação inversa λ^{-1} é um morfismo?

6.3.1. Lema. Seja X uma variedade e seja $\{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta. Sejam $\psi_{ij} : U_{ij} \rightarrow \text{GL}(r)$ morfismos satisfazendo a condição de cociclo $\psi_{ij}\psi_{jk} = \psi_{ik}$. Então existe um fibrado vetorial $\psi : E \rightarrow X$ munido de trivializações locais $\psi_i : U_i \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{\sim} E_{U_i}$ satisfazendo a $\psi_i^{-1}\psi_j(x, v) = (x, \psi_{ij}(x)v) \forall i, j \in I, x \in U_{ij}, v \in \mathbb{C}^r$.

Prova. Seja $\tilde{E} = \bigcup U_i \times \mathbb{C}^r$ a união disjunta. Seja $\pi : \tilde{E} \rightarrow E$ o espaço topológico quociente pela relação $(x, v) \sim (x', v') \iff x = x' \in U_{ij}, v' = \psi_{ij}(x)v$.

A restrição π_i de π a cada $U_i \times \mathbb{C}^r$ é um homeomorfismo sobre sua imagem E_i . De fato, π_i é bijetiva e aberta.

Seja $U \subset E$ aberto e seja π_U a restrição de π a $\pi^{-1}(U)$. Definimos

$$\mathcal{O}_E(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \circ \pi_U \in \mathcal{O}_{\tilde{E}}(\pi^{-1}U)\}.$$

Temos assim um feixe de funções em E . Esse feixe torna a aplicação quociente $\pi : \tilde{E} \rightarrow E$ um morfismo de espaços anelados.

Seja $f : E_i \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f \circ \pi_i \in \mathcal{O}_{\tilde{E}}(U_i \times \mathbb{C}^r)$. Então temos $f \in \mathcal{O}_E(E_i)$. De fato, ponha $\tilde{E}_i = \pi^{-1}E_i$; observe que $\tilde{E}_i \cap (U_j \times \mathbb{C}^r) = U_{ij} \times \mathbb{C}^r$. Logo, se $(x, v) \in \tilde{E}_i \cap (U_j \times \mathbb{C}^r)$, temos $f \circ \pi_{\tilde{E}_i}(x, v) = f \circ \pi_i(x, \psi_{ij}(x)v)$, mostrando que $f \circ \pi_{\tilde{E}_i} \in \mathcal{O}_{\tilde{E}}(\tilde{E}_i)$. O mesmo argumento motra que $\pi_i : U_i \times \mathbb{C}^r \rightarrow E_i$ é um isomorfismo de espaços anelados. Portanto, E_i é uma variedade, seguindo que E é uma variedade.

Define-se $\psi : E \rightarrow X$ de maneira evidente, de forma que $\psi^{-1}U_i = E_i \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{C}^r$. Detalhes restantes, por conta do leitor. $\square$

Exercícios. 91. Verifique os detalhes da demonstração anterior.

92. Mostre que, na construção do fibrado E no lema anterior, se X é separado (i.e., diagonal fechada em $X \times X$) então E é separado. A recíproca também vale.

93. (Colagem de variedades.) Seja (X_α) uma família de variedades. Suponha que para cada par de índices α, β seja dado um aberto $X_{\alpha\beta} \subset X_\alpha$ e um isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{\beta\alpha} : X_{\alpha\beta} & \xrightarrow{\sim} & X_{\beta\alpha} \\ \cap & & \cap \\ & X_\alpha & X_\beta \end{array}$$

tal que $\varphi_{\alpha\alpha} = \text{id}$ em $X_{\alpha\alpha} = X_\alpha$ e $\varphi_{\gamma\beta}\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_{\gamma\alpha}$ em $X_{\alpha\gamma} \cap X_{\alpha\beta}$. Mostre que existe uma variedade Y e uma cobertura aberta (Y_α) juntamente com isomorfismos $\varphi_\alpha : X_\alpha \xrightarrow{\sim} Y_\alpha$ tais que $\varphi_\alpha(X_{\alpha\beta}) = Y_\alpha \cap Y_\beta$ e $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha|_{X_{\alpha\beta}} = \varphi_{\beta\alpha}$.

94. Sejam $X_1 = X_2 = \mathbb{C} \supset X_{12} = \mathbb{C}^\star = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Defina $\varphi_{12}(t) = 1/t$, $t \in \mathbb{C}^\star$. Seja Y obtido por colagem como no exercício anterior. Mostre que $Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$. Generalize para $\mathbb{P}^n$.

6.3.2. Lema. Seja $\lambda : E \rightarrow F$ um homomorfismo de fibrados vetoriais sobre uma variedade X . Então existem uma cobertura aberta U_α de X e trivializações locais como no diagrama

$$\begin{array}{ccc} \psi^{-1}U_\alpha & \xrightarrow{\lambda^\alpha} & \eta^{-1}U_\alpha \\ \psi_\alpha \uparrow & & \uparrow \eta_\alpha \\ U_\alpha \times \mathbb{C}^r & \xrightarrow{\lambda_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{C}^s \end{array}$$

onde λ_α é um homomorfismo de fibrados triviais sobre U_α e o mapa λ^α denota a restrição de λ . O homomorfismo λ_α é da forma $(x, v) \mapsto (x, \bar{\lambda}_\alpha(x)v)$. Aqui

$\bar{\lambda}_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{M}(r, s)$ é um morfismo e sua restrição a $U_{\alpha\beta}$ satisfaz

$$\begin{array}{ccc} U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^r & \xrightarrow{\lambda_\alpha} & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^s \\ \psi_\beta^{-1} \psi_\alpha \downarrow & & \downarrow \eta_\beta^{-1} \eta_\alpha \\ U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^r & \xrightarrow{\lambda_\beta} & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^s \end{array} \quad (6.5)$$

Reciprocamente, toda coleção $\bar{\lambda}_\alpha$ nas condições acima provém de um homomorfismo de fibrados.

Prova. O ponto principal é se dar conta de que os fibrados E, F podem ser trivializados sobre uma mesma cobertura. Isto se deduz passando a um refinamento comum. Para a recíproca, usamos $\bar{\lambda}_\alpha$ para definir λ_α e em seguida, λ^α . Estes últimos são compatíveis nas interseções sobre $U_{\alpha\beta}$, definindo assim um homomorfismo $\lambda : E \rightarrow F$. $\square$

O lema anterior significa que, um homomorfismo de fibrados vetoriais pode ser imaginado como uma coleção de matrizes λ_α com entradas funções regulares em abertos U_α de uma cobertura aberta que trivializam os fibrados e satisfazendo a relações de compatibilidade naturais.

6.3.3. Proposição. Sejam E, F fibrados vetoriais sobre uma variedade X , definidos por funções de transição $\psi_{\alpha\beta}, \eta_{\alpha\beta}$ associadas a uma cobertura U_α de X . Então existe um isomorfismo $\lambda : E \rightarrow F$ de fibrados vetoriais se e só se existem morfismos $\bar{\lambda}_\alpha : U_\alpha \rightarrow \text{GL}(r)$ tais que $\eta_{\beta\alpha}(x) = \bar{\lambda}_\beta(x) \psi_{\beta\alpha}(x) \bar{\lambda}_\alpha(x)^{-1}$, $\forall x \in U_{\alpha\beta}$.

Prova. Segue imediatamente do lema anterior. $\square$

6.3.4. Proposição. Seja $\lambda : E \rightarrow F$ um homomorfismo de fibrados vetoriais sobre uma variedade X . Então são equivalentes:

1. λ é injetivo;
2. a restrição $\lambda_x : E_x \rightarrow F_x$ a cada fibra é injetiva;
3. λ é um isomorfismo de E sobre um fechado de F .

Prova. Passando a uma trivialização, podemos supor X afim e que o homomorfismo $\lambda : X \times \mathbb{C}^r \rightarrow X \times \mathbb{C}^s$ se expressa por uma matriz $\bar{\lambda}$ da forma (I, μ) , onde I denota um bloco identidade $r \times r$. Temos assim $\lambda(x, (y_1, \dots, y_r)) = (x, (y_1, \dots, y_r, y_{r+1}, \dots, y_s))$ onde $y_{r+i} = \sum \mu_{ij}(x) y_j$. Isto implica que $\lambda^* :$

$\mathcal{O}_X[z_1, \dots, z_s] \rightarrow \mathcal{O}_X[y_1, \dots, y_r]$ é o homomorfismo sobrejetivo de $\mathcal{O}_X(X)$ -álgebras definido por $\lambda^*(z_i) = y_i, i = 1..s$. Aplicando (2.5.3, p. 17), (2), completamos a verificação de $2 \Rightarrow 3$. As demais implicações são simples. $\square$

Exercícios. 95. *Notação como na demonstração acima, mostre que existem isomorfismos de fibrados vetoriais, $\varphi : X \times \mathbb{C}^r \rightarrow X \times \mathbb{C}^r, \psi : X \times \mathbb{C}^s \rightarrow X \times \mathbb{C}^s$ tais que $\psi \circ \lambda \circ \varphi(x, (y_1, \dots, y_r)) = (x, (y_1, \dots, y_r, 0, \dots, 0))$, i.e., podemos fazer $\mu = 0$.*

6.4 subfibrados vetoriais

Seja $E \xrightarrow{\psi} X$ um fibrado vetorial. Um **subfibrado vetorial** de E é uma subvariedade fechada $S \subset E$ tal $\psi|_S : S \rightarrow X$ é um fibrado vetorial e o mapa de inclusão é um homomorfismo.

Exercícios. 96. *Seja $\lambda : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por $(x, y) \mapsto (x, xy)$. Mostre que λ é um homomorfismo de fibrados em retas sobre $\mathbb{C}$. Descreva núcleo e imagem. São subfibrados?*

97. *Seja X uma variedade afim e seja $Y \subseteq X \times \mathbb{C}^n$ uma subvariedade tal que, para cada $x \in X$ a fibra $Y_x = Y \cap E_x$ é um subespaço vetorial de dimensão constante. Pode-se concluir que $Y \rightarrow X$ é um subfibrado?*

98. *O exemplo mais importante de subfibrado vetorial é o chamado **subfibrado tautológico** sobre a grassmanniana,*

$$\mathcal{S} = \{(x, v) \in \text{Gr}_r \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \mid v \in x\}. \quad (6.6)$$

A restrição de $\mathcal{S}$ sobre a fatia (3.3) produz um isomorfismo $\mathcal{S}_V \xrightarrow{\sim} V \times \mathbb{C}^r$. Cada $(x, y) \in V \times \mathbb{C}^r$ se envia na combinação $\sum y_i x_i \in \mathbb{C}^n$ das linhas de x . Verifique em detalhes que $\mathcal{S}$ é um subfibrado. De particular interesse é o fibrado $\mathcal{L}$ introduzido em (6.1, p. 59).

99. *Seja X uma variedade afim e seja (a_{ij}) uma matriz $m \times n$ de funções regulares. Seja $a : X \times \mathbb{C}^n \rightarrow X \times \mathbb{C}^m$ definido por*

$$a(x, y) = (x, (\sum a_{1j}(x)y_j, \dots, \sum a_{mj}(x)y_j)).$$

Suponha que o posto de $(a_{ij}(x))$ é um inteiro r independente de $x \in X$. Mostre que o núcleo e a imagem de a são fibrados vetoriais.

6.5 operações com fibrados vetoriais

Cada uma das operações habituais da álgebra linear tem um aspecto fibrado. Assim, deixamos como exercício de rotina a verificação do seguinte. Dados E, F fibrados vetoriais sobre X , podemos construir

1. a soma direta $E \oplus F$;
2. o fibrado dual $E^\vee$;
3. o fibrado de homomorfismos $\text{Hom}(E, F)$;
4. o fibrado quociente F/E se $E \subseteq F$ é um subfibrado;
5. o produto tensorial $E \otimes F$;
6. as potências tensoriais, simétricas e exteriores, $E^{\otimes n}$, $S_n E$, $\bigwedge^n E$.

Analogamente, define-se sequência exata de fibrados,

$$E \xrightarrow{\lambda} E' \xrightarrow{\mu} E'',$$

pelo requerimento $\text{Im } \lambda = \ker \mu$.

Exercícios. 100. *Para cada um dos fibrados acima definidos, escreva funções de transição em termos das funções de transição de E, F .*

6.6 o feixe de seções

Exercício anterior mostra que tanto a imagem como o núcleo de um homomorfismo de fibrados podem não ser um subfibrado. Este incômodo vai ser contornado por meio da noção de feixe de seções.

Para cada fibrado vetorial $\psi : E \rightarrow X$ e para cada aberto $U \subseteq X$, denotamos por $\tilde{E}(U)$ o conjunto das seções, *i.e.*, morfismos $s : U \rightarrow E$, tais que $\psi(s(x)) = x$, $\forall x \in U$. Esta condição implica que $s(x) \in E_x$. Como esta fibra tem estrutura de espaço vetorial, vemos que faz sentido somar seções bem como multiplicar por funções definidas em U . Passando a uma trivialização local, deduz-se que cada seção corresponde localmente à escolha de um vetor de funções regulares $(f_1, \dots, f_r) \in \mathcal{O}_X(U)^r$. Mais precisamente, se $\psi_U : U \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{\sim} E_U$, temos $\psi_U^{-1}(s(x)) = (x, (f_1(x), \dots, f_r(x)))$. Segue que a soma de seções e a multiplicação por função regular reproduz uma seção. Em outras palavras, $\tilde{E}(U)$ é munido de

uma estrutura de $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo. Se $U' \subseteq U$ são abertos, temos um homomorfismo de restrição $\epsilon_{U'}^U : \tilde{E}(U) \rightarrow \tilde{E}(U')$, claramente compatível com a restrição de funções, $\rho_{U'}^U : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U')$:

$$\epsilon_{U'}^U(f \cdot s) = \rho_{U'}^U(f) \epsilon_{U'}^U(s), \forall f \in \mathcal{O}_X(U), s \in \tilde{E}(U).$$

Exercícios. 101. *Seja $E \rightarrow X$ um fibrado vetorial de posto r sobre uma variedade X e seja $s : X \rightarrow E$ uma seção. Então cada componente de $\mathbb{V}(s) = \{x \in X \mid s(x) = 0\}$ tem dimensão $\geq \dim X - r$.*

Mais geralmente, um **feixe de $\mathcal{O}_X$ -módulos** $\mathcal{M}$ sobre uma variedade X é um feixe (cf. p. 19) que associa a cada aberto $U \subseteq X$ um $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo $\mathcal{M}(U)$ satisfazendo as compatibilidades habituais com respeito a homomorfismos de restrição:

- para cada par de abertos $V \subseteq U$, temos homomorfismos de grupos $\rho_{UV} : \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}(V)$ tais que $\rho_{UU} = id$;
- se $W \subseteq V \subseteq U$ são abertos, então $\rho_{UW} = \rho_{VW} \rho_{UV}$;
- a estrutura de $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo de $\mathcal{M}(V)$ induzida por restrição de escalares $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$ torna ρ_{UV} um homomorfismo de $\mathcal{O}_X(U)$ -módulos.

Sinônimo: $\mathcal{O}_X$ -**Módulo**. Define-se a noção de homomorfismo de Módulos de maneira evidente. Seja $\mathcal{M}$ um $\mathcal{O}_X$ -Módulo e fixe um ponto $x \in X$. Sejam U, U' vizinhanças abertas de x . Dizemos que as seções $m \in \mathcal{M}(U), m' \in \mathcal{M}(U')$ definem o mesmo germe em x se existir aberto $U'' \subseteq U \cap U'$ tal que $U'' \ni x$ e $m|_{U''} = m'|_{U''}$. Trata-se de uma relação de equivalência na coleção das seções de $\mathcal{M}$ definidas em vizinhanças abertas de x . O **talo** de $\mathcal{M}$ em x é o conjunto quociente, denotado $\mathcal{M}_x$. Verifica-se facilmente que $\mathcal{M}_x$ é um $\mathcal{O}_x$ -módulo.

