

O TEOREMA DA DIMENSÃO DAS FIBRAS



laptop financiado pelo



APOIADO POR CAPES, CNPQ/PRONEX FAPERJ

27 de junho de 2008

typeset with ppower4

(TDF) *Seja $\pi : V \longrightarrow W$ morfismo dominante, V, W irredutíveis.*

(TDF) *Seja $\pi : V \longrightarrow W$ morfismo dominante, V, W irredutíveis. Então*

(1) para toda componente irredutível Z de cada fibra $\pi^{-1}(w)$, ($w \in W$)

(TDF) *Seja $\pi : V \longrightarrow W$ morfismo dominante, V, W irredutíveis. Então*

(1) para toda componente irredutível Z de cada fibra $\pi^{-1}(w)$, ($w \in W$) temos

$$\dim Z \geq \dim V - \dim W;$$

- (TDF)** *Seja $\pi : V \longrightarrow W$ morfismo dominante, V, W irredutíveis. Então*
- (1) *para toda componente irredutível Z de cada fibra $\pi^{-1}(w)$, ($w \in W$) temos*
$$\dim Z \geq \dim V - \dim W;$$
- (2) $\exists W_0 \subseteq W$ *aberto denso tal que*

- (TDF)** *Seja $\pi : V \longrightarrow W$ morfismo dominante, V, W irredutíveis. Então*
- (1) *para toda componente irredutível Z de cada fibra $\pi^{-1}(w)$, ($w \in W$) temos*
$$\dim Z \geq \dim V - \dim W;$$
- (2) $\exists W_0 \subseteq W$ *aberto denso tal que*
$$W_0 \subseteq \pi(V)$$

- (TDF)** *Seja $\pi : V \longrightarrow W$ morfismo dominante, V, W irredutíveis. Então*
- (1) para toda componente irredutível Z de cada fibra $\pi^{-1}(w)$, ($w \in W$) temos*
$$\dim Z \geq \dim V - \dim W;$$
 - (2) $\exists W_0 \subseteq W$ aberto denso tal que*
$$W_0 \subseteq \pi(V) \text{ e vale "="}$$

no ítem anterior.

demonstração

$$(1) \ w \in W$$

demonstração

(1) $w \in W \Rightarrow$ existe aberto afim W_w

demonstração

(1) $w \in W \Rightarrow$ existe aberto afim W_w
tal que $\{w\} = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_n) \cap W_w,$

demonstração

(1) $w \in W \Rightarrow$ existe aberto afim W_w
tal que $\{w\} = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_n) \cap W_w$,
onde $n = \dim W$,

demonstração

- (1) $w \in W \Rightarrow$ existe aberto afim W_w
tal que $\{w\} = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_n) \cap W_w$,
onde $n = \dim W$, e
as f_i são funções regulares em W_w .

demonstração

(1) $w \in W \Rightarrow$ existe aberto afim W_w
tal que $\{w\} = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_n) \cap W_w$,
onde $n = \dim W$, e
as f_i são funções regulares em W_w .
Logo, $\pi^{-1}(w) = \mathbf{V}(\pi^* f_1, \dots, \pi^* f_n)$.

demonstração

(1) $w \in W \Rightarrow$ existe aberto afim W_w
tal que $\{w\} = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_n) \cap W_w$,
onde $n = \dim W$, e
as f_i são funções regulares em W_w .
Logo, $\pi^{-1}(w) = \mathbf{V}(\pi^* f_1, \dots, \pi^* f_n)$.
Segue que para cada componente
irredutível vale $\dim \geq \dim V - n$.

(2) (Shafarevich) Primeiro, reduziremos ao caso em que é tudo afim.

(2) (Shafarevich) Primeiro, reduziremos ao caso em que é tudo afim. De fato, valendo na situação afim,

(2) (Shafarevich) Primeiro, reduziremos ao caso em que é tudo afim. De fato, valendo na situação afim, recobrimos W por um número finito de W_i 's abertos afins

(2) (Shafarevich) Primeiro, reduziremos ao caso em que π é todo afim. De fato, valendo na situação afim, recobrimos W por um número finito de W_i 's abertos afins e cada $\pi^{-1}W_i$ por abertos afins V_{ij} .

