

SPLITTING PRINCIPLE



CONFUSE

(E_i) família finita de fibrados vetoriais / X
 $\Rightarrow$ existe um mapa plano $f : X' \rightarrow X$ tal que

- $f^* : \mathcal{A}_*(X) \rightarrow \mathcal{A}_*(X')$ é injetivo;
- cada f^*E_i admite filtração por subfibrados vetoriais

$$E_i^{e_i} = 0 \subset \cdots \subset E_i^1 \subset E_i^0 = f^*E_i$$

com quocientes sucessivos fibrados em retas,

$$L_i^j = E_i^{j-1} / E_i^j.$$

Começar com UM fibrado E . Seja $p : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ o fib.projetivo associado. Temos a seq. exata tautológica,

$$\mathcal{O}_E(-1) \twoheadrightarrow p^*E \twoheadrightarrow F.$$

O mapa $p^* : \mathcal{A}_*(X) \longrightarrow \mathcal{A}_*(\mathbb{P}(E))$ é injetivo:

$$z \in \mathcal{A}_*(X) \Rightarrow z = s_0(E) \cap z = p_* (c_1(\mathcal{O}_E(1))^\epsilon \cap p^*z)$$

$$\text{onde } \epsilon = \text{posto} E - 1,$$

$$\text{Indução no posto de } E \Rightarrow \exists q : X' \rightarrow \mathbb{P}(E)$$

tal que q^*F admite filtração e q^* injetivo.

Compondo com p , completa a verificação para o caso de *um* fibrado. Repetir para o caso geral. . . □

Lema. E = fibrado munido de filtração

$$E = E^{(0)} \supset \dots \supset E^{(e)} = 0$$

com fibrados em retas quocientes $L^{(j)} = E^{(j-1)} / E^{(j)}$.

Ponha $\lambda_j = c_1(L^{(j)}) \in \text{End} \mathcal{A}_*(X)$ e defina

$$\begin{cases} \sigma_1 &= \sum \lambda_j \\ \sigma_2 &= \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j, \\ &\vdots \\ \sigma_e &= \lambda_1 \cdots \lambda_e \end{cases}$$

as funções simétricas elementares.

(1) Se E admitir seção s **sem zeros** então $\prod_{j=1}^e \lambda_j = 0$.

(2) $c(E) = \prod_{j=1}^e (1 + \lambda_j) : c_i(E) = \begin{cases} \sigma_i & \forall i = 1, \dots, e; \\ 0 & \text{para } i > e. \end{cases}$

Prova. (1) $V \subseteq X$ subvariedade. Queremos $(\prod \lambda_j) \cap V = 0$. Pela fórmula de projeção aplicada a $V \subseteq X$, permite supor $V = X$.

Analise o diagrama de mapas de fibrados vetoriais

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{O}_X & & \\
 & \swarrow \tilde{s} & \downarrow s & \searrow s' & \\
 F = E^{(1)} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & L^{(1)}.
 \end{array}$$

Seja W o esquema de zeros de s' .

Se $W = X$ então a seção s fatora na seta pontilhada.

Indução no posto $\Rightarrow \lambda_2 \cdots \lambda_e = 0$.

$W = \text{esquema de zeros } s', \text{ agora } \neq X \Rightarrow$
 $W \text{ divisor de Cartier efetivo} \Rightarrow \lambda_1 \cap [X] = [W] \in \mathcal{A}_*(X).$

Se $W = \emptyset$ então $\lambda_1 \cap [X] = 0$, fim.

Se $W \neq \emptyset$, seja $i : W \hookrightarrow X$ a inclusão. Restringindo a W ,

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{O}_X & & \\
 & \swarrow \tilde{s} & \downarrow s & \searrow s' & \\
 F = E^{(1)} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & L^{(1)}.
 \end{array}$$

segue $i^*s' = 0$, logo i^*s induz uma seção $\tilde{s}$ de F
 (em pontilhado.) Indução no posto de $E \Rightarrow$

$$\prod_2^e c_1(i^* L^{(j)}) = 0. \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \prod_1^e c_1(L^{(j)}) \cap [X] &= \left(\prod_2^e c_1(L^{(j)}) \right) \cap (c_1(L_1) \cap [X]) \\ &= \left(\prod_2^e c_1(L^{(j)}) \right) \cap i_*[W] \end{aligned}$$

(projform)

$$= i_* \left(\prod_2^e c_1(i^* L^{(j)}) \cap [W] \right) = 0.$$

Prova de (2):
$$c(E) = \prod_1^e (1 + c_1(L^{(j)})) .$$

Considere $p : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$; o subfibrado tautológico $\mathcal{O}_E(-1) \rightarrowtail p^*E$ fornece seção de $p^*E \otimes \mathcal{O}_E(1)$ sem zeros.