O modelo básico de $\mathcal{O}_X$ -Módulo provém do caso em que X é uma variedade afim. Escrevamos $R = \mathcal{O}(X)$ seu anel de coordenadas. Seja M um R -módulo. Vamos definir um Módulo, denotado $\widetilde{M}$, utilizando a noção de módulos de frações. Para cada $x \in X$, definimos o **talo** de M em x , denotado M_x , como o $\mathcal{O}_x$ -módulo formado pelas frações m/f , $m \in M$, $f \in R$, $f(x) \neq 0$. Cada fração é uma classe de equivalência, declarando-se

$$m/f = n/g \iff \exists h \in R, h(x) \neq 0, \text{ tal que } h \cdot (gm - fn) = 0 \text{ em } M.$$

Detalhes, a cargo do zeloso leitor.

Exercícios. 102. *Seja R um anel (comutativo, com unidade) e seja M um R -módulo. Para cada $f \in R$ seja $M^{[f]} = \{(m, f^r) \mid m \in M, r \in \mathbb{N}\}$. Defina a*

relação $(m, f^r) \sim (n, f^s)$ em $M^{[f]} \iff \exists t \geq 0$ tal que $f^t \cdot (f^s m - f^r n) = 0$ em M . Mostre que esta é uma relação de equivalência. Defina-se o R -módulo de frações $M_f = \{m/f^r \mid m \in M, r \geq 0\}$, onde cada fração é uma classe de equivalência, com a soma e multiplicação definidas da maneira usual. Verifique a boa definição dessas operações.

103. Mostre que o homomorfismo natural $M \ni m \mapsto m/1 \in M_f$ é um isomorfismo se e só se o homomorfismo $M \ni m \mapsto f \cdot m \in M$ o for. Quando $M = R$, mostre que R_f é de fato uma R -álgebra comutativa, isomorfa ao anel quociente $R[x]/\langle xf - 1 \rangle$.

104. Mostre que a aplicação natural $R \rightarrow R_f$ é injetiva se e só se f é não divisor de zero. Mostre que $R_f = 0$ (anel nulo) se e só se f é nilpotente. Mostre que M_f herda uma estrutura natural de R_f -módulo tal que $(g/f^r)(m/f^s) = \dots$. Mostre que, se $m \in M$, $m \neq 0$, então existe $f \in R$ tal que $m/1 \neq 0$ em M_f .

105. Notação como no exercício anterior, mostre que, se $\varphi : M \rightarrow N$ é um homomorfismo de R -módulos então existe um e só um homomorfismo $\varphi_f : M_f \rightarrow N_f$ de R_f -módulos tal que $\varphi_f(m/1) = \varphi(m)/1 \forall m \in M$. Mostre que φ_f é injetivo (resp. sobrejetivo) se φ é injetivo (resp. ...). Mostre que $\ker(\varphi_f) = \ker(\varphi)_f$; idem para coker.

Para cada aberto $U \subseteq X$, consideremos o produto $\Pi_{x \in U} M_x$. Podemos considerar esse produto como um módulo sobre o produto de anéis $\Pi_{x \in U} \mathcal{O}_x$. Diremos que uma família $(m_x) \in \Pi_{x \in U} M_x$ é **localmente determinada** se, para cada $x \in U$ existirem $m^x \in M$, $f_x \in R$, tais que

- $x \in X_{f_x} \subseteq U$ e
 - $m_y = m^x/f_x$ em M_y para cada $y \in X_{f_x}$.
- (6.7)

Ou seja, os membros da família na vizinhança de cada m_x são todos determinados pela “mesma” fração.

6.6.1. Lema. Seja $\widetilde{M}(U) \subseteq \Pi_{x \in U} M_x$ o subconjunto formado pelas famílias localmente determinadas. Então

- (i) $\widetilde{M}(U)$ é um módulo sobre $\mathcal{O}_X(U)$ fazendo $g \cdot (m_x) = (gm_x)$, $\forall g \in \mathcal{O}_X(U)$;
- (ii) para cada $f \in R$ seja M_f o R_f -módulo das frações m/f^i , $m \in M, i \in \mathbb{Z}$. Seja $\mu : M_f \rightarrow \Pi_{x \in X_f} M_x$ o homomorfismo natural. Então μ é injetiva e sua imagem é igual a $\widetilde{M}(X_f)$.

Prova. Sejam $(m_x) \in \widetilde{M}(U)$, $g \in \mathcal{O}_X(U)$. Para cada $x \in U$, existem $f_x \in R$, $m^x \in M$ tais que $x \in X_{f_x} \subseteq U$ e $m_y = m^x/f_x$, $\forall y \in X_{f_x}$. Analogamente, temos $g = a/f_x^r$ em X_{f_x} para algum $a \in R$. Segue que $gm_y = am^x/f_x^{r+1}$, $\forall y \in X_{f_x}$ e portanto a família $g \cdot (m_x)$ é localmente determinada.

Verifiquemos a injetividade de μ . Se $\mu(m/f^r) = 0$, então $m/f^r = 0$ em cada M_x , $x \in X_f$. Logo, existe $g_x \in R$ tal que $g_x(x) \neq 0$, $g_x m = 0$ em R . Seja $I = \langle g_x \mid x \in X_f \rangle$ o ideal gerado. Evidentemente vale $hm = 0$, $\forall h \in I$. Temos $\mathbb{V}(I) \cap X_f = \emptyset$. Logo, $V(I) \subseteq \mathbb{V}(f)$. Pelo TZH, vem $f \in \text{rad } I$ e portanto, $f^i m = 0$ para algum i . Assim, $m/f^r = 0$ em M_f .

Resta mostrar que cada $(m_x) \in \widetilde{M}(X_f)$ está na imagem de μ . Podemos supor $f = 1$ (**por quê?**).

Escrevemos $m_z = m^x/h_x$ em M_z , $\forall z \in X_{h_x}$ para algum $m^x \in M$, $h_x(x) \neq 0$. Vale também $m^y/h_y = m^x/h_x$ em M_z , $\forall z \in X_{h_x h_y}$. Temos assim $g_z \cdot (h_x m^y - h_y m^x) = 0$ em M , ou seja

$$g_z h_x m^y = g_z h_y m^x$$

para algum $g_z \in R$, $g_z(z) \neq 0$. Logo, temos $X_{h_x h_y} \subset \bigcup X_{g_z}$. Pelo TZH, segue $h_x h_y \in \text{rad} \langle g_z \mid z \in X_{h_x h_y} \rangle$. Daí vem

$$h_x^k h_y^k = \sum a_z g_z$$

para algum k , $a_z \in R$. Deduzimos daí as relações

$$\begin{aligned} h_x^k h_y^k h_y m^x &= \sum a_z g_z h_y m^x = \sum a_z g_z h_x m^y = h_x^k h_y^k h_x m^y; \\ 1 &= \sum b_x h_x^{k+1}, \quad b_x \in R; \quad (\text{pois } \bigcup X_{h_x} = X) \\ h_y^k m^y &= \sum b_x h_x^{k+1} h_y^k m^y = \sum b_x h_x^k h_y^k h_y m^x = h_y^{k+1} \sum b_x h_x^k m^x \\ &\Rightarrow m^y/h_y = (\sum b_x h_x^k m^x) \quad \text{em } M_y, \quad \forall y \in X. \end{aligned}$$

□

Temos um pré-feixe $\widetilde{M}$ definido por $U \mapsto \widetilde{M}(U) \subseteq \prod_{x \in U} M_x$; o homomorfismo de restrição para $U \supset U'$ abertos de X correspondem à projeção, $\prod_{x \in U} M_x \rightarrow \prod_{x \in U'} M_x$. Trata-se efetivamente de um feixe. De fato se U_α , $\alpha \in \aleph$ são abertos, $U = \bigcup U_\alpha$ e $\underline{m}_\alpha \in \widetilde{M}(U_\alpha)$ denotam seções compatíveis, é imediato que podemos estendê-las a uma seção $(m_x) \in \widetilde{M}(U)$ pela regra $m_x = (\underline{m}_\alpha)_x$, $x \in U_\alpha$. Verifica-se que (m_x) é localmente determinada.

Exercícios. 106. Verifique os detalhes das afirmações acima.

107. Sejam $X = \{0, 1\}$, $R = \mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Seja $\mathcal{F}$ o feixe constante $= R$, com restrições identidade. Mostre que não existe R -módulo M tal que $\mathcal{F}$ seja da forma $\widetilde{M}$.

108. *Sejam X uma variedade afim irredutível, $R = \mathcal{O}(X)$. Seja $\mathcal{F}$ o feixe constante $K = \text{Fr}(R)$ (corpo de frações), com restrições identidade. Mostre que $\mathcal{F} = \widetilde{K}$.*

109. *Seja X uma variedade afim irredutível. Seja $U \subset X$ um aberto afim, $\emptyset \neq U \neq X$. Defina $\mathcal{F}$ como o feixe associado ao pré-feixe tal que, para cada aberto $V \subseteq X$,*

$$V \mapsto \begin{cases} \mathcal{O}_X(V) & \text{se } V \subseteq U, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Verifique se existe $\mathcal{O}_X(X)$ -módulo M tal que $\mathcal{F} = \widetilde{M}$.

6.6.1 Módulos quase-coerentes

Introduzido o modelo básico de feixe de módulos sobre uma variedade afim, diremos que um Módulo $\mathcal{M}$ sobre uma variedade X é **quase-coerente** se a restrição de $\mathcal{M}$ a cada aberto afim X_i de alguma cobertura de X é da forma $\widetilde{M}_i$ para algum $\mathcal{O}(X_i)$ -módulo M_i .

6.6.2. Lema. *Seja $\mathcal{M}$ um Módulo quase-coerente sobre uma variedade X . Então a restrição de $\mathcal{M}$ a **todo** aberto afim U de X é da forma $\widetilde{M}$ para $M = \mathcal{M}(U)$.*

Prova. É suficiente mostrar que, se X é afim, então todo $\mathcal{O}_X$ -Módulo quase-coerente $\mathcal{M}$ provém do R -módulo $M = \mathcal{M}(X)$ onde $R = \mathcal{O}_X(X)$. Sejam X_i abertos afins de X que exibem a quase-coerência de $\mathcal{M}$. Sem perda de generalidade, podemos supor $X_i = X_{f_i}$ aberto principal. Denotemos M_i o R_{f_i} -módulo $\mathcal{M}(X_i)$ que define $\mathcal{M}|_{X_i}$. Para cada $f \in R$, temos $X_f = \cup_i X_{ff_i}$. Portanto, a seqüência abaixo

$$0 \longrightarrow M = \mathcal{M}(X) \longrightarrow \prod M_i \longrightarrow \prod (M_i)_{f_j}$$

é exata. Passando aos módulos de frações deduzimos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_f & \longrightarrow & \prod (M_i)_f & \longrightarrow & \prod (M_i)_{ff_j} \\ & & \alpha_f \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}(X_f) & \longrightarrow & \prod \mathcal{M}(X_{ff_i}) & \longrightarrow & \prod \mathcal{M}(X_{ff_i f_j}). \end{array}$$

Neste último diagrama, as setas verticais nos produtos são isomorfismos pois $\mathcal{M}|_{X_{f_i}} = \widetilde{M}_i$. Segue o isomorfismo $\alpha_f : \widetilde{M}(X_f) = M_f \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X_f)$. A construção

mostra que α_f, α_g coincidem sobre X_{fg} , fornecendo assim o isomorfismo desejado. $\square$

Exercícios. 110. *Seja $\mathcal{M}$ um Módulo quase-coerente sobre uma variedade X . Sejam $U \subseteq X$ aberto afim, $M = \mathcal{M}(U)$ e $x \in U$. Então o talo de $\mathcal{M}$ em x é $\mathcal{O}_x$ -isomorfo ao talo de M em x .*

111. *Seja X uma variedade afim irredutível e seja $A = \mathcal{O}(X)$ seu anel de coordenadas. Seja $K = \text{Fr}(A)$ o corpo de frações. Então o feixe constante $U \mapsto K$ é quase-coerente.*

6.7 feixes localmente livres

Um feixe quase-coerente $\mathcal{M}$ de $\mathcal{O}_X$ -módulos é dito **coerente** se em cada aberto afim $U \subseteq X$ o $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo $\mathcal{M}(U)$ é finitamente gerado.

Um feixe $\mathcal{M}$ é **localmente livre** se X admitir uma cobertura por abertos U tais que $\mathcal{M}|_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U^{\oplus n}$.

6.7.1. Lema. *Seja X uma variedade afim. Seja $\mathcal{M}$ um Módulo coerente sobre X e seja $M = \mathcal{M}(X)$, $R = \mathcal{O}_X(X)$. São equivalentes:*

1. $\mathcal{M}$ é localmente livre;
2. M é somando direto de algum R^n ;
3. existem $f_1, \dots, f_r \in R$, $n \geq 1$ tais que $\langle f_1, \dots, f_r \rangle = 1$ e cada $M_{f_i} \xrightarrow{\sim} R_{f_i}^n$.

Prova. (1 $\Rightarrow$ 2) Existe uma cobertura aberta, que podemos supor finita e formada por abertos principais $X_{f_i}, i = 1..k$, de maneira que

$$R_f^\nu \xrightarrow{\sim} M_f = \mathcal{M}(X_f), \forall f = f_i.$$

Sejam $m_1^i, \dots, m_\nu^i \in M$ tais que $m_j^i/1$ é imagem de $e_j \in R_{f_i}^\nu$. Definimos

$$\psi : R^n = \bigoplus_1^k R^\nu \rightarrow M, n = k\nu,$$

enviando as bases canônicas do i -ésimo somando nos m_j^i . O homomorfismo ψ é sobre pois cada $\psi_f : R_f^n \rightarrow M_f$ é. Seja $\Psi : \text{Hom}(M, R^n) \rightarrow \text{Hom}(M, M)$ definida por $\Psi(\sigma) = \psi \circ \sigma$. Novamente cada

$$\Psi_f : \text{Hom}(R_f^\nu, R_f^n) \rightarrow \text{Hom}(R_f^\nu, R_f^\nu)$$

é claramente sobrejetor, logo Ψ também é. Assim, existe uma “cisão”, $\sigma : M \rightarrow R^n$ tal que $\psi \circ \sigma = 1_M$. Segue facilmente que $R^n = \ker(\psi) \oplus \sigma(M)$ e portanto M é somando direto de R^n .

(2 $\Rightarrow$ 3) Suponhamos $R^n = M \oplus M'$. Seja $x \in X$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x \subset R$ o ideal maximal correspondente. Segue a decomposição $R^n/\mathfrak{m}R^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n = M/\mathfrak{m}M \oplus M'/\mathfrak{m}M'$. Sejam $m_1, \dots, m_r \in M$ cujas classes mod. $\mathfrak{m}M$ formam base de $M/\mathfrak{m}M$. Temos a igualdade $M = \langle m_1, \dots, m_r \rangle + \mathfrak{m}M$. A sobrejeção $R^n \rightarrow M$ oriunda da decomposição fornece um conjunto finito de geradores, digamos $v_1, \dots, v_k$ para M . Escrevemos equações $v_i = \sum a_{ij}m_j + \sum \mu_{ij}v_j$, $a_{ij} \in R$, $\mu_{ij} \in \mathfrak{m}$. Matricialmente,

$$(1 - (\mu_{ij})) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} = (a_{ij}) \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

No aberto principal definido por $f_x = \det(1 - (\mu_{ij})) \neq 0$, temos portanto $M_f = \langle m_1, \dots, m_r \rangle_f$. Podemos escrever analogamente $M'_f = \langle m'_1, \dots, m'_s \rangle_f$. Daí vem uma sobrejeção $\theta : R_f^n \twoheadrightarrow M_f \oplus M'_f = R_f^n$ definida mandando a base canônica nos m_i, m'_j . Pelo lema seguinte, θ é um isomorfismo, e portanto os m_i são l.i. Visto que os X_{f_x} recobrem X , extrai-se uma subcobertura finita por quase-compacidade.

(3 $\Rightarrow$ 1) Exercício. □

O belo resultado seguinte é devido a W. Vasconcelos.

