Notas de Geometria Algébrica, 9($=\pm 8$)

Anotações, sugestões, complementos de TSpringer.

18 de outubro de 2018

12:28

álgebras de Lie, derivações e espaços tangentes

R =anel comut., $A = R-$álg., $M = A$-módulo $\Rightarrow$

$$\mathrm{Der}_R(A, M) := \{D \in \mathrm{Hom}_R(A, M) | D(ab) = aDb + bDa\}$$

A-módulo das R-derivações de A em M:

$$D(R) = 0; \ (aD)(b) = aDb.$$

Se $\phi : A \rightarrow B$ é homo de R-álgebras e $M = B$-módulo, é naturalmente A-módulo. Temos induzido homo de A-módulos,

$$\mathrm{Der}_R(B, M) \xrightarrow{\phi'} \mathrm{Der}_R(A, M)$$
$$D \longmapsto D \circ \phi$$

Se $\phi : A \to B$ é homo de R-álgebras e $M = B$-módulo, é naturalmente A-módulo.

Temos induzido homo de A-módulos,

$$\mathrm{Der}_R(B, M) \xrightarrow{\phi'} \mathrm{Der}_R(A, M)$$

$$D \longmapsto D \circ \phi$$

$$D \circ \phi = 0 \iff D \in \mathrm{Der}_A(B, M) \Rightarrow$$

$$0 \to \mathrm{Der}_A(B, M) \to \mathrm{Der}_R(B, M) \to \mathrm{Der}_R(A, M)$$

seq. exata de A-módulos.

$A = R[T_1, ..., T_n], M = A$-módulo:

$$D \in \mathrm{Der}_R(A, M), g_i := D(T_i) \Rightarrow$$

$$D(T_i T_j) = T_i D(T_j) + T_j D(T_i)$$

$$... \Rightarrow D(f) = \sum \frac{\partial f}{\partial T_i} g_i.$$

vetor tangente

Uma curva parametrizada $\mathbb{A}^1 \xrightarrow{\phi} \mathbb{A}^n$ é dada por um k-homo $k[T_1,...,T_n] \to k[T]$, $T_i \mapsto \phi_i(T)$.

A curva está contida na var. afim $X \subseteq \mathbb{A}^n$ com anel de coordenadas $k[X] = k[T_1,...,T_n]/I, I = \langle f_1,...,f_s \rangle \iff$

$$f_1(g_1(T),...,g_n(T)) = ... = f_s(g_1(T),...,g_n(T)) = 0$$

em $k[T]$.

Uma curva infinitesimal passando por um ponto $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{A}^n$ é dada por um k-homo $k[T_1, ..., T_n] \xrightarrow{\phi} k[T]/\langle T^2 \rangle$,

$$T_i \mapsto \phi_i(T) + \langle T^2 \rangle = x_i + v_i\epsilon,\ \epsilon^2 = 0.$$

A curva inf.$\underline{\text{mal}}$ está contida na var. afim $X \subseteq \mathbb{A}^n$ se ϕ passa ao quociente,

$$\begin{tikzcd}
k[T_1, ..., T_n] \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & k[T]/\langle T^2 \rangle \\
k[X] = k[T_1, ..., T_n]/\langle f_1, ..., f_s \rangle \arrow[ur, "\overline{\phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

$\iff$

$$f_i(x_1 + v_1\epsilon, ..., x_n + v_n\epsilon) = 0 \text{ em } k[\epsilon] \iff$$

$$x \in X, \quad \sum \frac{\partial f_i(x)}{\partial T_j} v_j = 0.$$

Cada k-homo $k[T_1, ..., T_n] \xrightarrow{\phi} k[T]/\langle T^2\rangle =: k[\epsilon]$,
$T_i \mapsto x_i + v_i\epsilon$, $\epsilon^2 = 0$

corresponde a uma derivada direcional, *i.e.*,

uma k-derivação $D_v : f \mapsto \sum \frac{\partial f(x)}{\partial T_j} v_j$,
$D_v \in \mathrm{Der}_k(k[T_1, ..., T_n], k_x)$.

Aqui $k_x = k$, considerado como
$k[T_1, ..., T_n]$-módulo via $f \cdot c = f(x)c, c \in k$.

