

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

**CÁLCULO, TECNOLOGIAS E MODELAGEM MATEMÁTICA:
AS DISCUSSÕES DOS ALUNOS**

Jussara de Loiola Araújo

Orientador: Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba

Tese de Doutorado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)

2002

Índice

Capítulo 1: O Processo de Construção da Pergunta Diretriz da Pesquisa	1
1.1. A Prática Docente Provocando Questionamentos	2
1.2. Buscando um Caminho e Encontrando uma Pergunta	4
1.3. Trilhando o Caminho e Encontrando outra Pergunta	7
 Capítulo 2: Modelagem Matemática	 11
2.1. O que Dizem Ser a Modelagem Matemática: Algumas Perspectivas	11
2.2. À Porta da Filosofia	19
2.3. A Relação entre Matemática e Realidade Presente em Algumas	
Filosofias da Matemática	21
2.3.1. <i>A relação entre matemática e realidade no platonismo</i>	23
2.3.2. <i>A relação entre matemática e realidade no formalismo</i>	25
2.4. Retornando à Modelagem Matemática na Educação Matemática	30
2.4.1. <i>Ideologia da certeza e poder formatador da matemática</i>	32
2.5. A Perspectiva de Modelagem Matemática na Educação Matemática	
Adotada nesta Pesquisa	37
 Capítulo 3: Modelagem Matemática e Tecnologias Informáticas	
na Educação Matemática	41
3.1. Modelagem Matemática e Tecnologias Informáticas	41
3.2. Modelagem Matemática e Tecnologias Informáticas na Educação Matemática	43
3.3. Retomando a Perspectiva Adotada nesta Pesquisa	47
 Capítulo 4: Comunicação e Educação Matemática	 52
4.1. Comunicação: uma Primeira Abordagem	52
4.2. Discussões Matemáticas	54
4.3. Negociação de Significado	56
4.4. Diálogo e Discussão na Educação Matemática	59

Capítulo 5: Metodologia de Pesquisa	65
5.1. A Opção Metodológica	65
5.2. O Contexto e os Participantes da Pesquisa	69
5.3. Os Procedimentos	70
5.3.1. <i>As observações de sala de aula e a determinação dos</i> <i>grupos participantes da pesquisa</i>	71
5.3.2. <i>As entrevistas iniciais</i>	71
5.3.3. <i>As observações dos grupos</i>	72
5.3.4. <i>As entrevistas finais</i>	74
5.4. A Análise dos Dados	75
 Capítulo 6: O Contexto e os Participantes da Pesquisa	 78
6.1. As Aulas de Cálculo Diferencial e Integral I	78
6.1.1. <i>Sala de aula convencional</i>	82
6.1.2. <i>Laboratório de Informática</i>	83
6.2. O Projeto de Modelagem Matemática	86
6.2.1. <i>O que o professor disse</i>	86
6.2.2. <i>O que os alunos escutaram</i>	88
6.2.3. <i>Uma análise da perspectiva de Modelagem Matemática do professor</i>	90
6.3. As Personagens desta História	92
6.3.1. <i>A pesquisadora</i>	92
6.3.2. <i>O professor</i>	92
6.3.3. <i>Os grupos</i>	93
 Capítulo 7: Os Episódios	 102
7.1. Episódio 1 do Grupo 1: Imaginação e Realidade.....	102
7.1.1. <i>Análise de primeiro nível do episódio 1</i>	108
7.2. Episódio 2 do Grupo 1: A Continuidade da Função g	110
7.2.1. <i>Análise de primeiro nível do episódio 2</i>	117
7.3. Episódio 3 do Grupo 1: Simetria	118
7.3.1. <i>Análise de primeiro nível do episódio 3</i>	124
7.4. Episódio 4 do Grupo 1: O Significado da Variável do Domínio	125
7.4.1. <i>Análise de primeiro nível do episódio 4</i>	128
7.5. Episódio do Grupo 2: Por que o Sólido de Revolução?	129
7.5.1. <i>Análise de primeiro nível do episódio</i>	131

Capítulo 8: Os Episódios à Luz da Literatura	132
8.1. Análise de Segundo Nível do Episódio 1 do Grupo 1: Imaginação e Realidade	132
8.2. Análise de Segundo Nível do Episódio 2 do Grupo 1:	
A Continuidade da Função g	135
8.3. Análise de Segundo Nível do Episódio 3 do Grupo 1: Simetria	139
8.4. Análise de Segundo Nível do Episódio 4 do Grupo 1:	
O Significado da Variável do Domínio	141
8.5. Análise de Segundo Nível do Episódio do Grupo 2:	
Por que o Sólido de Revolução?	145
8.6. Algumas Conclusões	147
8.6.1. <i>A perspectiva de Modelagem Matemática</i>	147
8.6.2. <i>Matemática e realidade</i>	149
8.6.3. <i>O objetivo da atividade</i>	152
8.6.4. <i>Negociação de significados</i>	154
8.6.5. <i>Presença do professor</i>	155
8.6.6. <i>Possibilidades</i>	156
 Capítulo 9: Considerações Finais	 159
9.1. Discussões	160
9.2. Possibilidades	162
9.3. Uma Ponte para o Futuro	163
 Referências Bibliográficas	 165
 Anexos	 174

Índice de Figuras

Figura 1: exemplo de um esquema de processo de criação de modelos	15
Figura 2: adaptação, a partir de Machado (1997), do quadro explicativo de uma teoria formal	27
Figura 3: gráfico da função $g(x)$	110

RESUMO

Nesta pesquisa investiguei as discussões que ocorrem entre alunos de Cálculo Diferencial e Integral I quando estão desenvolvendo projetos de Modelagem Matemática em ambientes computacionais. Adotei uma abordagem qualitativa para realizar a coleta de dados, por meio de observações de dois grupos. Seus componentes eram alunos de Engenharia Química em uma universidade pública do Estado de São Paulo. O *software* utilizado pelos alunos foi o Maple. A perspectiva de Modelagem Matemática na Educação Matemática estabelecida no contexto do estudo foi influenciada pelo estilo de comunicação e pela visão de matemática e de sua relação com a realidade presentes nesse contexto. Esses, por sua vez, podem ter raízes nas outras atividades da disciplina e nas experiências anteriores dos participantes. A interação entre seres humanos e informática proporcionou novas possibilidades de investigação. Levantei a hipótese de a escola (ou a universidade) estar mais aberta à incorporação da informática do que à consideração de situações reais. Por fim, aponte o ambiente de ensino e aprendizagem de Cálculo no qual a Modelagem Matemática e as Tecnologias Informáticas estão presentes como fértil em possibilidades para a constituição de cenários para investigação que abordem as questões levantadas pela Educação Matemática Crítica.

Palavras-chave: Educação Matemática, Cálculo, Tecnologias, Modelagem, Comunicação.

ABSTRACT

In this research, I studied the discussions that take place among students in a Differential and Integral Calculus I course while developing mathematical modelling projects in computer environments. I adopted a qualitative approach for the data collection, using observations of two groups of Chemical Engineering students in a state university in São Paulo. The software used by the students was Maple. The perspective of mathematical modelling in mathematics education that was established in the context of the study was influenced by the style of communication and the vision of the relation between mathematics and reality in this context. These, in turn, may have roots in the other course activities and in the previous experiences of the participants. The interaction between humans and computers provided new investigation possibilities. I raised the hypothesis that the school (or university) may be more open to the incorporation of computer technologies than to the consideration of real situations. Finally, I point to the milieu of the teaching and learning of calculus, in which mathematical modelling and information technologies are present, as fertile ground for the development of landscapes of investigation that consider issues raised by Critical Mathematics Education.

Keywords: Mathematics Education, Calculus, Technology, Modelling, Communication.

Capítulo 1

O Processo de Construção da Pergunta Diretriz da Pesquisa

Em uma pesquisa na área de Educação Matemática e, creio, na área das Ciências Humanas em geral, um momento importante é a elaboração da pergunta diretriz que irá norteá-la. A pergunta é uma espécie de bússola que nos vai mostrando uma direção a tomar e os momentos de reorientar nossa rota. Entretanto, a pergunta diretriz, diferentemente da bússola, às vezes é invisível ou, pelo menos, se mantém oculta por algum tempo. É como se ela estivesse em nosso subconsciente e não conseguíssemos expressá-la em palavras. Porém, mesmo oculta, ela continua funcionando, mostrando-nos a rota que, ao ser trilhada, permite-nos encontrá-la pelo meio do caminho.

Com essa metáfora, quero ilustrar o processo pelo qual a pergunta diretriz desta pesquisa foi construída. Em princípio eu tinha inquietações, preocupações e questionamentos oriundos de minha prática docente. Do emaranhado de questões, e diante do desejo de desenvolver uma pesquisa em Educação Matemática, tive a necessidade de elaborar uma pergunta para encontrar um direcionamento. Uma primeira pergunta diretriz orientou-me inicialmente; entretanto, a partir de diversas discussões com o Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática – GPIMEM¹ – descobri que havia uma outra pergunta que, naquele momento, expressava melhor o que eu buscava investigar.

Assim, apresento, na primeira seção deste capítulo, alguns aspectos de minha prática docente, sementes de minhas inquietações. Na seção seguinte, faço um levantamento bibliográfico de trabalhos que têm algum tipo de relação com minhas inquietações iniciais, culminando com o estabelecimento de uma primeira pergunta diretriz para a pesquisa. Finalmente, na última seção, procuro mostrar como o desenvolvimento da pesquisa levou-me a uma mudança da pergunta diretriz ou, em outras palavras, ao encontro de minha bússola oculta.

¹ Este grupo é sediado no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Departamento de Matemática da UNESP, *campus* de Rio Claro e é coordenado por meu orientador de doutorado, Prof. Marcelo de Carvalho Borba. O GPIMEM é responsável por vários projetos, entre os quais o projeto de pesquisa “Pensamento Matemático, Computadores e outros Meios de Comunicação”, financiado pelo CNPq, agência que também financiou esta pesquisa.

1.1. A Prática Docente Provocando Questionamentos

Sou professora do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG – e é prática comum entre nós todos os professores poderem vir a ser docentes de qualquer uma das disciplinas sob responsabilidade desse departamento. Assim, além de responsáveis pela maior parte do curso de Matemática, modalidades Bacharelado e Licenciatura, nossa maior demanda vem dos oito cursos de Engenharia, dos cursos de Física, Química, Estatística, Ciência da Computação, Geologia, Ciências Econômicas, Ciências Contábeis, Administração e Geografia, cursos que têm no primeiro período a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I – Cálculo I – ou Matemática I ou A (no caso dos quatro últimos listados acima), que correspondem ao Pré-Cálculo. Como professora desse departamento trabalhei com algumas outras disciplinas até que me foram designadas duas turmas de Cálculo I.

