Notas de Geometria Algébrica, 2

Anotações, sugestões, complementos de TSpringer.

18 de setembro de 2018

14:53

representações racionais

G =gal, $V = k-$espaço vetorial, $\dim V$ finita.

Uma rep. racional de G em V é um homo. de grupos algébricos $G \to GL(V)$.

Exemplos: (1) $GL_n \to G_m = GL(k), x \mapsto \det x$.

$$\begin{array}{lccl} (2) & GL_n & \xrightarrow{a} & GL(M_{n\times n}), \\ & x & \mapsto & a(x) : \alpha \mapsto a(x)\alpha := x\alpha x^{-1}. \\ (3) & GL_n & \xrightarrow{\lambda} & GL(M_{n\times m}), \\ & x & \mapsto & \lambda(x) : \alpha \mapsto \lambda(x)\alpha := x\alpha. \\ (4) & GL_m & \xrightarrow{\rho} & GL(M_{n\times m}), \\ & x & \mapsto & \rho(x) : \alpha \mapsto \rho(x)\alpha := \alpha x^{-1}. \end{array}$$

representação racional $G \to GL(V)$ $\longleftrightarrow$ **ação** $G \times V \to V$

Dado homo $h : G \to GL(V)$, defina $a_h : G \times V \to V$ por $a_h(g, v) := h(g).v$. Ou seja, fazemos a composição da ação natural $a : GL(V) \times V \to V$ com $G \times V \xrightarrow{h \times 1_V} GL(V) \times V$.
Recipr., dada uma ação $a : G \times V \to V$ defina $h_a : G \to GL(V) \subset \mathrm{End}(V)$ fazendo $h_a(g)(v) = a(g, v)$; verifica-se que h_a é homo de g.as.

$$\mathrm{End}(V) \times V \xrightarrow{\alpha} V$$

morfismo evidente: $\alpha(\lambda, v) = \lambda(v)$. Segue

$\forall X \xrightarrow{\varphi} \mathrm{End}(V)$ morfismo, ganha-se morfismo

$X \times V \xrightarrow{u} V$ por composição.

Recipr., se o morfismo u satisfaz $u(x, v)$ linear em v

para cada x fixo, escrevemos (com (v_j) base de V)

$$u(x, v_j) = \sum u_{ij}(x) v_i,$$

onde a matriz $(u_{ij}(x))$ determina u e define um

morfismo $X \to \mathrm{End}(V)(\simeq \mathbb{A}^{n^2})$.

todo GAL é subgrupo fechado de algum GL_n

Doravante G =gal. Veremos que G é isomorfo a um sg fechado de algum GL_n. Seja X um G-espaço afim. Tradução em anéis de coordenadas: $k[G \times X] = k[G] \otimes k[X]$ e a ação corresponde (credo) a um homo $a^\star : k[X] \to k[G] \otimes k[X]$. Dados $g \in G, x \in X, f \in k[X]$, defina

$$s(g)(f(x)) = f(g^{-1}x).$$

Temos $s(g) \in GL(k[X])$, induzindo representação

$$G \longrightarrow GL(k[X]).$$

Todo subesp. $V \subset k[X]$ *de* $\dim$ *finita está contido em um subesp.* $W \subset k[X]$ *de* $\dim$ *finita que é* $s(G)$*-invariante:* $\forall\, f \in W,\ s(g)f \in W\ \forall g \in G$.

Se $W, W' \subset k[X]$ são $s(G)$-invariantes, idem para

$W + W'$. Isso reduz ao caso $\dim V = 1, V = kf$.

Escreva $a^\star f = \sum_1^n g_i \otimes f_i,\ g_i \in k[G], f_i \in k[X]. \Rightarrow$

$$f(g.x) = (a^\star f)(g, x) = \sum_1^n g_i(g) f_i(x) \Rightarrow$$

$$s(g)f(x) = f(g^{-1}.x) = \sum_1^n g_i(g^{-1}) f_i(x) \Rightarrow$$

$$s(g)(f) = \sum_1^n g_i(g^{-1}) f_i \in \langle f_1, ..., f_n \rangle.$$

Fazer $W =$subesp. gerado por todos os $s(g)(f), g \in G$.

