Notas de Geometria Algébrica

Anotações, sugestões, complementos de TSpringer.

9 de setembro de 2018

19:40

$S = k[x_1, \ldots, x_n], k$ alg. fechado.

$$\mathbb{A}^n = k^n \supseteq Z;$$

$I(Z) = \{f \in S \mid f(z) = 0 \forall z \in Z\}$: ideal de Z.

$J \subseteq S; V(J) := \{x \in \mathbb{A}^n \mid f(x) = 0 \forall\, f \in J\}$: conjunto algébrico; variedade afim. Fato: $V(J) = V(\langle J \rangle)$, mesmos zeros do ideal gerado. Fechados da topologia de Zariski.

exemplos

- $\mathbb{A}^n = V(0); \emptyset = V(1)$
- $f \in S, f \notin k$: $V(f)$ =hipersuperfície; hiperplano, quádrica,. . . .
- $X = V(J) \Rightarrow X = \bigcap_{f \in J} V(f)$: toda variedade é interseção de hipersuperfície.
- Teorema da base de Hilbert: interseção finita.
- $M := M_{m \times n}(k) = \mathbb{A}^{mn} \supseteq M^p$:=matrizes de posto $< p$; anulação dos menores dets. $p \times p$. $M^1 = \{C \in M \,|\, \exists A \in M_{m \times 1}, B \in M_{1 \times n}\, t.q.\, C = A \cdot B\}$
- $\mathrm{SL}_n = \{A \in M_{n \times n} \,|\, \det(A) = 1\}$, grupo especial linear.
  $\mathrm{O}_n = \{A \,|\, {}^tAA = I\}$ subgrupo ortogonal...

1.1.2. (i) I ideal próprio em $S \Rightarrow V(I) \neq \emptyset$
(ii) $I(V(I)) = \mathrm{rad}(I)$

TZHilbert (fraco): $\mathfrak{m} \subset S$ max $\Rightarrow$
$\exists\, c_1, \ldots, c_n \in k, \mathfrak{m} = \langle x_1 - c_1, \ldots, x_n - c_n \rangle$.

$I \subseteq \mathfrak{m} \Rightarrow V(I) \supseteq V(\mathfrak{m}) = \{(c_1, \ldots, c_n)\} \Rightarrow$(i).

$$f \in I(V(I)), f \neq 0; I^{\#} = I \cdot k[x_1, \ldots, x_n, t] \Rightarrow$$

$$J := I^{\#} + \langle tf - 1 \rangle \text{ não tem zeros em } \mathbb{A}^{n+1}$$

$$\overset{\text{(i)}}{\Rightarrow} J = \langle 1 \rangle \Rightarrow \exists \text{ relação}$$

$$1 = (tf - 1) \cdot h + \sum g_i(x, t) h_i(x), h_i \in I.$$

Aplicando o homo

$$k[x_1, \ldots, x_n, t] \rightarrow k(x_1, \ldots, x_n), t \mapsto 1/f$$

resulta $1 = \sum g_i(x, \frac{1}{f}) h_i(x) = \sum \frac{\gamma_i(x)}{f^{m_i}} h_i(x) \Rightarrow$

$$f^M = \sum \gamma_i(x) f^{M - m_i} h_i(x) \Rightarrow f \in \mathrm{rad}(I).$$

Exc. (ii) $\Rightarrow$(i).

irredutíveis

X esp. topológico $\neq \emptyset \Rightarrow$ equiv.:
(i) todo aberto $\neq \emptyset$ é denso;
(ii) $\forall\, Y, Z \subset X$, se Y, Z são fechados próprios então $Y \cup Z \neq X$.
(i)$\Rightarrow$(ii): $X \setminus Z$ e $X \setminus Y$ são abertos$\neq \emptyset$, logo densos $\Rightarrow (X \setminus Z) \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset \Rightarrow Z \cup W \neq X$.

Recipr.=exercício.

X é *irredutível* se satisfaz (i) (ou (ii):-). Redutível caso contrário.

$X \supseteq Y$ subesp. topol.

Y é irred. $\iff$ sua aderência $\overline{Y}$ é irred.

($\Rightarrow$) Sejam $U, U' \subseteq \overline{Y}$ abertos não vazios. Então $U \cap Y, U' \cap Y$ são abertos de Y para a topologia induzida, ambos $\neq \emptyset$. Segue $U \cap U' \neq \emptyset$.

Recipr.=exc.

1.2.4. X e.top. noetheriano $\Rightarrow X$ admite só um número finito de subesp. top. irredutíveis maximais. Estes são fechados e cobrem X.

(Noeth. significa dcc para cadeias de fechados.)

Suponha demonstrado que $X = X_1 \cup \cdots \cup X_m$, união finita de fechados irredutíveis.

Seja Y irredutível maximal;

$Y = Y \cap X_1 \cup \cdots \cup Y \cap X_m \Rightarrow Y = Y \cap X_i$

para algum i, logo $Y \subseteq X_i$, igual por maxim$^{\underline{\text{de}}}$.

Exc.: dcc $\Longleftrightarrow$ toda coleção não vazia de subesp. fechados admite membro minimal.

Forme a coleção $\mathcal{Y}$ dos subesp.top. fechados $Y \subseteq X$ que não se escrevem como união finita de fechados irredutíveis. Queremos mostrar $\mathcal{Y} = \emptyset$. Negando, existirá membro minimal $Y \subseteq X$ em $\mathcal{Y}$. Temos Y redutível (por que?), $Y = Y' \cup Y''$, ambos fechados próprios. Por minimalidade, Y', Y'' não são membros de $\mathcal{Y}$... $\square$

As (¿os?) componenentes irredutíveis de X são os fechados irredutíveis maximais.

X noeth.$\Rightarrow$união finita de comps.irreds.

top.Zariski: irred. $\Longleftrightarrow$ ideal primo

$X = V(I) \subset \mathbb{A}^n$ não vazio é irred.

$\Longleftrightarrow I(X)$ é ideal primo de $S := k[x_1, \ldots, x_n]$

$(\Rightarrow)$ Sejam $f, g \in S, fg \in I(X)$. Temos

$V(fg) \supseteq X \Rightarrow V(f) \cup V(g) \supseteq X \Rightarrow V(f) \supseteq X$

(digamos) $\Rightarrow f \in \mathrm{rad}(I(X)) = I(X)$.

$(\Leftarrow)$ $X = Y \cup Z$ fechados $\Rightarrow I(X) = I(Y) \cap I(Z)$

$\Rightarrow I(X) = I(Y)$ (digamos) $\Rightarrow X = Y$.

Exc.:complete os detalhes acima.

k-álgebra afim $\leftrightarrow$ conjunto algébrico

$X \subseteq \mathbb{A}^n$ subconjunto algébrico $\leftrightarrow$ $I =$ ideal de S

$k[X] :=$ anel das restrições de funções polinomiais em X

$I = I(X)$ ideal radical $= \ker(S \twoheadrightarrow k[X])$:

$S \ni f \mapsto f|X$.

$k[X]$ é álgebra afim, *i.e.*,

- tipo finito sobre k e
- sem nilpotentes$\neq 0$.

X é "determinado" por $k[X]$

Por enquanto, enunciado meramente top.conjuntista:

$X \ni x \leftrightarrow \mathfrak{m}_x =$ ideal das funções que se anulam em x.

$$X \leftrightarrow \mathrm{Max}(k[X])$$

$X \supseteq Y =$ fechado $\leftrightarrow$ ideal $I(Y) \subseteq k[X]$;

componentes irredutíveis de $X \leftrightarrow$

ideais primos minimais de $k[X]$;

componentes conexas de $X \leftrightarrow ?$

base de abertos

$X =$conjunto algébrico, $f \in k[X]$

$$D(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = X \setminus V(f)$$

$U \subseteq X$ aberto $\Rightarrow Y := X \setminus U = V(I)$ fechado

$$\Rightarrow Y = \bigcap_{f \in I} V(f) \Rightarrow U = \bigcup D(f).$$

$$D(f) \subseteq D(g) \Rightarrow V(f) \supseteq V(g) \Rightarrow$$

$I(V(f)) \subseteq I(V(g)) \Rightarrow f^m \in \langle g \rangle$ para algum $m \geq 1$.

separar fechados disjuntos

$Y, Z \subset X$ fechados, $Y \cap Z = \emptyset \Rightarrow \exists$

aberto $U \subset X$ tal que $Y \subseteq U$, $U \cap Z = \emptyset$.