Assim, pondo $h = c_1\mathcal{O}_E(1)$, $\lambda'_j = c_1(p^*L^{(j)})$ e usando (1),

$$\begin{aligned} 0 &= \prod_1^e c_1(p^*L^{(j)} \otimes \mathcal{O}_E(1)) \\ &= \prod_1^e (h + \lambda'_j) \\ &= \sum_0^e h^{e-k} \sigma'_k, \end{aligned}$$

onde σ'_k denota a k -ésima função simétrica elementar nos λ'_j .

$$h^e + h^{e-1}\sigma'_1 + \cdots + h\sigma'_{e-1} + \sigma'_e = 0.$$

Achamos, $\forall z \in \mathcal{A}_\star(X)$,

$$p_\star(h^e p^\star z + h^{e-1}\sigma'_1 p^\star z + \cdots + h\sigma'_{e-1} p^\star z + \sigma'_e p^\star z) = 0 \Rightarrow$$

$$(s_1(E) + s_0(E)\sigma_1)z = 0 \dots \Rightarrow c_1(E) = -s_1(E) = \sigma_1$$

Em geral, com $\epsilon = e - 1, i \geq 1$,

$$\begin{aligned} 0 &= p_\star \left((h^{\epsilon+i} + h^{\epsilon+i-1}\sigma'_1 + h^{\epsilon+i-2}\sigma'_2 + \cdots + h^{i-1}\sigma'_e) \cap p^\star z \right) \\ &= (s_i(E) + \sum s_{i-k}(E)\sigma_k) \cap z \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(1 + s_1(E) + \cdots)(1 + \sigma_1 + \cdots + \sigma_e) = 1.$$

□

$$c_i(E) = 0 \forall i > e.$$

$$E' \twoheadrightarrow E \twoheadrightarrow E'' \Rightarrow c(E) = c(E')c(E'').$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1(E) = c_1(E') + c_1(E'') \\ c_2(E) = c_2(E') + c_1(E')c_1(E'') + c_2(E'') \\ \dots \\ c_e(E) = c_{e'}(E')c_{e''}(E'') \end{array} \right.$$

Para provar fórmulas para $c(E)$, podemos sempre supor
 $E =$ soma direta de fibrado em retas.

A chave para as principais aplicações é o seguinte enunciado.

E = fibrado vetorial de posto e sobre

X = esquema de dimensão pura n .

s = uma seção regular de E . Então

$$c_e(E) \cap [X] = [\mathcal{Z}(s)] \quad \text{in } \mathcal{A}_{n-e}(X).$$

Em palavras: o ciclo do esquema de zeros
representa a classe de Chern máxima.

Prova. $e = 1 \Rightarrow$ a fórmula segue de propriedades do ciclo
associado a um divisor de Cartier.

$e \geq 2$. Pelo “splitting principle”, podemos escolher um mapa plano $f : X' \rightarrow X$ de dimensão relativa m tal que $f^* : \mathcal{A}_*(X) \rightarrow \mathcal{A}_*(X')$ é injetivo e f^*E se encaixa em sequencia exata de fibrados vetoriais,

$$\begin{array}{ccccc}
 F & \longrightarrow & f^*E & \longrightarrow & L, & \text{posto } L = 1 \\
 & \nwarrow \tilde{s} & \uparrow f^*s & \nearrow s' & & \\
 & & \mathcal{O}_{X'} & & &
 \end{array}$$

A seção f^*s induz uma seção s' de L , ambas regulares. Seja $i : \mathcal{Z}(s') \hookrightarrow X'$ inclusão. A restrição i^*f^*s sobre $\mathcal{Z}(s')$ fatora por uma seção $\tilde{s}$ de i^*F , também regular.

Por indução,

$$c_{e-1}(i^*F) \cap [\mathcal{Z}(s')] = [\mathcal{Z}(\tilde{s})] \text{ em } \mathcal{A}_{n-e}(\mathcal{Z}(s')).$$

Note que $\mathcal{Z}(\tilde{s}) = \mathcal{Z}(f^*s) = f^{-1}\mathcal{Z}(s)$.

Escreva $g : \mathcal{Z}(\tilde{s}) \rightarrow \mathcal{Z}(s)$ o map (plano!) induzido por f .