V =*subesp. de* $k[X]$ *é invariante por* $s(G) \iff a^\star V \subset k[G] \otimes V$.

$(\Leftarrow)$ Para cada $f \in V$, $a^\star f \in k[G] \otimes V \Rightarrow$ a conta anterior mostra que $s(G)f \subset V$. Para a recipr., $(\Rightarrow)$ escolha base $f_i \in V$ e estenda a uma base f_i, h_j de $k[X]$.

Dado $f \in V$, escreva $a^\star f \in k[G] \otimes k[X]$, $a^\star f = \sum_1^n u_i \otimes f_i + \sum v_j \otimes h_j$, $u_i, v_j \in k[G] \Rightarrow$

$$s(g)(f)(x) = f(g^{-1}x) = \sum_1^n u_i(g^{-1}) f_i(x) + \sum v_j(g^{-1}) h_j(x).$$

invariância $\Rightarrow s(g)(f) \in V \Rightarrow v_j = 0 \Rightarrow$

$$a^\star V \subset k[G] \otimes V.$$

$$a^\star V \subset k[G] \otimes V \Rightarrow s_V : G \times V \longrightarrow V$$

ação que corresponde a uma rep. racional de G em V.

Aplicamos ao caso da ação $G \times G \to G$ por translação à esq. ou dir. Definimos

$$(\lambda(g)f)(x) = f(g^{-1}x), (\rho(g)f)(x) = f(xg) \Rightarrow$$

$\lambda, \rho : G \to GL(k[G])$ representações.

São fiéis: $\ker = \{e\}$:

$$\lambda(g) = 1 \Rightarrow f(g^{-1}) = f(e)\, \forall f \in k[G] \Rightarrow g = e.$$

todo GAL é subgrupo fechado de algum GL_n

Podemos supor $k[G] = k[f_1, ..., f_n]$, f_i's l.i., t.q. o subespaço $V := \langle f_1, ..., f_n \rangle$ é $\rho(G)$-invariante. De $\rho^\star V \subset k[G] \otimes V$ deduzimos $\rho(g) f_i = \sum m_{ji}(g) f_j \, \forall g \in G$.

Segue homo de gps

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\rho} & GL_n = GL(V) \\ g & \mapsto & (m_{ji}(g)) \end{array}$$

Se $\rho(g) = 1, \rho(g) f_i = f_i \, \forall i$. Como $\rho(g)$ é homo de k-álgebras, segue $\rho(g) f = f \forall f \in k[G]$ e assim $g = e$.

Já temos iso de gps abstratos,
$G \xrightarrow{\rho} \rho(G) =$fechado em $GL(V)$.

É de fato iso de variedades pois o homo de anéis de coordenadas

$$\rho^\star : k[GL(V)] \longrightarrow k[G],\, t_{ij} \mapsto g_{ij}$$

é sobrejetivo:

$$\rho(g) f_i(x) = f_i(xg) = \sum m_{ji}(g) f_j(x) \;\Rightarrow$$
$$f_i(g) = \sum \underbrace{m_{ji}(g)}_{rho^\star(t_{ji})} f_j(e)$$

$H \subseteq G$ sg fechado $\Rightarrow$

$$H = \{g \in G | \lambda(g)\mathcal{I}_G(H) = \mathcal{I}_G(H)\}$$
$$\{g \in G | \rho(g)\mathcal{I}_G(H) = \mathcal{I}_G(H)\}$$

Denote H' o lado direito.

$$f \in \mathcal{I}_G(H), h, h' \in H \Rightarrow (\lambda(h)f)(h') = f(h^{-1}h') = 0 \Rightarrow \lambda(h)\mathcal{I}_G(H) \subseteq \mathcal{I}_G(H) \Rightarrow H \subseteq H' \ldots$$

Exc. complete os argumentos acima.

decomposição de Jordan

decomposição de Jordan

V =esp.vet. dim. finita. Um operador $a \in \mathrm{End}(V)$ é *semi-simples* se diagonalizável, *i.e.*, existe base de V formada por autovetores de a.