$Y = V(I), Z = V(J)$, I, J ideais de $k[X] \Rightarrow$

$\emptyset = V(I + J) \Rightarrow I + J = 1 \Rightarrow \exists f \in I, g \in J$

$$f + g = 1.$$

Agora para cada $y \in Y$ vale $g(y) = 1$.

Faça $U = D(g)$.

funções regulares

X=variedade afim, $x \in X$, denotamos

$\mathcal{F}_x$ =coleção dos germes de funções

$f : U \to k$ definidas em alguma viz. aberta $U \ni x$.

Lembramos que

$$(f_1 : U_1 \to k), (f_2 : U_2 \to k) \in \mathcal{F}_x$$

representam o mesmo germe em x se existir

aberto $x \in U_3 \subset U_1 \cap U_2$ tal que as restrições

$f_1|U_3 = f_2|U_3$. Trata-se de rel. equiv. Cada classe

de equiv. é chamada um germe de função em x.

funções regulares

$\mathcal{F}_x$ é naturalmente um anel.
Um germe de função $f \in \mathcal{F}_x$ é *regular* em $x \in X$ se existirem

- uma viz. aberta $U \ni x$ e
- funções $g_x, h_x \in k[X]$ tais que $h_x(x) \neq 0$, $f(y) = h_x(y)^{-1} g_x(y)\, \forall y \in U \cap D(h_x)$.

Denotamos $\mathcal{O}_{X,x}$ a coleção dos germes de funções regulares em x.
Exc.: $\mathcal{O}_{X,x}$ é um anel local.

Para cada aberto $U \subseteq X$ temos um anel $\mathcal{O}_X(U)$ formado pelas funções cujos germes são regulares em todos os pontos de U.

1.4.5 Se X é uma variedade afim, então o homomorfismo natural $k[X] \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_X(X)$ é iso.

Lembramos que $\mathcal{O}_X(X)$ é subanel do anel das funções $X \to k$. Claro que o mapa ϕ é injetivo e podemos considerar $k[X] \subseteq \mathcal{O}_X(X)$. Para mostrar a igualdade na inclusão acima, pegue $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Forme a coleção

$$\mathcal{D}_f = \{g \in k[X] \,|\, g \cdot f \in k[X]\},$$

ideal dos denominadores de f.

$$\mathcal{D}_f = \{g \in k[X] \,|\, g \cdot f \in k[X]\}.$$

Devemos mostrar que $1 \in \mathcal{D}_f$.

Negando, existe ideal maximal $\mathfrak{m} \supseteq \mathcal{D}_f$.

Sendo k alg. fechado, temos $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$,

associado a algum ponto $x \in X$.

f regular em $x \Rightarrow$ existem $g_x, h_x \in k[X]$ tais que

$$g_x(x) \neq 0 \text{ e } f(y) = g_x(y)^{-1} \cdot h_x(y)$$

para todo y em alguma vizinhança (ab.) U de x.

Agora $Z := X \setminus U$ é fechado disjunto de $\{x\}$,

logo existe $u \in k[X]$ tal que $u(Z) = 0, u(x) = 1$.

Assim, $g_x(y)f(y) = h_x(y) \,\forall y \in U$

$$\Rightarrow u(y)g_x(y)f(y) = u(y)h_x(y) \,\forall y \in X \Rightarrow$$

$u \cdot g_x \in \mathcal{D}_f \subseteq \mathfrak{m}_x$, contradição.

Feixe de funções regulares

$X =$varieade afim, $U \subseteq X$ aberto $\rightsquigarrow$

$\mathcal{O}_X(U) =$ anel das funções regulares em U.

$U \subseteq V \subseteq X$ abertos $\rightsquigarrow$ mapa de restrição

$$\rho_{UV} : \mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$$
$$f \mapsto f|U.$$

Se $U = \bigcup_{\alpha \in \aleph} U_\alpha$ é uma cobertura aberta e para cada α temos elementos $f_\alpha \in \mathcal{O}_X(U_\alpha)$ tais que $\forall U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ valer $f_\alpha|U_{\alpha\beta} = f_\beta|U_{\alpha\beta}$ *então existe um e um só* $f \in \mathcal{O}_X(U)$ tal que $f|U_\alpha = f_\alpha \, \forall \alpha \in \aleph$.

espaços anelados (ringed spaces)

$X =$ espaço topológico munido de um feixe de anéis:

- coleção de anéis $\{\mathcal{R}(U) \,|\, U = \text{ aberto de } X\}$
- $\forall U \subseteq U'$ abertos, tem-se homo. (restr.)

$$\rho_{UU'} : \mathcal{R}(U') \longrightarrow \mathcal{R}(U)$$

tais que $\forall U \subseteq U' \subseteq U''$ abertos,

$$\rho_{UU''} = \rho_{UU'} \circ \rho_{U'U''}$$

- Se $U = \bigcup_{\alpha \in \aleph} U_\alpha$ é uma cobertura aberta...

Exemplo modelo: $X =$variedade afim munida do feixe estrutural $\mathcal{O}_X$.

$\mathbb{P}^n$

=coleção dos subespaços de dim. 1 de k^{n+1}

$$\pi : k^{n+1} \setminus 0 \longrightarrow \mathbb{P}^n$$
$$(x_0, \ldots, x_n) \mapsto (x_0 : \cdots : x_n)$$

$\mathbb{P}^n$ é munido da topologia quociente:

$Z \subseteq \mathbb{P}^n$ é fechado $\iff \pi^{-1}Z$ fechado em $k^{n+1} \setminus 0$.

$\widehat{Z} := \pi^{-1}Z \cup \{0\}$ é um cone com vértice 0,
união de retas $\ni 0$.

Lema. $Z \subseteq k^{n+1}$ é fechado invariante por homotetias $\iff I(Z)$ é ideal homogêneo.

($\Rightarrow$) Tome $F \in I(Z), F = F_0 + \cdots + F_d$, F_i homog. de grau i. Para cada $z \in Z, t \in k$ tem-se $t \cdot z \in Z$. Logo

$$0 = F(tz) = F_0(z) + tF_1(z) + \cdots + t^d F_d(z),$$

polinômio em t nulo para todo t... $\square$

($\Leftarrow$): Exc.

V ou F: I ideal homog. $\iff \mathrm{rad}$(I) homog.

Para cada polinômio homog. $F \in k[x_0, \ldots, x_n]$ denota-se $\mathbb{V}(F) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid F(x) = 0\}$.

$F \neq 0 \rightsquigarrow \mathbb{V}(F)$ é dito uma hipersuperfície projetiva.

Exc. $Z \subseteq \mathbb{P}^n$ é fechado $\iff$ é uma interseção de hipersuperfícies projetivas.

$\mathbb{D}(F) = \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{V}(F)$ aberto básico.

$\deg F = 1 \Rightarrow \mathbb{D}(F)$ homeomorfo ao hiperplano afim $V(F - 1) \subset \mathbb{A}^{n+1}$.