Sejam $j : \mathcal{Z}(\tilde{s}) \hookrightarrow \mathcal{Z}(s')$ e $k : \mathcal{Z}(s) \rightarrow X$

os mapas de inclusão. Temos

$$\begin{aligned} f^*k_*[\mathcal{Z}(s)] &= i_*j_*g^*[\mathcal{Z}(s)] \\ &= i_*j_*[\mathcal{Z}(\tilde{s})] \end{aligned}$$

(indução)

$$= i_*c_{e-1}(i^*F) \cap [\mathcal{Z}(s')]$$

(projform)

$$= c_{e-1}(F) \cap c_1(L)[X']$$

$$\text{(Whitney)} \quad = c_e(f^*E) \cap f^*[X]$$

$$= f^*(c_e(E) \cap [X]).$$

Como f^* é injetivo, . . .

□

Exemplos

Teorema de Bézout: $F_1, \dots, F_e$ hipersuperfícies em $\mathbb{P}^n$ ($e \leq n$),
graus $d_1, \dots, d_e$, interseção própria:

a **dimensão** de cada componente irredutível Z_i de

$$Z := \mathcal{Z}(F_1, \dots, F_e) \text{ é } n - e \Rightarrow$$

$$[Z] = c_e(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_e)) \cap [\mathbb{P}^n]$$

$$= d_1 h \cdots d_e h \cap [\mathbb{P}^n]$$

$$= d_1 \cdots d_e [\mathbb{P}^{n-e}]$$

$$\Rightarrow (\text{multiplicando por } h^{n-e} \text{ e calculando grau})$$

$$\deg Z = m_1 \deg Z_1 + \dots + m_u \deg Z_u = d_1 \cdots d_e.$$

introdução ao cálculo diferencial

$B = A$ -álgebra, $M = B$ -módulo,

$d : B \rightarrow M$ é uma A -derivação de B a valores em M se

- A -linear: $d(ab + b') = adb + db'$
- Leibniz: $d(bb') = bdb' + b'db$

$$\text{Der}_A(B, M) \subset \text{Hom}_A(B, M)$$

B -submódulo.

(Segue $d(A) = 0$; $A =$ “constantes” :-)

Cada homo $\varphi : M \rightarrow M'$ de B -módulos induz

$$\begin{aligned}\mathrm{Der}_A(B, M) &\rightarrow \mathrm{Der}_A(B, M') \\ d &\mapsto \varphi \circ d\end{aligned}$$

homo de B -módulos.

Teorema. Existe $d_{B/A} : B \rightarrow \Omega_{B/A}$ uma A -derivaco universal, *i.e.*, tal que

$$\forall d \in \mathrm{Der}_A(B, M), \exists! \varphi_d \in \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M) \text{ satisfazendo} \\ d = \varphi_d \circ d_{B/A}.$$

(universal $\Rightarrow$ unicidade) $\Omega_{B/A}$ = *módulo cotangente*.

Exemplo (1): $B = A[\{x_\alpha\}]$, anel de polinmios;

$$\begin{aligned}\delta : B &\rightarrow M \text{ uma } A\text{-derivaco, } f := x_1^{e_1} \cdots x_u^{e_u}, \Rightarrow \\ \delta f &= e_1 x_1^{e_1-1} x_2^{e_2} \cdots x_u^{e_u} \delta x_1 + e_2 x_1^{e_1} x_2^{e_2-1} \cdots x_u^{e_u} \delta x_2 + \cdots \\ &= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i \Rightarrow \Omega_{A[\{x_\alpha\}]/A} = \bigoplus B dx_\alpha, \text{ livre.}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} d_{B/A} : B = A[\{x_\alpha\}] & \longrightarrow & \Omega_{B/A} = \bigoplus B dx_\alpha \\ f & \longmapsto & \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \end{array}$$

Exemplo (2): $\varphi : B \rightarrow B'$ homo de A -álgebras,

$d : B' \rightarrow M$ uma A -derivação $\Rightarrow d \circ \varphi : B \rightarrow M$ também é.
 $\Rightarrow$ homo de B -módulos $\text{Der}_A(B', M) \rightarrow \text{Der}_A(B, M)$.

Proposição. Se existir A -derivação universal

$d_{B/A} : B \rightarrow \Omega_{B/A}$, então para todo $\varphi : B \twoheadrightarrow \overline{B}$ homo
sobrejetivo de A -álgebras, $I = \ker \varphi$, existe
 $d_{\overline{B}/A} : \overline{B} \rightarrow \Omega_{\overline{B}/A}$ e temos uma seq. exata,

$$I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{B/A} \otimes_B \overline{B} \rightarrow \Omega_{\overline{B}/A} \rightarrow 0$$

$$f \in I, \delta(f + I^2) = (d_{B/A} f) \otimes \overline{1}.$$

$$I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{B/A} \otimes_B \overline{B} \rightarrow \Omega_{\overline{B}/A} \rightarrow 0$$

I/I^2 = módulo conormal.