ϕ fatora por $k[X] \to k[\epsilon] \iff D_v$ provém do
subespaço $\mathrm{Der}_k(k[X], k_x) \to \mathrm{Der}_k(k[T_1, ..., T_n], k_x)$,
definido por $\sum \frac{\partial f_i(x)}{\partial T_j} v_j = 0$
(: vetores ortogonais aos gradientes.)

Espaço tangente

X =var. afim, $x \in X$, $T_x X := \mathrm{Der}_k(k[X], k_x)$.

Cada $D \in T_x X$ define um mapa k-linear

$$\lambda_D : \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \longrightarrow k.$$

De fato,

$$f, g \in \mathfrak{m}_x \Rightarrow D(fg) = f(x)Dg + g(x)Df = 0,$$

ou seja, $D|\mathfrak{m}_x$ passa ao quociente. Recipr...

$T_x = \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, k)$. (exc.)

x é não singular ou liso ou suave em X se $\dim_x X = \dim_k T_x$.

(Veremos que $\forall x \in X$, $\dim_x X \leq \dim_k T_x$, igualdade valendo sobre um aberto denso.)

$$\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X,x}, k) = \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, k).$$

Dado λ no lado direito, definimos

$$D_\lambda(f) = \lambda(f - f(x) + \mathfrak{m}_x^2).$$

$$D_\lambda(fg) = \lambda(fg - fg(x) + \mathfrak{m}_x^2) \ldots$$

$$fg - f(x)g(x) + \mathfrak{m}_x^2 =$$

$$fg - fg(x) + fg(x) - f(x)g(x) + \mathfrak{m}_x^2 =$$

$$f(g - g(x)) + (f - f(x))g(x) + \mathfrak{m}_x^2 =$$

$$(f - f(x) + f(x))(g - g(x)) + (f - f(x))g(x) + \mathfrak{m}_x^2$$

$$= f(x)(g - g(x)) + (f - f(x))g(x) + \mathfrak{m}_x^2.$$

Vemos assim que T_xX só depende do anel local de X em x, permitindo estender a definição para variedades não nec. afins.

mapa tangente

$$\phi : X \longrightarrow Y, x \in X, y = \phi x \Rightarrow \mathcal{O}_x \xleftarrow{\phi^\star} \mathcal{O}_y \Rightarrow$$
$$\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \longleftarrow \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, k) & \xrightarrow{d\phi_x} & \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2, k) \\
\| & & \| \\
T_x X & \xrightarrow{d\phi_x} & T_y Y
\end{array}$$

Funtorial, regra da cadeia: $X \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{\psi} Z$

$$\begin{tikzcd}
T_x X \arrow[r, "d\phi_x"] \arrow[rr, bend right, "d(\psi\circ\phi_x)=d(\psi_y)\circ d(\phi_x)"'] & T_y Y \arrow[r, "d\psi_y"] & T_z Z
\end{tikzcd}$$

módulo de diferenciais

R anel comut., $A = R$ álg. comutativa,
$m : A \otimes_R A \twoheadrightarrow A$ multiplicação
$\Rightarrow I := \ker m = \langle a \otimes 1 - 1 \otimes a \rangle_{a \in A}$ ideal da diagonal; $A \otimes_R A/I \simeq A$.
O módulo de diferenciais

$$\Omega_{A/R} := I/I^2.$$

É munido de "derivação universal",

$$d_{A/R} : A \longrightarrow \Omega_{A/R}$$
$$a \mapsto a \otimes 1 - 1 \otimes a + I^2.$$

$\forall$ A-*módulo* M, *iso. funtorial*

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M) \simeq \mathrm{Der}_R(A, M)$$

$$\left(\Omega_{A/R} \xrightarrow{\lambda} M\right) \leftrightarrow \left(A \xrightarrow{\lambda \circ d_{A/R}} M\right)$$

Para $D \in \mathrm{Der}_R(A, M), D : A \to M$, defina

$\widetilde{D} : A \otimes_R A \to M, a \otimes b \mapsto bDa.$ (R-bil.)