Trabalhei com a disciplina Cálculo I por 4 semestres. Desde o início, minha preocupação com a disciplina foi aumentando: era fácil perceber a existência de um grande número de problemas envolvendo os alunos, os professores, o conteúdo trabalhado, a metodologia de ensino usada etc.. Os problemas se manifestavam de várias formas, como por exemplo, no grande número de reprovações e desistências na disciplina, no desinteresse dos alunos e na falta de ânimo dos professores. Isso fazia com que os problemas se tornassem mais intensos, levando à paralisia de alguns professores ou, em um extremo oposto, à busca de ações de outros, visando à alteração da situação problemática.

Era particularmente destacável a dificuldade que surgia nessa disciplina quando do tratamento de problemas de aplicações do conteúdo previamente estudado. A prática comum é a seguinte: “estudam-se” derivadas e “aplicam-se-as” em problemas de taxa de variação, “estudam-se” máximos e mínimos de uma função, que são “aplicados” em problemas de máximos e mínimos e, assim, sucessivamente, durante todo o curso. Mas esse tipo de aplicação parecia não fazer sentido para grande parte dos alunos. Esperava-se que eles lessem um problema, dado pelo professor ou pelo livro-texto, interpretassem-no e criassem uma função que satisfizesse suas condições. Daí eles considerariam o conteúdo de Cálculo previamente estudado para responder à questão solicitada. Entretanto, os alunos não conseguiam seguir esse roteiro “de forma natural” e solicitavam ao professor uma dica, uma ajuda, para resolver os problemas. O professor, por sua vez, se desdobrava, tentando “ensinar” como um problema deveria ser tratado sem, na maioria das vezes, obter sucesso. Estabelecia-se então um grupo de frustrados: de um lado os alunos lutando por tentar resolver problemas nos quais eles não viam sentido e, de outro, o professor tentando

mostrar que eles eram aplicações do Cálculo e, portanto, úteis para o futuro profissional dos alunos.

Esse tipo de abordagem, utilizando problemas de aplicações, tinha basicamente dois objetivos principais: reforçar a aprendizagem dos conteúdos já estudados e mostrar a utilidade desses conteúdos em aplicações que normalmente estão relacionadas com a futura profissão dos estudantes. Mas, ao resolver problemas nesse contexto, a dificuldade maior dos alunos estava na busca de uma “tradução” do problema para a linguagem matemática. Feita a tradução, a parte seguinte de utilização do conteúdo de Cálculo estudado era facilmente superada pelos alunos, ou seja, eles já tinham “aprendido” a técnica do Cálculo ou, pelo menos, a seguir os passos mostrados pelo professor. Além disso, as aplicações do conteúdo, que normalmente aparecem em livros-texto, são problemas canônicos que não se ligam, necessariamente, ao curso ao qual o aluno está vinculado. Em outras palavras, os dois objetivos de se trabalhar com problemas de aplicações, nesse tipo de abordagem, acabavam não tendo sentido.

Afirmar que os alunos sabiam aplicar as técnicas de Cálculo depois que um problema era traduzido para a matemática não significa, necessariamente, dizer que eles tinham compreendido o conteúdo estudado. O que me parecia era que acontecia uma mecanização da técnica imediatamente após o momento em que o conteúdo era tratado em sala de aula. Como professora dessa disciplina, já percebi que, depois de algum tempo de determinado conteúdo ser abordado, se pedirmos aos alunos que o utilizem, eles não se lembram mais de como proceder. Podemos notar esse fato também quando, na resolução de algum problema, solicitamos que o resultado matemático seja interpretado. Para mim, compreender um conteúdo matemático não era apenas fazer cálculos e usar técnicas a ele relacionadas, era também saber interpretar o sentido dos resultados obtidos, e isto nem sempre acontecia.

Por minha experiência como professora de Cálculo I pude constatar, portanto, que tratar os problemas simplesmente como aplicações de conteúdos, com os objetivos citados acima, não implicava fazer com que os alunos vissem sentido em tudo aquilo que estavam estudando. Eles apenas tinham a oportunidade de ver algumas ilustrações daquele conteúdo em problemas que raramente estavam relacionados com a futura profissão. Além disso, perguntava-me se os alunos estavam “aprendendo”, realmente, o conteúdo da disciplina, qualquer que fosse o significado dessa “aprendizagem”.

Assim, com várias inquietações sobre o ensino e a aprendizagem de Cálculo, em especial com aquelas que diziam respeito aos, tão comuns, problemas de aplicações dessa disciplina, iniciei uma revisão bibliográfica sobre o assunto, que passo a descrever.

1.2. Buscando um Caminho e Encontrando uma Pergunta

Diante dos problemas constatados em minha prática docente no ensino e na aprendizagem de Cálculo, passei a buscar, na bibliografia existente, respostas às minhas questões. Em princípio essa busca tinha como alvo, ainda muito amplo, o ensino de Cálculo. Na verdade eu procurava verificar se os problemas por mim vivenciados existiam em outros contextos de ensino e aprendizagem de Cálculo. Queria, também, descobrir como esses problemas eram compreendidos, se existiam iniciativas que tratavam de questões semelhantes às constatadas por mim e como tais iniciativas se efetivavam.

Descobri, então, que vários dos problemas por mim detectados fazem parte da realidade do ensino e aprendizagem de Cálculo em inúmeras instituições; e que está sendo desenvolvido um grande número de pesquisas que tratam destas questões. As dificuldades dos alunos em Cálculo, por exemplo, já foram tema de um grupo de trabalho no *International Congress on Mathematical Education* – ICME – (Tall, 1992). A preocupação com questões relacionadas ao ensino e aprendizagem de Cálculo também está presente em algumas dissertações e teses do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática na Universidade Estadual Paulista – UNESP – de Rio Claro, SP, como em Cabral (1992), Franchi (1993), Cassol (1998), Fantinel (1998), Sad (1998), Villarreal (1999) e Catapani (2001), assim como em outros programas de pós-graduação, como, por exemplo, em Biembengut (1997), Cabral (1998), Souza Jr. (2000) e Morelatti (2001), só para citar alguns exemplos.

De maneira geral, as formas de abordar os problemas são variadas, mas chamou-me a atenção o grande número de trabalhos apresentando o uso de informática (computadores e/ou calculadoras gráficas) como uma alternativa para os problemas existentes ou analisando a utilização de tais recursos na disciplina de Cálculo. Já em 1991, Palmiter (1991) afirma que se tem dado muita atenção à reforma dos currículos de Cálculo, e é comum às propostas apresentadas a sugestão do uso de informática. Em um levantamento bibliográfico feito em sua tese de doutorado, Sad (1998) apresenta *um quadro demonstrativo do universo de trabalhos, da última década, envolvendo Cálculo* (p. 79), que ela elaborou a partir da consulta a alguns dos principais periódicos internacionais e a alguns *proceedings* do *International Congress on Mathematical Education* e do *International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Dos 62 trabalhos listados pela autora, 18 pertencem ao grupo denominado por ela de “grupo de informática e computação”, ou seja, pode-se dizer que existe uma tendência internacional para analisar o uso de tecnologias informáticas no ensino e aprendizagem de Cálculo.

Dentre os diversos trabalhos que tratam do uso das tecnologias informáticas no ensino e aprendizagem de Cálculo, ou pré-cálculo, alguns (Heid, 1988; Palmiter, 1991; Quesada & Maxwell, 1994) estão preocupados com a melhora, ou não, da *performance* dos alunos a partir do uso da informática em suas aulas. Outros, como Lauten, Graham e Ferrini-Mundy (1994) e Borba (1995) analisam a aprendizagem de conceitos matemáticos pelos alunos através do uso da informática como recurso didático.

Aproximando-se mais de minhas preocupações com a aprendizagem de Cálculo e com a aquisição de sentido para os seus conceitos por parte dos alunos, os artigos de Borba, Meneghetti e Hermini (1997) e Borba (1997) discutem algumas experiências realizadas na disciplina Matemática Aplicada para um curso de Ciências Biológicas. Nas experiências relatadas foram utilizados dois enfoques didático-pedagógicos: a Modelagem e o enfoque experimental com calculadoras gráficas. De acordo com a definição de Modelagem adotada pelos autores, os alunos escolhem o problema a ser trabalhado. Eles *são convidados a escolher o tema, encontrar um problema a ser resolvido e tentar resolvê-lo* (Borba, 1997, p. 55). Borba, Meneghetti e Hermini (1997) afirmam que, através das experiências realizadas por um grupo de alunas, *as ferramentas matemáticas ajudavam a dar significado aos dados biológicos construídos por elas, ao mesmo tempo que a Biologia era utilizada como suporte para explicar fatos matemáticos...* (p. 69). Pode-se perceber, assim, que as alunas davam algum sentido para a matemática que elas estavam estudando. Deparei-me também, nesses artigos, com uma maneira diferente de abordagem do conteúdo matemático em sala de aula. Ao desenvolverem seus projetos de Modelagem, ou nas experimentações com calculadoras gráficas, o que os alunos podem encontrar, no que se refere a conteúdo matemático, não está determinado previamente, ou seja, nesses momentos não existe a seqüência rígida de um programa ou de um livro-texto. Assim, na presença desses dois enfoques pedagógicos, ao invés de se apresentarem os problemas como aplicações do conteúdo, os problemas gerados pelos alunos são o ponto de partida para que conteúdos do curso - funções e noções de derivada e integral - sejam desenvolvidos.

As propostas de Borba, Meneghetti e Hermini (1997) e Borba (1997), apesar de iluminarem um pouco as minhas indagações sobre o ensino e a aprendizagem em Cálculo, possuem ainda diferenças importantes quando comparadas à minha realidade acadêmica. O conteúdo de Cálculo trabalhado na disciplina em questão se restringe ao estudo de funções e introdução à derivada e integral. Na prática docente que desenvolvo na UFMG, sou responsável por cursos de Cálculo para as Engenharias. Nesses cursos o conteúdo de Cálculo inclui funções, derivadas, máximos e mínimos de funções, Teorema do Valor Médio, integrais, Teorema Fundamental do Cálculo, cálculos de áreas e volumes através de integrais etc., o que amplia consideravelmente as possibilidades e/ou as dificuldades.