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$

Para cada aberto $U \subseteq \mathbb{P}^n$, definimos

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U) = \{\tfrac{F}{G} \,|\, F, G \text{ homog. mesmo grau }, G(x) \neq 0 \,\forall x \in U\}.$$

- $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n) = k$
- $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{D}(H)) = \{\frac{F}{H^m} \,|\, \deg F = m \deg H\}$
- $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{D}(X_0)) = \{\frac{F}{X_0^m} \,|\, \deg F = m\} \simeq k[\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}]$

Exc: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ é um feixe.

morfismos de espaços anelados

$$f : (X, \mathcal{R}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$$

- mapa contínuo $f : X \longrightarrow Y$ (por abuso)

- para cada aberto $U \subseteq Y$, homo. de anéis $f_U^{\#} : \mathcal{S}(U) \longrightarrow \mathcal{R}(f^{-1}U)$

compatível com as restrições de abertos $U' \supseteq U$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(U') & \xrightarrow{f_{U'}^{\#}} & \mathcal{R}(f^{-1}U') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}(U) & \xrightarrow[f_U^{\#}]{} & \mathcal{R}(f^{-1}U) \end{array}$$

$f : (X, \mathcal{R}) \longrightarrow (Y, \mathcal{S})$ é um isomorfismo se existir $g : (Y, \mathcal{S}) \longrightarrow (X, \mathcal{R})$ . . .

Se X, Y são variedades afins, cada morfismo

$$f : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

corresponde a um e um só homo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y(Y) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(X) \\ \| & & \| \\ k[Y] & \longrightarrow & k[X] \end{array}$$

Exc. $x \mapsto (x^2, x^3)$ é um morfismo bijetivo de $\mathbb{A}^1$ em $V(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2$. Isomorfismo?

(pré-)variedades

Um espaço anelado $(X, \mathcal{O}_X)$ é uma pré-variedade se existir uma cobertura aberta finita $X = \bigcup X_\alpha$ tal que cada $(X_\alpha, \mathcal{O}_X|X_\alpha)$ é isomorfo a uma variedade afim.

Prop. $\mathbb{P}^n$ é uma pré-variedade.

$$\mathbb{P}^n = \bigcup D(X_i), \ D(X_i) \simeq \mathbb{A}^n.$$

Se X é pré-var., idem para cada $Y \subseteq X$ aberto ou fechado com a estrutura induzida.

produtos

Sejam X, Y objetos em uma categoria.

Um objeto Z é um produto de X, Y se

existem morfismos

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p} & X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

tais que

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\pi} & X \\ {\scriptstyle \forall\,\varphi}\downarrow & \overset{\theta}{\searrow} & \uparrow \\ Y & \longleftarrow & Z \end{array} \quad \exists!\theta : W \longrightarrow Z \text{ t.q.}$$

$$\pi = p \circ \theta$$

$$\varphi = q \circ \theta$$

$$Z = X \times Y,$$

p, q únicos...

produto de varieades afins $\Longleftrightarrow$ produto tensorial

X, Y, Z variedades afins. Cada diagrama de morfismos

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p} & X \\ q\downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

corresponde aos homos

$$\begin{array}{ccc} k[Z] & \xleftarrow{p^{\#}} & k[X] \\ q^{\#}\uparrow & & \\ k[Y] & & \end{array}$$

Segue que o produto de variedades afins corresponde ao produto tensorial:

$$\boxed{k[X \times Y] = k[X] \otimes_k k[Y]}$$

mini-curso de álgebra tensorial

$k =$anel, $M, N, P = k$-módulos. Forme a categoria com objetos $M \times N \xrightarrow{\beta} P =$mapa k-bilinear e morfismos diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\beta} & P \\ \gamma \downarrow & \swarrow \lambda & \\ Q & & \end{array}$$

onde β,γ são bilineares, λ linear.

Um objeto $M \times N \xrightarrow{\alpha} R$ é inicial se para todo objeto $M \times N \xrightarrow{\beta} P \, \exists! \, \lambda_\beta : R \to P$ t.q.

$$\beta = \lambda_\beta \circ \alpha.$$

existe e é único

Forme o módulo livre $\mathcal{L}$ com base o conjunto $M \times N$. Considere o submódulo $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ gerado pelos elementos

$$(m + cm', n) - (m, n) - c(m', n),$$
$$(m, n + cn') - (m, n) - c(m, n')$$
$$\forall\ m, m' \in M,\ n, n' \in N, c \in k.$$

Por fim defina $M \otimes N := \mathcal{L}/\mathcal{R} \xleftarrow{\otimes} M \times N$

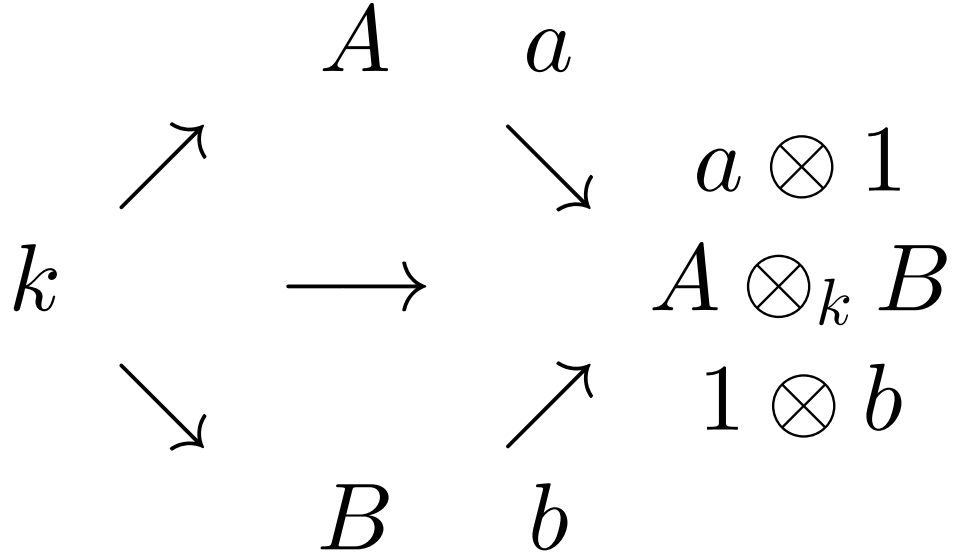
$$m \otimes n = (m, n) + \mathcal{R} \longleftarrow\!\shortmid (m, n)$$

Cada elemento de $M \otimes N$ é combinação linear de indecomponíveis.

Exc: $\otimes$ é bilinear, universal.

$A \otimes_k B$

Se A, B são k-álgebras, em particular são k-módulos. Resulta que $A \otimes_k B$ é uma A-álgebra, idem B-álgebra, induzindo por restrição a mesma estrutura de k-álgebra:



$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'.$$

1.5.2 $A, B = k$-álgebras sem divisores de zero

(nilp)$\Rightarrow$ $A \otimes_k B$ também.

Tome $f = \sum a_i \otimes b_i, g = \sum c_j \otimes d_j \in A \otimes_k B$, $fg = 0$.

Podemos supor $\{b_i\}, \{d_j\}$ l.i.

(*e.g.*, $a \otimes b + a' \otimes b' + a'' \otimes (b + b') =$

$(a + a'') \otimes b + (a' + a'') \otimes b'$.)

Suponha, por contradição, $a_1 c_1 \neq 0$.

$\exists h : A \to k$, $h(a_1 c_1) \neq 0$.

$0 = fg = \sum a_i c_j \otimes b_i d_j; \rightsquigarrow$

$A \otimes B \xrightarrow{h \otimes 1} B \rightsquigarrow$

$0 = (h \otimes 1)(fg) = \sum h(a_i c_j) b_i d_j =$

$\sum h(a_i) b_i \sum h(c_j) d_j \Rightarrow$ digamos $\sum h(a_i) b_i = 0$.$\star$

1.6.3. Prop. O produto de prevariedades existe e é único a menos de iso.

Escreva $X = \cup U_i, Y = \cup V_j$ cobertura aberta afim, finita. Faça conjuntistamente $X \times Y$.