Claramente R-linear. $\widetilde{D}(a \otimes 1 - 1 \otimes a) = Da$

$$\widetilde{D}\left((a \otimes 1 - 1 \otimes a)(b \otimes 1 - 1 \otimes b)\right) =$$

$$\widetilde{D}(ab \otimes 1 - a \otimes b - b \otimes a + 1 \otimes ab) =$$

$$D(ab) - bDa - adB - 0 = 0 \Rightarrow \lambda_D : I/I^2 \to M$$

passa ao quociente, $D = \lambda_D \circ d_{A/R}$.

$\phi : A \to B$ homo de R-álg. $\Rightarrow$ existe único

$$\phi^\circ : \Omega_{A/R} \longrightarrow \Omega_{B/R}$$

$$\phi^\circ d_{A/R} = d_{B/R} \circ \phi$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ d_{A/R}\downarrow & & \downarrow d_{B/R} \\ \Omega_{A/R} & \xrightarrow{\phi^\circ} & \Omega_{B/R} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/R}, M) & \simeq & \mathrm{Der}_R(B, M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M) & \simeq & \mathrm{Der}_R(A, M) \end{array}$$

$$A = R[T_1, ..., T_m]/\langle f_1, ..., f_n\rangle =: R[t_1, ..., t_m],$$
$\Rightarrow \phi : A^m \longrightarrow \Omega_{A/R},\ \phi(e_i) := dt_i$ *é sobrej.*

com núcleo $\boxed{K := \langle \nabla f_1, ..., \nabla f_n\rangle}$

gerado pelos vetores $\nabla f_j = \sum D_i f_j e_i$.

Mostrar que A^m/K satisfaz a propriedade universal que caracteriza $\Omega_{A/R}$. Faça
$d_{A/R} : A \to A^m/K, d_{A/R}(f(t)) = \sum (D_i f)(t) e_i + K$.
A ver: toda $D \in \mathrm{Der}_R(A, M)$ fatora por $d_{A/R}$;
$f \in R[t_1, ..., t_m] \Rightarrow D(f(t)) = \sum (D_i f)(t) D t_i$.
Defina $\widetilde{D} : A^m \to M, \widetilde{D}(e_i) := Dt_i$.
Segue $D = \widetilde{D} \circ d_{A/R}$. Detalhes...

Escrevemos $\Omega_{A/R} = \oplus A dt_i / \langle df_1, ..., df_n\rangle$.

4.2.5

(1) $A = R[T_1, ..., T_m] \Rightarrow \Omega_{A/B}$ é A-*módulo livre com base* $(dTi)_{1<i<m}$. Óbvio pelo visto acima.

(2) $A = R[T]/\langle f \rangle$, *condição nec. e suf. para* $\Omega_{A/R} = 0$. *Considerar o caso* $R =$ *corpo.*

$\Omega_{A/R} = Adt/\langle f'(t)dt \rangle \simeq A/\langle f'(t) \rangle = 0 \iff \langle f'(t) \rangle = 1 \iff \langle f(T), f'(T) \rangle = 1 \iff$ raízes simples em todo ponto $A \to k$...

A condição é automática se $R =$corpo de car. 0 e f irredutível.

(3) A = R-*álgebra, domínio,* F = *corpo de frações de* $A \Rightarrow \Omega_{F/R} \simeq F \otimes_A \Omega_{A/R}$.

Mais geralmente, $S \subset A$ sistema multiplicativo $\Rightarrow$

$$\Omega_{S^{-1}A/R} \simeq S^{-1}A \otimes_A \Omega_{A/R}.$$

Verificar a propr$\underline{\text{de}}$ universal é satisfeita, fazendo $\delta : S^{-1}A \to S^{-1}A \otimes_A \Omega_{A/R}, \delta(\frac{a}{s}) := \frac{sda-ads}{s^2}$ (com $d := d_{A/R}$). Tome $D \in \mathrm{Der}_R(S^{-1}A, M)$; $D' := D|A \Rightarrow D' \in \mathrm{Der}_R(A, M) \Rightarrow D' = \lambda \circ d, \lambda \in \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M)$; estendemos $\lambda : S^{-1}A \otimes_A \Omega_{A/R} \to M, \lambda(\frac{a}{s} \otimes \omega) = \frac{a}{s}\lambda(\omega)$.