Continuando então minha busca, agora de forma mais focalizada, encontro em Graham (1993) o relato da execução, por alunos do primeiro ano de Engenharia, de dois projetos de Modelagem Matemática usando o *software* DERIVE. O autor afirma que os alunos, embora dispusessem de uma base muito fraca, aprenderam, em pouco tempo, uma grande quantidade de conteúdo matemático. Além disso, *os alunos se vêem fazendo uma Matemática útil, sua confiança aumenta, eles se sentem confortáveis e estão entusiasmados com o fazer Matemática.*² (p. 183). As vantagens de se usar o computador também são citadas pelo autor. Dentre elas destaco a possibilidade de dedicar mais tempo ao processo de Modelagem, ao invés de gastá-lo com os cálculos envolvidos no problema; e o uso de computador para gerar um ambiente de investigação e não como uma ferramenta para simplesmente produzir respostas. Apesar de todas as vantagens expostas pelo autor, ele não faz uma análise de como a aprendizagem do Cálculo se efetiva, mesmo porque esse não era seu objetivo inicial.

Cheguei assim à seguinte situação: percebia, na minha prática docente, uma série de problemas relacionados com a aprendizagem (significativa) de Cálculo, principalmente no que tange a problemas de aplicação do conteúdo dessa disciplina; na revisão bibliográfica, encontrei pesquisadores trabalhando com informática e Modelagem Matemática no ensino de Cálculo, afirmando que a inserção dessas duas práticas pedagógicas em aulas de matemática leva o aluno a encontrar algum tipo de sentido para o conteúdo estudado. Esses trabalhos, apesar de apontarem a uma direção, não cobrem, completamente, as minhas questões, pelos motivos já apresentados. Eles sugerem que o uso desses enfoques pedagógicos (tecnologias informáticas e Modelagem Matemática) provoca grandes alterações no contexto de sala de aula, o que pode entrar em choque com a estrutura tradicionalmente rígida existente em cursos de Cálculo I. Uma análise em sentido oposto sugere que a estrutura dos cursos de Cálculo I pode anular as qualidades desses enfoques pedagógicos apontadas pelos autores citados anteriormente. Estabeleceu-se, então, a necessidade de se analisar a aprendizagem de Cálculo I em cursos básicos da área de Ciências Exatas, quando esses dois enfoques estão presentes, o que sintetizei na seguinte pergunta diretriz para a pesquisa:

De que forma os alunos, por meio da Modelagem Matemática, aprendem Cálculo em um ambiente computacional?

² Tradução de *...the students see themselves doing useful mathematics, their confidence grows, they feel comfortable, and are enthusiastic to do mathematics.*

Como um primeiro desdobramento dessa pergunta e com o objetivo de bem conduzir a investigação dela, coloquei, ainda, as seguintes questões pertinentes:

Q 1) Que conteúdo de Cálculo pode ser aprendido quando se utilizam Modelagem Matemática e computadores?

Q 2) Como os alunos aprendem esse conteúdo de Cálculo?

Q 3) Que sentido os alunos dão a esse conteúdo aprendido?

1.3. Trilhando o Caminho e Encontrando outra Pergunta

Para bem compreender todos os elementos da pergunta diretriz então estabelecida e implementar a investigação, passei a desenvolver duas frentes de trabalho. Uma delas, no campo teórico, buscava atribuir um conceito consistente aos termos aprendizagem de Cálculo, Modelagem Matemática e ambiente computacional. A outra era a pesquisa de campo na qual procurava considerar a pergunta diretriz em um contexto de sala de aula. O desenvolvimento de cada uma dessas frentes de trabalho é tratado com detalhes a seguir no relato desta pesquisa, mas as suas construções foram me revelando aspectos tão interessantes que, apesar de não serem foco de atenção da pergunta diretriz, não puderam deixar de ser percebidos. Fatos como esse são característicos do que é denominado por Lincoln e Guba (1985) de *design*³ emergente da pesquisa. Segundo a proposta dos autores, o *design* de uma pesquisa não pode ser rigidamente planejado *a priori*. Para eles, o *design* da pesquisa é emergente, ou seja, ele vai sendo determinado à medida que ela se desenvolve.

A conjunção entre o contexto da coleta de dados e os trabalhos teóricos que estava estudando, por um processo de influência mútua, levou-me a considerar questões de cunho filosófico acerca da relação entre matemática e realidade e as consequências dessa relação na perspectiva de Modelagem Matemática dos vários autores estudados. Além disso, esses estudos fizeram-me olhar para os dados levando em conta essas questões. Segundo Lincoln e Guba (1985), esta influência mútua entre quadro teórico e dados é um aspecto desejável em uma pesquisa, o que é considerado por eles uma característica de seu *design* emergente. Durante o processo de emersão, foram destacadas, então, passagens como as que apresento a seguir.

³ O termo “*design*” corresponde ao plano e às estratégias utilizadas pelo pesquisador para responder às questões propostas pelo estudo, incluindo os procedimentos e instrumentos de coleta, análise e

Um grupo de alunas participantes da pesquisa estava narrando para mim como estava planejando desenvolver um trabalho proposto pelo professor, quando uma delas, Martha, afirmou:

Martha: A gente vai montar a função no computador. E depois que a gente montar com a cidade Sonho Meu a gente vai pegar, por exemplo, de uma de nossas cidades, a temperatura, aí a gente montaria uma função mais real do que ...

Nessa fala, que poderá ser melhor compreendida quando do tratamento dos dados da pesquisa, Martha se referia a duas funções: uma na cidade “Sonho Meu”, que foi inventada pelo grupo; e uma outra “mais real”, que poderia ser em uma das cidades das componentes do grupo. No episódio, ao qual esta fala pertence, eu e o grupo discutimos a “função imaginária” e a “função real” mencionadas por Martha, o que poderia ser conduzido para uma discussão mais ampla sobre a visão do grupo no que se refere à relação entre matemática e realidade e suas consequências sobre a noção de Modelagem Matemática. A questão da aprendizagem de Cálculo por parte das alunas se ofuscou no episódio diante desse outro aspecto que se destacou.

Em um outro episódio, as alunas do mesmo grupo protagonizaram uma discussão matemática acerca da continuidade ou não da função que era objeto de estudo de seu trabalho. Nessa discussão elas usaram argumentos visuais e empíricos, fundamentando-se ora no computador, ora em algum resultado matemático já conhecido delas. Analisando o episódio, tendo em mente a pergunta diretriz da pesquisa, surgiu a questão: houve aprendizagem? Seria necessária alguma teoria de aprendizagem para abordá-la. Dependendo da opção teórica, poderia levar em conta o fato de a possibilidade de aprendizagem estar vinculada às discussões ocorridas entre as componentes do grupo, envolvendo o computador e também a mim, como pesquisadora.

Nessas duas passagens destacadas acima, assim como nos episódios dos quais elas fazem parte, podemos encontrar discussões (ou possibilidades de discussões) sobre matemática, realidade, Modelagem Matemática, discussões matemáticas apoiadas nas tecnologias informáticas etc.. Assim, em princípio, buscava apenas aspectos relacionados à aprendizagem dos alunos em um ambiente no qual computadores e Modelagem Matemática eram usados como enfoques pedagógicos, mas, ao realizar a coleta de dados, concomitantemente aos estudos teóricos que realizava, constatei que o contexto dava

interpretação dos dados, bem como a lógica que liga entre si diversos aspectos da pesquisa. (Alves-Mazzotti, 1998, p. 145).

margens para uma abordagem mais rica do que aquela na qual eu me restringiria a analisar a aprendizagem dos alunos. Lincoln e Guba (1985) afirmam que *o foco da investigação pode, e provavelmente mudará* e acrescentam que *o naturalista* [denominação dada pelos autores àquele que faz a pesquisa naturalística, que é proposta por eles] *espera tais mudanças e antecipa que o design emergente será colorido por elas. Longe de serem destrutivas, elas são construtivas, já que estas mudanças sinalizam um movimento para um nível de investigação mais sofisticado e que proporciona um maior insight.*⁴ (p. 229).

Assim, a pergunta diretriz da pesquisa que estou desenvolvendo se modificou, tomando a seguinte forma:

Que discussões ocorrem, e como elas ocorrem, em um ambiente de ensino e aprendizagem de Cálculo no qual a Modelagem Matemática e as tecnologias informáticas estão presentes?

Essa nova forma da pergunta diretriz mantém o contexto da anterior (um ambiente de ensino e aprendizagem de Cálculo no qual a Modelagem Matemática e as tecnologias informáticas estão presentes) mas tem o foco de interesse mudado de “aprendizagem” para “discussões”. Alrø e Skovsmose (2001) afirmam que qualidades de comunicação implicam qualidades de aprendizagem. Parece-me, assim, que existe uma influência do estilo de comunicação, que se estabelece na sala de aula, na aprendizagem dos alunos. Certamente essa última frase merece um estudo mais profundo, que não será realizado aqui. Optei por atentar para as discussões dos alunos. Por “discussões” subentende-se algum tipo de “comunicação”, e a “comunicação” pode exercer influências sobre a “aprendizagem”. Posso afirmar que esta nova pergunta diretriz não está totalmente desvinculada da anterior, significando, talvez, um primeiro passo em direção a ela.

Devo ressaltar, portanto, que a mudança da pergunta diretriz não implica um reinício, mas um redirecionamento da pesquisa. Na verdade, a análise que faço dos dados e o desenvolvimento que dou para o quadro teórico, mostram-me melhor minha inquietação interior e levam-me ao desvendamento de uma pergunta implícita que, de alguma maneira, me dirigia. Retomando a metáfora com a qual iniciei este capítulo, a pergunta diretriz então estabelecida era a bússola oculta que, implicitamente, mostrava-me uma rota a seguir, indicando inclusive como encontrá-la.

⁴ Tradução de *the focus of the inquiry can and probably will change. ... the naturalist expects such changes and anticipates that the emergent design will be colored by them. Far from being destructive, they are constructive, for these changes signal movement to a more sophisticated and insightful level of inquiry.*

Com essa pergunta diretriz, espero contribuir para os estudos que tratam da utilização da Modelagem Matemática e da informática no ensino e aprendizagem de Cálculo. Poderia, neste momento, justificar a relevância desta pesquisa que tem, para mim, uma grande importância, seja como pesquisadora, seja como professora. Mas, acredito, a importância dela revelar-se-á no desenvolvimento da tese.