decomposição de Jordan

V =esp.vet. dim. finita. Um operador $a \in \mathrm{End}(V)$ é *semi-simples* se diagonalizável, *i.e.*, existe base de V formada por autovetores de a. *a é unipotente se $a - 1$ é nilpotente.*

$S \subseteq \mathrm{End}(V)$ família de operadores comutantes $\Rightarrow$existe base B de V que triangulariza simultaneamente S :

decomposição de Jordan

V =esp.vet. dim. finita. Um operador $a \in \mathrm{End}(V)$ é *semi-simples* se diagonalizável, *i.e.*, existe base de V formada por autovetores de a. a *é unipotente se* $a - 1$ *é nilpotente.*

$S \subseteq \mathrm{End}(V)$ *família de operadores comutantes* $\Rightarrow$*existe base* B *de* V *que triangulariza simultaneamente* S : $[a]_B$ *triangular superior* $\forall a \in S$.

decomposição de Jordan

V =esp.vet. dim. finita. Um operador $a \in \mathrm{End}(V)$ é *semi-simples* se diagonalizável, *i.e.*, existe base de V formada por autovetores de a. *a é unipotente se $a - 1$ é nilpotente.*

$S \subseteq \mathrm{End}(V)$ família de operadores comutantes $\Rightarrow$existe base B de V que triangulariza simultaneamente S : $[a]_B$ triangular superior $\forall a \in S$. Se cada $a \in S$ é semi-simples, diagonaliza-se simul.

Indução sobre $\dim V$.

Indução sobre $\dim V$.

De fato, podemos supor que algum $a \in S$ admite um autosubespaço com autovalor $\alpha_a \in k$, $W = \{v | av = \alpha_a v\} \neq 0, W \neq V$.

Indução sobre $\dim V$.

De fato, podemos supor que algum $a \in S$ admite um autosubespaço com autovalor $\alpha_a \in k$, $W = \{v | av = \alpha_a v\} \neq 0, W \neq V$.

Para $v \in W, b \in S$, vale

$$abv = bav = \alpha_a bv \Rightarrow bv \in W,$$

i.e., W é S-estável.

Indução sobre $\dim V$.

De fato, podemos supor que algum $a \in S$ admite um autosubespaço com autovalor $\alpha_a \in k$, $W = \{v | av = \alpha_a v\} \neq 0, W \neq V$.

Para $v \in W, b \in S$, vale

$$abv = bav = \alpha_a bv \Rightarrow bv \in W,$$

i.e., W é S-estável. Por indução, existe base $B' = \{v_1, ..., v_m\} \subset W$ que faz a matriz de cada restrição $[a|W]_{B'}$ triangular superior $\forall a \in S$:

$$
\begin{cases}
av_1 = a_{11}v_1 \\
av_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 \\
\cdots \\
av_m = a_{1m}v_1 + \cdots + a_{mm}v_m
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} av_1 = a_{11}v_1 \\ av_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 \\ \cdots \\ av_m = a_{1m}v_1 + \cdots + a_{mm}v_m \end{cases}$$

$$\left([a]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{mm} \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{cases} av_1 = a_{11}v_1 \\ av_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 \\ \dots \\ av_m = a_{1m}v_1 + \cdots + a_{mm}v_m \end{cases} \qquad \left([a]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{mm} \end{pmatrix} \right)$$

Seja $\overline{S}$ =coleção dos operadores $\overline{a}$ induzidos no quociente $\overline{V} = V/W$: $\quad \overline{a}(v + W) = av + W$;

$$\begin{cases} av_1 = a_{11}v_1 \\ av_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 \\ \cdots \\ av_m = a_{1m}v_1 + \cdots + a_{mm}v_m \end{cases} \qquad \left([a]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{mm} \end{pmatrix}\right)$$