(2) (Shafarevich) Primeiro, reduziremos ao caso em que V é tudo afim. De fato, valendo na situação afim, recobrimos V por um número finito de W_i 's abertos afins e cada $\pi^{-1}W_i$ por abertos afins V_{ij} . É claro que os V_{ij} recobrem V .

Por hipótese,

Por hipótese, para cada restrição

$$\pi : V_{ij} \longrightarrow W_i$$

Por hipótese, para cada restrição
 $\pi : V_{ij} \rightarrow W_i$ existe um aberto denso
 W_{0ij} que funciona.

Por hipótese, para cada restrição
 $\pi : V_{ij} \rightarrow W_i$ existe um aberto denso
 W_{0ij} que funciona. Façamos
 $W_0 = \cap W_{0ij}$.

Por hipótese, para cada restrição $\pi : V_{ij} \rightarrow W_i$ existe um aberto denso W_{0ij} que funciona. Façamos
$$W_0 = \cap W_{0ij}.$$

Tome $w \in W_0$ e seja Z componente irredutível de $\pi^{-1}w$.

Por hipótese, para cada restrição $\pi : V_{ij} \rightarrow W_i$ existe um aberto denso W_{0ij} que funciona. Façamos

$$W_0 = \cap W_{0ij}.$$

Tome $w \in W_0$ e seja Z componente irredutível de $\pi^{-1}w$. Se Z encontra V_{ij} ,

Por hipótese, para cada restrição $\pi : V_{ij} \rightarrow W_i$ existe um aberto denso W_{0ij} que funciona. Façamos $W_0 = \cap W_{0ij}$.

Tome $w \in W_0$ e seja Z componente irredutível de $\pi^{-1}w$. Se Z encontra V_{ij} , o caso afim aplicado a $V_{ij} \rightarrow W_i$

Por hipótese, para cada restrição $\pi : V_{ij} \rightarrow W_i$ existe um aberto denso W_{0ij} que funciona. Façamos

$$W_0 = \cap W_{0ij}.$$

Tome $w \in W_0$ e seja Z componente irredutível de $\pi^{-1}w$. Se Z encontra V_{ij} , o caso afim aplicado a $V_{ij} \rightarrow W_i$ mostra que $\dim Z = \dim V - \dim W$.

Doravante, tudo afim.

Doravante, tudo afim.

$$K \hookrightarrow L \quad (\text{corpos de funções})$$

Doravante, tudo afim.

$K \hookrightarrow L$ (corpos de funções)

$\bigcup$

$A \hookrightarrow B$ (anéis de coordenadas)

Doravante, tudo afim.

$K \hookrightarrow L$ (corpos de funções)

$\bigcup$

$A \hookrightarrow B$ (anéis de coordenadas)

$\parallel$
 $\mathcal{O}(W)$

$\parallel$
 $\mathcal{O}(V)$

Doravante, tudo afim.

$K \hookrightarrow L$ (corpos de funções)

$\bigcup$

$A \hookrightarrow B$ (anéis de coordenadas)

$\parallel$
 $\mathcal{O}(W) \quad \mathcal{O}(V)$

Seja $b_1, \dots, b_d \in L$ uma base de transcendência de $L|K$.

Doravante, tudo afim.

$K \hookrightarrow L$ (corpos de funções)

$\bigcup$

$A \hookrightarrow B$ (anéis de coordenadas)

$\parallel$
 $\mathcal{O}(W) \qquad \mathcal{O}(V)$

Seja $b_1, \dots, b_d \in L$ uma base de transcendência de $L|K$.

($d = \dim V - \dim W$.)

Passando a um aberto principal de V ,

Passando a um aberto principal de V ,
podemos supor $b_1, \dots, b_d \in B$.