Para abordar a pergunta diretriz é necessário que se compreendam os vários elementos que a constituem. Iniciarei essa abordagem com a busca de uma compreensão sobre “Modelagem Matemática”, a qual apresento no capítulo seguinte.

Capítulo 2

Modelagem Matemática

O objetivo deste capítulo é estabelecer a perspectiva de Modelagem Matemática a ser adotada nesta pesquisa. Para tanto, inicio apresentando algumas perspectivas que existem na matemática e na Educação Matemática. Desse estudo, duas características se destacam: a existência de uma multiplicidade de perspectivas de Modelagem Matemática e a transformação dessas perspectivas quando a Modelagem Matemática é utilizada na Educação Matemática.

A partir do que as perspectivas têm em comum – o objetivo de resolver algum problema, ou tratar alguma situação não-matemática da realidade – concluí sobre a importância de se esclarecer o que vinha a ser “problema da realidade”. Para tanto, fiz incursões pela filosofia da matemática, considerada como parceira da filosofia da Educação Matemática, para aprofundar a compreensão sobre a relação entre matemática e realidade.

As filosofias da matemática, cujos vestígios se mostram mais presentes na Educação Matemática, são o platonismo e o formalismo, os quais ajudam a sustentar a *ideologia da certeza* na Educação Matemática. Considerando que essa ideologia pode ser desafiada quando a Educação Matemática se preocupa com o papel social da matemática, em concordância com a *Educação Matemática Crítica*, apresento a perspectiva de Modelagem Matemática adotada nesta tese.

2.1. O que Dizem Ser a Modelagem Matemática: Algumas Perspectivas

Esta pesquisa tem como contexto um ambiente educacional no qual a Modelagem Matemática e as tecnologias informáticas estão presentes. Assim, a primeira preocupação, aliada à necessidade que tive no campo teórico, foi procurar compreender o que vinha a ser “Modelagem Matemática”. Passei, então, a buscar em dicionários, revistas científicas, livros etc., informações sobre o assunto, para descobrir como os pesquisadores conceituam Modelagem Matemática.

Para minha surpresa, descobri que não existe uma unanimidade acerca desse conceito. Minha constatação veio a se confirmar com a afirmativa de Blum (1995), segundo o qual, *na literatura, há uma grande quantidade de diferentes definições de termos tais como*

'aplicações' ou 'modelagem'.¹ (p. 2). Ele afirma, também, que, devido à multiplicidade de definições, é importante que o pesquisador, ou quem estiver trabalhando com Modelagem Matemática, deixe claro o que entende por esse assunto. O esclarecimento faz-se necessário não apenas devido à diversidade de definições, mas, principalmente, porque é importante que um estudo sobre qualquer assunto seja desenvolvido de forma coerente, o que só é possível, na pesquisa aqui em questão, quando se deixa claro o que se entende por Modelagem Matemática. Então, diante da inexistência de uma definição, penso ser mais adequado utilizar a expressão "perspectiva de Modelagem Matemática" ao invés de "definição de Modelagem Matemática", pois a palavra "definição" tem um caráter de universalidade incompatível com a natureza da Modelagem Matemática, o que não acontece com a palavra "perspectiva". Assim, adotarei essa terminologia a partir de agora.

Passado o estado de espanto e "indefinição" inicial, comecei a pesquisar algumas das diversas perspectivas existentes, para organizá-las, compreendê-las e construir uma perspectiva para utilizar no decorrer da pesquisa. Apresento, inicialmente, os resultados da busca de um significado para a palavra "modelagem".

De acordo com o Dicionário Aurélio (Ferreira, 2000), Modelagem é *a operação de modelar*; e modelar, por sua vez, significa *fazer ou representar por meio de modelo*. Dentre os vários significados atribuídos à palavra "modelo", os que parecem mais próximos de um contexto matemático estão relacionados à informática, à física e à economia. Por exemplo, em um contexto de informática, modelo seria a *representação simplificada e abstrata de fenômeno ou situação concreta, e que serve de referência para a observação, estudo ou análise*. Também, segundo Ferreira (2000), um modelo econômico é a *representação simplificada de relações entre variáveis econômicas, em geral sob a forma de um sistema de equações, e que, com o uso de técnicas econométricas, pode fornecer simulações ou previsões*.

Consultando ainda um outro dicionário, agora filosófico (Japiassú & Marcondes, 1998), e buscando uma perspectiva próxima das acima citadas, encontrei o significado de *modelo teórico*. Segundo os autores, modelo teórico é um *modo de explicação, construção teórica, idealizada, hipotética, que serve para a análise ou avaliação de uma realidade concreta. Ex.: o modelo copernicano de universo, o modelo newtoniano de física*. (p. 184).

Essas perspectivas, apesar de não se referirem especificamente à matemática, levam a uma compreensão do que vem a ser Modelagem Matemática, já que se utilizam de termos como variáveis e equações. De maneira geral, as perspectivas apresentadas trazem em si a idéia de que modelo é uma representação simplificada de uma situação concreta

¹ Tradução de *In the literature, there are a lot of different definitions of terms such as 'applications' or 'modelling'*.

feita com o objetivo de compreender a situação e prever suas configurações futuras ou de situações semelhantes.

Procurando compreender mais especificamente as perspectivas de Modelagem Matemática existentes, pude verificar que alguns autores não apresentam, explicitamente, suas perspectivas, apesar de utilizarem a expressão “Modelagem Matemática” (Alexiades & Solomon, 1993; Bartkovich et al., 1996). Bartkovich et al. (1996), por exemplo, cujo trabalho é um livro didático de Cálculo Diferencial e Integral, afirmam que uma de suas preocupações é fazer com que os alunos *sejam capazes de usar a matemática como uma ferramenta para modelar uma variedade de fenômenos do mundo real.*² (p. x). Os autores não explicitam qual é o sentido que eles dão ao verbo “modelar” e prosseguem no livro dando alguns exemplos nos quais o Cálculo é usado para “modelar” situações do mundo real. A partir dos exemplos, é possível encontrar pistas sobre qual é a compreensão que os autores têm de Modelagem Matemática, já que, para cada situação, encontram uma função que a represente. Nenhuma discussão acerca de sua perspectiva é apresentada e fica clara a ênfase dada à discussão matemática de cada situação tratada.

Um outro grupo de autores (Hannon & Ruth, 1994; Aris, citado por Davis & Hersh, 1995; Bassanezi & Ferreira, 1988) também enfatiza os procedimentos matemáticos durante um processo de Modelagem Matemática. Mas estes, diferentemente dos anteriores, discutem suas perspectivas, além de deixarem claro o papel da Modelagem Matemática como uma forma de utilizar a matemática para abordar problemas reais.

Para Hannon & Ruth (1994), por exemplo, modelos são abstrações de fenômenos do mundo real, que procuram não se ater a detalhes e se concentrar em uma pintura mais ampla de tais fenômenos: *um conjunto particular de aspectos do mundo real ou a estrutura que subjaz aos processos que levam aos resultados observados.*³ (p. 3). Os autores afirmam, ainda, que *modelagem é um processo sem fim - nós construímos, revisamos, comparamos e mudamos, e com cada ciclo melhoramos nossa compreensão da realidade.*⁴ (p. 4). Eles acrescentam, também, que há três possíveis usos para a Modelagem: experimentação com os modelos, previsão de situações futuras e estímulo a questões adicionais sobre o sistema. O objetivo maior da obra deles é trabalhar com Modelagem Matemática utilizando o *software* STELLA II. Mas o próprio *software* tem em si uma perspectiva de Modelagem Matemática, o que atrela a concepção dos autores àquela do *software*. Eles apresentam, por exemplo, uma lista do que denominam “princípios de

² Tradução de ...*they (the students) should be able to use mathematics as a tool for modeling a variety of real-world phenomena.*

³ Tradução de ...*a particular set of features of the real world or the structure that underlies the processes that lead to the observed outcomes.*

⁴ Tradução de *Modeling is a never-ending process – we build, revise, compare, and change, and with each cycle our understanding of the reality improves.*

Modelagem”. A lista traz os passos a ser seguidos durante a construção de um modelo e, para cada item, há um comando correspondente no *software*. Assim, os autores apresentam sua perspectiva de Modelagem Matemática, mas com a intenção de levar o leitor aos aspectos (matemáticos ou não) característicos do *software*.

Segundo Aris, citado por Davis e Hersh (1995),

um modelo matemático é um conjunto completo e consistente de equações matemáticas que são concebidas de modo a corresponderem a uma outra entidade, o seu protótipo. O protótipo poderá ser uma entidade física, biológica, social, psicológica ou conceptual, porventura até mesmo um outro modelo matemático. Onde se lê ‘equações’ pode ler-se ‘estrutura’, pois nem sempre se trata de modelos numéricos. (p. 84).

Esta citação foi retirada de um capítulo intitulado “Questões Externas”, da obra de Davis e Hersh (1995), no qual os autores consideram a matemática de um ponto de vista externo a ela. Concluo, então, que a perspectiva de Modelagem Matemática desses autores coloca-a como uma forma de representação matemática de “entidades” não-matemáticas.