Seja $\overline{S}$ =coleção dos operadores $\overline{a}$ induzidos no quociente $\overline{V} = V/W$: $\quad \overline{a}(v + W) = av + W$; por indução, existe base $\overline{B} = \{\overline{v_{m+1}}, ..., \overline{v_n}\}$ de $\overline{V}$ que triangulariza cada membro de $\overline{S}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{a}\,\overline{v_{m+1}} = a_{m+1,m+1}\overline{v_{m+1}} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \overline{a}\,\overline{v_{m+1}} = a_{m+1,m+1}\overline{v_{m+1}} \quad \Rightarrow \\ a v_{m+1} = a_{m+1,m+1}v_{m+1} + a_{m,m+1}v_m + \cdots + a_{1,m+1}v_1 \\ \\ \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{a}\,\overline{v_{m+1}} = a_{m+1,m+1}\overline{v_{m+1}} \quad \Rightarrow \\ av_{m+1} = a_{m+1,m+1}v_{m+1} + a_{m,m+1}v_m + \cdots + a_{1,m+1}v_1 \\ \cdots \\ \overline{a}\,\overline{v_n} = a_{m+1,n}\overline{v_{m+1}} + \cdots + a_{nn}\overline{v_{nn}} \quad \Rightarrow \\ av_n = a_{m+1,n}v_{m+1} + \cdots + a_{nn}v_n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + a_{mn}v_m + \cdots + a_{1n}v_1. \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\overline{a}\,\overline{v_{m+1}} = a_{m+1,m+1}\overline{v_{m+1}} \;\Rightarrow \\
a v_{m+1} = a_{m+1,m+1} v_{m+1} + a_{m,m+1} v_m + \cdots + a_{1,m+1} v_1 \\
\ldots \\
\overline{a}\,\overline{v_n} = a_{m+1,n}\overline{v_{m+1}} + \cdots + a_{nn}\overline{v_{nn}} \;\Rightarrow \\
a v_n = a_{m+1,n} v_{m+1} + \cdots + a_{nn} v_n \\
\qquad\qquad + a_{mn} v_m + \cdots + a_{1n} v_1.
\end{cases}
$$

Fazendo $B = \{v_1, ..., v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ resulta

$$
[a]_B = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} & a_{1,m+1} & ... & a_{1n} \\
0 & a_{22} & ... & a_{2m} & a_{2,m+1} & ... & a_{2n} \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & \\
0 & 0 & 0 & a_{mm} & a_{m,m+1} & ... & a_{mn} \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{m+1,m+1} & ... & a_{m+1,n} \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$

(i) Produto de dois endomorfismos comutantes semi-simples (nilpotentes, unipotentes) de V é semi-simples (resp.: nilpotente, unipotente);

(i) Produto de dois endomorfismos comutantes semi-simples (nilpotentes, unipotentes) de V é semi-simples (resp.: nilpotente, unipotente);
(ii) Se $a \in \mathrm{End}(V), b \in \mathrm{End}(W)$ são semi-simples (nilpotente, unipotente) o mesmo vale para $a \oplus b \in \mathrm{End}(V \oplus W), a \otimes b \in \mathrm{End}(V \otimes W)$;

(i) Produto de dois endomorfismos comutantes semi-simples (nilpotentes, unipotentes) de V é semi-simples (resp.: nilpotente, unipotente);
(ii) Se $a \in \mathrm{End}(V), b \in \mathrm{End}(W)$ são semi-simples (nilpotente, unipotente) o mesmo vale para $a \oplus b \in \mathrm{End}(V \oplus W), a \otimes b \in \mathrm{End}(V \otimes W)$;
(iii) Se $a \in \mathrm{End}(V), b \in \mathrm{End}(W)$ são semi-simples (nilpotente) o mesmo vale para $a \otimes 1 + 1 \otimes b \in \mathrm{End}(V \otimes W)$.