Passando a um aberto principal de V , podemos supor $b_1, \dots, b_d \in B$. Escrevamos

$$B = A[b_1, \dots, b_d, b_{d+1}, \dots, b_N]$$

Passando a um aberto principal de V , podemos supor $b_1, \dots, b_d \in B$. Escrevamos

$$B = A[b_1, \dots, b_d, b_{d+1}, \dots, b_N]$$

$$d = \dim B - \dim A$$

Passando a um aberto principal de V , podemos supor $b_1, \dots, b_d \in B$. Escrevamos

$$B = A[b_1, \dots, b_d, b_{d+1}, \dots, b_N]$$

$$d = \dim B - \dim A$$

com $b_1, \dots, b_d$ algebricamente independentes sobre K

Passando a um aberto principal de V , podemos supor $b_1, \dots, b_d \in B$. Escrevamos

$$B = A[b_1, \dots, b_d, b_{d+1}, \dots, b_N]$$

$$d = \dim B - \dim A$$

com $b_1, \dots, b_d$ algebricamente independentes sobre K e

$b_{d+1}, \dots, b_N$ algébricos sobre $K(b_1, \dots, b_d)$.

Note que essa escritura de B
corresponde a uma fatoração de

$$V \xrightarrow{\pi} W,$$

Note que essa escritura de B corresponde a uma fatoração de

$$V \xrightarrow{\pi} W,$$

$$V \xrightarrow{\phi} \underbrace{\mathbf{C}^d \times W}_{A[b_1, \dots, b_d]}$$

Note que essa escritura de B corresponde a uma fatoração de

$$V \xrightarrow{\pi} W,$$

$$V \xrightarrow{\phi} \underbrace{\mathbf{C}^d \times W}_{A[b_1, \dots, b_d]} \xrightarrow{\psi} \underbrace{W}_A.$$

Seja

$$F_i(b_1, \dots, b_d, y) = \alpha_{i,0}(b_1, \dots, b_d)y^{e_i} + \dots$$

Seja

$$F_i(b_1, \dots, b_d, y) = \alpha_{i,0}(b_1, \dots, b_d)y^{e_i} + \dots \in A[b_1, \dots, b_d, y], \alpha_{i,0} \neq 0$$

Seja

$$F_i(b_1, \dots, b_d, y) = \alpha_{i,0}(b_1, \dots, b_d)y^{e_i} + \dots \in A[b_1, \dots, b_d, y], \alpha_{i,0} \neq 0 \text{ tal que}$$
$$F_i(b_1, \dots, b_d, b_{d+i}) = 0,$$

Seja

$F_i(b_1, \dots, b_d, y) = \alpha_{i,0}(b_1, \dots, b_d)y^{e_i} + \dots \in A[b_1, \dots, b_d, y], \alpha_{i,0} \neq 0$ tal que
 $F_i(b_1, \dots, b_d, b_{d+i}) = 0$, relação de dependência algébrica.

Seja

$F_i(b_1, \dots, b_d, y) = \alpha_{i,0}(b_1, \dots, b_d)y^{e_i} + \dots \in A[b_1, \dots, b_d, y], \alpha_{i,0} \neq 0$ tal que
 $F_i(b_1, \dots, b_d, b_{d+i}) = 0$, relação de dependência algébrica.

Seja $\mathcal{I}_i \subseteq A$ o ideal gerado pelos coeficientes do polinômio $\alpha_{i,0}(b_1, \dots, b_d)$.

Seja Z a união dos fechados próprios
 $V(\mathcal{I}_i)$.

Seja Z a união dos fechados próprios $V(\mathcal{I}_i)$. Existe $a \in A$ tal que o aberto principal $W_a \neq \emptyset$ é disjunto de Z .

Seja Z a união dos fechados próprios $V(\mathcal{I}_i)$. Existe $a \in A$ tal que o aberto principal $W_a \neq \emptyset$ é disjunto de Z .