(4)$F =$ *corpo,* $E = F(x_1, ..., x_m)$ *extensão de tipo finito* $\Rightarrow \Omega_{E/F}$ *é esp. vet. de dim. finita sobre* E *gerada pelos* dx_i.

$E =$ corpo de frações do domínio de tipo finito $A := F[x_1, ..., x_m]$; agora (1) $\Rightarrow \Omega_{A/F}$ é A-módulo gerado pelos dx_i e por (3) segue $\Omega_{E/F} = E \bigotimes_A \Omega_{A/F}$, e.vet. dim.finita...

(5) $A = k[T, U]/(T^2 - U^3) \Rightarrow \Omega_{A/k}$ *não é* A*-módulo livre.*

(5) $A = k[T,U]/(T^2 - U^3)$ $\Rightarrow \Omega_{A/k}$ *não é A-módulo livre.*

$$\Omega_{A/k} = Adt \oplus Adu/\langle \overbrace{2tdt + 3u^2du}^{d(t^2-u^3)} \rangle \simeq A^2/\langle (2t, 3u^2) \rangle$$

não é livre pois a *fibra*

$k_x \otimes_A \Omega_{A/k} \simeq k_x^2/\langle (2t(x), 3u(x)^2) \rangle$ tem dim 2 para $x = (0,0)$ e dim 1 $\forall\, x \neq (0,0)$.

(6) $A, B = R$- *álgebras* $\Rightarrow$ *isom. de* $A \otimes_A B$-módulos $\Omega_{A \otimes_R B/R} \simeq (\Omega_{A/R} \otimes_R B) \oplus (A \otimes_R \Omega_{B/R})$ *t.q.* $d_{A \otimes_R B/R}$ *corresponde a* $(d_{A/R} \otimes_R id_B) \oplus (id_A \otimes_R d_{B/R})$.

(Em palavras: tg. pdto. fibrado=soma dos tgs. relativos.)

(Usar propr.$^{\underline{\text{de}}}$ univ...exc.)

diferenciais e extensões de corpos

$F \subseteq E' \subseteq E$ ext. tipo finito $\Rightarrow$seq. ex. e.v.$/E$:

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Der}_F(E', E) & \leftarrow & \mathrm{Der}_F(E, E) & \leftarrow & \mathrm{Der}_{E'}(E, E) \leftarrow 0 \\
E' \xrightarrow{D|E'} E & \mapsfrom & E \xrightarrow{D} E & \mapsfrom & E \xrightarrow{D} E
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\varphi \in \mathrm{Hom}_{E'}(\Omega_{E'/F}, E) \leftarrow \mathrm{Hom}_E(\Omega_{E/F}, E) \leftarrow \mathrm{Hom}_E(\Omega_{E/E'}, E) \\
\downarrow \qquad\qquad\qquad \| \\
\varphi' \in \mathrm{Hom}_E(E \otimes_{E'} \Omega_{E'/F}, E), \qquad\qquad \varphi'(e \otimes \omega) := e\varphi(\omega).
\end{array}
$$

Dualizando, $\Rightarrow$ seq. ex.

$$E \otimes_{E'} \Omega_{E'/F} \to \Omega_{E/F} \to \Omega_{E/E'} \to 0$$

+cálculo diferencial

$I \subset A = R$ álgebra, $B := A/I \Rightarrow$

$$I/I^2 \longrightarrow \Omega_{A/R} \otimes_A B \xrightarrow{\overline{\lambda}} \Omega_{B/R} \to 0$$

$(a + I^2 \mapsto d_{A/R}a) \otimes 1$

seq. exata de B-módulos, onde $\overline{\lambda}$ provém da derivação composta $A \twoheadrightarrow B \stackrel{d_{B/R}}{\to} \Omega_{B/R}$,

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, \Omega_{B/R}) \ni \lambda, \ \lambda \circ d_{A/R}a = d_{B/R}(a + I)$$

$$\overline{\lambda}(\omega \otimes b) = b\lambda\omega$$

$$I \ni a \Rightarrow \overline{\lambda}((d_{A/R}a) \otimes 1) = \lambda(d_{A/R}a) = d_{B/R}0 = 0.$$