Prop. *Dado* $a \in \mathrm{End}(V) \Rightarrow$
(i) existem únicos elementos $a_s, a_n \in \mathrm{End}(V)$ *t.q.* a_s *é semi-simples,* a_n *é nilpotente,*

$$a_s a_n = a_n a_s \text{ e } a = a_s + a_n$$

$$\text{(decomposição de Jordan aditiva);}$$

Prop. *Dado* $a \in \mathrm{End}(V) \Rightarrow$
(i) existem únicos elementos $a_s, a_n \in \mathrm{End}(V)$ *t.q.* a_s *é semi-simples,* a_n *é nilpotente,*

$$a_s a_n = a_n a_s \text{ e } a = a_s + a_n$$

$$\text{(decomposição de Jordan aditiva);}$$

(ii) existem polinômios $P, Q \in k[T]$ *sem termo constante t.q.* $a_s = P(a), a_n = Q(a)$*;*

Prop. *Dado* $a \in \mathrm{End}(V) \Rightarrow$
(i) existem únicos elementos $a_s, a_n \in \mathrm{End}(V)$ *t.q.* a_s *é semi-simples,* a_n *é nilpotente,*

$$a_s a_n = a_n a_s \text{ e } a = a_s + a_n$$

$$\text{(decomposição de Jordan aditiva);}$$

(ii) existem polinômios $P, Q \in k[T]$ *sem termo constante t.q.* $a_s = P(a), a_n = Q(a)$*;*
(iii) se $W \subset V$ *é um subespaço* a*-invariante, então* W *é também invariante sob* a_s, a_n

Prop. *Dado* $a \in \mathrm{End}(V) \Rightarrow$
(i) existem únicos elementos $a_s, a_n \in \mathrm{End}(V)$ *t.q.* a_s *é semi-simples,* a_n *é nilpotente,*

$$a_s a_n = a_n a_s \text{ e } a = a_s + a_n$$

$$\text{(decomposição de Jordan aditiva);}$$

(ii) existem polinômios $P, Q \in k[T]$ *sem termo constante t.q.* $a_s = P(a), a_n = Q(a)$*;*
(iii) se $W \subset V$ *é um subespaço* a*-invariante, então* W *é também invariante sob* a_s, a_n *e vale* $a|W = a_s|W + a_n|W$ *é a decomp. de Jordan aditiva da restrição* $a|W$*.*

Prop. *Dado* $a \in \mathrm{End}(V) \Rightarrow$
(i) existem únicos elementos $a_s, a_n \in \mathrm{End}(V)$ *t.q.* a_s *é semi-simples,* a_n *é nilpotente,*

$$a_s a_n = a_n a_s \text{ e } a = a_s + a_n$$

$$\text{(decomposição de Jordan aditiva);}$$

(ii) existem polinômios $P, Q \in k[T]$ *sem termo constante t.q.* $a_s = P(a), a_n = Q(a)$*;*
(iii) se $W \subset V$ *é um subespaço* a*-invariante, então* W *é também invariante sob* a_s, a_n *e vale* $a|W = a_s|W + a_n|W$ *é a decomp. de Jordan aditiva da restrição* $a|W$*. Resultado similar vale para* $\overline{a} \in \mathrm{End}(V/W)$*;*

Prop. *Dado* $a \in \mathrm{End}(V) \Rightarrow$
(i) existem únicos elementos $a_s, a_n \in \mathrm{End}(V)$ *t.q.* a_s *é semi-simples,* a_n *é nilpotente,*

$$a_s a_n = a_n a_s \text{ e } a = a_s + a_n$$

$$\text{(decomposição de Jordan aditiva);}$$

(ii) existem polinômios $P, Q \in k[T]$ *sem termo constante t.q.* $a_s = P(a), a_n = Q(a)$*;*
(iii) se $W \subset V$ *é um subespaço* a*-invariante, então* W *é também invariante sob* a_s, a_n *e vale* $a|W = a_s|W + a_n|W$ *é a decomp. de Jordan aditiva da restrição* $a|W$*. Resultado similar vale para* $\overline{a} \in \mathrm{End}(V/W)$*;*
(iv) Sejam $\varphi : V \to W, b \in \mathrm{End}(W)$ *transf. lineares. Se* $\varphi \circ a = b \circ \varphi$ *então* $\varphi \circ a_s = b_s \circ \varphi, \varphi \circ a_n = \ldots$

Pol. característico

$\det(T-a)=\prod_1^r(T-\alpha_i)^{n_i}, \alpha_i$ distintos 2 a 2.