6.7.2. Lema. *Seja M um R -módulo f.g. Então todo endomorfismo sobrejetivo $\theta : M \twoheadrightarrow M$ é injetivo.*

Prova. Trocando R pelo sub-anel $R[\theta] \subseteq \text{Hom}(M, M)$ podemos supor que $\theta \in R$ é uma homotetia. Se $M = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$, podemos escrever relações

$$m_i = \theta \sum a_{ij} m_j.$$

Segue $\det(1 - \theta(a_{ij}))m = 0 \forall m \in M$. Expandindo, vem $(1 - \theta a)m = 0$. Portanto a homotetia definida por a fornece a inversa de θ . □

Exercícios. 112. *Seja $X = \mathbb{V}(f) \subset \mathbb{C}^n$ uma hipersuperfície. Suponha $\nabla f(x) = (\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_n) \neq 0 \forall x \in X$. Seja $R = \mathcal{O}(X)$. Seja $\tau : R^n \rightarrow R$ o homomorfismo definido por $\tau(g_1, \dots, g_n) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} g_i$. Mostre que τ é sobrejetivo. Mostre que $\ker \tau$ é localmente livre. Mostre que, se $f = x_1^2 + x_2^2 - 1$ então $\ker \tau$ é livre. Suponha $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$. Encontre $\sigma : R \rightarrow R^3$ tal que $\tau\sigma = 1$. Mostre que $R^3 = \ker \tau \oplus \sigma(R)$. (Sabe-se que $\ker \tau$ não é livre neste último caso.)*

6.8 feixes versus fibrados

6.8.1. Lema. *Seja $E \rightarrow X$ um fibrado vetorial. Escolhamos uma cobertura aberta $U_i \subseteq X$ que trivializa E , $\psi_i : U_i \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{\sim} E|_{U_i}$. Sejam $\psi_{ij} : U_{ij} \rightarrow \text{GL}(n)$ as funções de transição correspondentes. Seja $s : X \rightarrow E$ uma seção e escrevamos $s_i = s|_{U_i}$ a restrição. Então existem morfismos $\sigma_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ tais que*

$$(\star) \quad s_i(x) = \psi_i(x, \sigma_i(x)) \forall x \in U_i;$$

$$(\star\star) \quad \sigma_i(x) = \psi_{ij}(x) \sigma_j(x) \forall x \in U_{ij}.$$

Reciprocamente, dados morfismos $\sigma_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ que verificam a condição $(\star\star)$, existe uma única seção $s : X \rightarrow E$ com expressões locais $(\star)$.

Prova. Dada a seção $s : X \rightarrow E$, definimos σ_i pelo requerimento $\psi_i^{-1}(s_i(x)) = (x, \sigma_i(x))$. Se $x \in U_{ij}$, então vale $s_i(x) = s_j(x)$, e portanto,

$$\psi_i^{-1} \psi_j(x, \sigma_j(x)) = (x, \psi_{ij}(x) \sigma_j(x)) = \psi_i^{-1}(s_i(x)) = (x, \sigma_i(x)).$$

Para a recíproca, definimos $s_i : U_i \rightarrow E|_{U_i}$ usando $(\star)$. A compatibilidade em U_{ij} é garantida por $(\star\star)$. □

Para cada fibrado vetorial $E \rightarrow X$ temos associado seu feixe $\widetilde{E}$ de seções. Por construção, trata-se de um $\mathcal{O}_X$ -Módulo localmente livre.

Reciprocamente, para cada feixe localmente livre $\mathcal{M}$ sobre uma variedade X , vamos construir um fibrado vetorial $\widehat{\mathcal{M}}$ tal que

$$\widehat{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}.$$

Temos uma cobertura aberta afim $U_i \subseteq X$ tal que $\varphi_i : \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus n} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}|_{U_i}$. Visto que $(\mathcal{M}|_{U_i})|_{U_{ij}} = (\mathcal{M}|_{U_j})|_{U_{ij}}$, deduz-se um isomorfismo

$$\varphi_{ij} : \mathcal{O}_{U_{ij}}^{\oplus n} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_{ij}}^{\oplus n}.$$

Este é identificado com um morfismo $\psi_{ij} : U_{ij} \rightarrow \text{GL}(n)$ satisfazendo a condição de cociclo. Daí resulta um fibrado vetorial $\psi : \widehat{\mathcal{M}} \rightarrow X$ que se trivializa na cobertura em tela, com funções de transição ψ_{ij} . Pelo exposto sobre expressões locais para seções em termos de funções de transição, verifica-se que o feixe de seções de $\widehat{\mathcal{M}}$ coincide com $\mathcal{M}$.

6.9 fibrados em retas sobre $\mathbb{P}^n$

6.9.1. Proposição. *Seja $\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{P}^n$ o subfibrado tautológico de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$. Então seu feixe de seções é isomorfo ao feixe $\mathcal{O}(-1)$, definido por*

$$U \mapsto \left\{ \frac{F}{G} \mid F, G \text{ são polinômios homogêneos, } \deg F = \deg G - 1, G(x) \neq 0 \forall x \in U \right\}$$

para cada aberto $U \subseteq \mathbb{P}^n$.

Prova. Cada seção de $\mathcal{L}$ induz uma seção de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$. Esta última é dada por um vetor $v = (f_1, \dots, f_{n+1})$ de funções regulares em U . Por definição de $\mathcal{L}$, valem as relações $x_i f_j = x_j f_i$. Escrevendo cada $f_i = F_i/G_i$, com $G_i(x) \neq 0 \forall x \in U$, achamos

$$\frac{F_i}{G_i x_i} = \frac{F_j}{G_j x_j} = \frac{F}{G} \quad (6.9)$$

independente de i, j . Temos assim $v = \frac{F}{G}(x_1, \dots, x_{n+1})$.

Alternativamente, podemos usar 6.8.1. Seja U_i o aberto básico $x_i \neq 0$. Cada seção $s : U \rightarrow \mathcal{L}$ corresponde a $n + 1$ funções regulares $f_i : U \cap U_i \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $f_i(x) = \psi_{ij}(x) f_j(x) \forall x \in U \cap U_{ij}$. Lembrando (6.3), temos as funções de transição $\psi_{ij}(x) = x_i/x_j$. Logo, $f_i = f_j x_i/x_j$ e concluimos como antes. $\square$

Mediante a identificação

$$(\text{fibrado vetorial}) \leftrightarrow (\text{feixe localmente livre})$$

passamos a nos referir a $\mathcal{O}(-1)$ seja como fibrado, seja como feixe.

Denotamos por $\mathcal{O}(1)$ o fibrado dual. Temos por construção a seqüência exata de fibrados,

$$\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n \times (\mathbb{C}^{n+1})^* \twoheadrightarrow \mathcal{O}(1).$$

Na fibra sobre cada $x \in \mathbb{P}^n$, a seqüência exata de espaços vetoriais,

$$\mathcal{F}_x \twoheadrightarrow (\mathbb{C}^{n+1})^* \twoheadrightarrow \mathcal{O}(1)_x$$

tem a interpretação seguinte:

1. $\mathcal{O}(1)_x$ é o espaço dual do subespaço de dimensão um, $\mathcal{O}(-1)_x$, associado a x ;
2. $\mathcal{F}_x$ é o espaço das $n - 1$ equações lineares independentes que definem o ponto x .

Para cada inteiro $m \in \mathbb{Z}$, denotamos por $\mathcal{O}(m)$ a m -ésima potência tensorial de $\mathcal{O}(1)$.

A discussão precedente permite-nos mostrar o importante

6.9.2. Teorema. *Para cada aberto $U \subseteq \mathbb{P}^n$, as seções de $\mathcal{O}(m)$ formam o $\mathcal{O}(U)$ -módulo*

$$\left\{ \frac{F}{G} \mid F, G \text{ são polinômios homogêneos, } \deg F = \deg G + m, G(x) \neq 0 \forall x \in U \right\}.$$

Prova. As funções de transição para $\mathcal{O}(m)$ são $\psi_{ij}^{(m)} = (x_i/x_j)^{-m}$. Logo, procedendo como na demonstração anterior, cada seção $s : U \rightarrow \mathcal{O}(m)$ corresponde a $n+1$ funções regulares $f_i : U \cap U_i \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $f_i(x) = \psi_{ij}^{(m)}(x)f_j(x) \forall x \in U \cap U_{ij}$. Temos assim $f_i x_i^m = f_j x_j^m$. Escrevendo cada $f_i = F_i/G_i$, com $\deg F_i = \deg G_i$, $G_i(x) \neq 0 \forall x \in U \cap U_i$, achamos

$$(\spadesuit) \quad \frac{F_i x_i^m}{G_i} = \frac{F_j x_j^m}{G_j} = \frac{F}{G},$$

independente de i, j . Supondo $\text{mdc}(F, G) = \text{mdc}(F_i, G_i) = 1$, mostremos que $G(x) \neq 0 \forall x \in U$. De fato, caso $m \geq 0$, de $GF_i x_i^m = G_i F$ concluímos que existe H tal que $G_i = HG$; se $m < 0$, $GF_i = G_i F x_i^{-m}$ implica $G_i x_i^{-m} = HG$ e portanto G não se anula para $x \in U \cap U_i$. Reciprocamente, se F/G é como no enunciado, podemos usar $(\spadesuit)$ para definir uma seção de $\mathcal{O}(m)$. □

Para cada feixe $\mathcal{F}$, escreve-se

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$$

o espaço vetorial das seções globais.

Exercícios. 113. *Mostre que $H^0(X, \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}) = H^0(X, \mathcal{F}) \oplus H^0(X, \mathcal{G})$.*

6.9.3. Corolário.

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m)) = \begin{cases} \{F \mid F \text{ polinômio homogêneo de grau } m\}, & \text{se } m \geq 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Veremos oportunamente que todo fibrado em retas sobre $\mathbb{P}^n$ é isomorfo a algum $\mathcal{O}(m)$.

6.10 núcleo, imagem e quociente

Seja X uma variedade e seja $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ um homomorfismo de $\mathcal{O}_X$ -Módulos. Lembramos que, para cada aberto $U \subseteq X$, é dado um homomorfismo $\varphi_U : \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}'(U)$ de $\mathcal{O}_X(U)$ -módulos. É um exercício simples mostrar que o pré-feixe definido por

$$\ker(\varphi)(U) = \ker(\varphi_U)$$

é de fato um feixe. Entretanto, para a imagem a situação é mais sutil. Considere por exemplo o homomorfismo de Módulos sobre $\mathbb{P}^1$,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(-1)^{\oplus 2} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O} \\ (f_1, f_2) & \mapsto & x_1 f_1 + x_2 f_2. \end{array}$$

Sobre os abertos básicos $U_i : x_i \neq 0$, temos as seções constantes $1 \in \varphi_{U_i}(\mathcal{O}(-1)^{\oplus 2}(U_i))$. Na interseção, nada mais compatível, fato que nos levaria a esperar $1 \in \varphi_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}(-1)^{\oplus 2}(\mathbb{P}^1))$. Mas isto é impossível, pois sabemos que $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-1))^{\oplus 2} = 0$!

6.10.1. Lema. *Seja $\mathcal{P}$ um pré-feixe sobre um espaço topológico X . Então existe um feixe $\tilde{\mathcal{P}}$ munido de um mapa de pré-feixes $\pi : \mathcal{P} \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}$ caracterizado pela seguinte propriedade universal:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{\pi} & \tilde{\mathcal{P}} \\ \downarrow \forall \varphi & \nearrow \exists! \tilde{\varphi} & \\ \mathcal{F} & & \end{array}$$

onde $\mathcal{F}$ denota um feixe. Em particular, π é um isomorfismo se e só se $\mathcal{P}$ é um feixe.

Prova. Para cada $x \in X$, seja $\mathcal{P}^x = \bigcup \mathcal{P}(U)$, união disjunta sobre as vizinhanças abertas de x . Sejam U, U' vizinhanças abertas de x . Declaramos seções $s \in \mathcal{P}(U), s' \in \mathcal{P}(U')$ **germe-equivalentes** em x se existir aberto $U'' \subseteq U \cap U'$ tal que $x \in U''$ e as restrições coincidem, $s|_{U''} = s'|_{U''}$. Cada classe de equivalência é novamente chamada um germe de seção. O **talo** $\mathcal{P}_x$ é o conjunto quociente dessa relação. Cada mapa de pré-feixes $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ induz um mapa natural $\mathcal{P}_x \rightarrow \mathcal{P}'_x$. Seja $\hat{\mathcal{P}}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{P}_x$. Trata-se de um pré-feixe, as restrições sendo definidas por projeção. Define-se um mapa $\mathcal{P}(U) \rightarrow \hat{\mathcal{P}}(U)$ associando a cada seção o seu germe em x . Dizemos que $(s_x) \in \hat{\mathcal{P}}(U)$ é **localmente determinada** se, numa sub-vizinhança U_x de cada $x \in U$ existir $s^x \in \mathcal{P}(U_x)$ tal que $s_y = s^x$ como germes em y para cada $y \in U_x$. Definimos $\tilde{\mathcal{P}}(U)$ como a coleção das (s_x)

localmente determinadas. Evidentemente $U \mapsto \tilde{\mathcal{P}}(U)$ define um sub-pré-feixe de $\hat{\mathcal{P}}$. Mostraremos que $\tilde{\mathcal{P}}$ é de fato um feixe. Seja $U_\alpha, \alpha \in \aleph$ uma cobertura aberta de U . Sejam $(s^\alpha) \in \tilde{\mathcal{P}}(U_\alpha)$ seções compatíveis. Isto significa que, para cada par $\alpha, \beta \in \aleph$ as restrições de (s^α) e de (s^β) a $U_\alpha \cap U_\beta$ coincidem. No presente contexto, isto significa que as coordenadas $s_x^\alpha = s_x^\beta \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$. Portanto, podemos definir $s \in \tilde{\mathcal{P}}(U)$ fazendo $s_x = s_x^\alpha$ para cada $x \in U_\alpha$, sem ambigüidade. É imediato que s é localmente determinada, ou seja, temos efetivamente $s \in \tilde{\mathcal{P}}(U)$. Observemos que, o mapa natural $\pi_U : \mathcal{P}(U) \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}(U)$ é um mapa de pré-feixes. Além disso, o mapa induzido entre os talos, $\mathcal{P}_x \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_x$ é um isomorfismo. De fato, seja $(s_y) \in \tilde{\mathcal{P}}(U)$ representante de um germe $\tilde{\sigma}$ de $\tilde{\mathcal{P}}$ em $x \in U$. Escolhemos $s^x \in \mathcal{P}(U_x)$ que determina o germe de cada $s_y, y \in U_x$. Então s^x representa um único germe σ de $\mathcal{P}$ em x que se envia em $\tilde{\sigma}$.

Seja agora $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$ um mapa de pré-feixes, onde $\mathcal{F}$ é um feixe. Seja $(s_y) \in \tilde{\mathcal{P}}(U)$. Podemos escolher vizinhanças abertas $U_x \subset U$ e seções $s^x \in \mathcal{P}(U_x)$ tais que $\forall z \in U_x$ existe aberto U_z^x com $z \in U_z^x \subseteq U_x$ e $s|_{U_z^x} = s_z|_{U_z^x}$. Segue que as seções $\varphi(s^x)$ são compatíveis: se $z \in U_x \cap U_y$, temos $\varphi(s|_{U_z^x \cap U_z^y}^x) = \varphi(s_z|_{U_z^x \cap U_z^y}) = \varphi(s_y^y|_{U_z^x \cap U_z^y})$. Como $\mathcal{F}$ é um feixe, podemos concluir que $\varphi(s|_{U_x \cap U_y}^x) = \varphi(s^y|_{U_x \cap U_y})$. Fica assim bem definida $\tilde{\varphi}((s_y))$. Detalhes restantes, a cargo do leitor. $\square$

O feixe $\tilde{\mathcal{P}}$ construído acima é chamado de **feixe associado** ao pré-feixe $\mathcal{P}$.

Segue da construção que o mapa de pré-feixes $\mathcal{P} \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}$ induz, para cada $x \in X$, isomorfismos naturais $\mathcal{P}_x \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_x$ entre os talos.

Define-se agora o **feixe imagem** de um homomorfismo de $\mathcal{O}_X$ -Módulos, $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ como o feixe associado ao pré-feixe

$$U \mapsto \varphi_U(\mathcal{M}(U)).$$

Define-se o **feixe quociente** de um $\mathcal{O}_X$ -Módulo $\mathcal{M}$ por um subMódulo $\mathcal{N}$ como o feixe associado ao pré-feixe

$$U \mapsto \mathcal{M}(U)/\mathcal{N}(U).$$

Dizemos que uma seqüência de homomorfismos de $\mathcal{O}_X$ -Módulos,

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{N} \xrightarrow{\beta} \mathcal{P}$$

é exata se $\ker \beta = \text{Im } \alpha$.