Declaramos $U \subset X \times Y$ aberto se cada $U \cap (U_i \times V_j)$ o for em $U_i \times V_j$.

Uma função f definida numa viz. ab. V de $x \in U_i \times V_j$ é dita regular em x se assim o for sua restrição a $V \cap (U_i \times V_j)$.

Temos assim um espaço anelado localmente afim, *i.e.*, uma pré-variedade. Verifica-se que as propriedades categóricas de produto são satisfeitas.

Hausdorff

Um esp.top. X é Hausdorff se pontos distintos podem ser separados por abertos disjuntos. Munindo $X \times X$ da topologia produto, isso é equiv. a exigir que a diagonal $\Delta \subseteq X \times X$ seja fechada. De fato, se $X \times X \supseteq \Delta$ é fechada, dados $x \neq y$ em X, existem abertos $U, V \subseteq X$ tais que $x \in U, y \in V$ e $U \times V \subset X \times X \setminus \Delta$, ou seja, $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset \Rightarrow U \cap V = \emptyset$. Recipr. exc.

variedades

Uma pré-variedade X é uma variedade se sua diagonal $\Delta_X \subset X \times X$ é fechada. Lembre que em $X \times X$ a topologia NÃO é a do produto: existem abertos que não são união de produtos de abertos. Por exemplo, em $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ a diagonal é fechada mas não é igual a interseção de produtos de fechados...Exc.

Se X é var. afim, então $\Delta_X \subset X \times X$ é fechada, definida pelas equações

$$x_i = y_i, i = 1..n$$

onde $k[X] = k[x_1, \ldots, x_n], k[X \times X] = k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$.

Se X é var., então toda sub-pré-var. de X (aberta ou fechada) é var.

$\mathbb{P}^n$ é var. Veja a seguir. . . (ou diretamente, equações da diagonal de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$.)

critérios de separação

1.6.12. Prop. (i) $X =$ variedade, $U, V \subseteq X$ abertos afins $\Rightarrow U \cap V$ aberto afim e as imagens por restrição de $\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X(V)$ em $\mathcal{O}_X(U \cap V)$ geram esta k-álgebra;

(ii) $X =$ pré-variedade, $X = \cup V_i$ cobertura aberta afim. Então X é variedade $\iff$: $\forall (i,j)$, $V_i \cap V_j$ é afim e as imagens por restrição de $\mathcal{O}_X(V_i), O_X(V_j)$ em $\mathcal{O}_X(V_i \cap V_j)$ geram.

(i) $U \cap V \simeq \Delta_X \cap (U \times V)$ fechado em afim

$\Rightarrow U \cap V$ afim e suas funções regulares são restrições das de $U \times V$, a saber, $k[U] \otimes k[V]$, por sua vez gerada por $k[U] \otimes 1$ e $1 \otimes k[V]$.

(ii) Exc.

9 de setembro de 2018

1.6.11. Prop. $Y =$**variedade**, X pré-var.

(i) Se $f : X \to Y$ é um morfismo, então seu gráfico $\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in X\}$ é fechado em $X \times Y$;

(ii) Se $f, g : X \to Y$ são morfismos que coincidem em um aberto denso, então $f = g$.

Na situação de (i), considere o mapa contínuo $X \times Y \ni (x, y) \mapsto (f(x), y) \in Y \times Y$. Temos $\Gamma_f =$ imagem inversa do fechado Δ_Y, logo é fechado.

Para (ii), similar.

$X := \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ **não é afim**

$$\mathcal{O}_X(X) = \{f/g \mid f, g \in k[x,y], g(a,b) \neq 0 \forall (a,b) \neq 0\}$$

Mas $g(a,b) \neq 0 \forall (a,b) \neq 0 \Rightarrow g =$constante$\neq 0$.

Logo, $\mathcal{O}_X(X) = k[x,y] = k[\mathbb{A}^2]$.

Se X fosse afim, a inclusão $X \subseteq \mathbb{A}^2$
corresponderia ao mapa identidade em $k[x,y]$
$\Rightarrow$inclusão seria $=$ ★.

1.6.13. “reta com ponto dobrado” $0' \in X = \mathbb{A}^1 \dot{\cup} \{0'\}$. Abertos afins $X_0 = \mathbb{A}^1$, $X_{0'} = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \cup \{0'\} \simeq \mathbb{A}^1$.

Temos dois mapas, $f, f' : \mathbb{A}^1 \to X$ que coincidem no aberto denso $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, mas

$$f(0) = 0 \neq f'(0) = 0'.$$

Logo X é pré-var., mas não é variedade.

$$\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$$

O mapa $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \xrightarrow{s} \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$

$$x = (x_0 : \cdots : x_m), y = (y_0 : \cdots : y_n) \longmapsto (x_i y_j)$$

pode ser imaginado como multiplicação da matriz

$(m+1)\times 1 : {}^t x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ pela matriz y, $1 \times (n+1)$

resultando a matriz

$(m+1) \times (n+1) : \ (z_{ij} = x_i y_j)$ de posto 1.

Segre: $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \xrightarrow{s} \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$

Trata-se de um mergulho, *i.e.*, isomorfismo sobre sua imagem, que é subvariedade fechada com equações

$$z_{ij}z_{rs} = z_{is}z_{rj};\ (\text{equiv} : \left|\begin{smallmatrix} z_{ij} & z_{is} \\ z_{rj} & z_{rs} \end{smallmatrix}\right| = 0),$$
$$0 \leq i, r \leq m, 0 \leq j, s \leq n.$$

A imagem inversa

$$s^{-1}\mathbb{D}_{z_{ij}} = \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n, x_i \neq 0 \neq y_j.$$

Fazendo $i = j = 0$, nesses abertos coordenados

$$(x_0 = 1 : x_1 : ... : x_m) = (x_1, ..., x_m)$$
$$(y_0 = 1 : y_1 : ... : y_n) = (y_1, ..., y_n)$$

o mapa s se expressa

$$(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \mapsto$$
$$(x_1, ..., x_m, y_1, \ldots, y_n, x_1y_1, ..., x_my_1, ..., x_ny_1, ..., x_ny_n)$$

com inverso dado pela projeção nas

$m + n$ primeiras coordenadas.

Excs. (i) equações de $\Delta_{\mathbb{P}^n}$.
(ii) Fechados de $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ e polinômios bihomog.

$\dim X$

$\mathbb{A}^n \supseteq X =$variedade afim irredutível $\Rightarrow$seu anel de coordenadas $k[X] = k[x_1, \ldots, x_n]$ é um domínio.
O corpo de frações $k(X) = k(x_1, \ldots, x_n)$ é uma extensão finitamente gerada de k.
O grau de transcendência $\operatorname{tdeg}_k k(X)$ de $k(X)$ sobre k é o número máximo de elementos algebricamente independentes sobre k.
Define-se $\dim X = \operatorname{tdeg}_k k(X)$.

$\dim X$

$U = D(f)$ aberto principal de X

$\Rightarrow k[U] = k[X]_f$, mesmo corpo de frações,

$k(U) = k(X)$.

Se $U \subseteq X$ ab. afim, existe $f \in k[X]$ tal que $D(f) = D(f|U)$. Segue $k(U) = k(X)$.

$X =$var. irred. não nec. afim, define-se $k(X) = k(U)$ onde $U =$ab. afim de X.

Independe do aberto afim escolhido: se V é outro ab. afim, temos $U \cap V$ ab. afim de U e já vimos que $k(U) = k(U \cap V) = k(V)$.

Define-se $\dim X = \dim U = \operatorname{tdeg}_k k(X)$.

$\dim X$

Se $X = \bigcup X_i$ decomposição em fechados irredutíveis maximais, define-se $\dim X = \max \dim X_i$..

Prop. Se X é variedade irredutível e $Y \subset X$ é fechado próprio então $\dim Y < \dim X$.