Alguns autores criam ou adotam esquemas que ilustram o processo de criação de modelos (Cross & Moscardini, 1985; Galbraith & Clatworthy, 1990; Hannon & Ruth, 1994; Bassanezi & Ferreira, 1988). Esses esquemas procuram sintetizar os aspectos que são, segundo seus autores, desejáveis em um processo de Modelagem Matemática. A título de exemplo, apresento, na figura 1, o esquema sugerido por Bassanezi e Ferreira (1988):

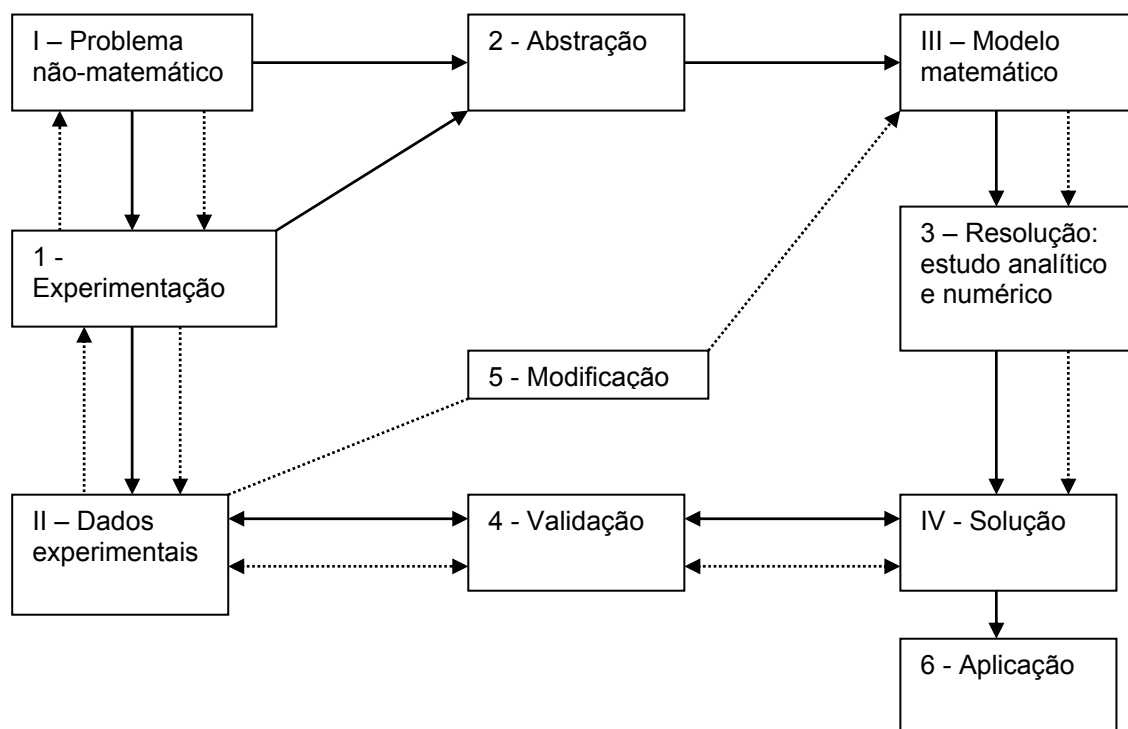


Figura 1: exemplo de um esquema de processo de criação de modelos

O objetivo, aqui, não é analisar, especificamente, o esquema sugerido por Bassanezi e Ferreira (1988), mas sim analisar a adoção de esquemas desse tipo para a construção de modelos. Devo afirmar que todos esses passos destacados pelos autores do esquema apresentado, assim como as ligações entre eles, são explicados em detalhes no livro em questão. Os outros autores citados utilizam esquemas semelhantes ao apresentado acima, alguns com mais, outros com menos detalhes que este.

Esses esquemas de criação de modelos não mostram, explicitamente, as perspectivas de Modelagem Matemática de seus autores. Entretanto, devemos estar atentos para o fato de que seguir qualquer um desses esquemas não garante a construção de um modelo satisfatório para resolver o problema considerado. Às vezes, os próprios esquemas prevêm, em seus passos, alternativas a serem seguidas quando não se encontra uma solução coerente ou uma compreensão satisfatória para o problema abordado, o que pode levar o construtor do modelo a um longo processo de tentativas e erros. Esses esquemas são, na maioria das vezes, guias de possíveis caminhos ou sugestões para construção de um modelo matemático, com a intenção de auxiliar pessoas que porventura se proponham a executar tal tarefa. Em outras palavras, esses esquemas de Modelagem não retratam exatamente o que é, ou como acontece a Modelagem Matemática. Eles trazem técnicas e estas não são suficientes para efetivar a construção de modelos. Essa afirmativa vai ao

encontro da constatação de Stillman (1998) segundo o qual, *seguir um ciclo seqüencial de modelagem* (corresponde ao que estou denominando “esquema de Modelagem”) *a partir da análise da situação do mundo real através de várias interações do ciclo para desenvolver um modelo refinado pode estar longe do que realmente acontece.*⁵ (p. 244). Além disso, de acordo com Cross e Moscardini (1985), *Modelagem Matemática é uma arte porque envolve não apenas o desenvolvimento de um conjunto de habilidades, mas também experiência e intuição.*⁶ (p. 66). Sendo assim, há mais em um processo de Modelagem do que uma seqüência de passos, donde posso concluir que os esquemas mostram pouco das perspectivas de Modelagem que subjazem a eles.

Se atentarmos para as perspectivas de Modelagem Matemática até aqui apresentadas, ou sugeridas, perceberemos que seu principal objetivo está na representação de uma situação real não-matemática ou na resolução de algum problema real não-matemático⁷ por meio do uso da matemática. Ou seja, a ênfase está na utilização da matemática para o tratamento de situações reais não-matemáticas. Mas Monteiro (1991) afirma que *podemos distinguir dois grandes grupos: os que vêem a modelagem matemática como um método de trabalho para o matemático e os que vêem tal processo como um caminho para o ensino e aprendizagem de matemática.* (p. 106). Eu reescreveria essa afirmativa da seguinte maneira: podemos distinguir dois grandes grupos: os que vêem a Modelagem Matemática apenas como um método de trabalho para o matemático e os que vêem tal processo também como um caminho para o ensino e aprendizagem de matemática. Com essa afirmativa, minha intenção é ressaltar que a Modelagem tida por Monteiro (1991) como método de trabalho para o matemático foi a inspiração para a Modelagem na Educação Matemática (Barbosa, 2000; Biembengut & Hein, 2000; Borba, 2000).

Apesar de ter como inspiração a Modelagem Matemática na matemática, a Modelagem Matemática na Educação Matemática toma rumos diferentes desta última. O fato de se localizarem em contextos diferentes traz mudanças significativas, tanto na própria perspectiva quanto nos objetivos da Modelagem Matemática, como destacarei a seguir.

Biembengut e Hein (2000) afirmam que, *em cursos regulares, nos quais há um programa a ser cumprido – currículo – e uma estrutura espacial e organizacional nos moldes “tradicionais”, o processo da modelagem precisa sofrer algumas alterações (...).* (p. 18). Os

⁵ Tradução de ... *following a sequential modelling cycle from analysis of the real world situation through several iterations of the cycle to develop a refined model may be far from what happens.*

⁶ Tradução de *Mathematical modelling is an art because it involves not only the development of a set of skills but also experience and intuition.*

⁷ Pode-se falar também em Modelagem de problemas matemáticos, como sugere a citação de Aris, já apresentada neste capítulo. Entretanto, não considerarei esse caso aqui para não me distanciar do foco de interesse da pesquisa.

autores se referem a uma espécie de adaptação da Modelagem Matemática ao contexto da escola, levando em conta a estrutura tradicional ali normalmente encontrada. Os obstáculos impostos à Modelagem pelo contexto escolar já foram apontados em outros trabalhos (Blum & Niss, 1991, Barbosa, 1999) e não serão tratados aqui. O que pretendo destacar são as “alterações” apontadas por esses autores que, nesse caso, dizem respeito à organização das atividades. Essas alterações, em outros casos, referem-se também aos objetivos da Modelagem Matemática em um contexto educacional.

Ao apresentar sua experiência utilizando a Modelagem Matemática como uma estratégia de ensino e aprendizagem, Bassanezi (1994) começa expondo sua perspectiva (na matemática): *o estudo de problemas e situações reais com o uso da matemática como linguagem para sua compreensão, simplificação e resolução, objetivando uma possível revisão ou modificação do objeto em estudo, é parte de um processo que tem sido denominado 'Modelagem Matemática'*⁸ (p. 31). E confirmando o que afirmei acima, acerca da ampliação dos limites da Modelagem Matemática em um contexto de ensino e aprendizagem, o mesmo autor acrescenta:

*Nosso trabalho tem sido tentar conectar a experiência de ensino com a perspectiva de modelagem baseados em preocupações teóricas, filosóficas e metodológicas específicas. Nós levamos em conta os recursos humanos, o interesse compartilhado pelo professor, aluno e comunidade; contextos social, político e econômico etc. Procuramos, também, resgatar a Etnomatemática, sua interpretação e contribuição no nível da sistematização matemática.*⁹ (p. 31).

A passagem acima mostra, claramente, como o autor amplia sua perspectiva de Modelagem Matemática, partindo de uma visão semelhante às dos primeiros autores apresentados, mas acrescida de questões e objetivos de cunho educacional ao ser levada para um contexto de ensino e aprendizagem.

Podemos perceber essa transformação também em outros autores. Em uma experiência que incorpora Modelagem Matemática em um curso pré-universitário descrito em Galbraith e Clatworthy (1990), os autores acrescentam, dentre os objetivos do programa

⁸ Tradução de *The study of problems and real situations with the use of mathematics as its language for their comprehension, simplification, and resolution, aiming at a possible revision or modification of the object under study, is part of a process that has been named 'mathematical modelling'.*

⁹ Tradução de *Our job has been to try to connect teaching experience with the modelling perspective based on specific theoretical, philosophical, and methodological concerns. We take into account the human resources, the interest shared by teacher, student, and community; social, political, and economical contexts, etc. We also look for the redemption of ethnomathematics, its interpretation and contribution at the level of mathematical systematization.*

de Modelagem, *o desenvolvimento de habilidades de participação individual e em equipe na solução de problemas e a comunicação e avaliação dos resultados de um projeto*.¹⁰ (p. 138). Esse trabalho mostra também o surgimento de aspectos educacionais em um processo de Modelagem, quando considerado em um ambiente de ensino e aprendizagem. Discussões em grupo, apresentação escrita de um trabalho, exposição de resultados, discussões com o professor e com colegas, são aspectos educacionais que surgem a partir do objetivo de se construir um modelo matemático e que, além disso, são importantes para o enriquecimento do modelo construído.

A perspectiva de Modelagem Matemática de Borba, Meneghetti e Hermini (1997), por sua vez, dá diretamente ao aluno um papel de destaque no processo de Modelagem. Segundo esses autores, *a Modelagem pode ser vista como o esforço de descrever matematicamente um fenômeno que é escolhido pelos alunos com o auxílio do professor*. (p. 63). Podemos perceber aqui a idéia que perpassa todas as perspectivas – descrever um fenômeno matematicamente – mas a participação do aluno na escolha desse fenômeno é tida como primordial. Essa característica dá outros contornos à perspectiva de Modelagem Matemática desses autores, o que mostra, mais uma vez, as transformações vivenciadas pela Modelagem em um ambiente de ensino e aprendizagem.