Passando a esse aberto, podemos supor que para todo $w \in W$, cada polinômio $\overline{\alpha_{i,0}}(b_1, \dots, b_d)$ é não nulo,

Seja Z a união dos fechados próprios $V(\mathcal{I}_i)$. Existe $a \in A$ tal que o aberto principal $W_a \neq \emptyset$ é disjunto de Z .

Passando a esse aberto, podemos supor que para todo $w \in W$, cada polinômio $\overline{\alpha_{i,0}}(b_1, \dots, b_d)$ é não nulo, onde indicamos por $\overline{\alpha_{i,0}}$ a restrição à fibra sobre w .

Seja Z a união dos fechados próprios $V(\mathcal{I}_i)$. Existe $a \in A$ tal que o aberto principal $W_a \neq \emptyset$ é disjunto de Z .

Passando a esse aberto, podemos supor que para todo $w \in W$, cada polinômio $\overline{\alpha_{i,0}}(b_1, \dots, b_d)$ é não nulo, onde indicamos por $\overline{\alpha_{i,0}}$ a restrição à fibra sobre w . Logo, existe $(c_1, \dots, c_d) \in \mathbf{C}^d$ tal que $\overline{\alpha_{i,0}}(c_1, \dots, c_d) \neq 0$.

Seja $U \subseteq \mathbf{C}^d \times W$ o aberto principal
dado por $\alpha = \prod \alpha_{i,0}$.

Seja $U \subseteq \mathbf{C}^d \times W$ o aberto principal dado por $\alpha = \prod \alpha_{i,0}$. Por construção, a restrição de $\phi : V \rightarrow \mathbf{C}^d \times W$ sobre este aberto é um mapa finito,

Seja $U \subseteq \mathbf{C}^d \times W$ o aberto principal dado por $\alpha = \prod \alpha_{i,0}$. Por construção, a restrição de $\phi : V \rightarrow \mathbf{C}^d \times W$ sobre este aberto é um mapa finito, logo sobrejetor (??).

Seja $U \subseteq \mathbf{C}^d \times W$ o aberto principal dado por $\alpha = \prod \alpha_{i,0}$. Por construção, a restrição de $\phi : V \rightarrow \mathbf{C}^d \times W$ sobre este aberto é um mapa finito, logo sobrejetor (??). A imagem de U em W é um aberto W_0 .

Seja $U \subseteq \mathbf{C}^d \times W$ o aberto principal dado por $\alpha = \prod \alpha_{i,0}$. Por construção, a restrição de $\phi : V \rightarrow \mathbf{C}^d \times W$ sobre este aberto é um mapa finito, logo sobrejetor (??). A imagem de U em W é um aberto W_0 . Em particular, para cada $w \in W_0$ temos $\pi^{-1}(w) \neq \emptyset$.

O anel de coordenadas de cada
componente irredutível dessa fibra

O anel de coordenadas de cada componente irredutível dessa fibra é um quociente $\overline{B}$ de B ;

O anel de coordenadas de cada componente irredutível dessa fibra é um quociente $\overline{B}$ de B ; a imagem de cada $F_i(b, y)$ em $\overline{B}[y]$

O anel de coordenadas de cada componente irredutível dessa fibra é um quociente $\overline{B}$ de B ; a imagem de cada $F_i(b, y)$ em $\overline{B}[y]$ fornece uma relação não trivial para $\overline{b}_{d+i}$ sobre $\mathbf{C}(\overline{b}_1, \dots, \overline{b}_d)$.

O anel de coordenadas de cada componente irredutível dessa fibra é um quociente $\overline{B}$ de B ; a imagem de cada $F_i(b, y)$ em $\overline{B}[y]$ fornece uma relação não trivial para $\overline{b}_{d+i}$ sobre $\mathbf{C}(\overline{b}_1, \dots, \overline{b}_d)$. Assim, $\dim \overline{B} \leq d$. $\square$

aplicações

aplicações

Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo de variedades e seja $Z = \overline{f(X)}$ a aderência de sua imagem.

aplicações

Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo de variedades e seja $Z = \overline{f(X)}$ a aderência de sua imagem. Então existe um aberto não vazio de Z contido em $f(X)$.