Podemos supor Y irredutível, ambos afins. Logo, existe ideal primo $\mathcal{P} \subset k[X], k[Y] = k[X]/\mathcal{P}, \mathcal{P} \neq 0$

Digamos $k[X] = k[x_1, ..., x_n]$, y_i =restrição de x_i a Y.

Escreva $d = \dim X, e = \dim Y$. Podemos supor $y_1, ..., y_e$ alg.indep. Segue $x_1, ..., x_e$ alg.indep. $\Rightarrow e \leq d$.

Suponha $d = e$. Tome $f \in \mathcal{P}, f \neq 0$. Temos $f, x_1, ..., x_e$ alg.*dep.*, digamos

$$a_0(x)f^m + a_1(x)f^{m-1} + \cdots + a_m(x) = 0, a_m \neq 0.$$

Reduzindo mod.$\mathcal{P}$ $\Rightarrow a_m(y) = 0$★. □

Veremos aprox. linear para cálculo de $\dim$.

$\dim V_X(f) = \dim X - 1$ se X afim, irred., f não unidade em $k[X]$.

alguns resultados sobre morfismos

1.9.1. Lema. $\phi : X \to Y$ morfismo de vars. afins,

$$\phi^\star : k[Y] \to k[X] \text{ homo associado.}$$

(i) $\phi^\star$ sobrej.$\Rightarrow \phi(X)$ fechado em Y;

(ii) $\phi^\star$ injet. $\iff \phi(X)$ denso em Y;

(iii) X irred. $\Rightarrow$idem para o fecho $\overline{\phi X}$ e $\dim \overline{\phi X} \leq \dim X$.

Seja $I = \ker \phi^\star$; $\phi^\star$ sobre $\Rightarrow \phi X = V_Y(I) \therefore$ (i).

$$(y = \phi x \Rightarrow \mathfrak{m}_y = (\phi^\star)^{-1}\mathfrak{m}_x \supseteq I)$$

alguns resultados sobre morfismos

1.9.1. Lema. $\phi : X \to Y$ morfismo de vars. afins, $\phi^\star : k[Y] \to k[X]$ homo associado.

(i) $\phi^\star$ sobrej.$\Rightarrow \phi(X)$ fechado em Y;

(ii) $\phi^\star$ injet. $\iff \phi(X)$ denso em Y;

(iii) X irred. $\Rightarrow$idem para o fecho $\overline{\phi X}$ e $\dim \overline{\phi X} \leq \dim X$.

Seja $I = \ker \phi^\star$; $\phi^\star$ sobre $\Rightarrow \phi X = V_Y(I)$ $\therefore$ (i).

Agora $\phi^\star$ inj. $\iff \mathcal{I}_Y(\phi X) = \{0\}$ $\therefore$ (ii).

A 1ª afirm de (iii) segue de 1.2,3 junto com (ii), aplicado ao morfismo $X \to \overline{\phi X}$.

Note que $\overline{\phi X} = V_Y(I)$.

a imagem contém um aberto de seu fecho

$\phi : X \to Y$ é dito dominante se $\overline{\phi X} = Y$.

Teor. ϕ domin.$\Rightarrow \phi X$ contém um aberto de Y.

Podemos supor X irredutível. De fato, se valer nesse caso, considere as restrições de ϕ a cada componente de X com imagem densa em Y.

Podemos supor X, Y afins (e irredutíveis). (Exc.)

tradução algébrica

$A = k[Y] \subseteq B = k[X]$ domínios. Mostrar que

♡ $\forall b \in B, b \neq 0 \Rightarrow \exists\, a \in A, a \neq 0$ t.q. todo $\psi : A \to k, \psi(a) \neq 0$ se estende a $\widetilde{\psi} : B \to k, \psi(b) \neq 0$.

Reinterprete: ψ corresponde a um ponto $y \in Y$ no aberto básico $D_Y(a)$. A extensão representa um ponto $x \in D_X(b) \subseteq X$ que se envia em y.

Conclusão: o aberto básico $D_Y(a) \subset Y$ está contido na imagem do aberto básico $D_X(b) \subset X$.

O teorema de extensão:

$A \subset B$ =domínio de tipo finito sobre $A \Rightarrow$

$\forall b \in B, b \neq 0 \Rightarrow \exists\, a \in A, a \neq 0$ t.q. todo $\psi : A \to k, \psi(a) \neq 0$ se estende a $\widetilde{\psi} : B \to k, \psi(b) \neq 0.$

$$\begin{array}{ccc} A & \subset & B \\ {\scriptstyle \forall \psi}\downarrow & \swarrow^{\exists \widetilde{\psi}} & \\ k & & \end{array}$$

(alg.fech.)

$\heartsuit$

Sejam $A \subseteq B \subseteq C$ como acima. Se valer para $A \subseteq B$ e para $B \subseteq C$ então vale para $A \subseteq C$.

$$\overset{\exists}{a} \in A \subset B \ni \overset{\forall}{b} \qquad \overset{\exists}{b} \in B \subset C \ni \overset{\forall}{c}$$

$$\forall\psi... \downarrow \quad \swarrow^{\exists\widetilde{\psi}} \qquad \forall\phi... \downarrow \quad \swarrow^{\exists\widetilde{\phi}}$$

$$k \qquad\qquad k$$

Dados $c, \psi...$ queremos a tal que $\psi a \neq 0 \Rightarrow \exists\widetilde{\phi}...$

Temos $b...$ para o qual $\exists a....$

Agora $\psi a \neq 0 \Rightarrow \exists\widetilde{\psi}$, $\widetilde{\psi} b \neq 0$. Faça $\phi = \widetilde{\psi}...$

$\heartsuit$

Sejam $A \subseteq B \subseteq C$ como acima. Se valer para $A \subseteq B$ e para $B \subseteq C$ então vale para $A \subseteq C$.

$$\overset{\exists}{a} \in A \subset B \ni \overset{\forall}{b} \qquad \overset{\exists}{b} \in B \subset C \ni \overset{\forall}{c}$$

$$\forall\psi\ldots\downarrow \quad \swarrow^{\exists\widetilde{\psi}} \qquad\qquad \forall\phi\ldots\downarrow \quad \swarrow^{\exists\widetilde{\phi}}$$

$$k \qquad\qquad\qquad k$$

Dados $c, \psi\ldots$ queremos a tal que $\psi a \neq 0 \Rightarrow \exists\widetilde{\phi}\ldots$

Temos $b\ldots$ para o qual $\exists a\ldots$.

Agora $\psi a \neq 0 \Rightarrow \exists\widetilde{\psi}$, $\widetilde{\psi} b \neq 0$. Faça $\phi = \widetilde{\psi}\ldots$

O uso da fatoração $A \subset B \subset C$

impõe a necessidade do $\forall b\ldots$.

♡

$B = A[b_1, ..., b_m]$, proceder por indução em m.

O argumento $A \subseteq B \subseteq C$ acima permite reduzir ao caso $m = 1$, $B = A[b_1] = A[T]/I, I \neq 0$.

Tome $f \in I \setminus 0$ de grau mínimo, coef. líder α.

Temos $f(b_1) = 0$, f irredutível sobre FrA;

♡

$B = A[b_1, ..., b_m]$, proceder por indução em m.

O argumento $A \subseteq B \subseteq C$ acima permite reduzir ao caso $m = 1$, $B = A[b_1] = A[T]/I, I \neq 0$.

Tome $f \in I \setminus 0$ de grau mínimo, coef. líder α.

Temos $f(b_1) = 0$, f irredutível sobre FrA;

algoritmo da divisão $\Rightarrow I = \{g \,|\, \exists d \geq 0, \alpha^d g \in \langle f \rangle\}$.

♡

$B = A[b_1, ..., b_m]$, proceder por indução em m.

O argumento $A \subseteq B \subseteq C$ acima permite reduzir ao caso $m = 1$, $B = A[b_1] = A[T]/I, I \neq 0$.