No início desta pesquisa, eu acreditava que a Modelagem Matemática apenas provocava transformações em um contexto de ensino e aprendizagem de matemática. E essas transformações vinham ao encontro de minhas primeiras inquietações como professora da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, como pude perceber em afirmativas como as de Borba, Meneghetti e Hermini (1997): *essas alunas puderam experimentar a relação entre a prática científica específica de sua carreira e a matemática; e ... se as alunas integram a atividade matemática com a biológica na sala de aula, elas poderão utilizar-se desta integração na sua vida profissional, ...* (p. 69); e de Matos (1998): *modelagem matemática parece produzir um território promissor para explorar a questão da aprendizagem como uma atividade onde os alunos dão significado às idéias, problemas, conceitos matemáticos e não-matemáticos*.¹¹ (p. 26). Entretanto, pude constatar que a Modelagem Matemática, ao ser levada à aula de matemática, também sofre mudanças, como pode ser constatado a partir das perspectivas de Modelagem Matemática na Educação Matemática que apresentei anteriormente.

Em síntese, esta pesquisa tem, até agora, a seguinte trajetória: sua pergunta diretriz – que discussões ocorrem, e como elas ocorrem, em um ambiente de ensino e

¹⁰ Tradução de *...developing skills of individual and team participation in the solution of problems and communicating and evaluating the results of a project*.

aprendizagem de Cálculo no qual a Modelagem Matemática e as tecnologias informáticas estão presentes? – levou-me a procurar conhecer o que vinha a ser Modelagem Matemática, a partir de diversos trabalhos que existem a respeito. Desse estudo, duas características se destacaram: a multiplicidade de perspectivas de Modelagem Matemática e a transformação dessas perspectivas quando ela é utilizada como um enfoque pedagógico.

Essas características não são, acredito, independentes uma da outra. Elas serão retomadas na seção seguinte para uma busca de compreensão de porquê e de como elas acontecem.

2.2. À Porta da Filosofia

Destaquei, na seção anterior, a transformação das perspectivas de Modelagem Matemática quando ela é utilizada em um ambiente de ensino e aprendizagem. Barbosa (2000) reconhece esse fenômeno e afirma que, quando analisada dentro da matemática aplicada, a Modelagem Matemática visa resolver algum problema não-matemático, enquanto se a analisarmos dentro da Educação Matemática, seu *objetivo principal é convidar o aluno a explorar matematicamente situações não-matemáticas tendo por fim sua formação matemática*. (p. 56).

Se ampliarmos a idéia das transformações das perspectivas na Educação Matemática, ou melhor, se tentarmos generalizá-la, poderíamos dizer que esta situação é uma consequência natural, visto que os contextos são diferentes e que, portanto, os objetivos devem ser diferentes. Usando essa idéia em uma situação extrema, poderíamos dizer que, em diferentes contextos da Educação Matemática (e todos são diferentes), teremos diferentes objetivos para a utilização da Modelagem Matemática como um enfoque pedagógico, o que explicaria a multiplicidade de perspectivas existentes. Mas essa conclusão simplesmente impossibilitaria qualquer discussão sobre perspectivas de Modelagem Matemática, já que cada uma seria um caso único e a busca de alguma teoria que tratasse de todas seria uma missão praticamente impossível. Entretanto, e felizmente, esse não é o caso. Vimos que as diferentes perspectivas existentes inspiraram-se em uma única fonte e é nela que vamos buscar o que as perspectivas têm em comum para tentarmos compreender a diversidade.

¹¹ Tradução de *Mathematical modelling seems to provide a promising territory to explore the question of learning as an activity where students give meaning to ideas, problems, mathematical and non-mathematical concepts*.

A Modelagem Matemática, independentemente do contexto em que está presente, tem como um de seus objetivos a resolução de algum problema da *realidade*¹², por meio do uso de teorias e conceitos *matemáticos*¹³. As diferenças se apresentam à medida que se define qual é o objetivo de resolver tal problema, qual é a *realidade* na qual o problema está inserido, como a *matemática* é concebida e se relaciona com essa *realidade* etc.. Uma hipótese que pode ser levantada então é que é na caracterização do, ou no entendimento que se dá ao, “problema da realidade” que vão se estabelecendo as diferentes perspectivas de Modelagem Matemática. Mas essa caracterização, no caso da Modelagem Matemática, acontece de forma atrelada àquela da matemática, ou seja, o “problema da realidade” pode ser concebido como tal, levando-se em conta o que se entende por “matemática” e as possibilidades de influência exercida pelo contexto, como já apontei na seção anterior.

Em concordância com a afirmação acima, Anastácio (1990), em sua dissertação de mestrado, que busca compreender “O que é Modelagem Matemática? Em que medida ela desenvolve o conhecimento da matemática enraizado no mundo-vida do aluno?”, destaca, na conclusão, a importância de se conhecer a realidade na qual o processo de Modelagem Matemática se desenvolve. Pude perceber, a partir da análise que ela faz, a grande influência dos modos de concepção da matemática na compreensão de Modelagem Matemática.

Interrogações como essa, que buscam refletir de forma crítica sobre o que é “problema da realidade”, são apontadas por Bicudo e Garnica (2001) como típicas do pensar filosófico. Segundo esses autores,

o pensar filosófico caracteriza-se por ser analítico, crítico, reflexivo e abrangente e reflexão, no pensar filosófico, é a ação de pensar sobre algum acontecimento (...) que está causando perplexidade, estranheza e solicitando por esclarecimento para que se torne compreensível, ou seja, para que faça sentido. (p. 16). (grifo dos autores).

Interrogar sobre o que é problema da realidade, levando em conta a matemática, tem, assim, um caráter filosófico. Trata-se, então, de uma interrogação filosófica acerca da relação entre matemática e realidade. Mas essa interrogação diz respeito a qual filosofia? Em virtude da área de inquérito na qual essa pesquisa se insere – Educação Matemática – é natural pensar em filosofia da Educação Matemática. Interrogo-me, então, sobre a natureza

¹² A palavra “realidade” está escrita em itálico porque não vou realizar, aqui, uma discussão detalhada sobre o que isso vem a ser. Esse conceito será considerado na seção seguinte, mas de forma conjunta com o de “matemática”.

da relação entre matemática e realidade, mas com a atenção voltada para situações, contextos e ambientes da Educação Matemática. De acordo com Bicudo e Garnica (2001), à *Filosofia da Educação Matemática cabe a análise crítica e reflexiva das propostas e ações educacionais no tocante ao ensino e à aprendizagem da matemática nos diferentes contextos em que ocorrem.* (p. 31). Segundo esses mesmos autores, a filosofia da Educação Matemática traz, em si, aspectos da filosofia da educação e da filosofia da matemática, mas constitui-se como uma região própria de inquérito, com seus procedimentos específicos. Da filosofia da matemática, ela necessita das análises e reflexões *sobre a natureza dos objetos matemáticos, da veracidade do conhecimento matemático, do valor da matemática.* (p. 30).

A interrogação que ora se coloca a esta pesquisa acerca da relação entre matemática e realidade, e que objetiva a compreensão das diversas perspectivas de Modelagem Matemática na Educação Matemática, é pertinente à filosofia da matemática, mas com vistas à filosofia da Educação Matemática. É nesse sentido que incursionarei pela filosofia da matemática: com o intuito de compreender a relação entre matemática e realidade em algumas filosofias da matemática e como essas relações se estendem às perspectivas de Modelagem Matemática na Educação Matemática (e às possíveis visões de Educação Matemática subjacentes).

Entretanto, antes de iniciar tal jornada, devo ressaltar que essa incursão pela filosofia da matemática não faz desta pesquisa uma “pesquisa em filosofia da matemática”. De acordo com Bicudo e Garnica (2001), o fato de um procedimento investigativo clamar por conhecimentos filosóficos, antropológicos, sociológicos e pedagógicos é *uma prática amplamente aceita e desejada para que não se caia em um modo superficial e estreito de se conceber “ciência”. Porém, não significa que se esteja fazendo filosofia, antropologia, sociologia, pedagogia.* (p. 14). Assim sendo, inicio na seção seguinte, essa pequena jornada pela filosofia da matemática, com o objetivo já apontado no parágrafo anterior.

2.3. A Relação entre Matemática e Realidade Presente em Algumas Filosofias da Matemática

Nesta seção, considerarei a relação existente entre matemática e realidade em algumas filosofias da matemática, com a intenção de compreender as diferentes perspectivas de Modelagem Matemática na Educação Matemática. Entretanto, antes de iniciar tal empreitada, devo alertar o leitor para o fato de que não tratarei da relação entre

¹³ Análoga à nota anterior, dizendo respeito à palavra “matemática” em conjunto com “realidade”.

matemática e realidade com a intenção de buscar “a alternativa correta” ou “a resposta” para essa relação, mas com o objetivo de refletir criticamente sobre a maneira como ela acontece, tendo sempre em mente as perspectivas de Modelagem Matemática na Educação Matemática e, subjacente a tudo isso, a pergunta diretriz desta pesquisa.

A primeira pergunta que me coloco é sobre quais filosofias da matemática considerar, já que, como nos mostram, por exemplo, Ernest (1991) e Hersh (1997), existe um grande número delas. Ou de outra forma, é necessário, para atingir meu objetivo, fazer um estudo sobre todas as filosofias apontadas por esses autores (além das filosofias apontadas por outros autores)? Volto-me, então, para o papel da filosofia da matemática nesta tese: uma parceira da filosofia da Educação Matemática. Sendo assim, olho para a Educação Matemática para descobrir quais filosofias da matemática se mostram importantes nessa área, tendo em vista o meu objetivo em considerá-las.

Dossey (1992) nos dá algumas pistas a esse respeito, quando afirma que *a visão do professor sobre como o ensino deveria acontecer na sala de aula é fortemente baseada na compreensão do professor sobre a natureza da matemática (...)*.¹⁴ (p. 42). Ele acrescenta, ainda, que a natureza da matemática retratada na sala de aula está ligada à visão de um corpo de conhecimento constituído por objetos que têm uma existência própria, externa aos seres humanos, e que são tratados de maneira formal¹⁵.

Também Imenes (1989) aponta aspectos importantes no que se refere à natureza da matemática presente nas salas de aula de matemática. Seu objetivo é estudar o fracasso do ensino da matemática na escola; e ele afirma que *a observação do modo pelo qual é apresentada a matemática escolar (...) mostra com clareza que de um modo geral o ensino de matemática está fortemente marcado pelo modelo euclidiano*. (p. 208).

Garnica (2001), que tem por objetivo investigar a linguagem matemática no contexto da sala de aula, afirma que *na sala de aula de matemática, posturas e valores, próprios do campo da pesquisa, insinuam-se, são reproduzidos, fortalecidos e legalizados. Há um deslizamento da prática científica para a prática pedagógica da matemática, prevalecendo o discurso científico sobre o discurso pedagógico*. (p. 55). E, como um dos principais valores presentes no fazer matemático é a prova rigorosa, ele acrescenta que, na matemática, ela é herdeira do programa estabelecido por Euclides e que

o programa euclidiano, plasmado numa concepção platônica, assegurado e elevado ao status de essencial ao fazer matemático opera, principalmente, pelo formalismo,

¹⁴ Tradução de *The teacher's view of how teaching should take place in the classroom is strongly based on a teacher's understanding of the nature of mathematics (...)*.