Visto que a aderência de uma união finita é a união das aderências,

Visto que a aderência de uma união finita é a união das aderências, podemos supor X irredutível e, trocando Y por Z ,

Visto que a aderência de uma união finita é a união das aderências, podemos supor X irredutível e, trocando Y por Z , supor f dominante.

Visto que a aderência de uma união finita é a união das aderências, podemos supor X irredutível e, trocando Y por Z , supor f dominante. Pelo TDF, existe um aberto de Y contido em $f(Z)$. □

*Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo
fechado e sobrejetivo.*

*Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo
fechado e sobrejetivo.*

*Então, para cada inteiro k , o
subconjunto*

$$f_{(k)} = \{y \in Y \mid \dim f^{-1}(y) \geq k\}$$

*Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo
fechado e sobrejetivo.*

*Então, para cada inteiro k , o
subconjunto*

$$f_{(k)} = \{y \in Y \mid \dim f^{-1}(y) \geq k\}$$

é fechado em Y .

Novamente, argumentamos por indução
sobre $n = \dim Y$

Novamente, argumentamos por indução sobre $n = \dim Y$ e reduzimos ao caso X (logo Y) irredutível.

Novamente, argumentamos por indução sobre $n = \dim Y$ e reduzimos ao caso X (logo Y) irredutível. De fato, valendo nesse caso, podemos restringir f a cada componente irredutível X_i de X

Novamente, argumentamos por indução sobre $n = \dim Y$ e reduzimos ao caso X (logo Y) irredutível. De fato, valendo nesse caso, podemos restringir f a cada componente irredutível X_i de X e agora tomar $Y_i = f(X_i)$, fechado por hipótese.

Denotemos $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ o morfismo induzido.

Denotemos $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ o morfismo induzido. Se $y \in (f_i)_{(k)}$, é claro que

$$\dim f^{-1}(y) \geq \dim f_i^{-1}(y) \geq k.$$

Denotemos $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ o morfismo induzido. Se $y \in (f_i)_{(k)}$, é claro que

$$\dim f^{-1}(y) \geq \dim f_i^{-1}(y) \geq k.$$

Reciprocamente, se $y \in f_{(k)}$,

Denotemos $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ o morfismo induzido. Se $y \in (f_i)_{(k)}$, é claro que

$$\dim f^{-1}(y) \geq \dim f_i^{-1}(y) \geq k.$$

Reciprocamente, se $y \in f_{(k)}$, seja $X_i \subseteq X$ uma componente irredutível contendo uma componente irredutível de $f^{-1}(y)$ com dimensão $\geq k$.

Denotemos $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ o morfismo induzido. Se $y \in (f_i)_{(k)}$, é claro que $\dim f^{-1}(y) \geq \dim f_i^{-1}(y) \geq k$.

Reciprocamente, se $y \in f_{(k)}$, seja $X_i \subseteq X$ uma componente irredutível contendo uma componente irredutível de $f^{-1}(y)$ com dimensão $\geq k$.

É imediato que $y \in (f_i)_{(k)}$.

Denotemos $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ o morfismo induzido. Se $y \in (f_i)_{(k)}$, é claro que $\dim f^{-1}(y) \geq \dim f_i^{-1}(y) \geq k$.

Reciprocamente, se $y \in f_{(k)}$, seja $X_i \subseteq X$ uma componente irredutível contendo uma componente irredutível de $f^{-1}(y)$ com dimensão $\geq k$.

É imediato que $y \in (f_i)_{(k)}$. Segue que $f_{(k)} = \bigcup (f_i)_{(k)}$, união finita de fechados.

Seja $r = \dim X - \dim Y$.

Doravante, vamos supor X irredutível e f sobrejetiva.

Seja $r = \dim X - \dim Y$.

Doravante, vamos supor X irredutível e f sobrejetiva. Se $k \leq r$ então $f^{(k)} = X$.