6.10.2. Lema. *Seja $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ um homomorfismo de $\mathcal{O}_X$ -Módulos e seja $U \subseteq X$ um aberto. Então o feixe imagem $\text{Im } \varphi$ é o subfeixe de $\mathcal{M}'$ dado por*

$$\text{Im } \varphi(U) = \{s' \in \mathcal{M}'(U) \mid \forall x \in U, \exists s \in \mathcal{M}_x \text{ com } \varphi_x(s) = s'_x\}.$$

Em palavras, o feixe imagem é dado pelas seções de $\mathcal{M}'$ que localmente são da forma $\varphi_{U_x}(s)$ para alguma vizinhança $x \in U_x \subseteq U$, $s \in \mathcal{M}(U_x)$.

Se $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ são quase-coerentes, então o núcleo, a imagem e o co-núcleo (quociente de $\mathcal{M}'$ pela imagem) $\ker \varphi, \text{Im } \varphi, \text{coker } \varphi$ são quase-coerentes.

Prova. A descrição de $\text{Im } \varphi$ segue da construção do feixe associado. A afirmação sobre quase-coerência provém do seguinte.

6.10.3. Sublema. *Na seqüência exata de $\mathcal{O}_X$ -Módulos,*

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{N} \xrightarrow{\beta} \mathcal{P}$$

onde $\ker \alpha = 0, \text{Im } \beta = \mathcal{P}$, se dois são quase-coerentes (resp. coerentes), o terceiro também é.

Prova. Suponhamos $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ quase-coerentes. Podemos supor X afim; seja $R = \mathcal{O}_X(X)$. Sejam $M = \mathcal{M}(X), N = \mathcal{N}(X), P = M/N$. Consideremos a seqüência de feixes,

$$\widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{N} \twoheadrightarrow \widetilde{P}.$$

Ela é exata pois, para cada $f \in R$, temos a seqüência exata de R -Módulos,

$$M_f \longrightarrow N_f \twoheadrightarrow P_f.$$

Vamos mostrar que $\mathcal{P} = \widetilde{P}$. Sabemos que $\mathcal{P}$ é o feixe associado ao pré-feixe $U \mapsto \mathcal{M}(U)/\mathcal{N}(U)$. Temos assim um homomorfismo natural induzido $\mathcal{P} \rightarrow \widetilde{P}$. O homomorfismo induzido em cada talo, $\mathcal{P}_x \rightarrow \widetilde{P}_x$ é um isomorfismo, logo $\mathcal{P}$ é isomorfo a $\widetilde{P}$.

Os demais casos são análogos. □

6.10.4. Proposição. *Na seqüência exata de $\mathcal{O}_X$ -Módulos quase-coerentes*

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{N} \xrightarrow{\beta} \mathcal{P}$$

onde $\ker \alpha = 0, \text{Im } \beta = \mathcal{P}$, se $\mathcal{N}, \mathcal{P}$ são localmente livres, então $\mathcal{M}$ é localmente um somando direto de $\mathcal{N}$.

Prova.

A argumentação é análoga à desenvolvida em 6.7.1. A situação se reduz a uma seqüência exata de R -módulos,

$$M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} P$$

onde $N \xrightarrow{\sim} R^n, P \xrightarrow{\sim} R^p$. Nessas condições deduz-se que $N \xrightarrow{\sim} M \oplus P$. $\square$

Note que nas condições acima, segue em particular que $\mathcal{M}$ é localmente livre.

Exercícios. 114. *Sejam $M = \langle x \rangle \subset N = \mathbb{C}[x] = R$. Na seqüência exata $M \xrightarrow{\sim} N \rightarrow P$, este último R -módulo não é localmente livre.*

115. *Se na seqüência exata $M \xrightarrow{\sim} N \twoheadrightarrow P$ de R -módulos N é localmente livre e M é localmente um somando direto de N então P é localmente livre.*

116. *Use a proposição 6.10.4 e a identificação feixe $\times$ fibrado 6.8 para construir o fibrado quociente F/E de um fibrado vetorial F por um subfibrado E .*

6.11 imagem recíproca de fibrados vetoriais

6.11.1. Proposição. *Seja $\psi : E \rightarrow X$ um fibrado vetorial de posto r . Seja $f : X' \rightarrow X$ um morfismo de variedades. Seja*

$$E' = \{(x', v) \in X' \times E \mid f(x') = \psi(v)\}.$$

Então a aplicação $\psi' : E' \rightarrow X'$ induzida por projeção é um fibrado vetorial de posto r .

Prova. Considere o morfismo $\rho = (f, \psi) : X' \times E \rightarrow X \times X$. Visto que a diagonal é localmente fechada em $X \times X$, segue que sua imagem inversa $E' = \rho^{-1}\Delta$ também o é em $X' \times X$. Resta ver a trivialidade local. Mas se $U \subseteq X$ é um aberto tal que $E_U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{C}^r$, pondo $U' = f^{-1}U$ é fácil ver que $E'_{U'} \xrightarrow{\sim} U' \times \mathbb{C}^r$. Alternativamente, sejam ψ_{ij} funções de transição para E relativas a uma cobertura aberta U_i . Seja $U'_i = f^{-1}U_i$. Mostra-se que $\psi_{ij} \circ f : U'_{ij} \rightarrow \text{GL}(r)$ são funções de transição para E' . $\square$

O fibrado vetorial E' acima construído é dito a **imagem recíproca** de E pelo morfismo f , também denotado f^*E .

Exercícios. 117. *Seja X uma variedade e sejam $f_1, \dots, f_{n+1} \in \mathcal{O}_X(X)$ funções que não se anulam simultaneamente. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ definida por $f(x) = [f_1(x), \dots, f_{n+1}(x)]$. Descreva $f^*\mathcal{O}(-1)$. Mostre que, nesse caso, $f^*\mathcal{O}(-1)$ é trivial.*

118. *Seja $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{P}^n$ o morfismo quociente. Mostre que $\pi^*\mathcal{O}(-1)$ é trivial. Mais geralmente, seja $\pi : \mathbb{M}(r, n)^0 \rightarrow \text{Gr}_r\mathbb{C}^n$ o morfismo quociente (3.2) e seja $\mathcal{S}$ o subfibrado tautológico sobre $\text{Gr}_r\mathbb{C}^n$. Mostre que $\pi^*\mathcal{S}$ é trivial.*

119. *Notação como no exercício 117, seja $\varphi : X \times \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow X \times \mathbb{C}$ o homomorfismo definido por $(x, y) \mapsto (x, \sum f_i(x)y_i)$. Mostre que $\ker \varphi$ é um subfibrado vetorial de posto n . Se $X = \mathbb{V}(x^2 + y^2 - 1)$, $f_1 = x$, $f_2 = y$ então $\ker \varphi$ é trivial. Sabe-se que para o exemplo análogo com $\mathbb{V}(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$, $\ker \varphi$ não é trivial. (Coincide com fibrado tangente da esfera.(?!))*

6.12 morfismos na grassmanniana

6.12.1. Proposição. *Seja X uma variedade. Então a coleção dos morfismos $X \rightarrow \text{Gr}_r\mathbb{C}^n$ está em bijeção natural com a coleção dos subfibrados de $X \times \mathbb{C}^n$ de posto r . Precisamente, para cada subfibrado $\mathcal{A} \rightarrow X \times \mathbb{C}^n$ de posto r , existe um e um só morfismo f tal que $\mathcal{A} = f^*\mathcal{S}$, imagem recíproca do subfibrado tautológico (6.6).*

Prova. Seja $\mathcal{A} \rightarrow X \times \mathbb{C}^n$ subfibrado de posto r . As fibras de $\mathcal{A}$ fornecem subespaços de posto r de $\mathbb{C}^n$. Isto define uma aplicação $f : X \rightarrow \text{Gr}_r\mathbb{C}^n$. Para verificar que é um morfismo, podemos supor $\mathcal{A}$ trivial. O homomorfismo $\mathcal{A} = X \times \mathbb{C}^r \rightarrow X \times \mathbb{C}^n$ corresponde a um morfismo $g : X \rightarrow \mathbb{M}(r, n)$ tal que $g(x)$ tem posto r , $\forall x \in X$. Composto com o morfismo quociente, $\mathbb{M}^0(r, n) \rightarrow \text{Gr}_r\mathbb{C}^n$, obtemos o morfismo desejado. A recíproca é um exercício simples. $\square$

Exercícios. 120. *Seja V um espaço vetorial de dimensão n e seja $f : X \rightarrow \text{Gr}_rV$ um morfismo. Mostre que existe um fibrado vetorial $E \rightarrow X$ e um homomorfismo sobrejetivo $\varphi : X \times V \rightarrow E$ tal que, para cada $x \in X$, vale $f(x) = \ker \varphi_x$. Reciprocamente...*

121. *Sejam V, W espaços vetoriais de dimensão finita e sejam r, s inteiros positivos. Para cada par de subespaços $V' \subseteq V, W' \subseteq W$, associe o subespaço $V' \otimes W' \subseteq V \otimes W$. Mostre que a aplicação*

$$\varphi : \text{Gr}_rV \times \text{Gr}_sW \rightarrow \text{Gr}_{rs}V \otimes W$$

assim definida é um morfismo, sua imagem é fechada e φ induz um isomorfismo em $\varphi(\mathbb{G}r_r V \times \mathbb{G}r_s W)$. Isto generaliza o morfismo de Segre.

6.13 fibrados projetivos

Seja $\psi : E \rightarrow X$ um fibrado vetorial de posto r . Vamos contruir uma nova variedade, $\mathbb{P}(E)$, chamada a **projetivização** de E , juntamente com um morfismo $\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$, chamado o **fibrado projetivo** associado. Como conjunto, $\mathbb{P}(E)$ nada mais é que a união disjunta dos espaços projetivos $\mathbb{P}(E_x)$, $x \in X$, associados aos espaços vetoriais E_x , fibras de ψ . A estrutura de variedade é definida mediante uma trivialização local de E . Para cada aberto $U \subseteq X$ tal que $\psi_U : U \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{\sim} E_U$, decretamos $\mathbb{P}(E_U)$ aberto em $\mathbb{P}(E)$, e fazemos da bijeção $\pi_U : U \times \mathbb{P}^{r-1} \rightarrow \mathbb{P}(E_U)$ um morfismo. Em outras palavras, um subconjunto $W \subseteq \mathbb{P}(E)$ é declarado aberto $\iff \pi_U^{-1}(W \cap \mathbb{P}(E_U))$ é aberto em $U \times \mathbb{P}^{r-1}$ para cada aberto U que trivializa E . Analogamente, uma função $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ é dita regular $\iff f \circ \pi_U$ é regular em $\pi_U^{-1}(W \cap \mathbb{P}(E_U))$. Detalhes por conta do leitor.

Observemos que, por construção, temos um morfismo $\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$, dito **estrutural**, cuja restrição a cada $\mathbb{P}(E_U) \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{P}^{r-1}$ se identifica à projeção $U \times \mathbb{P}^{r-1} \rightarrow U$. Temos também o subfibrado vetorial, chamado **tautológico**,

$$\mathcal{O}_E(-1) = \{(x, y, v) \mid x \in X, y \in \mathbb{P}(E_x), v \in y\} \subset \pi^* E.$$

Assim, a restrição de $\mathcal{O}_E(-1)$ a cada fibra $\mathbb{P}(E_x)$ nada mais é que o fibrado tautológico

$$\mathcal{O}_{E_x}(-1) = \{(y, v) \in \mathbb{P}(E_x) \times E_x \mid v \in y\}.$$

6.13.1. Proposição. *Sejam $\psi : E \rightarrow X$ um fibrado vetorial, $\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ o fibrado projetivo associado. Fixe um morfismo $f : Y \rightarrow X$. Para cada morfismo $g : Y \rightarrow \mathbb{P}(E)$ tal que $f = \pi \circ g$, temos um subfibrado em retas, $L = g^*(\mathcal{O}_E(-1)) \xrightarrow{\sim} f^* E$. Reciprocamente, para cada subfibrado em retas, $L \xrightarrow{\sim} f^* E$ sobre Y , existe um único morfismo g nas condições explicitadas.*

Prova. Para mostrar a recíproca, definimos a aplicação $g : Y \rightarrow \mathbb{P}(E)$ fazendo $g(y) = L_y$, que é um subespaço de posto 1 de $f^* E_y = E_x$, portanto um ponto de $\mathbb{P}(E_x) \subset \mathbb{P}(E)$. Verifiquemos que g é um morfismo. Para isso, podemos supor L, E triviais. Logo, o homomorfismo $L = Y \times \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} Y \times \mathbb{C}^r$ é dado por

$$(y, t) \mapsto (y, t\lambda(y)), \text{ com } \lambda(y) = (\lambda_1(y), \dots, \lambda_r(y)),$$

com $\lambda_i \in \mathcal{O}(Y)$, r funções regulares que não se anulam simultaneamente. Agora a aplicação g é dada por $g(y) = (y, [\lambda_1(y), \dots, \lambda_r(y)]) \in Y \times \mathbb{P}^{r-1}$, claramente um morfismo.

Exercícios. 122. *Sejam E, F fibrados vetoriais sobre uma variedade X . Seja*

$$\mathbb{P}(E) \times_X \mathbb{P}(F) = \{(x, y, z) \mid x \in X, y \in \mathbb{P}(E_x), z \in \mathbb{P}(F_x)\}$$

chamado o produto fibrado de $\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F)$ sobre X . Seja $\pi_E : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ o morfismo estrutural. Seja $p_1 : \mathbb{P}(E) \times_X \mathbb{P}(F) \rightarrow \mathbb{P}(E)$ a projeção. Mostre que p_1 é um fibrado projetivo, isomorfo a $\mathbb{P}(\pi_E^ F) \rightarrow \mathbb{P}(E)$, projetivização da imagem recíproca.*

123. *Notação como no item anterior, mostre que o subfibrado*

$$p_1^* \mathcal{O}_E(-1) \otimes p_2^* \mathcal{O}_F(-1) \twoheadrightarrow p_1^* \pi_E^* E \otimes p_2^* \pi_F^* F$$

define um morfismo $\mathbb{P}(E) \times_X \mathbb{P}(F) \rightarrow \mathbb{P}(E \otimes F)$ cuja restrição a cada fibra sobre $x \in X$ coincide com o mergulho de Segre, $\mathbb{P}(E_x) \times \mathbb{P}(F_x) \hookrightarrow \mathbb{P}(E_x \otimes F_x)$.

124. *Construa, para cada fibrado vetorial $E \rightarrow X$, um fibrado em grassmannianas $\mathbb{G}r_r E \rightarrow X$ análogo ao caso de fibrados projetivos. Enuncie e demonstre um resultado similar à proposição anterior. Mostre que $\text{sen } F$ também denota um fibrado vetorial $/X$, então $\mathbb{G}r_r E \times_X \mathbb{G}r_s F$ se identifica a uma subvariedade fechada de $\mathbb{G}r_{rs} E \otimes F$*

6.14 explosão

Reveja o subfibrado

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(-1) & \subset & \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \\ \lambda \downarrow & \searrow \beta & \\ \mathbb{P}^n & & \mathbb{C}^{n+1} \end{array}$$

onde λ e β são induzidos pelas projeções. Lembramos ainda que $\mathcal{O}(-1)$ é definido pelas equações

$$x_i y_j = x_j y_i, \quad 1 \leq i, j \leq n+1,$$

onde x, y denotam coordenadas homogêneas em $\mathbb{P}^n$ e afins em $\mathbb{C}^{n+1}$.

Enquanto λ é um fibrado em retas, a aplicação β goza das seguintes propriedades:

1. $\forall v \in \mathbb{C}^{n+1}, v \neq 0 \Rightarrow \beta^{-1}v = \{([v], v)\}$, i.e., consiste em um único elemento.
2. $\beta^{-1}0 = \mathbb{P}^n \times \{0\}$.
3. A restrição de β induz um isomorfismo

$$\mathcal{O}(-1) \setminus \beta^{-1}0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{n+1} \setminus 0.$$

A aplicação $\beta : \mathcal{O}(-1) \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ é chamada a **explosão** de $\mathbb{C}^{n+1}$ no ponto 0.