$f \in I$, $\delta(f + I^2) = (d_{B/A}f) \otimes \overline{1}$ está bem definido:

$$\text{se } f, g \in I, (d_{B/A}(fg)) \otimes \overline{1} = (f dg + g df) \otimes \overline{1} = \\ dg \otimes f\overline{1} + df \otimes g\overline{1} = 0.$$

Fazemos $\overline{\Omega} := \Omega_{\overline{B}/A} := \Omega_{B/A} \otimes_B \overline{B} / \overline{d_{B/A}I} = \text{coker } \delta$

onde $d_{B/A}I = B$ -submódulo de $\Omega_{B/A}$ gerado por

$$d_{B/A}f, f \in I, d_{B/A}I \otimes_B \overline{B} \rightarrow \Omega_{B/A} \otimes_B \overline{B}.$$

Define-se $d_{\overline{B}/A}$ compondo $d_{B/A} : B \rightarrow \Omega_{B/A} \rightarrow \overline{\Omega}$;
 note que se $f \in I$, então a imagem de $d_{B/A}f$ em $\overline{\Omega}$ é 0,
 e assim passa ao quociente, induzindo $d_{\overline{B}/A} : \overline{B} \rightarrow \overline{\Omega}$.

Devemos mostrar que toda $d \in \text{Der}_A(\overline{B}, M)$

provém de algum $\lambda \in \text{Hom}_{\overline{B}}(\overline{\Omega}, M)$, *i.e.*, $d = \lambda \circ d_{\overline{B}/A}$.

Temos certamente $d \circ \varphi \in \text{Der}_A(B, M)$.

Logo $d \circ \varphi = \mu \circ d_{B/A}$ para algum $\mu \in \text{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M)$.

Se $f \in I$, temos $\mu(d_{B/A}f) = d\varphi f = 0$

e assim μ passa ao quociente, $\overline{\mu} : \overline{\Omega} \rightarrow M$.

Visto que I anula $\overline{\Omega}$ e M , trata-se de fato de um $\overline{B}$ -homo.

Exemplo (4): $B = A[\{x_\alpha\}]/I$, anel de polinômios
módulo um ideal (=caso geral:-)

$$\Rightarrow \Omega_{B/A} = \bigoplus B dx_\alpha / dI$$

onde $dI = B$ -submódulo gerado por $df, f \in I$.

Conclusões:

- segue o teorema de existência (e unicidade!) da derivação universal;
- $\Omega_{B/A}$ é gerado, como B -módulo, pelas imagens de $d_{B/A}b, b \in B$;
- se B é de tipo finito sobre A , então $\Omega_{B/A}$ é B -módulo f.g.

cotangente $\times$ conormal

Proposição. Seja $\mu : B \otimes_A B \twoheadrightarrow B$ dado por multiplicação. Então $\ker \mu$ é gerado por $b \otimes 1 - 1 \otimes b, b \in B$.

Prova.

$$\begin{aligned} b_1 \otimes b'_1 + \cdots + b_r \otimes b'_r \in \ker \mu &\Rightarrow 0 = b_1 b'_1 + \cdots + b_r b'_r \Rightarrow \\ b_1 \otimes b'_1 + \cdots + b_r \otimes b'_r &= (b_1 \otimes 1 - 1 \otimes b_1)(1 \otimes b'_1) + \\ (1 \otimes b_1)(1 \otimes b'_1) &+ \cdots + (b_r \otimes 1 - 1 \otimes b_r)(1 \otimes b'_r) \\ + (1 \otimes b_r)(1 \otimes b'_r) &= \sum (b_i \otimes 1 - 1 \otimes b_i)(1 \otimes b'_i) \\ &+ \sum (1 \otimes b_i b'_i) \\ &\parallel \\ 1 \otimes \sum b_i b'_i &= 0. \end{aligned}$$

$$\ker \mu = \langle b \otimes 1 - 1 \otimes b, b \in B \rangle =: I(\Delta)$$

ideal da diagonal de

$$\mathrm{Spec}(B) \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(B) = \mathrm{Spec}(B \otimes_A B).$$

Proposição. Sejam $I = I(\Delta)$, $C = B \otimes_A B$.

Seq. exata cindida,

$$\begin{array}{ccccc} I/I^2 & \twoheadrightarrow & \Omega_{C/A} \otimes_C B & \twoheadrightarrow & \Omega_{B/A} \\ \parallel & & \parallel & & \\ \Omega_{B/A} & & \Omega_{B/A} \oplus \Omega_{B/A} & & \end{array}$$