Notas de Geometria Algébrica, 5

Anotações, sugestões, complementos de TSpringer.

2 de outubro de 2018

17:03

Kostant-Rosenlicht

G =gal unip., $X = G$-espaço afim $\Rightarrow$todas as órbitas de G em X são fechadas.

Seja O uma órbita. Trocando X por $\overline{O}$ podemos supor O densa em X.

Segue O aberta em X. Faça $Y = X \setminus O$, fechado invariante. Seu ideal $I \subseteq k[G]$ é G-invariante, com ação localmente finita. Logo existe subespaço dim.fin. $V \subset I, V \neq 0$, G-invariante; G unip. $\Rightarrow$ existe autovetor $f \in V$ t.q. $\rho_g f = f \, \forall g \in G \Rightarrow f$ constante em O, (denso)constante em $X \Rightarrow I = \langle 1 \rangle \Rightarrow Y = \emptyset$.

2.1.5(3)

$$A = k[SL_2] =$$
$$k[T_1, \ldots, T_4] / \langle T_1 T_4 - T_2 T_3 - 1 \rangle = k[t_1, \ldots, t_4]$$
$$\begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 s_1 + t_2 s_3 & t_1 s_2 + t_2 s_4 \\ t_3 s_1 + t_4 s_3 & t_3 s_2 + t_4 s_4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} t_4 & -t_2 \\ -t_3 & t_1 \end{pmatrix}$$
$$B = k[t_1^2, \ldots, t_4^2, t_1 t_2, t_1 t_3, t_1 t_4, t_2 t_3, t_2 t_4, t_3 t_4] \subset A$$
$$B = \{a(T) \in A \,|\, a(T) = a(-T)\}, \mathrm{char} k \neq 2.$$
$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$ co-multiplicação $\rightsquigarrow$

$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A \text{ co-multiplicação } \rightsquigarrow$$

$$t_1 \mapsto t_1 \otimes t_1 + t_2 \otimes t_3 \ldots \Rightarrow B \ni t_1^2 \mapsto (t_1 \otimes t_1 + t_2 \otimes t_3)^2 = t_1^2 \otimes t_1^2 + 2t_1 t_2 \otimes t_1 t_3 + \cdots \in B \otimes B$$

$$\Rightarrow \Delta(B) \subset B \otimes B;$$

$$\iota : A \longrightarrow A \quad \text{co-inversão:}$$

$$t_1 \mapsto t_4,\ t_2 \mapsto -t_2,\ t_3 \mapsto -t_3,\ t_4 \mapsto t_1$$

$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A \text{ co-multiplicação} \rightsquigarrow$$

$$t_1 \mapsto t_1 \otimes t_1 + t_2 \otimes t_3 \ldots \Rightarrow B \ni t_1^2 \mapsto (t_1 \otimes t_1 + t_2 \otimes t_3)^2 = t_1^2 \otimes t_1^2 + 2t_1t_2 \otimes t_1t_3 + \cdots \in B \otimes B$$

$$\Rightarrow \Delta(B) \subset B \otimes B;$$

$$\iota : A \longrightarrow A \quad \text{co-inversão:}$$

$$t_1 \mapsto t_4,\ t_2 \mapsto -t_2,\ t_3 \mapsto -t_3,\ t_4 \mapsto t_1$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{l} B \ni t_1^2 \mapsto t_4^2 \in B \ldots \\ \ldots \\ B \ni t_3t_4 \mapsto -t_3t_1 \in B \\ \Rightarrow \iota(B) = B; \end{array}\right.$$

$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$ co-multiplicação $\rightsquigarrow$

$t_1 \mapsto t_1 \otimes t_1 + t_2 \otimes t_3 \ldots \Rightarrow B \ni t_1^2 \mapsto (t_1 \otimes t_1 + t_2 \otimes t_3)^2 = t_1^2 \otimes t_1^2 + 2t_1t_2 \otimes t_1t_3 + \cdots \in B \otimes B$

$$\Rightarrow \ \Delta(B) \subset B \otimes B;$$

$$\iota : A \longrightarrow A \quad \text{co-inversão:}$$

$$t_1 \mapsto t_4,\ t_2 \mapsto -t_2,\ t_3 \mapsto -t_3,\ t_4 \mapsto t_1$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{l} B \ni t_1^2 \mapsto t_4^2 \in B \ldots \\ \ldots \\ B \ni t_3t_4 \mapsto -t_3t_1 \in B \\ \Rightarrow \iota(B) = B; \end{array} \right.$$

$\Rightarrow B =$ anel de coordenadas de um gal, PSL_2, munido de homo $SL_2 \longrightarrow PSL_2$.