Note que $\mathcal{O}(-1)$ pode ser imaginado como a colagem de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0$ com uma cópia de $\mathbb{P}^n$ substituindo o ponto 0. Esta cópia de $\mathbb{P}^n$ deve ser vista como a coleção das direções de chegada ao ponto 0. Uma imagem aproximada é a projeção da quádrlica $z = xy$ sobre o plano horizontal.

Outra interpretação útil para a explosão é como o fecho ou aderência do gráfico da função $\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0 \longrightarrow \mathbb{P}^n$ que define $\mathbb{P}^n$ como espaço quociente.

6.15 aplicação racional

Sejam X, Y variedades irredutíveis. Uma **aplicação racional** $\varphi : X \dashrightarrow Y$ é uma classe de equivalência de morfismos de abertos densos de X em Y mediante a relação de coincidência na interseção dos domínios. Por abuso, se $\varphi : U \rightarrow Y$ é um morfismo definido em um aberto denso $U \subseteq X$, dizemos também que φ é uma aplicação racional de X em Y . A união dos domínios dos representantes de uma aplicação racional é dito o **domínio de regularidade**.

Exercícios. 125. *Todo morfismo é uma aplicação racional.*

126. *Se X é uma variedade irredutível, toda função regular definida em um aberto não vazio de X define uma função racional.*

127. *Considere $X = \mathbb{V}(xy - zw) \subset \mathbb{C}^4$. Então $\frac{x}{z} : X_z \rightarrow \mathbb{C}$ define a mesma função racional que $\frac{w}{y}$. Qual o domínio de regularidade? E se substituirmos o contradomínio $\mathbb{C}$ por $\mathbb{P}^1 \supset \mathbb{C}$?*

6.16 explosão e projeção

Seja $W \subset V = \mathbb{C}^{n+1}$ um subespaço de codimensão $r+1$ e seja $V \twoheadrightarrow V/W \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{r+1}$ o espaço quociente. Passando às projetivizações, tem-se uma aplicação racional

$$\pi : \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V/W) = \mathbb{P}^r$$

definida por $[v] \mapsto [\bar{v}] = [v + W]$, chamada a **projeção** de $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ com centro $\mathbb{P}(W)$.

6.16.1. Lema. Se $x_1, \dots, x_{n+1}$ são coordenadas homogêneas (base de V^*) e $W : x_1 = \dots = x_{r+1} = 0$ então

(i) π se escreve $\pi([x_1, \dots, x_{n+1}]) = [x_1, \dots, x_{r+1}]$.

Suponha $n \geq 2, r \geq 1$. Então

(ii) $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W)$ é o maior aberto de regularidade de π .

Seja $B \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^r$ o fecho do gráfico de π . Sejam $y_1, \dots, y_{r+1}$ coordenadas homogêneas em $\mathbb{P}^r$. Então

(iii) B é definido pelas equações bihomogêneas $x_i y_j = x_j y_i$, $i, j = 1..r+1$. Seja $b : B \rightarrow \mathbb{P}^n$ (resp. $\psi : B \rightarrow \mathbb{P}^r$) a aplicação definida pela projeção no primeiro (resp. segundo) fator, $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^r \rightarrow \mathbb{P}^n$.

$$\begin{array}{ccc} & E \subset B & \hookrightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^r \\ & \swarrow b & \searrow \psi \\ \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}^n & & \mathbb{P}^r \end{array}$$

Seja $E = b^{-1}\mathbb{P}(W)$, chamado **divisor excepcional da explosão** $B \rightarrow \mathbb{P}(V)$ ao longo de $\mathbb{P}(W)$. Então

(iv) b induz um isomorfismo $B \setminus E \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}(W)$;

(v) $\psi : B \rightarrow \mathbb{P}^r$ é um fibrado projetivo, com fibra $\mathbb{P}^{n-r}$, subfibrado do fibrado projetivo trivial $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^r \rightarrow \mathbb{P}^r$;

(vi) $E = \mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}^r$, subfibrado trivial.

Prova. (i) Temos a inclusão dual $(V/W)^* \hookrightarrow V^*$; a imagem de cada $y \in (V/W)^*$ é um funcional que se anula em W . Estendemos uma base $x_1, \dots, x_{r+1}$ de $(V/W)^*$ a uma base de V^* , dual da base $\{v_1, \dots, v_{n+1}\} \subset V$. Escrevemos $v = \sum_1^{n+1} x_i(v)v_i$, que tem a mesma classe que $\sum_1^{r+1} x_i(v)v_i$ módulo W . Daí vem a expressão de π em coordenadas homogêneas,

$$\pi([v]) = \pi([x_1, \dots, x_{n+1}]) = [x_1, \dots, x_{r+1}].$$

(ii) Seja $w \in \mathbb{P}(W)$ e suponha, por absurdo, $w \in U \subseteq \mathbb{P}^n$, U aberto no domínio de regularidade de π . Para cada $z \in \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}(W)$, a reta $\overline{zw}$ corta U . Seja $\overline{zw}_t = [tz_1, \dots, tz_{r+1}, tz_{r+2} + w_{r+2}, \dots, tz_{n+1} + w_{n+1}]$, $t \in \mathbb{P}^1$. Exceto para um número finito de valores de t , temos $\overline{zw}_t \in U$. Mas para $t \neq 0$, $\pi(\overline{zw}_t) = [z_1, \dots, z_{r+1}]$.

Por continuidade, segue $\pi(w) = \pi(\overline{zw_0}) = [z_1, \dots, z_{r+1}]$. Mudando z , chegamos a uma contradição.

(iii) As equações definem um fechado B' , o qual contém B , pois traduzem a igualdade $[x_1, \dots, x_{r+1}] = [y_1, \dots, y_{r+1}]$. Mostraremos que B' é irredutível e que B contém um aberto denso de B' . Examinemos a interseção de B' com um aberto típico, $x_i = 1, y_j = 1$. Dois casos: (a) $i \leq r+1$; (b) $i > r+1$. No caso (a), *e.g.*, $x_{r+1} = 1 = y_{r+1}$, B' é definido pelas equações $x_1 = y_1, \dots, x_r = y_r$ em $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r$. Claramente B' é irredutível e coincide com B nesse aberto. No caso (b), *e.g.*, $x_{n+1} = 1 = y_{r+1}$, B' é dado pelas equações

$$(\heartsuit) \quad x_1 = x_{r+1}y_1, \dots, x_r = x_{r+1}y_r$$

em $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r$. Nesse aberto, B' é isomorfo a $\mathbb{C}^n$, com as funções coordenadas $x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r$, novamente irredutível. Entretanto, agora a restrição de b não é mais um isomorfismo, já que o homomorfismo de anéis de coordenadas se escreve $b^* : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \hookrightarrow \mathbb{C}[x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r]$ com a regra $(\heartsuit)$.

(iv) A imagem inversa de $\mathbb{P}(W)$ é localmente definida pelo ideal

$$\langle x_1, \dots, x_{r+1} \rangle = \langle x_{r+1} \rangle.$$

A igualdade provém de $(\heartsuit)$. Restringindo ao aberto principal $x_{r+1} \neq 0$, a inclusão b^* fornece o isomorfismo

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_{r+1}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[1/x_{r+1}, x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r] .$$

(v) Sobre o aberto $U = \mathbb{P}_{y_{r+1}}^r$, as equações de $B = B'$ são dadas por $(\heartsuit)$. Temos assim o isomorfismo $\mathbb{P}^{n-r} \times U \xrightarrow{\sim} \psi^{-1}U$ definido por

$$([z_1, \dots, z_{n-r+1}], y) \mapsto (\underbrace{[z_1y_1, \dots, z_1y_r]}_{x_1}, \underbrace{z_1, \dots, z_{n-r+1}}_{x_{n+1}}], y).$$

É fácil ver que as mudanças de coordenadas se comportam bem.

(v) Fazendo $x_1 = \dots = x_{r+1} = 0$ nas equações de B , resulta $\mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}^r$. □

6.17 Explosão e projeção, mais intrínsecas.

6.17.1. Proposição. *Sejam $W \subset V$ como em 6.16.1. Considere o diagrama de fibrados vetoriais sobre $\mathbb{P}^r = \mathbb{P}(V/W)$,*

$$\begin{array}{ccccc}
W & \xlongequal{\quad} & W & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\mathcal{S} & \xrightarrow{\quad} & V & \twoheadrightarrow & \mathcal{Q} \\
\downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-1) & \xrightarrow{\quad} & V/W & \twoheadrightarrow & \mathcal{Q}
\end{array}$$

onde, como de costume, abreviamos V o fibrado trivial $X \times V$ de fibra V e base X (arbitrária, clara no contexto), $\mathcal{Q}$ denota o quociente tautológico e $\mathcal{S} = \ker(V \rightarrow \mathcal{Q})$, fibrados vetoriais sobre $\mathbb{P}(V/W)$. Então o subfibrado projetivo

$$\begin{array}{ccc}
& \mathbb{P}(\mathcal{S}) & \subset \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V/W) \\
& \swarrow \quad \searrow & \\
\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V) & \text{-----} & \mathbb{P}(V/W)
\end{array}$$

é igual à explosão de $\mathbb{P}(V)$ com centro $\mathbb{P}(W)$.

Prova. Visto que tanto B como $\mathbb{P}(\mathcal{S})$ são subvariedades irredutíveis de $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V/W)$, basta mostrar que coincidem sobre algum aberto denso. Considere a composição de homomorfismos de fibrados sobre $\mathbb{P}(\mathcal{S})$,

$$\begin{array}{ccccc}
& & \lambda & & \\
& \searrow & \xrightarrow{\quad} & \searrow & \\
\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(-1) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{S} & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-1).
\end{array}$$

Note que λ é nulo na fibra sobre um ponto $(x, y) \in \mathbb{P}(\mathcal{S}) \subset \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V/W)$ se e só se o subespaço de V que corresponde a x é um subespaço de $W = \ker(\mathcal{S} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-1))$, ou seja, $(x, y) \in E = \mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(V/W) \subset \mathbb{P}(\mathcal{S})$. É fácil perceber que, se $x \in \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W)$ e $y = \pi(x)$ é sua projeção em $\mathbb{P}^r$, então temos $(x, y) \in \mathbb{P}(\mathcal{S}) \setminus E$, e reciprocamente. Isso mostra que $\mathbb{P}(\mathcal{S}) \setminus E = B \setminus E$. $\square$

Exercícios. 128. Seja $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, (x, y) \mapsto (x, xy)$. Mostre que $\varphi^{-1}0 = \mathbb{V}(x)$. Seja $L_t = \mathbb{V}(y - tx)$, $t \in \mathbb{C}$ fixo. Mostre que $\varphi^{-1}L_t = \mathbb{V}(x) \cup \mathbb{V}(y - t)$. Ache $\varphi^{-1}\mathbb{V}(y^2 - x^2 - x^3)$, $\varphi^{-1}\mathbb{V}(y^2 - x^3)$.

129. Seja $\varphi : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, (x, y, z) \mapsto (x, xy, xz)$. Mostre que φ induz um isomorfismo $\mathbb{C}^3 \setminus \varphi^{-1}0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}_x^3$. Descreva a aderência de $\varphi^{-1}(\mathbb{V}(xz - y^2) \setminus 0) \subset \mathbb{C}^3$. Idem para $\varphi^{-1}(\mathbb{V}(x^2z - y^2) \setminus 0) \subset \mathbb{C}^3$.

130. Sejam $W \subset V$ como em 6.16.1, $\dim W = n - r$. Mostre que a aplicação $\iota : \mathbb{P}(V/W) \rightarrow \mathbb{G}r_{n-r+1}V, [v + W] \mapsto \langle v \rangle + W$ (= subespaço gerado por W e v) é um morfismo injetivo.

131. Fixado um ponto $P_0 \in \mathbb{P}^n$, seja $U = \mathbb{P}^n \setminus \{P_0\}$. Seja $\psi : U \rightarrow \mathbb{G}r_2 \mathbb{C}^{n+1}$ a aplicação definida por $P \mapsto \overline{PP_0} =$ reta projetiva que liga P a P_0 . Mostre que ψ é um morfismo. Descreva a aderência de seu gráfico em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{G}r_2 \mathbb{C}^{n+1}$. Mostre que ψ se fatora pela projeção de centro P_0 . Precisamente, escreva $P_0 = \langle v_0 \rangle \subset V = \mathbb{C}^{r+1}$, seja $\pi : U \rightarrow \mathbb{P}(V/\langle v_0 \rangle)$ a projeção. Seja $\iota : \mathbb{P}(V/\langle v_0 \rangle) \hookrightarrow \mathbb{G}r_2 V$ como no exercício anterior. Mostre que $\psi = \iota \circ \pi$

132. Seja $p : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ a aplicação racional dada pelo produto vetorial, $p(x, y) = (x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \dots) \in \mathbb{P}^2$. Mostre que o lugar de indeterminação, complementar do aberto de definição de p , é a diagonal. Para cada elemento (x, x) da diagonal, descreva um morfismo $\varphi_x : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ tal que $\varphi_x(0) = (x, x) \neq \varphi_x(t) \forall t \neq 0$. Calcule $\lim_{t \rightarrow 0} p(\varphi_x(t))$ para diferentes escolhas de φ_x . Descreva a aderência do gráfico de p .

Capítulo 7

eliminação

7.1 introdução

Seja $\mathbb{M}(r, n)$ o espaço das matrizes $r \times n$. Considere a correspondência

$$\begin{array}{ccc} Z = \{(m, x) \in \mathbb{M}(r, n) \times \mathbb{P}^{n-1} \mid mx = 0.\} & & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathbb{M}(r, n) & & \mathbb{P}^{n-1} \end{array}$$

Seja $W \subseteq \mathbb{M}(r, n)$ a imagem de Z . Cada matriz $m \in Z$ admite uma solução não trivial, *i.e.*, existe $x \in \mathbb{P}^{n-1}$ tal que $mx = 0$. Naturalmente isso só é possível quando nenhum subdeterminante $n \times n$ de m é não nulo. De fato, é fácil ver que as equações de W em $\mathbb{M}(r, n)$ são precisamente os referidos menores. Em particular, W é fechado em $\mathbb{M}(r, n)$.

O objetivo deste capítulo é mostrar que, em geral, vale o seguinte

7.1.1. Teorema. *$Z \subseteq X \times Y$ é uma subvariedade fechada e Y é projetiva, então a imagem W de Z em X pela projeção é fechada.*

Prova. Digamos que $Y \subset \mathbb{P}^n$ seja fechada. Então Z é fechado em $X \times \mathbb{P}^n$. Isto nos permite supor $Y = \mathbb{P}^n$. Por outro lado, seja $X' \subset X$ um aberto de X . Então $Z \cap X' \times Y$ é fechado em $X' \times Y$ e evidentemente a imagem dessa interseção é $W \cap X'$. Lembramos que W é fechado em X se e só se $W \cap X'$ é fechado em X' para cada X' percorrendo uma cobertura aberta de X . Assim, reduzimos a verificação ao caso em que X é afim. Isto significa $X \subset \mathbb{C}^N$ fechado. Por fim, basta provar no caso $X = \mathbb{C}^N$, $Y = \mathbb{P}^n$. Isto será feito por indução sobre $n \geq 1$.

7.2 $n = 1$

Neste caso, temos o fechado de Zariski $Z \subset \mathbb{C}^N \times \mathbb{P}^1$ definido por um sistema de equações

$$f_\alpha(x, y) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^N, \quad y = [y_0, y_1] \in \mathbb{P}^1,$$

com $\alpha = 1..M$. Cada f_α é homogêneo em y . Devemos mostrar que a coleção

$$W = \{x \in \mathbb{C}^N \mid \text{o sistema acima admite solução em } \mathbb{P}^1\}$$

é dada por um sistema de equações em x . Dizemos assim que as relações prometidas são *obtidas por eliminação de y* . Sem perda de generalidade, podemos supor que os f_α são todos do mesmo grau em y (leitor: por que?).

