Notas de Geometria Algébrica, 5.4

Anotações, sugestões, complementos de TSpringer.

26 de novembro de 2018

13:12

5.4 automorfismos semi-simples

G = gal conexo; σ automorfismo de G .

Definimos $G_\sigma := \{x \in G \mid \sigma x = x\}$; é um subgrupo fechado de G . Denotamos por

$\chi : G \rightarrow G$ o morfismo dado por

$$\chi x = (\sigma x)x^{-1}.$$

Defina ação $G \times G \rightarrow G$ fazendo

$$g.x = (\sigma g)xg^{-1}.$$

Temos um morfismo dominante $\psi : G \xrightarrow{\chi} \overline{\chi G}$

satisfazendo G -equivariância:

$$\begin{aligned} \psi(gx) &= \chi(gx) = (\sigma(gx))(gx)^{-1} = \\ &(\sigma(g)\sigma(x))x^{-1}g^{-1} = \sigma(g)(\chi x)g^{-1} = g.\psi x. \end{aligned}$$

$\chi G \subseteq \overline{\chi G}$ é uma órbita, logo aberta em seu fecho.

Segue que $e \in \chi G$ é um ponto simples, pois existe um aberto de tais pontos, que se espalha pela órbita. Note que $G_\sigma = \psi^{-1}e$.

Pelo teorema da dim.fibras, vem

$$\dim \overline{\chi G} = \dim G - \dim G_\sigma.$$

$$G_\sigma := \{x \in G \mid \sigma x = x\}; \quad \chi x = (\sigma x)x^{-1}.$$

A diferencial $d\sigma$ é um automorfismo da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Regra da cadeia $\Rightarrow d\chi(X) = d\sigma(X) - X$, logo

$$\ker d\chi = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(X) = X\} =: \mathfrak{g}_\sigma.$$

Visto que $\chi(G_\sigma) = \{e\}$, segue $d\chi(L(G_\sigma)) = 0$.

Mostremos que a inclusão $L(G_\sigma) \subseteq \mathfrak{g}_\sigma$

é de fato uma igualdade:

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im}(d\psi_e) &\stackrel{\text{TNI}}{=} \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_\sigma \\ &\leq \dim \mathfrak{g} - \dim L(G_\sigma) \\ &= \dim G - \dim G_\sigma = \dim \overline{\chi G}. \end{aligned}$$

5.4.4(ii) Segue $L(G_\sigma) = \mathfrak{g}_\sigma$.

σ semi-simples

Sugestão de Csaba&Lucas: tentar usar a ação
 $g.x = (\sigma g)xg^{-1}$ e mergulhar equivariante $G \xrightarrow{\phi} GL_n$:

$$\phi(g.x) = \phi((\sigma g)xg^{-1}) = \phi(\sigma g)\phi(x)\phi(g^{-1}) = g\phi(x)$$

$$\Rightarrow \phi(\sigma g)\phi(x) = g\phi(x)\phi(g)??$$

desisti por ora:-)

supor *ab initio* σ definido por

$$\sigma x = sx s^{-1}$$

para algum $s \in GL_n$ s.simples.

(É o único caso de interesse no restante.)

σ, s, χ como acima, mostrar $\Rightarrow \chi G = \overline{\chi G}$.

Seja $m(T) = \prod_1^r (T - a_i)$ o pol.min. de s ;
 s .simples $\Rightarrow$ raízes distintas. Faça

$$S := \left\{ x \in GL_n \left| \begin{array}{l} (a) : xGx^{-1} = G; \\ (b) : m(x) = 0; \\ (c) : \text{o pol.carac. de } \text{Ad}(x)|_{\mathfrak{g}} \\ \text{é o mesmo de } d\sigma. \end{array} \right. \right\}$$

Então $s \in S$, é fechado em GL_n e
 todo $x \in S$ é s .simples. Dado um tal x , defina

$$G_x = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}, \quad \mathfrak{g}_x = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{Ad}(x)X = X\}.$$

$$G_x = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}, \quad \mathfrak{g}_x = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{Ad}(x)X = X\}.$$

Compare com

$$G_\sigma = \{g \in G \mid \sigma g = g = sgs^{-1}\};$$

$$g = sgs^{-1} \iff gs = sg \iff gsg^{-1} = s \text{ i.e.,}$$

$$G_s = G_\sigma, \quad \mathfrak{g}_\sigma = \mathfrak{g}_s.$$

Vale $\dim \mathfrak{g}_x = \dim G_x$ (mesma conta do $L(G_\sigma) = \mathfrak{g}_\sigma$.)

Mas $\dim \mathfrak{g}_x =$ multiplicidade do autoespaço de $\text{Ad}(x)$ com autovalor 1, que é a mesma de $\dim \mathfrak{g}_\sigma$ pela condição (c) de S .