¹⁵ O que eu quero dizer aqui com “formal” ficará mais claro no decorrer deste capítulo.

concepção que mais do que qualquer outra abordagem, intervém no fazer cotidiano da sala de aula e na própria produção científica em Matemática. (p. 58).

A partir do que afirmam esses autores, posso concluir, então, que as concepções de matemática do professor têm forte influência na natureza da matemática presente na sala de aula. Além disso, como nos alerta Machado (1997), a natureza da matemática na sala de aula é também influenciada por certos “lugares-comuns”, que dão a ela um caráter de objetividade e de rigor que a fazem parecer existir em um mundo diferente do nosso. As concepções de matemática, por outro lado, são influenciadas por sua prática científica, que tem um de seus pilares no programa euclidiano. Esse, por sua vez, tem o platonismo e o formalismo como principais caracterizantes. Esse conjunto de idéias fez-me lembrar de uma frase curiosa que li em Hersh (1997): *O matemático é um platonista durante a semana e um formalista nos finais de semana.*¹⁶ (p. 39).

Ao considerar pesquisadores da Educação Matemática, cada qual com seu objetivo, que de uma forma ou de outra se dedicaram à natureza da matemática na sala de aula, fui encontrando pistas sobre que filosofias da matemática seria importante levar em conta para refletir sobre as perspectivas de Modelagem Matemática na Educação Matemática. Essas filosofias são o platonismo e o formalismo. Dedicar-me-ei, então, nas duas subseções seguintes, a essas filosofias da matemática.

2.3.1. A relação entre matemática e realidade no platonismo

Platonismo é a denominação dada à filosofia desenvolvida pelo grego Platão (428(7) – 348(7)a.C.) e seus seguidores, ou a qualquer pensamento filosófico influenciado por Platão (Japiassú & Marcondes, 1998).

A idéia fundamental do platonismo é que *as entidades verdadeiramente reais – as Formas ou as Idéias – eram os modelos ideais dos objetos do mundo físico ou das situações ideais as quais o homem deveria esforçar-se por atingir.* (Machado, 1997, p. 19). As Formas são independentes da percepção, podem ser precisamente definidas e são absolutamente permanentes. Em outras palavras, o que vemos, vivemos e percebemos no mundo são representações (imperfeitas) de Formas que preexistem independentemente do homem, do tempo e do espaço. Segundo Körner (1968), *para Platão uma importante, talvez a mais importante, tarefa intelectual do homem era distinguir aparência de realidade.*¹⁷ (p. 14). Só assim ele poderia entender e dominar o mundo à sua volta. O mundo das Formas

¹⁶ Tradução de *The working mathematician is a Platonist on weekdays, a formalist on weekends.*

era diferente do mundo da percepção sensorial e, portanto, ele não poderia ser alcançado por meio dos sentidos, mas sim por meio da razão.

Nos estágios finais do desenvolvimento de sua teoria, Platão admitia apenas dois tipos de Formas: a matemática e a moral. Körner (1968) afirma que *precisão, independência do tempo e – em algum sentido – independência de apreensibilidade são certamente, para Platão, característicos das afirmativas matemáticas*.¹⁸ (p. 15). Há as Formas aritméticas (objetos eternos, definidos, que denominamos “um”, “dois” etc.) e as Formas geométricas (objetos eternos, definidos, que denominamos “reta”, “ponto”, “círculo” etc.). Proposições aritméticas e geométricas são, necessariamente, verdadeiras, porque elas apenas descrevem relações imutáveis entre objetos imutáveis. Ao matemático cabe apenas apreender, ou descobrir, essas relações e as construções por ele usadas são meros guias para a descoberta.

Retomando a afirmativa de Hersh (1997), segundo a qual os matemáticos são platonistas durante a semana e formalistas nos finais de semana, e feita essa descrição do platonismo, retornemos a Hersh (1997) para considerar sua justificativa sobre o que disse. Ele afirma que *durante a semana, quando fazendo matemática, ele [o matemático] é um platonista, convencido de que está lidando com uma realidade objetiva cujas propriedades ele está tentando determinar*.¹⁹ (p. 39). Essa visão da matemática, presente na prática do matemático, que tenta apreender as proposições verdadeiras que estabelecem relações entre os objetos do mundo das Formas, faz parte daquela visão que, segundo Garnica (2001), “desliza” para a prática pedagógica da matemática.

Na aula de matemática, os alunos são apresentados a esses objetos ideais e às relações verdadeiras existentes entre eles. Aos alunos cabe apenas tentar apreender tais objetos e proposições. Práticas como a apresentação, de forma expositiva, dos resultados matemáticos e a existência de uma resposta única para cada exercício são confirmadoras e fortalecedoras dessa visão de matemática na sala de aula.

Retornemos, então, ao objetivo de se considerar o platonismo nesta tese. Por meio da pequena descrição da filosofia platônica que fiz, é possível tirar algumas conclusões sobre a relação entre matemática e realidade que ela sustenta. Entretanto, é necessário esclarecer, primeiramente, que o que eu estou denominando de “realidade” está bem mais próximo do mundo da percepção sensorial de Platão do que de seu mundo das Formas, visto que eu a trago da idéia comum entre as perspectivas de Modelagem Matemática, qual

¹⁷ Tradução de *For Plato an important, perhaps man's most important, intellectual task was to distinguish appearance from reality.*

¹⁸ Tradução de *Precision, timelessness and – in some sense – independence of their being apprehended is certainly, for Plato, characteristic of mathematical statements (...).*

seja, utilizar a matemática para solucionar algum problema não-matemático da realidade. A partir das perspectivas apresentadas na seção 2.1., é possível perceber que os “problemas da realidade” pertencem ao que Platão denominava mundo sensorial: são problemas de nosso cotidiano tais como o movimento de corpos, a temperatura em uma cidade, problemas relacionados à economia de um país etc.. Esclarecido esse ponto, Körner (1968) ajuda-nos a perceber a relação entre matemática e realidade no platonismo:

*Para Platão, a matemática pura (...) descreve as Formas matemáticas e as relações entre elas. A matemática aplicada descreve objetos empíricos e suas relações, na medida em que eles se aproximam das (ou participam nas) Formas matemáticas e suas relações.*²⁰ (p. 17-18). (grifos meus).

Levando em consideração o esclarecimento que fiz no parágrafo anterior à citação acima, podemos entender daí que a matemática (aplicada) é utilizada para descrever a realidade (objetos empíricos pertencentes ao mundo sensorial). Uma compreensão da Modelagem Matemática nesse sentido seria, então, uma forma de descrever a realidade por meio da matemática. Assim, diante de um “problema da realidade”, os objetos que o constituem e suas relações se aproximariam de Formas matemáticas e suas relações. A partir das verdades estabelecidas no mundo das Formas entre esses últimos, poderíamos descrever a situação no “problema da realidade” (sensorial), tudo isso por meio da razão.

Essa compreensão (geral) da Modelagem Matemática baseada no platonismo tem, também, sua versão na Educação Matemática. Entretanto, deixarei essa análise para a seção seguinte, quando levarei também em conta a Modelagem Matemática com idéias e valores oriundos do formalismo. Considero, então, na subseção seguinte, a relação entre matemática e realidade no formalismo.

2.3.2. A relação entre matemática e realidade no formalismo

O formalismo é uma das três escolas filosóficas que são normalmente denominadas “filosofias absolutistas da matemática” (Ernest, 1991), sendo que as outras duas são o logicismo e o intuicionismo. Elas foram desenvolvidas, a partir da segunda metade do século

¹⁹ Tradução de *On weekdays, when doing mathematics, he's a Platonist, convinced he's dealing with an objective reality whose properties he's trying to determine.*

²⁰ Tradução de *For Plato, pure mathematics (...) describes the mathematical Forms and the relationships between them. Applied mathematics describes empirical objects and their relations, in so far as they approximate to (participate in) the mathematical Forms and their relations.*

XIX, como uma crítica aos fundamentos da matemática e buscavam estabelecer bases seguras para essa área do conhecimento.

As raízes do formalismo estão nas idéias de Kant, segundo o qual a fonte das auto-evidências e das proposições matemáticas era a percepção.²¹ Para Kant, as proposições matemáticas são caracterizadas como meios de descrição de dois dados perceptivos: o tempo e o espaço. E sua estrutura é algo encontrado na percepção depois de abstraídos os conteúdos empíricos. O papel da lógica na matemática seria fornecer os princípios segundo os quais os teoremas seguem dos axiomas e, dessa forma, os teoremas não são, em si, princípios da lógica (Körner, 1968). David Hilbert, um dos principais representantes do formalismo, expressa da seguinte forma sua posição filosófica fundamental:

*... alguma coisa, que é pressuposta no fazer de inferências lógicas e no cumprimento de operações lógicas, já está dado em representação: isto é, certos objetos concretos extra-lógicos, que estão intuitivamente presentes como experiência imediata e subjazem a todos os pensamentos.*²² (Hilbert, citado por Körner, 1968, p. 72).

Esse princípio, expresso por Hilbert, traz a idéia básica do formalismo: partir de objetos concretos, abstrair esses objetos perceptíveis e, por meio da lógica, construir o corpo de conhecimento da matemática. Acredito que seja importante, neste ponto, buscar compreender como se dá a construção de uma teoria formal, com seus axiomas e teoremas. Machado (1997) traz esclarecimentos a esse respeito: *Uma 'teoria formal' consta de termos primitivos, regras para formação de fórmulas a partir deles, axiomas ou postulados, regras de inferências e teoremas.* (p. 30). Ele apresenta o seguinte quadro para ilustrar as relações entre esses termos:

²¹ Essa idéia também guia o intuicionismo, uma outra filosofia absolutista.