Considere os polinômios homogêneos em y ,

$$\begin{aligned} F(\underline{t}, x, y) &= \sum t_\alpha f_\alpha = \sum a_\alpha(\underline{t}, x) y^\alpha, \\ G(\underline{u}, x, y) &= \sum u_\alpha f_\alpha = \sum b_\beta(\underline{u}, x) y^\beta, \end{aligned}$$

com novas variáveis $\underline{t}, \underline{u}$. Se $w \in W$, então os polinômios homogêneos em y

$$F(\underline{t}, w, y), G(\underline{u}, w, y)$$

aditem uma raiz comum $\bar{y} \in \mathbb{P}^1$, independente do valor atribuído às variáveis $\underline{t}, \underline{u}$. Isto significa que a resultante $R_{FG}(\underline{t}, \underline{u}, x)$ obtida por eliminação de y_0 em $F(\underline{t}, x, y_0, 1), G(\underline{u}, x, y_0, 1)$ é nula. A resultante se escreve na forma

$$R_{FG}(\underline{t}, \underline{u}, x) = \sum g_{ij}(x) \underline{t}^i \underline{u}^j.$$

Concluimos que w satisfaz $g_{ij}(w) = 0, \forall i, j$. Reciprocamente, se a resultante é nula para todo valor das variáveis $\underline{t}, \underline{u}$, segue que $F(\underline{t}, x, y_0, 1), G(\underline{u}, x, y_0, 1)$ admitem um fator comum polinomial na variável y_0 . Como $\underline{t}$ não figura em G , concluimos que o fator comum divide cada f_α , produzindo assim um ponto em Z . $\square$

Exercícios. 133. *Seja $Z \subset \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$ definido pelas equações*

$$f_1 = xy_0 + y_1, f_2 = y_0 + xy_1.$$

Aplique o argumento acima para obter uma equação para a imagem de Z em $\mathbb{C}$. Teste mais exemplos.

7.3 $\mathbb{P}^n$

Para a etapa indutiva, seja $Z \subset \mathbb{C}^N \times \mathbb{P}^n, n > 1$, fechado de Zariski. Considere o diagrama de explosão de um ponto em $\mathbb{P}^n$, seguido do produto cartesiano por $\mathbb{C}^N$,

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{B} & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \mathbb{P}^n & & \mathbb{P}^{n-1}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 & & p^{-1}Z \subseteq \mathbb{C}^N \times \mathbb{B} & & \\
 & \swarrow p & & \searrow q & \\
 Z \subseteq \mathbb{C}^N \times \mathbb{P}^n & & & & \mathbb{C}^N \times \mathbb{P}^{n-1} \\
 & \searrow \bar{p} & & \swarrow \bar{q} & \\
 & & \mathbb{C}^N & &
 \end{array}$$

Veja que $\bar{p}(Z) = \bar{q}(q(p^{-1}Z))$. Agora $p^{-1}Z$ é fechado em $\mathbb{C}^N \times \mathbb{B}$. Por outro lado, como $\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ é uma $\mathbb{P}^1$ -fibrção localmente trivial, podemos aplicar o caso $n = 1$ para concluir que $q(p^{-1}Z)$ é fechado em $\mathbb{C}^N \times \mathbb{P}^{n-1}$. Por fim, indução. $\square$

7.4 aplicações

7.4.1. Proposição. *Seja $\varphi : X \rightarrow Y$ um morfismo de variedades. Se X é projetiva e Y é quase-projetiva, então $\varphi(X)$ é projetiva.*

Prova. Temos Y aberto de alguma variedade projetiva $\bar{Y} \subseteq \mathbb{P}^n$ (cf. (3.6, p. 28)). Composto com a inclusão, podemos considerar $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$. Vamos mostrar que $\varphi(X)$ é fechado em $\mathbb{P}^n$. Seja $Z \subset X \times \mathbb{P}^n$ o gráfico de φ . Sabemos que Z é fechado, (??, p. ??). A imagem de Z em $\mathbb{P}^n$ coincide com $\varphi(X)$.

Capítulo 8

espaço tangente

8.1 hipersuperfície

Seja $X = \mathbb{V}(f) \subset \mathbb{C}^n$ uma hipersuperfície e seja $x \in X$. Suponha $\langle f \rangle = \text{rad} \langle f \rangle$. Ou seja, f é um polinômio livre de quadrados, *i.e.*, sem fator repetido. Definimos o espaço tangente a X em x como o subespaço de $\mathbb{C}^n$ formado pelos vetores ortogonais ao gradiente de f no ponto x . Em símbolos,

$$T_x \mathbb{V}(f) = \left\{ v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n \mid \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)v_n = 0 \right\}.$$

Os elementos de $T_x \mathbb{V}(f)$ são chamados de vetores tangentes à hipersuperfície no ponto x . O significado geométrico do vetor tangente é ressaltado pelo seguinte resultado.

8.1.1. Lema. *Notação como no parágrafo anterior, temos que um vetor $v \in \mathbb{C}^n$ é tangente a $\mathbb{V}(f)$ em x se e só se o polinômio $f(x + tv)$ é divisível por t^2 . Equivalente: $t = 0$ é uma raiz de multiplicidade ≥ 2 .*

Prova. Taylor:
$$f(x + tv) = \underbrace{f(x)}_{\substack{|| \\ 0}} + t \underbrace{\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)v_i}_{=0 \iff v \in T_x X} + t^2(\dots).$$

□

Dizemos que x é um ponto não singular quando $\dim T_x X = \dim \mathbb{V}(f) = n - 1$. Equivalente: $\nabla f(x) \neq 0$.

8.1.2. Lema. *Toda hipersuperfície de $\mathbb{C}^n$ contém um aberto denso formado por pontos não singulares.*

Prova. Suponhamos inicialmente $X = \mathbb{V}(f)$, com f irredutível. Se todo ponto de X fosse singular, teríamos $X \subseteq \mathbb{V}(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$. Pelo TZH, seguiria $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \langle f \rangle$. Comparando graus, $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \forall i$, absurdo. O caso geral segue facilmente. $\square$

Analogamente, se $\mathbb{V}(f) \subset \mathbb{P}^n$ é uma hipersuperfície projetiva, temos para cada $x \in \mathbb{V}(f)$ um **espaço tangente projetivo**, definido por

$$TP_x \mathbb{V}(f) = \{[y_1, \dots, y_{n+1}] \in \mathbb{P}^n \mid \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) y_i = 0\}.$$

Exercícios. 134. Se $\mathbb{V}(f) \subset \mathbb{C}^n$ é um hiperplano que passa pela origem, então $T_x \mathbb{V}(f) = \mathbb{V}(f) \forall x \in \mathbb{V}(f)$.

135. Todo ponto de interseção de duas (ou mais) componentes de uma hipersuperfície é singular.

136. Se $F \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ é um polinômio homogêneo de grau d , mostre a relação de Euler, $d \cdot F = \sum \frac{\partial F}{\partial x_i} x_i$.

137. Se $\mathbb{V}(f) \subset \mathbb{P}^n$ é uma hipersuperfície projetiva então $TP_x \mathbb{V}(f)$ contém x para cada $x \in \mathbb{V}(f)$.

138. Se $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ é um polinômio homogêneo livre de quadrados e $x \in \mathbb{V}(f) \setminus 0$ então $T_x \mathbb{V}(f) = T_y \mathbb{V}(f) \forall y \in \mathbb{C}^* x$. Mostre que $TP_{[x]} \mathbb{V}(f) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ é igual à projetivização do subespaço $T_x \mathbb{V}(f) \subseteq \mathbb{C}^n$.

139. Seja $\mathbb{V}(f) \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície quádrlica. Mostre que o conjunto dos pontos singulares $\Sigma(f)$ é um subespaço projetivo. Seja A a matriz simétrica associada à forma quadrática f . Mostre que $\Sigma(f)$ é a projetivização do núcleo de A .

8.2 tangente a uma variedade afim

Mais geralmente, seja $X \subseteq \mathbb{C}^n$ uma subvariedade fechada. Definimos o **espaço tangente** a X em x como o subespaço de $\mathbb{C}^n$ formado pelos vetores ortogonais ao gradiente em x de cada $f \in I(X)$. Em símbolos,

$$T_x X = \left\{ v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n \mid \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) v_n = 0, \forall f \in I(X) \right\}.$$

Dizemos que x é um ponto não singular quando $\dim T_x X = \dim X_x$, onde X_x denota a união das componentes irredutíveis de X contendo x . Veremos oportunamente que, se existir mais de uma componente contendo x , este ponto é singular, a exemplo do caso de hipersuperfícies.

Exercícios. 140. Ache o espaço tangente a $\mathbb{V}(zx, zy) \subset \mathbb{C}^3$ em cada um de seus pontos. Idem para $\mathbb{V}(zx, zy, y - x^2)$.

8.2.1. Lema. *Seja $X \subseteq \mathbb{C}^n$ uma subvariedade fechada. Existe um aberto denso de X formado por pontos não singulares.*

Prova. Mostraremos que, para cada componente irredutível de X , existe um aberto denso formado de pontos não singulares de X . O ponto é mostrar o seguinte.

8.2.2. Lema. *Toda variedade irredutível admite um aberto denso isomorfo a um aberto denso de uma hipersuperfície.*

Prova. Sem perda de generalidade, podemos supor X uma variedade afim irredutível. Seja R seu anel de coordenadas. Seja $K = Fr(R)$ seu corpo de funções racionais. Seja $x_1, \dots, x_n$ uma base de transcendência de K . Seja $L = \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$. Pelo teorema do elemento primitivo, a extensão algébrica finita $K|L$ é da forma $K = L(z)$ para algum $z \in K$ algébrico sobre L . Seja $p(\underline{x}, z) = z^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i(\underline{x})z^i$ o polinômio mínimo de z sobre L . Reduzindo a um mesmo denominador e passando a um aberto principal, podemos supor $x_1, \dots, x_n, z, a_0, \dots, a_m \in R$. Seja $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, z] \subseteq R$. O corpo de frações de A é igual a K . Invertendo mais um número finito de elementos de R e de A , chegamos a uma igualdade $A_a = R_b$. Como A é o anel de coordenadas de uma hipersuperfície, segue o resultado desejado. $\square$

Para ver como este último lema implica o precedente, basta aplicá-lo ao aberto de cada componente obtido pela exclusão das demais. Entretanto, faz-se necessário mostrar que o espaço tangente é invariante por isomorfismo.

Daremos em seguida uma descrição intrínseca do espaço tangente de uma variedade afim que faz apenas uso do anel de coordenadas, e de fato, depende apenas do anel local. Isto nos habilitará a construir o espaço tangente de uma variedade arbitrária.

8.2.3. derivações.

Seja R uma $\mathbb{C}$ -álgebra e seja M um R -módulo. Uma $\mathbb{C}$ -**derivação** de R em M é uma aplicação $\mathbb{C}$ -linear $\xi : R \rightarrow M$ que satisfaz a regra de Leibniz,

$$\xi(fg) = f\xi(g) + g\xi(f).$$

É claro que a coleção $Der(R, M)$ das $\mathbb{C}$ -derivações de R em M é naturalmente um R -módulo. Se $R = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, é um bom exercício verificar que $Der(R, R)$ é o módulo livre com base $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n$.

Seja X uma variedade afim, $x \in X$, $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}(X)$ o ideal maximal correspondente. Consideramos o corpo $\mathbb{C}$ como $\mathcal{O}(X)$ -módulo mediante a identificação $\mathcal{O}(X)/\mathfrak{m}_x = \mathbb{C}$. Concretamente, dados $f \in \mathcal{O}(X)$, $z \in \mathbb{C}$, escrevemos $f \cdot z = f(x)z$. Podemos também considerar $\mathbb{C}$ como um $\mathcal{O}_x$ -módulo de maneira análoga. Definimos **derivação** de X em x como uma derivação de $\mathcal{O}(X)$ no $\mathcal{O}(X)$ -módulo $\mathbb{C}$. Deixamos como exercício a simples verificação de que as derivações de X em x correspondem bijetivamente às derivações do anel local $\mathcal{O}_x$ no $\mathcal{O}_x$ -módulo $\mathbb{C}$. Se ξ é uma derivação vale $\xi(1) = \xi(1^2) = 2\xi(1) \Rightarrow \xi(1) = 0 \Rightarrow \xi(c) = 0 \forall c \in \mathbb{C}$.

É claro que as derivações de X em x formam um subespaço vetorial de $\text{Hom}(\mathcal{O}(X), \mathbb{C})$. Denotamos por $\text{Der}_x X$ o espaço vetorial das derivações.

8.2.4. Lema. *Seja $\mathbb{C}[\varepsilon] = \mathbb{C}[t]/\langle t^2 \rangle$. Seja X uma variedade afim e seja $\phi : \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathbb{C}[\varepsilon]$ um homomorfismo de $\mathbb{C}$ -algébras. Então existem únicos $x \in X, \xi \in \text{Der}_x X$ tais que $\phi(f) = f(x) + \xi(f)\varepsilon$, $\forall f \in \mathcal{O}(X)$. Reciprocamente, toda derivação ...*

Prova. Como adivinhar x, ξ ? Se já os conhecêssemos, teríamos $\phi(f - f(x)) = \xi(f)\varepsilon$. As funções que se anulam em x vão no ideal $\langle \varepsilon \rangle$. Definimos então $\mathfrak{m} = \phi^{-1}\langle \varepsilon \rangle$. Trata-se de um ideal maximal: examine o quociente $\mathcal{O}(X)/\mathfrak{m} \hookrightarrow \mathbb{C}[\varepsilon]/\langle \varepsilon \rangle$. Defina o ponto x tomando $\mathbb{V}(\mathfrak{m})$.

Agora podemos tentar definir uma derivação $\xi : \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ requerendo

$$\phi(f - f(x)) = \xi(f)\varepsilon.$$

Leibniz? Dados $f, g \in \mathcal{O}(X)$, escrevemos

$$\begin{aligned} \xi(fg)\varepsilon &= \phi(fg - f(x)g(x)) = \\ \phi((f - f(x))(g - g(x)) + f(x)g + g(x)f - 2f(x)g(x)) &= \\ = \xi(f)\xi(g)\varepsilon^2 + \phi(f(x)g + g(x)f - 2f(x)g(x)) &= \\ = \phi(f(x)g - f(x)g(x) + g(x)f - f(x)g(x)) &= \\ = \phi(f(x)(g - g(x)) + g(x)(f - f(x))) &= \\ = f(x)\phi(g - g(x)) + g(x)\phi(f - f(x)) &= \\ = (f(x)\xi(g) + g(x)\xi(f))\varepsilon. \end{aligned}$$

□

Cada homomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] &\rightarrow \mathbb{C}[t] \\ x_i &\mapsto p_i(t) \end{aligned}$$

corresponde a uma curva parametrizada

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow X \\ t &\mapsto (p_1(t), \dots, p_n(t)), \end{aligned}$$

supondo algum $p_i(t)$ não constante. A discussão precedente mostra que $Der_x X$ pode ser imaginado como o espaço das “curvas infinitesimais”...

8.2.5. Lema. (equações de $Der_x X$) *Seja $x \in \mathbb{C}^n$ e seja*

$$\xi : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{C}$$

derivação de $\mathbb{C}^n$ em x . Então existe um e um só vetor $v \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$\xi(f) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) v_i \forall f.$$

Em palavras, toda derivação se expressa como uma derivada direcional, de modo que temos um isomorfismo natural, $Der_x \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n, \xi \leftrightarrow v$.