A inclusão

$$B = k[t_1^2, ..., t_4^2, t_1t_2, t_1t_3, t_1t_4, t_2t_3, t_2t_4, t_3t_4] \subset A = k[t_1, ..., t_4]$$

corresponde a
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^4 & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} & \mathbb{A}^{10} \\ \cup & & \cup \\ SL_2 & \xrightarrow[\varphi]{} & PSL_2 \end{array}$$

A inclusão

$$B = k[t_1^2, ..., t_4^2, t_1t_2, t_1t_3, t_1t_4, t_2t_3, t_2t_4, t_3t_4] \subset A = k[t_1, ..., t_4]$$

$$\text{corresponde a} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^4 & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} & \mathbb{A}^{10} \\ \cup & & \cup \\ SL_2 & \xrightarrow[\varphi]{} & PSL_2 \end{array} \quad \text{onde } \varphi \text{ é homo de gals.}$$

A inclusão

$$B = k[t_1^2, ..., t_4^2, t_1t_2, t_1t_3, t_1t_4, t_2t_3, t_2t_4, t_3t_4] \subset A = k[t_1, ..., t_4]$$

corresponde a
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^4 & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} & \mathbb{A}^{10} \\ \cup & & \cup \\ SL_2 & \xrightarrow[\varphi]{} & PSL_2 \end{array}$$
onde φ é homo de gals.

É sobrej. pois tem imagem densa (por que?

A inclusão

$$B = k[t_1^2, ..., t_4^2, t_1t_2, t_1t_3, t_1t_4, t_2t_3, t_2t_4, t_3t_4] \subset A = k[t_1, ..., t_4]$$

corresponde a
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^4 & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} & \mathbb{A}^{10} \\ \cup & & \cup \\ SL_2 & \xrightarrow[\varphi]{} & PSL_2 \end{array}$$
onde φ é homo de gals.

É sobrej. pois tem imagem densa (por que? ou ainda, $B \subset A$ extensão inteira).

A inclusão

$$B = k[t_1^2, ..., t_4^2, t_1t_2, t_1t_3, t_1t_4, t_2t_3, t_2t_4, t_3t_4] \subset A = k[t_1, ..., t_4]$$

$$\text{corresponde a} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^4 & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} & \mathbb{A}^{10} \\ \cup & & \cup \\ SL_2 & \xrightarrow[\varphi]{} & PSL_2 \end{array}$$ onde φ é homo de gals.

É sobrej. pois tem imagem densa (por que? ou ainda, $B \subset A$ extensão inteira).

O mapa $\widetilde{\varphi}(T_1, ..., T_4) = (T_1^2, ..., T_4^2, ..., T_3T_4) \in \mathbb{A}^{14}$ satisfaz

$$\widetilde{\varphi}(1, 0, 0, 1) = (1, 0, 0, 1, 0, ..., 0)$$

A inclusão

$$B = k[t_1^2, ..., t_4^2, t_1t_2, t_1t_3, t_1t_4, t_2t_3, t_2t_4, t_3t_4] \subset A = k[t_1, ..., t_4]$$

$$\text{corresponde a} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^4 & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} & \mathbb{A}^{10} \\ \cup & & \cup \\ SL_2 & \xrightarrow[\varphi]{} & PSL_2 \end{array}$$ onde φ é homo de gals.

É sobrej. pois tem imagem densa (por que? ou ainda, $B \subset A$ extensão inteira).

O mapa $\widetilde{\varphi}(T_1, ..., T_4) = (T_1^2, ..., T_4^2, ..., T_3T_4) \in \mathbb{A}^{14}$ satisfaz

$$\widetilde{\varphi}(1,0,0,1) = (1,0,0,1,0,...,0) \in PSL_2,$$

$$\widetilde{\varphi}^{-1}\widetilde{\varphi}(1,0,0,1) = \{(\pm 1, 0, 0, \pm 1)\} \Rightarrow$$

$$\varphi^{-1}\varphi(1,0,0,1) = \{(1,0,0,1), (-1,0,0,-1)\}.$$

Uma rep. racional pode ser obtida agindo com SL_2 em $V =$ espaço das matrizes 2×2 por conjugação: $SL_2 \times V \ni (t, v) \mapsto c_t \circ v = tvt^{-1}$.