Tome $f \in I \setminus 0$ de grau mínimo, coef. líder α.

Temos $f(b_1) = 0$, f irredutível sobre FrA; algoritmo da divisão $\Rightarrow I = \{g \mid \exists d \geq 0, \alpha^d g \in \langle f \rangle\}$.

Seja $h \in A[T]$ tal que $h(b_1) = b \neq 0$.

Temos $\mathrm{mdc}(h, f) = 1$ em $(FrA)[T]$. Logo, $\exists u, v \in A[T], \alpha' \in A \setminus 0$, $uf + vh = \alpha'$. Assim, $\alpha' = (uf + vh)(b_1) = v(b_1)b$.

♡

$B = A[b_1, ..., b_m]$, proceder por indução em m.

O argumento $A \subseteq B \subseteq C$ acima permite reduzir ao caso $m = 1$, $B = A[b_1] = A[T]/I, I \neq 0$.

Tome $f \in I \setminus 0$ de grau mínimo, coef. líder α.

Temos $f(b_1) = 0$, f irredutível sobre FrA;

algoritmo da divisão $\Rightarrow I = \{g \,|\, \exists d \geq 0, \alpha^d g \in \langle f \rangle\}$.

Seja $h \in A[T]$ tal que $h(b_1) = b \neq 0$.

Temos $\mathrm{mdc}(h, f) = 1$ em $(FrA)[T]$. Logo,

$\exists u, v \in A[T], \alpha' \in A \setminus 0$, $uf + vh = \alpha'$. Assim,

$\alpha' = (uf + vh)(b_1) = v(b_1)b$.

Mostraremos que $a = \alpha\alpha'$ funciona.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & A[b_1] & & \\
 & & & & \| & & \\
a = \alpha\alpha' \in & & A & \subset & B = A[T]/I & \ni & b = h(b_1)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & A[b_1] & & \\
 & & & & \| & & \\
a = \alpha\alpha' \in & & A & \subset & B = A[T]/I & \ni & b = h(b_1) \\
 & & \forall\psi & & & & \\
 & & \psi a \neq 0 \downarrow & & & \swarrow^{\exists\widetilde{\psi}} & \\
I \subset A[T] & \xrightarrow{\widehat{\psi}} & k & & & &
\end{array}
$$

Certamente podemos estender ψ a $\widehat{\psi} : A[T] \to k$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & A[b_1] & & \\
 & & & & \| & & \\
a = \alpha\alpha' \in & & A & \subset & B = A[T]/I & \ni & b = h(b_1) \\
 & \overset{\forall\psi}{\underset{\psi a \neq 0}{\downarrow}} & & & \swarrow^{\exists\widetilde{\psi}} & & \\
I \subset A[T] & \overset{\widehat{\psi}}{\to} & k & & & &
\end{array}
$$

Certamente podemos estender ψ a $\widehat{\psi} : A[T] \to k$.

Passar ao quociente para obter $\widetilde{\psi} : B \to k$ requer $\widehat{\psi} I = 0$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & A[b_1] & & \\
 & & & & \| & & \\
a = \alpha\alpha' \in & & A & \subset & B = A[T]/I & \ni & b = h(b_1) \\
 & & {\scriptstyle \forall\psi \atop \psi a \neq 0}\downarrow & & & \swarrow^{\exists\widetilde{\psi}} & \\
I \subset A[T] & \xrightarrow{\widehat{\psi}} & k & & & &
\end{array}
$$

Certamente podemos estender ψ a $\widehat{\psi} : A[T] \to k$. Passar ao quociente para obter $\widetilde{\psi} : B \to k$ requer $\widehat{\psi} I = 0$. Seja $\overline{f}(T)$ a imagem de f pelo homo induzido $A[T] \xrightarrow{\psi} k[T]$. Como $\psi\alpha \neq 0$, temos $\overline{f}(T) \notin k$ e assim existe raiz $\gamma \in k$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & A[b_1] & & \\
 & & & & \| & & \\
a = \alpha\alpha' \in & & A & \subset & B = A[T]/I & \ni & b = h(b_1) \\
 & & \forall\psi & & & & \\
 & & \psi a \neq 0 \downarrow & & & \swarrow^{\exists\widetilde{\psi}} & \\
 & & \widehat{\psi} & & & & \\
I \subset A[T] & \xrightarrow{} & k & & & &
\end{array}
$$

Certamente podemos estender ψ a $\widehat{\psi} : A[T] \to k$. Passar ao quociente para obter $\widetilde{\psi} : B \to k$ requer $\widehat{\psi} I = 0$. Seja $\overline{f}(T)$ a imagem de f pelo homo induzido $A[T] \xrightarrow{\psi} k[T]$. Como $\psi\alpha \neq 0$, temos $\overline{f}(T) \notin k$ e assim existe raiz $\gamma \in k$. Faça $\widehat{\psi}(T) = \gamma$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & A[b_1] & & \\
 & & & & \| & & \\
a = \alpha\alpha' \in & & A & \subset & B = A[T]/I & \ni & b = h(b_1) \\
 & & {\scriptstyle \forall\psi \atop \psi a \neq 0}\downarrow & & & \swarrow^{\exists\widetilde{\psi}} & \\
I \subset A[T] & \xrightarrow{\widehat{\psi}} & k & & & &
\end{array}
$$

Certamente podemos estender ψ a $\widehat{\psi} : A[T] \to k$. Passar ao quociente para obter $\widetilde{\psi} : B \to k$ requer $\widehat{\psi} I = 0$. Seja $\overline{f}(T)$ a imagem de f pelo homo induzido $A[T] \xrightarrow{\psi} k[T]$. Como $\psi\alpha \neq 0$, temos $\overline{f}(T) \notin k$ e assim existe raiz $\gamma \in k$. Faça $\widehat{\psi}(T) = \gamma$. Pela descrição de $I \ni g$,

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & A[b_1] & & \\
 & & & & \| & & \\
a = \alpha\alpha' \in & & A & \subset & B = A[T]/I & \ni & b = h(b_1) \\
 & & {\scriptstyle \forall\psi \atop \psi a \neq 0}\downarrow & & & \swarrow^{\exists\widetilde{\psi}} & \\
I \subset A[T] & \xrightarrow{\widehat{\psi}} & k & & & &
\end{array}
$$

Certamente podemos estender ψ a $\widehat{\psi} : A[T] \to k$. Passar ao quociente para obter $\widetilde{\psi} : B \to k$ requer $\widehat{\psi} I = 0$. Seja $\overline{f}(T)$ a imagem de f pelo homo induzido $A[T] \xrightarrow{\psi} k[T]$. Como $\psi\alpha \neq 0$, temos $\overline{f}(T) \notin k$ e assim existe raiz $\gamma \in k$. Faça $\widehat{\psi}(T) = \gamma$. Pela descrição de $I \ni g$, $\alpha^d g = g' f \in \langle f \rangle$,

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & A[b_1] \\
 & & & & \| \\
a = \alpha\alpha' \in & A & \subset & B = A[T]/I & \ni b = h(b_1) \\
 & \downarrow{\scriptstyle \psi a \neq 0}^{\forall \psi} & & \swarrow{\scriptstyle \exists \widetilde{\psi}} & \\
I \subset A[T] & \xrightarrow{\widehat{\psi}} & k & &
\end{array}
$$