Prova. Seja $v_i = \xi(x_i)$. Por Leibniz, vale

$$\xi(x_i^2) = 2x_i \xi(x_i) = \frac{\partial(x_i^2)}{\partial x_i}(x) v_i;$$

analogamente,

$$\begin{aligned} \xi(x_1^2 x_2) &= 2x_1 \xi(x_1) x_2 + x_1^2 \xi(x_2) \\ &= \frac{\partial(x_1^2 x_2)}{\partial x_1}(x) v_1 + \frac{\partial(x_1^2 x_2)}{\partial x_2}(x) v_2. \end{aligned}$$

Mais geralmente, para um monômio x^I mostra-se $\xi(x^I) = \sum_i \frac{\partial(x^I)}{\partial x_i}(x) v_i$, e por linearidade... $\square$

8.2.6. Proposição. *Seja $X \subseteq \mathbb{C}^n$ variedade afim e seja $x \in X$. Então para cada $\xi \in Der_x X$ existe uma única derivada direcional $\xi_v \in Der_x \mathbb{C}^n$ tal que*

$$(\star) \quad \xi_v(f) = \xi(\bar{f}) \forall f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n],$$

com $\bar{f}$ = imagem de f em $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(X)$. Em particular, temos $\xi_v(f) = 0 \forall f \in I(X)$. Reciprocamente, se $v \in \mathbb{C}^n$ satisfaz

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) v_i = 0 \forall f \in I(X)$$

então ξ_v induz uma derivação $\xi \in Der_x X$ satisfazendo $(\star)$.

Prova. Dado $\xi \in \text{Der}_x X$, a composição

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(X) & \xrightarrow{\xi} & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \bar{f} & & \end{array}$$

é uma derivação. Logo, é da forma ξ_v . Como $\bar{f} = 0$ para $f \in I(X)$, segue $\xi_v(f) = 0$. Reciprocamente, se esta condição vale, então $\xi_v : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{C}$ passa ao quociente e induz uma derivação $\xi : \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathbb{C}$. $\square$

O resultado abaixo estabelece uma identificação natural do espaço tangente com o espaço das derivações.

8.2.7. Corolário. *A correspondência $v \leftrightarrow \xi_v$ estabelece um isomorfismo entre $\text{Der}_x X$ e o subespaço $T_x X \subseteq \mathbb{C}^n = \text{Der}_x \mathbb{C}^n$ definido pelo sistema linear*

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) v_i = 0 \quad \forall f \in I(X).$$

Doravante, consideramos indistintamente cada vetor tangente como uma derivação e vice-versa. Para um, temos as equações, enquanto que para o outro, temos a definição intrínseca.

Outra caracterização intrínseca do espaço tangente é fornecida pela seguinte

8.2.8. Proposição. *Seja X uma variedade afim e seja $x \in X$. Seja $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_x$ o ideal maximal correspondente no anel local de X em x . Considere $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C} = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$. Seja $\delta : \mathcal{O}_x \rightarrow \mathbb{C}$ uma derivação de X em x . Então temos*

- $\delta(\mathfrak{m}_x^2) = 0$ e portanto resulta o funcional linear $\delta' : \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \rightarrow \mathbb{C}$;
- a aplicação $\delta \mapsto \delta'$ define um isomorfismo de espaços vetoriais

$$T_x X \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^* = \text{Hom}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, \mathbb{C}).$$

Prova. Dados $f, g \in \mathfrak{m}_x$, temos $\delta(fg) = f(x)\delta(g) + g(x)\delta(f) = 0$. Para cada funcional $\varepsilon \in (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$, seja $\tilde{\varepsilon}$ definida por composição $\mathfrak{m}_x \rightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C}$. Estendemos a $\tilde{\varepsilon} : \mathcal{O}_x \rightarrow \mathbb{C}$ fazendo $\tilde{\varepsilon}(f) = \tilde{\varepsilon}(f - f(x))$. Verifica-se que $\tilde{\varepsilon}$ é uma derivação e que $\tilde{\delta}' = \delta$, $\tilde{\varepsilon}' = \varepsilon$. $\square$

A proposição precedente nos permite definir o espaço tangente para cada ponto $x \in X$ de uma variedade arbitrária:

$$T_x X = (\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2)^*.$$

8.2.9. Lema. *Seja $\phi : X \rightarrow Y$ morfismo de variedades e seja $y = \phi(x), x \in X$. Para cada derivação $\xi \in T_x X, \xi : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathbb{C}$, temos $\xi \circ \phi^* \in T_y Y$. A aplicação induzida $T_x X \rightarrow T_y Y$ é linear, denotada $d_x \phi$. Se $X \subseteq \mathbb{C}^n, Y \subseteq \mathbb{C}^m$ são subvariedades e ϕ é induzida por $\psi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$, definida por polinômios $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, então temos o diagrama de aplicações lineares,*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{d_x \psi} & \mathbb{C}^m \\ \cup & & \cup \\ T_x X & \xrightarrow{d_x \phi} & T_y Y \end{array}$$

onde a matriz de $d_x \psi$ é a matriz jacobiana $(\frac{\partial p_i}{\partial x_j}(x))$.

Exercícios. 141. (Regra da cadeia.) *Mostre que se $\phi : X \rightarrow Y, \psi : Y \rightarrow Z$ são morfismos de variedades e $y = \phi(x), x \in X$, então $d_x(\psi \circ \phi) = d_y(\psi)(d_x(\phi))$. Conclua que, se ϕ é um isomorfismo então $d_x \phi : T_x X \xrightarrow{\sim} T_x Y$.*

142. *Dado $x \in X \subseteq \mathbb{C}^n$ variedade afim, para cada $v \in T_x X \subseteq \mathbb{C}^n$, temos um homomorfismo,*

$$\begin{array}{ccc} \phi_v : \mathcal{O}(X) & \rightarrow & \mathbb{C}[\varepsilon] \\ f & \mapsto & f(x_1 + \varepsilon v_1, \dots, x_n + \varepsilon v_n) \\ & & = f(x) + \varepsilon \nabla f(x) \cdot v \end{array}$$

com $\nabla f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))$. Assim, a derivação ξ_v nada mais é que produto interno de v com o gradiente.

8.2.10. Proposição. *Seja $X \subseteq \mathbb{C}^n$ uma variedade afim irredutível. Então*

- $\dim T_x X \geq \dim X \ \forall x \in X$ e,
- os pontos singulares de X formam um fechado próprio.

Prova. Sejam $f_1, \dots, f_N$ geradores do ideal de X . Seja r o posto máximo da matriz jacobiana $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)), x \in X$. Existe um aberto denso onde o posto é máximo. Por outro lado, existe um aberto denso formado por pontos não singulares. Logo, vale $r = n - \dim X$. Concluimos também que o lugar dos pontos singulares é definido pelos menores $r \times r$ da matriz jacobiana. $\square$

8.2.11. Lema de Nakayama. *Seja A um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e seja M um A -módulo finitamente gerado. Se $M = \mathfrak{m} \cdot M$ então $M = 0$.*

Prova. Sejam $v_1, \dots, v_r$ geradores de M . Por hipótese, cada v_i admite uma expressão

$$v_i = \sum m_{ij} v_j, \quad m_{ij} \in \mathfrak{m}.$$

Reescrevendo matricialmente,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix} = (m_{ij}) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix}$$

ou

$$(I - (m_{ij})) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix} = 0.$$

Multiplicando pela matriz dos cofatores, obtemos $\det(I - (m_{ij})) v_k = 0$. Mas esse determinante é da forma $1 + m$ para algum $m \in \mathfrak{m}$, logo inversível. $\square$

Exercícios. 143. *Seja A um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e seja M um A -módulo finitamente gerado. Seja $N \subseteq M$ um submódulo tal que $M = N + \mathfrak{m} \cdot M$. Então $M = N$.*

144. *Seja n o número mínimo de geradores de M . Então n é igual à dimensão do espaço vetorial $M/\mathfrak{m} \cdot M$ sobre o corpo $k = \mathcal{A}/\mathfrak{m}$.*

8.2.12. Proposição. *Seja X uma variedade. São equivalentes:*

1. $\dim T_x X = \dim_x X$;
2. $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_x$ é gerado por $\dim_x X$ elementos.

Prova. Sabemos que $\dim T_x X = \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Por Nakayama, $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ é igual ao número mínimo de geradores de $\mathfrak{m}$. Logo, $1. \Rightarrow 2.$ Reciprocamente, temos que

$$2. \Rightarrow \dim T_x X = \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq \dim_x X = \dim Z \leq \dim T_x Z,$$

onde Z denota uma componente irredutível de X passando por x de dimensão máxima. Por fim, $x \in Z \subseteq X \Rightarrow \dim T_x Z \leq \dim T_x X$. $\square$

Nas condições da proposição anterior, dizemos que o ponto $x \in X$ é um **ponto não singular**. Pode-se mostrar que exatamente uma componente irredutível passa por um ponto não singular.

Uma variedade é **lisa** ou **não singular** se cada ponto $x \in X$ é não singular.

Exercícios. 145. $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{P}^n$, $\text{Gr}_k \mathbb{C}^n$ são variedades lisas.

146. A “maioria” das hipersuperfícies de $\mathbb{P}^n$ são lisas. Fixados $d, n \geq 1$ seja $N = \binom{n+d}{n} - 1$; cada ponto $(a_i) \in \mathbb{P}^N$ corresponde a uma hipersuperfície de $\mathbb{P}^n$ de grau d , definida pelo polinômio $F = \sum a_i \underline{x}^i$. Considere

$$D = \{(x, F) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^N \mid \nabla F(x) = 0\}.$$

Mostre que $D \rightarrow \mathbb{P}^n$ é um fibrado projetivo com fibra $\mathbb{P}^{N-n-1}$. Deduza que a imagem de D em $\mathbb{P}^N$ está contida em uma hipersuperfície.

8.2.13. Proposição. Seja X uma variedade irredutível de dimensão m e seja $x \in X$ um ponto não singular. Então existe uma vizinhança afim U de x tal que $U \subseteq \mathbb{C}^{m+r}$ é definida por r equações cujos gradientes são independentes em cada ponto de U .

Prova. Podemos supor $X \subseteq \mathbb{C}^n$ afim. Sem perda de generalidade, podemos tomar $x = 0 \in \mathbb{C}^n$. Sejam $\mathfrak{M} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, $I = I(X) \subseteq \mathfrak{M}$ o ideal de X . O ideal de x em $\mathcal{O}(X)$ é a imagem, $\mathfrak{m} = \mathfrak{M}/I$, de $\mathfrak{M}$ pela aplicação quociente $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathcal{O}(X)$. Esta induz uma sobrejeção de espaços vetoriais,

$$\alpha : \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2 \twoheadrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

Por 8.2.12, temos

$$\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = m, \text{ e evidentemente, } \dim \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2 = n.$$

Seja $r = n - m$. Assim, $\dim \ker \alpha = r$. Por outro lado,

$$\ker \alpha = (I + \mathfrak{M}^2)/\mathfrak{M}^2.$$

Sejam $f_1, \dots, f_r \in I$ cujas classes módulo $\mathfrak{M}^2$ geram $\ker \alpha$. Os gradientes de $f_1, \dots, f_r$ são independentes no ponto x , visto que as classes desses polinômios são l.i. em $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$. Seja $J = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$. Seja Z uma componente irredutível de $\mathbb{V}(J)$ passando por x . Temos $m \leq \dim Z \leq \dim T_x Z \leq m$. A primeira desigualdade provém de (5.1.10, p. 48); a segunda, de (8.2.10, p. 97). A última, da álgebra linear: o subespaço $T_x Z \subseteq \mathbb{C}^{m+r}$ é definido por um sistema que inclui pelo menos r equações independentes, a saber $\nabla f_i(x) \cdot v = 0, i = 1..r$. Segue que $\dim_x \mathbb{V}(J) = m$. Lembrando que $m = \dim T_x X \leq \dim T_x \mathbb{V}(J) \leq m$, segue que $\mathbb{V}(J)$ é liso em x . Logo, X é a única componente de $\mathbb{V}(f_1, \dots, f_r)$ passando por x . Passando a um aberto principal, segue o resultado.

□

8.2.14. Observação. Utilizamos de forma essencial na demonstração acima o seguinte importante

8.2.15. Teorema. *Seja x um ponto não singular de uma variedade X . Então existe uma única componente irredutível de X passando por x .*

A prova deste teorema exige mais noções de álgebra comutativa e será esboçada a seguir.

8.2.16. Lema. *Seja x um ponto de uma variedade X . Então existe uma única componente irredutível de X passando por x se e só se o anel local $\mathcal{O}_x$ é um domínio.*

Prova. Podemos supor X afim e que toda componente de X contém x . Seja $R = \mathcal{O}(X)$. Se X é irredutível, é claro que o anel local $\mathcal{O}_x$ é um domínio, como sub-anel do corpo de funções racionais de X . Reciprocamente, se $Y, Z \subset X = Y \cup Z$ são fechados próprios passando por x , tais que nenhuma componente de Z (resp. de Y) está contida em Y (resp. Z), existem funções $f, g \in R$ tais que $f(Y) = g(Z) = 0$ e f (resp. g) não pertence ao ideal primo de nenhuma componente de Z (resp. de Y). Segue que o germe de f em $\mathcal{O}_x$ é não nulo. Do contrário, existiria $h \in R$ tal que $h(x) \neq 0$ e $hf = 0$. Em particular, $hf(Z) = 0$. Isto obriga h a pertencer ao ideal primo de toda componente de Z , logo $h(x) = 0$, contradição. Analogamente, temos $g \neq 0$ em $\mathcal{O}_x$ e $fg = 0$. $\square$

O leitor pode ver no livro do Shafarevich ou em qualquer texto de álgebra comutativa (e.g., Atiyah&MacDonald, Eisenbud) outras provas do seguinte

Teorema. *Seja x um ponto não singular de uma variedade X . Então o anel local $\mathcal{O}_x$ é um domínio.*

Os principais ingredientes são

1. Se A é um anel local noetheriano com ideal maximal $\mathfrak{m}$, então $\bigcap \mathfrak{m}^i = 0$.
2. Seja x um ponto não singular de uma variedade X tal que $\dim_x X = m$. Seja $\mathfrak{m} = \langle z_1, \dots, z_m \rangle$ o ideal maximal de $\mathcal{O}_x$. Seja $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$ um polinômio homogêneo de grau k tal que $f(z_1, \dots, z_m) \in \mathfrak{m}^{k+1}$. Então $f = 0$.

A argumentação para mostrar que $\mathcal{O}_x$ é um domínio é a seguinte. Sejam $a, b \in \mathcal{O}_x$ não nulos. Por (1), existem i, j tais que $a \in \mathfrak{m}^i \setminus \mathfrak{m}^{i+1}, b \in \mathfrak{m}^j \setminus \mathfrak{m}^{j+1}$. Logo, existe um polinômio homogêneo F , de grau i , a coeficientes em $\mathcal{O}_x$, tal que $a = F(z_1, \dots, z_m)$ e com algum coeficiente fora de $\mathfrak{m}$. Analogamente para $b = G(z_1, \dots, z_m)$. A hipótese sobre F, G significa que $\overline{F}, \overline{G} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$

são polinômios homogêneos não nulos, onde $\overline{F}$ é obtido de F substituindo cada coeficiente por seu valor em x . Portanto $\overline{F} \cdot \overline{G} \neq 0$. Segue de (2) que $ab = FG(z_1, \dots, z_m) \neq 0$. Com efeito, escreva $FG = \sum c_I \underline{x}^I$, combinação de monômios homogêneos de grau $k = i + j$ com coeficientes $c_I \in \mathcal{O}_x$. Temos $c_I = c_I(0) + c'_I$, $c'_I \in \mathfrak{m}$. Seja $h = \sum c_I(0) \underline{x}^I$. De $ab = 0 = \sum (c_I(0) + c'_I) \underline{x}^I$, deduzimos $h(z_1, \dots, z_m) \in \mathfrak{m}^{k+1}$, contradição. $\square$

Para provar (2), suponha por contradição que $f \neq 0$. Logo, existe $\underline{t} = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{C}^m$ tal que $f(\underline{t}) \neq 0$. Fazendo uma mudança linear de coordenadas, podemos supor $\underline{t} = (1, 0, \dots, 0)$. Temos assim $f = x_1^k + f'$, onde $f' \in \langle x_2, \dots, x_m \rangle$. De $f(z_1, \dots, z_m) \in \mathfrak{m}^{k+1}$ vem uma expressão

$$z_1^k = az_1^{k+1} + \sum_2^m b_i z_i, b_i \in \mathcal{O}_x$$

logo

$$(1 - az_1)z_1^k = \sum_2^m b_i z_i.$$

Como $1 - az_1$ é inversível em $\mathcal{O}_x$, isto implica que $z_1 \in \text{rad}\langle z_2, \dots, z_m \rangle$. Concluimos que o ponto x é definido por $m - 1$ equações numa vizinhança adequada. Aplicando (5.1.24, p. 51) vem $\dim_x X < m$, contradição. $\square$

Para a prova de (1), usamos o teorema da base de Hilbert. Seja $a \in \bigcap \mathfrak{m}^i$. Para cada i , existe um polinômio homogêneo F_i de grau i , a coeficientes em $\mathcal{O}_x$, tal que $a = F_i(z_1, \dots, z_m)$, onde $\mathfrak{m} = \langle z_1, \dots, z_m \rangle$. Pelo TBH, existe r tal que $F_{r+1} \in \langle F_1, \dots, F_r \rangle$. Escrevemos $F_{r+1} = \sum_1^r G_i F_i$, onde cada G_i é homogêneo de grau $r + 1 - i$. Deduzimos $a = F_{r+1}(z_1, \dots, z_m) = (\sum_1^r G_i(z_1, \dots, z_m))a$. A soma entre parênteses é um elemento $\mu \in \mathfrak{m}$. Concluimos que $a(1 - \mu) = 0$ e portanto $a = 0$.