Uma rep. racional pode ser obtida agindo com SL_2 em $V =$ espaço das matrizes 2×2 por

conjugação: $SL_2 \times V \ni (t, v) \mapsto c_t \circ v = tvt^{-1}$.

Assim c_t se representa por matriz 4×4.

Note que c_t é insensível à troca $t \mapsto -t$
(ou mesmo $t \mapsto \alpha t, \alpha \in k^\star$.)

Uma rep. racional pode ser obtida agindo com SL_2 em $V =$ espaço das matrizes 2×2 por

conjugação: $SL_2 \times V \ni (t, v) \mapsto c_t \circ v = tvt^{-1}$.

Assim c_t se representa por matriz 4×4.

Note que c_t é insensível à troca $t \mapsto -t$ (ou mesmo $t \mapsto \alpha t, \alpha \in k^\star$.) Vamos calcular a matriz $[c_t]_B$ na base natural $B = \{e_{11} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), e_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), ...\}$

$$e_{11} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \overbrace{\begin{pmatrix} t_1 t_4 & -t_1 t_2 \\ t_3 t_4 & -t_2 t_3 \end{pmatrix}}^{t \cdot e_{11} \cdot t^{-1}}$$

$$e_{11} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \overbrace{\begin{pmatrix} t_1t_4 & -t_1t_2 \\ t_3t_4 & -t_2t_3 \end{pmatrix}}^{t \cdot e_{11} \cdot t^{-1}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -t_1t_3 & t_1^2 \\ -t_3^2 & t_1t_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} t_2t_4 & -t_2^2 \\ t_4^2 & -t_2t_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -t_2t_3 & t_1t_2 \\ -t_3t_4 & t_1t_4 \end{pmatrix}$$

$$e_{11} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \overbrace{\begin{pmatrix} t_1t_4 & -t_1t_2 \\ t_3t_4 & -t_2t_3 \end{pmatrix}}^{t \cdot e_{11} \cdot t^{-1}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -t_1t_3 & t_1^2 \\ -t_3^2 & t_1t_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} t_2t_4 & -t_2^2 \\ t_4^2 & -t_2t_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -t_2t_3 & t_1t_2 \\ -t_3t_4 & t_1t_4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [c_t]_B = \operatorname{transp} \left(\begin{matrix} t_1t_4 & -t_1t_2 & t_3t_4 & -t_2t_3 \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \right.$$

$$e_{11} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \overbrace{\begin{pmatrix} t_1t_4 & -t_1t_2 \\ t_3t_4 & -t_2t_3 \end{pmatrix}}^{t\cdot e_{11}\cdot t^{-1}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -t_1t_3 & t_1^2 \\ -t_3^2 & t_1t_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} t_2t_4 & -t_2^2 \\ t_4^2 & -t_2t_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -t_2t_3 & t_1t_2 \\ -t_3t_4 & t_1t_4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [c_t]_B = \operatorname{transp} \begin{pmatrix} t_1t_4 & -t_1t_2 & t_3t_4 & -t_2t_3 \\ -t_1t_3 & t_1^2 & -t_3^2 & t_1t_3 \\ t_2t_4 & -t_2^2 & t_4^2 & -t_2t_4 \\ -t_2t_3 & t_1t_2 & -t_3t_4 & t_1t_4 \end{pmatrix}$$

Deduz-se que $PSL_2 \subset GL_4$.

$$e_{11} := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \overbrace{\left(\begin{smallmatrix} t_1t_4 & -t_1t_2 \\ t_3t_4 & -t_2t_3 \end{smallmatrix}\right)}^{t\cdot e_{11}\cdot t^{-1}}$$

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -t_1t_3 & t_1^2 \\ -t_3^2 & t_1t_3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} t_2t_4 & -t_2^2 \\ t_4^2 & -t_2t_4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} -t_2t_3 & t_1t_2 \\ -t_3t_4 & t_1t_4 \end{smallmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow [c_t]_B = \operatorname{transp}\begin{pmatrix} t_1t_4 & -t_1t_2 & t_3t_4 & -t_2t_3 \\ -t_1t_3 & t_1^2 & -t_3^2 & t_1t_3 \\ t_2t_4 & -t_2^2 & t_4^2 & -t_2t_4 \\ -t_2t_3 & t_1t_2 & -t_3t_4 & t_1t_4 \end{pmatrix}$$

Deduz-se que $PSL_2 \subset GL_4$. (por que?)