Agora agimos com G em S por conjugação. O estabilizador é G_x , todos com a mesma dim.

Segue que as órbitas de G em S ,

$$G \cdot x = \{gxg^{-1} | g \in G\}$$

são todas da mesma dim, e portanto fechadas.

Em particular

$$G \cdot s = \{gsg^{-1} | g \in G\} \simeq \chi G = \{sgs^{-1}g^{-1} | g \in G\}$$

$$gsg^{-1} \leftrightarrow gs^{-1}g^{-1} \leftrightarrow sgs^{-1}g^{-1}$$

fechado em $S \subset GL_n$, logo fechado em G .

(UFA!:-)

5.4.5. $s \in G$ s.simples $\Rightarrow$

(i) A classe de conjugação $C = \{x s x^{-1} | x \in G\}$ é fechada.

(ii) $Z := \{x \in G | x s x^{-1} = s\}$ centralizador de s
 $\Rightarrow \mathfrak{g} = (\text{Ad}(s) - 1)\mathfrak{g} \oplus L(Z)$.

$\sigma x = s^{-1} x s$ é automorfismo s.simples de G . Se χ é como acima, então $C = s \cdot \text{Im} \chi$, $Z = G_\sigma$. Usar 5.4.4.

Para (ii) note que $\text{Ad}(s)$ é endo s.simples de $\mathfrak{g}$;

5.4.5. $s \in G$ s.simples $\Rightarrow$

(i) A classe de conjugação $C = \{x s x^{-1} | x \in G\}$ é fechada.

(ii) $Z := \{x \in G | x s x^{-1} = s\}$ centralizador de s
 $\Rightarrow \mathfrak{g} = (Ad(s) - 1)\mathfrak{g} \oplus L(Z)$.

$\sigma x = s^{-1} x s$ é automorfismo s.simples de G . Se χ é como acima, então $C = s \cdot Im \chi$, $Z = G_\sigma$. Usar 5.4.4.

Para (ii) note que $Ad(s)$ é endo s.simples de $\mathfrak{g}$; $\Rightarrow$

$\alpha := Ad(s) - 1$ é s.simples $\Rightarrow \mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_\lambda$ decomp.

em auto-espacos de α , $Im \alpha = \bigoplus_{\lambda \neq 0} \mathfrak{g}_\lambda$

$L(Z) = \{X \in \mathfrak{g} | X s - s X = 0\} = \mathfrak{g}_0$.

5.4.6.

Suponha D =gal diagonalizável agindo como um grupo de automorfismos no gal conexo G : $G = D$ -espaço, $g \rightarrow d.g$ autom. de G , s.simples (por 3.2.3). Defina

$$Z_G(D) = \{g \in G \mid d.g = g \forall d \in D\}.$$

D age também como um grupo de automorfismos na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Seja

$$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{g}}(D) = \{X \in \mathfrak{g} \mid d.X = X \forall d \in D\}.$$

5.4.7. Cor. $L(Z_G(D)) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(D)$.

Prova por indução sobre $\dim G$, começando com $G = \{e\}$. Se D age trivialmente em $\mathfrak{g}$, a afirmação segue de 5.4.4(ii). Se não, escolha $d \in D$ tq. a coleção dos pts. fixos de d em $\mathfrak{g}$ é subespaço próprio de $\mathfrak{g}$. Por 5.4.4 (ii) tal subespaço é a álgebra de Lie do subgrupo $G_d := \{g \in G \mid d.g = g\}$; $\dim G_d < \dim G$.

Como D é comutativo temos
 $\dim Z_G(D) = \dim Z_{G^o}(D)$. Indução.

5.4.8. Cor.

$G = \text{gal conexo, nilpotente} \Rightarrow$
 $G_s := \{g \in G \mid g \text{ s.simples}\}$
 $\text{é um subgrupo do centro de } G.$

Escreva $(x, y) := xyx^{-1}y^{-1}$; G nilpotente $\Rightarrow \exists n > 0$ tq.
todos os comutadores iterados $(x_1(\dots(x_n, x_{n+1})\dots)) = e$.

Seja $s \in G$ s.simples, $\sigma : x \mapsto sxs^{-1}$. Então sendo χ
como em 5.4.1, temos $\chi x = (s, x)$. Daí $\chi^n G = \{e\}$.

Usando 4.4.13 (ii) segue que $\text{Ad}(s) - 1$ é um mapa linear
de $\mathfrak{g}$ que é s.simples e nilpotente, logo nulo.

Por **5.4.4(ii)** concluímos que σ é trivial, *i.e.*, s está no
centro de G . Por fim, usar 2.4.3 (i).