$M = B$ módulo $\Rightarrow$seq. exata

$$0 \to \mathrm{Der}_R(B, M) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Der}_R(A, M) \to \mathrm{Hom}_B(I/I^2, M)$$

$$(B \xrightarrow{D} M) \mapsto (D' : A \overset{q}{\twoheadrightarrow} B \xrightarrow{D} M)$$

$$(A \xrightarrow{D} M) \mapsto (\overline{D} : a + I^2 \mapsto Da)$$

$$I \ni a \Rightarrow \overline{D'}(a + I^2) = D \circ q(a) = 0;$$

recipr., $\overline{D} = 0 \Rightarrow D(I) = 0 \Rightarrow D$ passa ao quociente, $A \twoheadrightarrow B \to M$.

α é inj. pois provém de

$$\mathrm{Hom}_R(B, M) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, M).$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to \mathrm{Der}_R(B, M) & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Der}_R(A, M) & \to & \mathrm{Hom}_B(I/I^2, M) \\ \| & & \| & & \\ \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/R}, M) & \to & \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M) & & \\ & & \| & & \\ & & \mathrm{Hom}_B(\Omega_{A/R} \otimes_A B, M) & & \end{array}$$

A última igualdade vale mais geralmente: se $A \to B$ é homo de anéis, $N = A$-módulo, $M = B$-módulo então

$$\mathrm{Hom}_A(N, M) = \mathrm{Hom}_B(N \otimes_A B, M):$$

$$(N \xrightarrow{\phi} M) \mapsto (n \otimes b \mapsto b\phi n)$$

$$(n \mapsto \psi(n \otimes 1)) \hookleftarrow (N \otimes_A B \xrightarrow{\psi} M)$$

$B =$*anel, seq.* B*-módulos*

$N' \to N \to N'' \to 0$ *é exata se (e só se)*

$$\forall M, 0 \to \mathrm{Hom}(N'', M) \to \mathrm{Hom}(N, M) \to \mathrm{Hom}(N', M)$$

é exata

volta a corpos $F \subseteq E' \subseteq E$

$$E \otimes_{E'} \Omega_{E'/F} \xrightarrow{\alpha} \Omega_{E/F} \to \Omega_{E/E'} \to 0$$

$E' \subseteq E$ *extensão algébrica (separável: char.0)*

$\Rightarrow \alpha$ *injetiva.*

$$\begin{array}{llcl}
\text{Equiv.:} & \mathrm{Hom}_E(E \otimes_{E'} \Omega_{E'/F}, E) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}_E(\Omega_{E/F}, E) \\
 & \qquad || & & \qquad || \\
\text{sobrej.} & \mathrm{Der}_F(E', E) & \longleftarrow & \mathrm{Der}_F(E, E)
\end{array}$$

Significa: $\forall\, F$-deriv., $D : E' \to E$ se estende.

$$\begin{array}{ccc}
E' & \to & E \\
\bigcap & \nearrow_{D'} & \\
E & &
\end{array}$$

$E = E'(x)$ ext. simples, $x =$elemento primitivo,

$f(T) = \sum a_i T^i \in E[T]$ pol. mín. de x sobre E';

estendemos $D(x) := a \in E$; possível desde que...

volta a corpos $F \subseteq E' \subseteq E$

Significa: $\forall\, F$-deriv., $D : E' \to E$ se estende.

$$\begin{array}{ll} \bigcap & \nearrow^{D'} \\ E & \end{array}$$

$E = E'(x)$ ext. simples, $x =$elemento primitivo,

$f(T) = \sum a_i T^i \in E[T]$ pol. mín. de x sobre E';

estendemos $D'(x) := a \in E$; possível desde que

$$0 = D' f(x) = f'(x)a + \sum D(a_i) x^i \Rightarrow a = \ldots$$

$$E = F(x) \Rightarrow \dim_E \Omega_{E/F} \leq 1$$

Se x é transcendente então
$\Omega_{E/F} = Edx, \mathrm{dim} = 1.$

char.=0, x algébrico separável $\Rightarrow$

$$\Omega_{E/F} = Edx/\langle f'(x)dx\rangle, \mathrm{dim} = 0.$$

Mais geralmente,
$\dim_E \Omega_{E/F} = \mathrm{tdeg}_F E$,
grau de transcendência.