Refaça as contas acima trocando V pelo subespaço das matrizes de traço nulo.

gals comutativos

G =*gal comutativo* $\Rightarrow$

(i) G_s, G_u *são fechados em* G

(ii) $G_s \times G_u \longrightarrow G$ (produto) *é iso de gals.*

gals comutativos

G =*gal comutativo* $\Rightarrow$

(i) G_s, G_u *são fechados em* G

(ii) $G_s \times G_u \longrightarrow G$ (produto) *é iso de gals.*

Podemos partir de $G \subset GL(V)$ sg.fechado. Por diag. simult., temos $V = \bigoplus V_i$, decomp. em auto-subespaços de G_s,

gals comutativos

G =*gal comutativo* $\Rightarrow$

(i) G_s, G_u *são fechados em* G

(ii) $G_s \times G_u \longrightarrow G$ (produto) *é iso de gals.*

Podemos partir de $G \subset GL(V)$ sg.fechado. Por diag. simult., temos $V = \bigoplus V_i$, decomp. em auto-subespaços de G_s, juntamente com homos $\alpha_i : G_s \to k^\star$ t.q. $gv = \alpha_i(g)v \, \forall v \in V_i, g \in G_s$.

gals comutativos

G =*gal comutativo* $\Rightarrow$

(i) G_s, G_u *são fechados em* G

(ii) $G_s \times G_u \longrightarrow G$ (produto) *é iso de gals.*

Podemos partir de $G \subset GL(V)$ sg.fechado.

Por diag. simult., temos $V = \bigoplus V_i$, decomp. em auto-subespaços de G_s, juntamente com homos $\alpha_i : G_s \to k^\star$ t.q. $gv = \alpha_i(g)v \, \forall v \in V_i, g \in G_s$.

Se $v \in V_i, g \in G_s, h \in G$ vale

$ghv = hgv = \alpha_i(g)hv$

gals comutativos

G =*gal comutativo* $\Rightarrow$

(i) G_s, G_u *são fechados em* G

(ii) $G_s \times G_u \longrightarrow G$ (produto) *é iso de gals.*

Podemos partir de $G \subset GL(V)$ sg.fechado.

Por diag. simult., temos $V = \bigoplus V_i$, decomp. em auto-subespaços de G_s, juntamente com homos $\alpha_i : G_s \to k^\star$ t.q. $gv = \alpha_i(g)v \, \forall v \in V_i, g \in G_s$.

Se $v \in V_i, g \in G_s, h \in G$ vale

$ghv = hgv = \alpha_i(g)hv \Rightarrow$ *cada* V_i é G-estável.

As restrições $g|V_i$ são simult. trianguláveis(?). Tomando a união de bases adequadas dos V_i, obtemos uma base de V com respeito à qual a matriz de cada $g \in G$ é triangular

As restrições $g|V_i$ são simult. trianguláveis(?).
Tomando a união de bases adequadas dos V_i,
obtemos uma base de V com respeito à qual a
matriz de cada $g \in G$ é triangular
e a de cada $g \in G_s$ é diagonal.

As restrições $g|V_i$ são simult. trianguláveis(?). Tomando a união de bases adequadas dos V_i, obtemos uma base de V com respeito à qual a matriz de cada $g \in G$ é triangular e a de cada $g \in G_s$ é diagonal.

Ganhamos assim $G \subseteq T_n$, $G_s = G \cap D_n$ fechados.

(ii) fica como exc.

Segue: *G gal comutativo, conexo $\Rightarrow$ idem G_s, G_u.*

$\dim G = 1$, **conexo** $\Rightarrow$ **comutativo.**

De fato, $G = G_s \simeq G_m = k^\star$ ou
$G = G_u \simeq G_a = k$.

Usando resultados sobre curvas algébricas, como G admite uma infinidade de automorfismos e é afim, segue $G \simeq \mathbb{A}^1$ ou $G \simeq \mathbb{A}^1 \setminus 0 = k^\star$ como variedades.

Mas veremos demonstração independente.