Certamente podemos estender ψ a $\widehat{\psi} : A[T] \to k$. Passar ao quociente para obter $\widetilde{\psi} : B \to k$ requer $\widehat{\psi} I = 0$. Seja $\overline{f}(T)$ a imagem de f pelo homo induzido $A[T] \xrightarrow{\psi} k[T]$. Como $\psi\alpha \neq 0$, temos $\overline{f}(T) \notin k$ e assim existe raiz $\gamma \in k$. Faça $\widehat{\psi}(T) = \gamma$. Pela descrição de $I \ni g$, $\alpha^d g = g' f \in \langle f \rangle$, segue $\widehat{\psi}(g) = g'(\gamma)\overline{f}(\gamma)/\psi\alpha^d = 0$.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & A[b_1] \\ & & & & \| \\ a = \alpha\alpha' \in & A & \subset & B = A[T]/I & \ni b = h(b_1) \\ & {\scriptstyle \forall\psi \atop \psi a \neq 0}\downarrow & & \swarrow^{\exists\widetilde{\psi}} & \\ I \subset A[T] & \overset{\widehat{\psi}}{\to} & k & & \end{array}$$

Certamente podemos estender ψ a $\widehat{\psi} : A[T] \to k$. Passar ao quociente para obter $\widetilde{\psi} : B \to k$ requer $\widehat{\psi} I = 0$. Seja $\overline{f}(T)$ a imagem de f pelo homo induzido $A[T] \overset{\psi}{\to} k[T]$. Como $\psi\alpha \neq 0$, temos $\overline{f}(T) \notin k$ e assim existe raiz $\gamma \in k$. Faça $\widehat{\psi}(T) = \gamma$. Pela descrição de $I \ni g$, $\alpha^d g = g' f \in \langle f \rangle$, segue $\widehat{\psi}(g) = g'(\gamma)\overline{f}(\gamma)/\psi\alpha^d = 0$. Note que $\widetilde{\psi} b = \widehat{\psi}(h(T)) \neq 0$ pela definição de α'.

excs

- Complete detalhes acima.
- Se X é var. afim, mostre que os fechados de $X \times \mathbb{P}^n$ são interseções de zeros de polinômios homogêneos $\sum a_i(x)y^i, |i| = d, a_i(x) \in k[X]$, onde $y = (y_0, ..., y_n)$ são coordenadas homogêneas. $(\mathbb{P}^n = U_0 \cup \cdots \cup U_n)$
- Fechados de $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ e bi-homogs.
- Equações para $\Delta_{\mathbb{P}1} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \overset{\text{segre}}{\subset} \mathbb{P}^3$; retas da quádrica imagem...

GAL

Um Grupo Algébrico é uma variedade G munida de estrutura de grupo de modo que as operações

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \stackrel{\mu}{\longrightarrow} & G \\ (g, g') & \longmapsto & gg' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} G & \stackrel{i}{\longrightarrow} & G \\ g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

são morfismos. Se G é afim, GAL.

Homo de g.a. é morfismo...

G, G' g.a.s$\Rightarrow G \times G'$ idem.

exs

1. $\mathbb{A}^1$, grupo aditivo.
2. $G_m := k^\star = \mathbb{A}^1 \setminus 0$ grupo multiplicativo.
3. $GL_n : det \neq 0$ grupo linear geral.
4. $D_n \subseteq T_n$, diags, triangs.
5. $SL_n : \det = 1$.
6. $O_n : X^t X = I$ ortogonal.
7. ...Descreva os anéis de coordenadas.

Se G é uma pré-variedade com estrutura de grupo algébrico, então é de fato uma variedade.

Se G é uma pré-variedade com estrutura de grupo algébrico, então é de fato uma variedade.

Mostrar $\Delta_G \subset G \times G$ é fechada: olhe o mapa $(x, y) \mapsto xy^{-1}$.

O ponto $e \in G$ é fechado e Δ_G é a imagem inversa.

Se G é uma pré-variedade com estrutura de grupo algébrico, então é de fato uma variedade.

Mostrar $\Delta_G \subset G \times G$ é fechada: olhe o mapa $(x, y) \mapsto xy^{-1}$.

O ponto $e \in G$ é fechado e Δ_G é a imagem inversa.

$g \in G =$ grupo algébrico$\Rightarrow$

$x \mapsto gx$ e $x \mapsto xg$

são isos da variedade G.

fatos preliminares

G admite exatamente uma componente irredutível $G^\circ \ni e$.

fatos preliminares

G admite exatamente uma componente irredutível

$$G^\circ \ni e.$$

Se X, Y são compon. irred. $\ni e$, olhe para

$$Z := \overline{\mu(X \times Y)} \subseteq G.$$

É um fechado irred. que contém X, Y, logo

$$Z = X = Y.$$

G° é um sg. fechado normal e de índice finito. Trata-se da única componente conexa de G contendo e.

G° é um sg. fechado normal e de índice finito. Trata-se da única componente conexa de G contendo e.

Novamente

$$G^\circ = \overline{\mu(G^\circ \times G^\circ)} = i(G^\circ) = xG^\circ x^{-1} \subseteq G.$$

G° é um sg. fechado normal e de índice finito. Trata-se da única componente conexa de G contendo e.

Novamente

$$G^\circ = \overline{\mu(G^\circ \times G^\circ)} = i(G^\circ) = xG^\circ x^{-1} \subseteq G.$$

As classes laterais de G° em G são as componentes irredutíveis de G. Disjunção $\Rightarrow$são as componentes conexas.

Todo sg. fechado de G de índice finito contém G°.

Todo sg. fechado de G de índice finito contém G°.

Se H é sg. fechado, então H° é a única componente irredutível de H por e. Índice finito $\Rightarrow G =$união disjunta de classes laterais de H. Segue evidentemente $G^\circ \subseteq H^\circ$.

Todo sg. fechado de G de índice finito contém G°.

Se H é sg. fechado, então H° é a única componente irredutível de H por e. Índice finito $\Rightarrow G =$união disjunta de classes laterais de H. Segue evidentemente $G^\circ \subseteq H^\circ$.

Os grupos $G_a, G_m, GL_n, D_n, T_n, U_n, SL_n$ são conexos.

O polinômio $\det - 1$ é irredutível.

O_n não é conexo: a imagem de $\det$ é $\{\pm 1\}$.

$$SO_n = O_n^\circ$$

Abrevie $G := O_n$;

$V :=$espaço das matrizes anti-simétricas,

$$\dim V = n(n-1)/2.$$

$V_0 := \{y \in V \mid \det(1+y) \neq 0\}$ é aberto de V.

$G_0 := \{x \in G \mid \det(1+x) \neq 0\}$ é aberto de G.

$$V_0 \ni y \mapsto x = (1-y)(1+y)^{-1}$$

$$G_0 \ni x \mapsto y = (1+x)^{-1}(1-x)$$

(transformada de Cayley)

são inversas uma da outra.

[mathoverflow]

$$G_0 \ni x \Rightarrow y := (1+x)^{-1}(1-x) \overset{!}{\in} V :$$

$$G_0 \ni x \Rightarrow y := (1+x)^{-1}(1-x) \overset{!}{\in} V :$$

$$^{\mathrm{t}}y = {}^{\mathrm{t}}(1-x)\left({}^{\mathrm{t}}(1+x)^{-1}\right) \overset{?}{=} -y$$

$$G_0 \ni x \Rightarrow y := (1+x)^{-1}(1-x) \overset{!}{\in} V :$$

$$^{\mathrm{t}}y = {}^{\mathrm{t}}(1-x)\left({}^{\mathrm{t}}(1+x)^{-1}\right) \overset{?}{=} -y \iff$$

$$(1+x)(1-{}^{\mathrm{t}}x) \overset{?}{=} -(1-x)(1+{}^{\mathrm{t}}x)$$

$$G_0 \ni x \Rightarrow y := (1+x)^{-1}(1-x) \overset{!}{\in} V :$$

$$^{\mathrm{t}}y = {}^{\mathrm{t}}(1-x)\left({}^{\mathrm{t}}(1+x)^{-1}\right) \overset{?}{=} -y \iff$$

$$(1+x)(1-{}^{\mathrm{t}}x) \overset{?}{=} -(1-x)(1+{}^{\mathrm{t}}x) \iff$$

$$1+x-{}^{\mathrm{t}}x - x\,{}^{\mathrm{t}}x \overset{?}{=} -(1-x+{}^{\mathrm{t}}x - x\,{}^{\mathrm{t}}x) \iff$$