álgebra linear / R

$R =$ domínio, corpo de frações F, $A =$ matriz $m \times n$ com entradas em R,
$\mathcal{M} = \mathcal{M}(A)$ módulo quociente de R^n pelo submódulo gerado pelas linhas de a.

álgebra linear / R

$R =$ domínio, corpo de frações F, $A =$ matriz $m \times n$ com entradas em R,
$\mathcal{M} = \mathcal{M}(A)$ módulo quociente de R^n pelo submódulo gerado pelas linhas de a.

$$R^m \xrightarrow{{}^tA} R^n \twoheadrightarrow \mathcal{M}$$

álgebra linear / R

$R =$ domínio, corpo de frações F, $A =$ matriz $m \times n$ com entradas em R,

$\mathcal{M} = \mathcal{M}(A)$ módulo quociente de R^n pelo submódulo gerado pelas linhas de a.

$$R^m \xrightarrow{{}^tA} R^n \twoheadrightarrow \mathcal{M}$$

$$P \in GL_m(R) \Rightarrow \mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(PA)$$

álgebra linear / R

$R =$ domínio, corpo de frações F, $A =$ matriz $m \times n$ com entradas em R,
$\mathcal{M} = \mathcal{M}(A)$ módulo quociente de R^n pelo submódulo gerado pelas linhas de a.

$$R^m \xrightarrow{{}^tA} R^n \twoheadrightarrow \mathcal{M}$$

$$P \in GL_m(R) \Rightarrow \mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(PA)$$

$$Q \in GL_n(R) \Rightarrow \mathcal{M}(AQ) \simeq \mathcal{M}(A)$$

$\exists f \in R, f \neq 0, P, Q$ invertíveis em R_f t.q.

$$PAQ = \left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

$\exists f \in R, f \neq 0, P, Q$ invertíveis em R_f t.q.

$$PAQ = \left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right).$$

$\Rightarrow \exists f \neq 0$ t.q. $\mathcal{M}_f$ é livre, de posto $n - r$. Ademais, f pode ser escolhido de modo que $n - r$ das imagens da base canônica formem base de $\mathcal{M}$.

$\exists f \in R, f \neq 0, P, Q$ invertíveis em R_f t.q.

$$PAQ = \left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

$\Rightarrow \exists f \neq 0$ t.q. $\mathcal{M}_f$ é livre, de posto $n - r$. Ademais, f pode ser escolhido de modo que $n - r$ das imagens da base canônica formem base de $\mathcal{M}$.

Trivial sobre um corpo; escolher f como denominador comum de P, Q.

$R = k[X]$ anel de coordenadas, X irredutível.

$M = R$-módulo, $x \in X$, fibra

$$M(x) := M/\mathfrak{m}_x M$$

e.vet. $/k$.

Façamos $M = \mathcal{M}(A)$ como acima

$R = k[X]$ anel de coordenadas, X irredutível.

$M = R$-módulo, $x \in X$, fibra

$$M(x) := M/\mathfrak{m}_x M$$

e.vet. $/k$.

Façamos $M = \mathcal{M}(A)$ como acima$\Rightarrow$

$$\mathcal{M}(A)(x) = \mathcal{M}(A(x))$$

Se $r =$ posto (genérico) de A então vale:

(i) $\dim_{k(X)} \mathcal{M}(A) \otimes k(X) = n - r$;

(ii) $\{x \in X \mid \dim_k \mathcal{M}(A(x)) = n - r\}$ é aberto denso em X.

(iii)
$\dim_k \mathcal{M}(A(x)) = n - r \Rightarrow \exists f \in R, f(x) \neq 0$
t.q. $\mathcal{M}(A)_f$ é livre, de posto $n - r$.

Aplicar a

$$\Omega_X = \Omega_{k[X]/k} = \oplus k[X]dx_i / \underbrace{\langle \nabla f \rangle_{f \in I(X)}}_{\text{matriz jacobiana}}$$

$$T_x X \simeq \mathrm{Hom}_k(\Omega_X(x), k)$$