Pol. característico

$\det(T-a)=\prod_1^r (T-\alpha_i)^{n_i}, \alpha_i$ distintos 2 a 2.

$$V_i := \{x \in V | (a-\alpha_i)^{n_i} x = 0\}.$$

Pol. característico

$\det(T - a) = \prod_1^r (T - \alpha_i)^{n_i}, \alpha_i$ distintos 2 a 2.

$$V_i := \{x \in V | (a - \alpha_i)^{n_i} x = 0\}.$$

Cada V_i é a-invariante: $(a - \alpha_i)^{n_i} x = 0 \Rightarrow$ $a(a - \alpha_i)^{n_i} x = 0 = (a - \alpha_i)^{n_i} a x$.

Pol. característico

$\det(T-a) = \prod_1^r (T-\alpha_i)^{n_i}, \alpha_i$ distintos 2 a 2.

$$V_i := \{x \in V \big| (a-\alpha_i)^{n_i} x = 0\}.$$

Cada V_i é a-invariante: $(a-\alpha_i)^{n_i} x = 0 \Rightarrow$
$a(a-\alpha_i)^{n_i} x = 0 = (a-\alpha_i)^{n_i} ax$.

Seja $P_i(T) = \det(T-a)/(T-\alpha_i)^{n_i}$. Temos
$\mathrm{mdc}(P_1, ..., P_r) = 1$, logo existe relação
$1 = \sum Q_i P_i$. Assim, $\forall\, v \in V, v =$
$\sum Q_i P_i(a) v, Q_i P_i(a) v \in V_i \Rightarrow V = \sum V_i$.

Veremos que é de fato soma direta.

$(T-\alpha_i)^{n_i}$ coprimos 2 a 2 $\Rightarrow$(usar restos chinês) $\exists P(T) \in k[T]$ t.q.

$$P(T) \equiv 0(\mod T), \; P(T) \equiv \alpha_i(\mod (T-\alpha_i)^{n_i})$$

Veremos que é de fato soma direta.

$(T-\alpha_i)^{n_i}$ coprimos 2 a 2 $\Rightarrow$(usar restos chinês) $\exists P(T) \in k[T]$ t.q.

$$P(T) \equiv 0(\mod T),\ P(T) \equiv \alpha_i(\mod (T-\alpha_i)^{n_i})$$

Faça $a_s := P(a)$.

Cada V_i é igualmente $P(a)$-invariante: $(a-\alpha_i)^{n_i}x = 0 \Rightarrow P(a)(a-\alpha_i)^{n_i}x = 0 = (a-\alpha_i)^{n_i}P(a)x$.

Veremos que é de fato soma direta.

$(T-\alpha_i)^{n_i}$ coprimos 2 a 2 $\Rightarrow$(usar restos chinês) $\exists P(T) \in k[T]$ t.q.

$$P(T) \equiv 0 (\mod T), \; P(T) \equiv \alpha_i (\mod (T-\alpha_i)^{n_i})$$

Faça $a_s := P(a)$.

Cada V_i é igualmente $P(a)$-invariante:

$$(a-\alpha_i)^{n_i} x = 0 \Rightarrow P(a)(a-\alpha_i)^{n_i} x = 0 = (a-\alpha_i)^{n_i} P(a) x.$$

Escrevendo $P(T) = \alpha_i + q_i(T)(T - \alpha_i)^{n_i}$ segue que

$$a_s = P(a) = \alpha_i + q_i(a)(a - \alpha_i)^{n_i}$$

Escrevendo $P(T) = \alpha_i + q_i(T)(T - \alpha_i)^{n_i}$ segue que
$a_s = P(a) = \alpha_i + q_i(a)(a - \alpha_i)^{n_i}$
$\Rightarrow a_s x = \alpha_i x \, \forall x \in V_i \Rightarrow a_s$ é ssimples. De fato,
cada V_i é auto-subespaço de a_s, e concluímos
que a soma é direta: autovetores associados a
autovalores distintos são independentes.
$a_n := a - a_s = (T - P(T))(a)$ é nilpotente:

Escrevendo $P(T) = \alpha_i + q_i(T)(T - \alpha_i)^{n_i}$ segue que

$$a_s = P(a) = \alpha_i + q_i(a)(a - \alpha_i)^{n_i}$$

$\Rightarrow a_s x = \alpha_i x \, \forall x \in V_i \Rightarrow a_s$ é ssimples. De fato, cada V_i é auto-subespaço de a_s, e concluímos que a soma é direta: autovetores associados a autovalores distintos são independentes.