$$1 \overset{\checkmark}{=} x\,{}^{\mathrm{t}}x$$

$$G_0 \ni x \Rightarrow y := (1+x)^{-1}(1-x) \overset{!}{\in} V :$$

$$^{t}y = {}^{t}(1-x)\left({}^{t}(1+x)^{-1}\right) \overset{?}{=} -y \iff$$

$$(1+x)(1-{}^{t}x) \overset{?}{=} -(1-x)(1+{}^{t}x) \iff$$

$$1+x-{}^{t}x-x\,{}^{t}x \overset{?}{=} -(1-x+{}^{t}x-x\,{}^{t}x) \iff$$

$$1 \overset{\checkmark}{=} x\,{}^{t}x \quad \text{(-:OK:-)}$$

$$G_0 \ni x \Rightarrow y := (1+x)^{-1}(1-x) \overset{!}{\in} V :$$

$$^{\mathrm{t}}y = {}^{\mathrm{t}}(1-x)\left({}^{\mathrm{t}}(1+x)^{-1}\right) \overset{?}{=} -y \iff$$

$$(1+x)(1-{}^{\mathrm{t}}x) \overset{?}{=} -(1-x)(1+{}^{\mathrm{t}}x) \iff$$

$$1+x-{}^{\mathrm{t}}x - x\,{}^{\mathrm{t}}x \overset{?}{=} -(1-x+{}^{\mathrm{t}}x - x\,{}^{\mathrm{t}}x) \iff$$

$$1 \overset{\checkmark}{=} x\,{}^{\mathrm{t}}x \quad \text{(-:OK:-)}$$

$$y \in V_0 \Rightarrow x := (1-y)(1+y)^{-1} \overset{!}{\in} G_0$$

$$G_0 \ni x \Rightarrow y := (1+x)^{-1}(1-x) \overset{!}{\in} V :$$

$$^{\mathrm{t}}y = {}^{\mathrm{t}}(1-x)\left({}^{\mathrm{t}}(1+x)^{-1}\right) \overset{?}{=} -y \iff$$

$$(1+x)(1-{}^{\mathrm{t}}x) \overset{?}{=} -(1-x)(1+{}^{\mathrm{t}}x) \iff$$

$$1+x-{}^{\mathrm{t}}x - x\,{}^{\mathrm{t}}x \overset{?}{=} -(1-x+{}^{\mathrm{t}}x - x\,{}^{\mathrm{t}}x) \iff$$

$$1 \overset{\checkmark}{=} x\,{}^{\mathrm{t}}x \quad \text{(-:OK:-)}$$

$$y \in V_0 \Rightarrow x := (1-y)(1+y)^{-1} \overset{!}{\in} G_0$$

$$(1+x)y = 1-x \Rightarrow y-1 = -x(1+y)$$

$$\Rightarrow \text{ inversas}$$

$$G_0 \ni x \Rightarrow y := (1+x)^{-1}(1-x) \overset{!}{\in} V :$$

$$^{\mathrm{t}}y = {}^{\mathrm{t}}(1-x)\left({}^{\mathrm{t}}(1+x)^{-1}\right) \overset{?}{=} -y \iff$$

$$(1+x)(1-{}^{\mathrm{t}}x) \overset{?}{=} -(1-x)(1+{}^{\mathrm{t}}x) \iff$$

$$1+x-{}^{\mathrm{t}}x - x\,{}^{\mathrm{t}}x \overset{?}{=} -(1-x+{}^{\mathrm{t}}x - x\,{}^{\mathrm{t}}x) \iff$$

$$1 \overset{\checkmark}{=} x\,{}^{\mathrm{t}}x \quad \text{(-:OK:-)}$$

$$y \in V_0 \Rightarrow x := (1-y)(1+y)^{-1} \overset{!}{\in} G_0$$

$$(1+x)y = 1-x \Rightarrow y-1 = -x(1+y)$$

$$\Rightarrow \text{ inversas}$$

$$V_0 \text{ irred.} \ni 0 \leftrightarrow 1 \in G_0$$

$$\det x = 1, x \in SO_n.$$

U, V *abertos densos de* $G \Rightarrow UV = G$.

$x \in G \Rightarrow xV^{-1}$ aberto denso $\Rightarrow$

$xV^{-1} \cap U \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, xv^{-1} \in U \Rightarrow x \in UV$.

$H\, sg\, G \Rightarrow \overline{H}\, sg\, G$.

$\mu(H \times H) \subseteq H \Rightarrow \overline{\mu(H \times H)} \subseteq \overline{H} \Rightarrow$
$(\text{continuidade})\ \mu(\overline{H \times H}) \subseteq \overline{\mu(H \times H)};$
$\overline{H} \times \overline{H} = \overline{H \times H} \Rightarrow \mu(\overline{H} \times \overline{H}) \subseteq \overline{H \times H}.$
Similar para $i\overline{H} = \overline{H}$.

Se $H \supseteq U =$ *aberto* $\neq \emptyset$ *de* $\overline{H}$ *então* $H = \overline{H}$.

$H = \bigcup_{x \in H} xU$ ab. em $\overline{H}$, denso $\Rightarrow \overline{H} = HH = H$.

$\varphi : G \longrightarrow G'$ *homo de g.as.* $\Rightarrow$

- $\ker \phi$ *sg. fechado normal de* G;
- ϕG *sg.fechado de* G' *e* $\phi G^\circ = (\phi G)^\circ$.

ϕG contém aberto de seu fecho, logo $\phi G = \overline{\phi G}$.

ϕG° fechado em ϕG e conexo, de índice finito

$\Rightarrow \phi G^\circ = (\phi G)^\circ$.

Família $\phi_i : X_i \to G$, X_i irred, $Y_i := \phi_i X_i \ni e$, $Y_i^{-1} = Y_{i'}$,

$H =$ menor sg. fechado de G contendo todos os $Y_i \Rightarrow$

- H é conexo;
- existem $i_1, ..., i_n$ tais que $H = Y_{i_1} \cdots Y_{i_n}$.

Para $i := i_1, ..., i_n$ escreva $Y^i = Y_{i_1} \cdots Y_{i_n}$, subv. irred

Escolha i com $\dim \overline{Y^i}$ máxima. Para todo j

segue $\overline{Y^i} \subseteq \overline{Y^i}\,\overline{Y^j} \subseteq \overline{Y^{i,j}} = \overline{Y^i} \Rightarrow \overline{Y^i}\, sg$

e de fato $\overline{Y^i} = Y^i Y^i = Y^i = H$.

$G_i \subseteq G$ família de sgs fechados, conexos
$\Rightarrow H :=$ gerado por eles é fechado conexo e gerado por um número finito de G_i's.

H, K sgs de G,
$(H, K) = \langle xyx^{-1}y^{-1}, x \in H, y \in K \rangle$
comutadores.

H, K sgs fechados e um deles conexos
$\Rightarrow (H, K)$ conexo, fechado.

Digamos H conexo. Usar a família
$\phi_i(x) = xix^{-1}i^{-1}, i \in K$.

ações

X =variedade, G =grupo algébrico, um morfismo

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{a} & X \\ (g,x) & \longmapsto & a(g,x) = g.x \end{array}$$

é uma ação se

- $e.x = x \, \forall x \in X$
- $g.(g'.x) = (gg').x \, \forall x \in X \, g, g' \in G.$

Diz-se então que X é um G-espaço.

exemplos

- $\mu : G \times G \longrightarrow G$ multiplicação (à esquerda).
- $\mu : G \times G \longrightarrow G$ conjugação $g.x = gxg^{-1}$.
- $X = M_{m\times n}$ matrizes, $G = GL_m$ age por multiplicação (à esquerda).

órbita, estabilizador

$X = G$-espaço