Seja $r = \dim X - \dim Y$.

Doravante, vamos supor X irredutível e f sobrejetiva. Se $k \leq r$ então $f^{(k)} = X$.

Por outro lado, para $k \geq r + 1$, temos que $f_{(k)}$ está contido em algum fechado próprio $W \subset Y$,

Seja $r = \dim X - \dim Y$.

Doravante, vamos supor X irredutível e f sobrejetiva. Se $k \leq r$ então $f^{(k)} = X$.

Por outro lado, para $k \geq r + 1$, temos que $f_{(k)}$ está contido em algum fechado próprio $W \subset Y$, complementar do aberto denso em que cada componente irredutível da fibra tem dimensão r .

Seja $r = \dim X - \dim Y$.

Doravante, vamos supor X irredutível e f sobrejetiva. Se $k \leq r$ então $f^{(k)} = X$.

Por outro lado, para $k \geq r + 1$, temos que $f_{(k)}$ está contido em algum fechado próprio $W \subset Y$, complementar do aberto denso em que cada componente irredutível da fibra tem dimensão r .

Aplicamos indução ao morfismo $f^{-1}W \rightarrow W$. $\square$

A semi-continuidade afirmada na prop. acima falha se omitirmos a hipótese de morfismo fechado.

A semi-continuidade afirmada na prop. acima falha se omitirmos a hipótese de morfismo fechado. Aprendi o exemplo seguinte com a Carolina Araújo.

A semi-continuidade afirmada na prop. acima falha se omitirmos a hipótese de morfismo fechado. Aprendi o exemplo seguinte com a Carolina Araújo.

Seja $g : \mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}^3$ definida por (x, y, z^2) .

A semi-continuidade afirmada na prop. acima falha se omitirmos a hipótese de morfismo fechado. Aprendi o exemplo seguinte com a Carolina Araújo.

Seja $g : \mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}^3$ definida por (x, y, z^2) .

Note que a imagem inversa da reta $y = 0, z = 1$ tem duas componentes conexas,

A semi-continuidade afirmada na prop. acima falha se omitirmos a hipótese de morfismo fechado. Aprendi o exemplo seguinte com a Carolina Araújo.

Seja $g : \mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}^3$ definida por (x, y, z^2) .

Note que a imagem inversa da reta $y = 0, z = 1$ tem duas componentes conexas, $L_{\pm} : y = 0, z = \pm 1$.

Seja $h : X \rightarrow \mathbf{C}^3$ a explosão de L_+ .

Seja $h : X \rightarrow \mathbf{C}^3$ a explosão de L_+ .
A imagem inversa de L_+ é $L_+ \times \mathbf{P}^1$.

Seja $h : X \rightarrow \mathbf{C}^3$ a explosão de L_+ .
A imagem inversa de L_+ é $L_+ \times \mathbf{P}^1$.
Seja X^0 obtida pela remoção do
subconjunto
 $\{(0, 0, 1)\} \times \mathbf{P}^1 \subset L_+ \times \mathbf{P}^1$.

Seja $h : X \rightarrow \mathbf{C}^3$ a explosão de L_+ .
A imagem inversa de L_+ é $L_+ \times \mathbf{P}^1$.

Seja X^0 obtida pela remoção do
subconjunto

$\{(0, 0, 1)\} \times \mathbf{P}^1 \subset L_+ \times \mathbf{P}^1$. Por fim,
seja $f : X^0 \rightarrow \mathbf{C}^3$ a composição.

Seja $h : X \rightarrow \mathbf{C}^3$ a explosão de L_+ .
A imagem inversa de L_+ é $L_+ \times \mathbf{P}^1$.

Seja X^0 obtida pela remoção do
subconjunto

$\{(0, 0, 1)\} \times \mathbf{P}^1 \subset L_+ \times \mathbf{P}^1$. Por fim,
seja $f : X^0 \rightarrow \mathbf{C}^3$ a composição. Agora
 $f_1 = \{(x, 0, 1) \mid x \neq 0\}$.