$a_n := a - a_s = (T - P(T))(a)$ é nilpotente:

$$(a - a_s)|V_i = (a - \alpha_i)|V_i$$

Escrevendo $P(T) = \alpha_i + q_i(T)(T - \alpha_i)^{n_i}$ segue que

$$a_s = P(a) = \alpha_i + q_i(a)(a - \alpha_i)^{n_i}$$

$\Rightarrow a_s x = \alpha_i x \, \forall x \in V_i \Rightarrow a_s$ é ssimples. De fato, cada V_i é auto-subespaço de a_s, e concluímos que a soma é direta: autovetores associados a autovalores distintos são independentes.

$a_n := a - a_s = (T - P(T))(a)$ é nilpotente:

$$(a - a_s)|V_i = (a - \alpha_i)|V_i \Rightarrow ((a - a_s)|V_i)^{n_i} = 0$$

Escrevendo $P(T) = \alpha_i + q_i(T)(T - \alpha_i)^{n_i}$ segue que

$$a_s = P(a) = \alpha_i + q_i(a)(a - \alpha_i)^{n_i}$$

$\Rightarrow a_s x = \alpha_i x \, \forall x \in V_i \Rightarrow a_s$ é ssimples. De fato, cada V_i é auto-subespaço de a_s, e concluímos que a soma é direta: autovetores associados a autovalores distintos são independentes.

$a_n := a - a_s = (T - P(T))(a)$ é nilpotente:

$$(a - a_s)|V_i = (a - \alpha_i)|V_i \Rightarrow ((a - a_s)|V_i)^{n_i} = 0$$

$$\Rightarrow (a - a_s)^{\max(n_i)} = 0.$$

unicidade

$a = a_s + a_n = b_s + b_n$ onde a_s, a_n são polinômios em a

unicidade

$a = a_s + a_n = b_s + b_n$ onde a_s, a_n são polinômios em $a \Rightarrow b_s$ comuta com a

unicidade

$a = a_s + a_n = b_s + b_n$ onde a_s, a_n são polinômios em $a \Rightarrow b_s$ comuta com $a \Rightarrow$ b_s comuta com a_s, idem b_n

unicidade

$a = a_s + a_n = b_s + b_n$ onde a_s, a_n são polinômios em a $\Rightarrow$$b_s$ comuta com a $\Rightarrow$ b_s comuta com a_s, idem b_n $\Rightarrow$ $b_s - a_s = a_n - b_n$ nilp& ssimples $\Rightarrow$0.

unicidade

$a = a_s + a_n = b_s + b_n$ onde a_s, a_n são polinômios em a $\Rightarrow b_s$ comuta com $a \Rightarrow$ b_s comuta com a_s, idem $b_n \Rightarrow$ $b_s - a_s = a_n - b_n$ nilp& ssimples $\Rightarrow$0.

Para (iii), se $W \subset V$ é um subespaço a-invariante, então W é também invariante sob a_s, a_n pois são ambos polinômios em a. Visto que a_s é ssimples, a restrição $a_s|W$ tbm. é (exc.!!!:-).

unicidade

$a = a_s + a_n = b_s + b_n$ onde a_s, a_n são polinômios em a $\Rightarrow b_s$ comuta com $a \Rightarrow$ b_s comuta com a_s, idem $b_n \Rightarrow$ $b_s - a_s = a_n - b_n$ nilp& ssimples $\Rightarrow$0.

Para (iii), se $W \subset V$ é um subespaço a-invariante, então W é também invariante sob a_s, a_n pois são ambos polinômios em a. Visto que a_s é ssimples, a restrição $a_s|W$ tbm. é (exc.!!!:-).
Concluímos por conta da unicidade.
(iv) fica como exc.