8.2.1 a série de Taylor

Um pouco mais de atenção mostra que, se $x \in X$ é um ponto não singular e $\mathfrak{m} = \langle z_1, \dots, z_m \rangle \subset \mathcal{O}_x$, com $m = \dim_x X$, então cada elemento de $\mathcal{O}_x$ admite uma, e só uma expansão de Taylor. Dizemos que uma série formal $F = F_0 + F_1 + \dots \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_m]]$, onde cada F_i denota um polinômio homogêneo de grau i é uma série de Taylor de $f \in \mathcal{O}_x$ se

$$f - \sum_0^j F_i(z_1, \dots, z_m) \in \mathfrak{m}^{j+1} \forall j.$$

Toda $f \in \mathcal{O}_x$ admite uma expansão de Taylor: fazemos $F_0 = f(x)$; agora $f - f(x) \in \mathfrak{m}$ é uma combinação linear de $z_1, \dots, z_m$. Por indução, suponha $f - \sum_0^j F_i(z_1, \dots, z_m) = \sum_J a_J z^J \in \mathfrak{m}^{j+1}$, onde cada z^J denota um monômio de grau $j+1$. Usamos os coeficientes $a_J(x)$ para definir F_{j+1} . A unicidade da série resulta facilmente de (2): se $\sum F_i$ é uma série de Taylor de 0, então $F_i(z_1, \dots, z_m) \in \mathfrak{m}^{i+1} \Rightarrow F_i = 0 \forall i$.

Seja A um anel. Dizemos que $z_1, \dots, z_m \in A$ é uma **seqüência regular** se o ideal gerado é próprio, z_1 é não divisor de zero e cada z_i é não divisor de zero módulo o ideal $I = \langle z_1, \dots, z_{i-1} \rangle$ gerado pelos elementos anteriores.

8.2.17. Proposição. *Se $x \in X$ é um ponto não singular, $\mathfrak{m} = \langle z_1, \dots, z_m \rangle \subset \mathcal{O}_x$, com $m = \dim_x X$ então $z_1, \dots, z_m$ é uma seqüência regular.*

Prova. Seja $I = \langle z_1, \dots, z_{i-1} \rangle$. Suponha $\bar{a} \in \mathcal{O}_x/I, \bar{a} \neq 0$. Por (1), existe k tal que $\bar{a} \notin \bar{\mathfrak{m}}^k$. Equivalente: $a \notin I + \mathfrak{m}^k$. Seja $F = \sum F_i \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_m]]$ a série de Taylor de a . Na soma parcial $G = \sum_0^{k-1} F_i$, existe pelo menos um monômio de G que não contém as variáveis $x_1, \dots, x_{i-1}$. Como a série de Taylor de $z_i a$ é claramente $x_i F$, deduzimos que $z_i a \notin I$. $\square$

8.3 fibrado tangente

8.3.1. Teorema. *Seja X uma variedade irredutível lisa. Então*

$$TX := \{(x, \delta) \mid x \in X, \delta \in T_x X\}$$

é um fibrado vetorial.

Prova. A afirmação subentende a definição da estrutura de variedade para TX . Isto será feito por colagem. Seja $U \subseteq X$ aberto afim, $U \subseteq \mathbb{C}^n$ fechado, com ideal $I = \langle f_1, \dots, f_r, \dots \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tal que os gradientes $\nabla f_1, \dots, \nabla f_r$ são independentes em cada ponto de U , com $r = n - \dim X$. Definimos

$$TU = \{(x, v) \in U \times \mathbb{C}^n \mid \nabla f_i(x) \cdot v = 0, i = 1..r\}.$$

É imediato que $TU \rightarrow U$ é um fibrado vetorial. Para verificar que essa construção “cola” bem e se globaliza, faremos uma pequena digressão. Seja $\phi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ um morfismo, $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m), \phi_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Definimos

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \\ (x, v) &\mapsto (\phi(x), d\phi(x)v) \end{aligned} \tag{8.1}$$

onde $d\phi(x) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ é a transformação linear dada pela matriz jacobiana $(\partial \phi_i / \partial x_j)$. Suponha que $\phi(U) \subseteq V$, subvariedade fechada de $\mathbb{C}^m$, de maneira

que podemos considerar $\phi_U : U \rightarrow V$. Nesta situação sabemos que, para cada $v \in T_x U$, temos $d\phi(x)v \in T_{\phi(x)}V$. Deduzimos que $\phi(TU) \subseteq TV$. Além disso, se ϕ_U é um isomorfismo, concluímos que $\tilde{\phi}|_{TU} : TU \rightarrow TV$ é um isomorfismo. Estas considerações nos permitem definir a estrutura de variedade de TX recorrendo com os subconjuntos da forma TU . Como em situações anteriores, um subconjunto de TX é declarado aberto se e só se a interseção com cada TU é um aberto de TU . O feixe de funções regulares se define de forma similar. O carácter localmente afim resulta da propriedade análoga de TU . $\square$

8.3.2. Corolário. *O feixe de seções de TX é o feixe de $\mathcal{O}_X$ -módulos de derivações. Mais precisamente, para cada aberto afim $U \subseteq X$, se $R = \mathcal{O}(U)$ então o R -módulo de seções $TX(U)$ é isomorfo a $Der(R, R)$.*

Prova. Suponhamos inicialmente $U \subseteq \mathbb{C}^n$ fechado, com ideal $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ contendo funções $f_1, \dots, f_r$ tais que os gradientes $\nabla f_1, \dots, \nabla f_r$ são independentes em cada ponto de U e em número correto. Nessas condições temos que $TU \rightarrow U$ se identifica ao subfibrado de $U \times \mathbb{C}^n \rightarrow U$ formado pelas derivadas direcionais, i.e., $(x, v) \in U \times \mathbb{C}^n$ tais que $\nabla f_i(x) \cdot v = 0$. O vetor v corresponde à derivação $\delta_v : R \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\delta_v(f) = \nabla f(x) \cdot v$. Seja $s : U \rightarrow TU$ uma seção. Assim, para cada $x \in U$, temos $s(x) = (x, v(x)) \in U \times \mathbb{C}^n$, com $v(x)$ ortogonal a cada gradiente $\nabla f_i(x)$. Para cada $f \in R$, seja $\delta_s(f)(x) = \delta_{v(x)}f$. Cumpre-nos mostrar que $\delta_s(f) \in R$, ou seja, é uma função regular. As coordenadas $(v_1(x), \dots, v_n(x))$ do vetor $v(x)$ são funções regulares. Lembrando que $\delta_{v(x)}f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)v_i(x)$, segue o requerido, $\delta_s \in Der(R, R)$. Reciprocamente, dada uma derivação $\delta \in Der(R, R)$, podemos associar uma seção s de TU da seguinte forma. Para cada $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, seja $\bar{f}$ sua restrição a U ; temos $\delta \bar{f} \in R$. Por Leibnitz, vale $\delta \bar{f} = \sum \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \delta \bar{x}_i$. Aqui, cada $\delta \bar{x}_i \in R$, permitindo definir $s(x) = (x, (\delta \bar{x}_1(x), \dots, \delta \bar{x}_n(x)))$. Como o vetor que apareceu é certamente ortogonal aos gradientes, temos efetivamente uma seção regular de TU .

Para um aberto afim arbitrário U , tomamos uma cobertura por abertos principais U_g em que já vale $T(U_g) = Der(R_g, R_g)$. Seja s uma seção de TU . Para cada $x \in U$, temos $s(x) = (x, \delta_x)$, $\delta_x \in T_x X$. Devemos mostrar que, para cada $f \in R$, a função $x \mapsto \delta_x(f)$ é regular. Como funciona em cada U_g , segue o desejado para todo U . $\square$

8.3.3. Exemplos. $T\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

8.3.4. $T\mathbb{P}^1 = \mathcal{O}(2)$.

Façamos o cálculo da função de transição. No aberto U_1 , temos a identificação $\mathbb{C} \times \mathbb{C} = TU_1$, a qual associa a cada $(x, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ o vetor tangente $\phi_1(x, v) = v \frac{d}{dx}$;

o lado direito significa múltiplo constante do operador derivação em $\mathbb{C}[x]$, o anel de coordenadas do aberto sob consideração. Em U_2 , $\phi_2(y, w) = w \frac{d}{dy}$. Na interseção $U_{12} = \mathbb{C}^*$, temos

$$xy = 1. \cdot xdy + ydx = 0, x/dx = -y/dy. \cdot d/dy = -\frac{x}{y}d/dx = -x^2d/dx.$$

Calculamos

$$\phi_1^{-1}\phi_2(y, w) = \phi_1^{-1}(wd/dy) = \phi_1^{-1}(-x^2wd/dx) = (1/x, -x^2w) = (y, -y^{-2}w).$$

Lembrando (6.9.2, p. 74), (6.3.3, p. 63) e fazendo $y = x_1/x_2$, vemos que o fibrado associado a essa função de transição é isomorfo a $\mathcal{O}(2)$.

Lembrando o cálculo feito para o espaço de seções globais (6.9.2, p. 74), para $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(2))$ devemos saber associar a cada forma quadrática $q = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ uma derivação no anel de funções regulares de cada aberto de $\mathbb{P}^1$. De fato, reescrevendo $q = \alpha x_1 - \beta x_2$, α, β formas lineares, temos a derivação $\delta_q(F/G) = (G\nabla F - F\nabla G) \cdot (\beta, \alpha)/G^2$. Deixamos como exercício a verificação dos detalhes.

Note que, no enunciado do corolário anterior, *não* estamos afirmando que para um aberto arbitrário $U \subseteq X$, o módulo de seções $TX(U)$ seja sempre isomorfo ao módulo $Der(\mathcal{O}(U), \mathcal{O}(U))$. Apenas temos sempre um homomorfismo natural $TX(U) \rightarrow Der(\mathcal{O}(U), \mathcal{O}(U))$. Por exemplo, para $U = X = \mathbb{P}^1$, sabemos que $T\mathbb{P}^1(U) = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(2))$, o espaço das formas quadráticas nas coordenadas homogêneas x_1, x_2 , enquanto $\mathcal{O}(U) = \mathbb{C}$ e $Der(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = 0$.

8.3.1 o fibrado tangente de $\mathbb{P}^n$

Denotamos por $\mathcal{O}$ o fibrado trivial com fibra $\mathbb{C}$; seu feixe de seções é o feixe de funções regulares. Consideremos o homomorfismo

$$\varepsilon : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(1)^{\oplus n+1}$$

definido por

$$1 \mapsto (x_1, \dots, x_{n+1}).$$

Vamos construir um homomorfismo sobrejetivo

$$\delta : \mathcal{O}(1)^{\oplus n+1} \longrightarrow T\mathbb{P}^n$$

cujo núcleo é igual à imagem de ε . Uma seção de $\mathcal{O}(1)^{\oplus n+1}$ sobre um aberto $U \subseteq \mathbb{P}^n$ é um vetor $f = (f_1, \dots, f_{n+1})$, $f_i \in \mathcal{O}(1)(U)$, onde cada $f_i = F_i/G_i$, com F_i, G_i polinômios homogêneos tais que $\deg F_i = 1 + \deg G_i$, $G_i(x) \neq 0 \forall x \in U$. Associamos ao vetor f a derivação direcional $\delta_f : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(U)$ tal que

$$\delta_f(F/G) = \frac{(G\nabla F - F\nabla G) \cdot f}{G^2},$$

onde F, G são polinômios homogêneos de mesmo grau e $G(x) \neq 0 \forall x \in U$. Note que temos efetivamente $\delta_f(F/G) \in \mathcal{O}(U)$. (Leitor: por que?) O homomorfismo δ é sobrejetivo sobre os abertos da cobertura afim canônica de $\mathbb{P}^n$, visto que toda derivação $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ é do tipo δ_f . (Verificar!)

8.3.5. Teorema. *Notação como no parágrafo anterior, o fibrado tangente de $\mathbb{P}^n$ é isomorfo a $\mathcal{O}(1)^{\oplus n+1}/\mathcal{O}$.*

Prova. Vamos verificar que a seqüência de homomorfismos de fibrados vetoriais sobre $\mathbb{P}^n$

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{O}(1)^{\oplus n+1} \xrightarrow{\delta} T\mathbb{P}^n \rightarrow 0 \quad (8.2)$$

definidos acima, é exata. Já argumentamos que δ é sobrejetiva. A injetividade de ε é imediata. Para mostrar a anulação de $\delta \circ \varepsilon$, lembramos a relação de Euler,

$$\sum \frac{\partial F}{\partial x_i} x_i = (\deg F)F.$$

Podemos então escrever

$$\delta_x(F/G) = \frac{G \sum \frac{\partial F}{\partial x_i} x_i - F \sum \frac{\partial G}{\partial x_i} x_i}{G^2} = \frac{G(\deg F)F - F(\deg G)G}{G^2} = 0.$$

Sabendo que $\ker \delta \supseteq \text{Im } \varepsilon$ e ambos são subfibrados de mesmo posto, segue a igualdade. Alternativamente, restringindo sobre um aberto afim canônico, digamos $U = \mathbb{P}_{x_1}^n$, suponha $f \in \mathcal{O}(1)(U)^{\oplus n+1}$ satisfaz $\delta_f = 0$. Temos em particular

$$\delta_f\left(\frac{x_i}{x_1}\right) = 0 \Rightarrow x_1 f_i - x_i f_1 = 0, \quad i = 1..n+1.$$

Mas já vimos (6.9, p. 73) que essa condição implica $f = F \cdot (x_1, \dots, x_{n+1})$ para algum $F \in \mathcal{O}(U)$, ou seja, $f = \varepsilon(F)$. $\square$

8.3.6. Observação. Tomando potência exterior em (8.2), deduz-se um isomorfismo

$$\bigwedge^n T\mathbb{P}^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(n+1). \quad (8.3)$$

Recupera-se em particular ($\mathbb{P}^1$) o exemplo 2, (8.3.3, p. 103).

Exercícios. 147. *Sejam $x_1, \dots, x_{n+1}$ coordenadas homogêneas em $\mathbb{P}^n$. Escreva $z_i = x_i/x_{n+1}$ para as funções coordenadas no aberto afim $\mathbb{C}^n = \mathbb{P}^n_{x_{n+1}}$. Seja $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$. Seja $F \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ um polinômio homogêneo de grau d tal que*

$$f(z_1, \dots, z_n) = F\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1\right) = F(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})/x_{n+1}^d.$$

Mostre que $\frac{\partial f}{\partial z_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i}/x_{n+1}^{d-1}$.

148. *Seja $w = (w_1, \dots, w_{n+1}) \in \mathcal{O}(1)(\mathbb{P}^n_{x_{n+1}})^{\oplus n+1}$. Mostre que*

$$\delta_w\left(\frac{F}{x_{n+1}^d}\right) = \frac{1}{x_{n+1}^{d+1}} \sum_1^n \frac{\partial F}{\partial x_i} (w_i x_{n+1} - x_i w_{n+1}).$$

149. *Continuando, seja $\delta_v(f) = \sum \frac{\partial f}{\partial z_i} v_i$, $v_i \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$. Mostre que existe w como acima tal que $\delta_v(f) = \delta_w\left(\frac{F}{x_{n+1}^d}\right)$.*