²² Tradução de *... something which is presupposed in the making of logical inferences and in the carrying out of logical operations, is already given in representation: i.e. certain extra-logical concrete objects, which are intuitively present as immediate experience, and underlie all thought.*

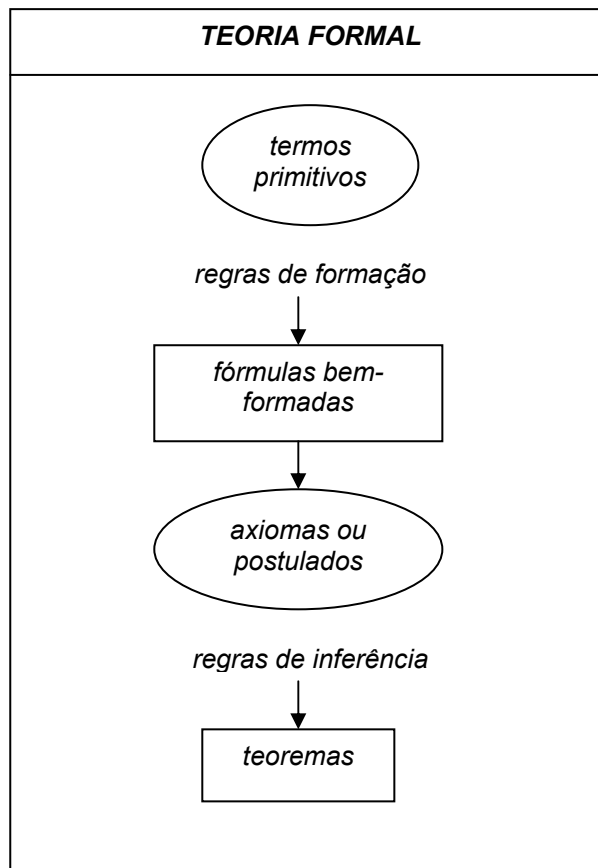


Figura 2: adaptação, a partir de Machado (1997), do quadro explicativo de uma teoria formal (p. 30)

O autor ainda esclarece que:

Os termos primitivos descrevem os objetos concretos de que trata a teoria. As regras de formação de fórmulas organizam o discurso a respeito destes objetos, distinguem as fórmulas bem-formadas das que carecem de significado. Os axiomas são as verdades básicas, iniciais, que devem se apoiar na evidência empírica. As regras de inferência determinam as inferências legítimas e distinguem, dentre as fórmulas bem-formadas, as que constituem os teoremas, que são verdades demonstráveis a partir dos axiomas, em última análise. (p. 30).

O programa de Hilbert para a formalização da matemática tinha, segundo Körner (1968), dois princípios:

- 1) a matemática inclui descrições de objetos concretos e construções;

- 2) a incorporação de elementos ideais a uma teoria requer a demonstração da consistência do novo sistema constituído.

A consistência requerida no segundo princípio apontado acima é a impossibilidade de se demonstrar, simultaneamente, dentro de uma mesma teoria formal, a veracidade de uma proposição e de sua negação. Uma maneira de verificar a consistência de um sistema formal é através da consistência relativa, que é a demonstração de que se um sistema formal A for consistente, então o sistema formal B também o é. Foi pela utilização desse caminho que se demonstrou a consistência relativa das geometrias não-euclidianas de Lobachevsky e Riemann com relação à geometria euclidiana.

Construída dessa forma, a matemática, para Hilbert, era constituída por proposições. Embora sua construção tenha partido de objetos concretos (ou de elementos ideais incorporados), esses pontos de partida não fazem parte dela. Para H. B. Curry, um outro importante representante do formalismo, a matemática é a “ciência dos sistemas formais” e, por isso, ele é denominado “formalista estrito”. Assim, segundo Körner (1968), *enquanto para Hilbert um sistema formal é o ‘fio de Ariadne’ de Leibniz, conduzindo-o através do labirinto das proposições e teorias matemáticas, o formalista estrito considera a matemática como possuindo este fio – e nada mais – como seu conteúdo.*²³ (p. 85). É daí que surge a metáfora que, segundo o formalismo, a matemática é um jogo formal com regras fixas e cujos elementos não têm significado.

Essa última frase nos leva novamente à afirmativa de Hersh (1997), segundo a qual o matemático é um platonista durante a semana e um formalista nos finais de semana. Sobre a postura formalista do matemático, esse autor afirma que *nos finais de semana, se desafiado a dar um relato filosófico dessa realidade [a realidade platônica dos dias da semana], é mais fácil fingir que ele [o matemático] não acredita nela. Ele joga o jogo do formalismo e finge que a matemática é um jogo sem significado.*²⁴ (p. 40).

O “deslizamento” da visão formalista da matemática para a sala de aula pode ser percebido quando o professor parte de um exemplo familiar para os alunos e procura, intuitivamente, abstrair seu conteúdo para chegar à matemática e, dali, construir sua formalização. Essa formalização, por sua vez, segue aquela seqüência apresentada na figura 2. Segundo Imenes (1989), também a organização curricular tradicional, na qual os conteúdos são apresentados de forma linear, cada um precedido de seus pré-requisitos,

²³ Tradução de ...whereas to Hilbert a formal system is the Leibnizian ‘thread of Ariadne’ leading him through the labyrinth of mathematical propositions and theories, the strict formalist regards mathematics as having this thread – and nothing more – for its subject-matter.

²⁴ Tradução de On weekends, if challenged to give a philosophical account of this reality, it’s easiest to pretend he doesn’t believe in it. He plays formalist, and pretends mathematics is a meaningless game.

mostra esse deslizamento do formalismo para a sala de aula. Entretanto, é importante frisar que a prática da sala de aula não segue literalmente a visão formalista da matemática: ela possui aspectos que se assemelham a essa visão. Como nos lembra Garnica (2001), a Educação Matemática é uma área de conhecimento teórico-prático, e devemos considerar os contextos de sua prática – a sala de aula de matemática, por exemplo – para compreender como a natureza da matemática se apresenta ali. Esse mesmo autor constata a existência de argumentações informais e semi-formais na sala de aula de matemática, convivendo com as formais. Essa interrogação acerca da natureza da matemática na sala de aula pertence à filosofia da Educação Matemática mas, por não ser propósito desta pesquisa, não será aprofundada aqui. Devemos, entretanto, levar em consideração que a prática da Modelagem Matemática na Educação Matemática pode sofrer influências da visão da natureza da matemática que as pessoas envolvidas nesse contexto possuem (Barbosa, 2001). Retornemos então ao objetivo de se considerar a filosofia da matemática para compreender a relação entre matemática e realidade nas diferentes perspectivas de Modelagem Matemática na Educação Matemática.

Tanto Körner (1968) quanto Hersh (1997) apresentam uma ligação entre o platonismo e o formalismo. Segundo esses autores, o programa formalista de Hilbert vem dar corpo aos elementos do mundo platônico das Formas, ligados entre si pelas idéias de Kant. Esses autores nos alertam, entretanto, para o fato de que, para o formalista, não faz sentido afirmar se um resultado em matemática é verdadeiro ou falso por si só, já que tudo que ele pode fazer é dizer se determinado teorema resulta logicamente dos axiomas e os teoremas, por sua vez, não têm conteúdo, eles não se referem a nada. Já o platonista considera a possibilidade de se afirmar se determinado resultado é verdadeiro ou falso, pois, para ele, os objetos matemáticos existem em seu mundo próprio, separadamente do mundo físico.

Para ajudar a esclarecer esse último parágrafo, utilizarei um exemplo de Hersh (1997). Ele pergunta se nós poderíamos afirmar que o postulado das paralelas de Euclides²⁵ e sua negação são ambos verdadeiros. *O formalista conclui que para manter nossa liberdade para estudar tanto a geometria Euclidiana quanto as não-Euclidianas, nós devemos desistir da idéia de que alguma delas seja verdadeira. Elas necessitam apenas ser consistentes.*²⁶ (p. 163). Ainda segundo esse autor, pode surgir algum conflito quando consideramos um espaço físico objetivo, que satisfaz um único conjunto de leis, e tentamos descrevê-lo com ambas as teorias.

²⁵ Esse é o quinto postulado de Euclides, que pode ser apresentado em várias formas equivalentes. Uma delas é que, dados uma reta r e um ponto A que não pertence a r , podemos traçar uma única reta que é paralela a r e que contém A .

²⁶ Tradução de *The formalist concludes that to keep our freedom to study both Euclidean and non-Euclidean geometries, we must give up the idea that either is true. They need only be consistent.*

Essa mesma idéia é apresentada por Körner (1968), ao afirmar que *Curry distingue entre a verdade das afirmativas (metamatemáticas) sobre marcas e série de marcas, isto é, a verdade das afirmativas da matemática pura, e a aceitabilidade de uma teoria da matemática pura para uma dada proposta.*²⁷ (p. 110). (grifos do autor). Para Curry, uma afirmativa matemática só é verdadeira se ela for um teorema em um sistema formal: ela não é verdadeira por si só. Por outro lado, pode-se falar em aplicabilidade de uma proposição matemática ao mundo físico, sendo que, nesse caso, não se trata mais de uma questão matemática.

Podemos perceber, então, que o formalismo vê a matemática como um corpo separado da realidade (física), mas que pode ser aplicada à realidade ou nela utilizada. Retomando a perspectiva (geral) de Modelagem Matemática – utilizar a matemática para resolver um problema não-matemático da realidade – verificamos que, diante do formalismo, ela pode acontecer de duas formas diferentes. A primeira delas, seguindo de perto o primeiro princípio do programa formalista de Hilbert, consistiria em construir uma teoria matemática formal a partir dos objetos e relações existentes no problema da realidade. A solução, ou a resposta adviria dessa teoria. A segunda forma está mais diretamente relacionada à incorporação de elementos ideais a alguma teoria formal por meio da demonstração da consistência do sistema assim constituído. Essa nova teoria formal pode ser aplicada a algum problema da realidade, como foi o caso das geometrias não-euclidianas.

Concluo, aqui, a abordagem, dentro da filosofia da matemática, da relação entre matemática e realidade. Retomarei, agora, as perspectivas de Modelagem Matemática na Educação Matemática com a intenção de compreender como a relação entre matemática e realidade pode influenciá-las.

2.4. Retornando à Modelagem Matemática na Educação Matemática

A partir do que foi discutido na seção anterior, chegamos à conclusão que uma compreensão da Modelagem Matemática inspirada no platonismo seria como uma forma de descrever a realidade por meio da matemática. Já no que diz respeito ao formalismo, a Modelagem Matemática consistiria em utilizar alguma teoria formal matemática já existente para resolver um problema da realidade, ou em construir alguma teoria para tal, caso

²⁷ Tradução de *Curry distinguishes between on the one hand the truth of (metamathematical) statements about marks and strings of marks, i.e. the truth of the statements of pure mathematics, and*

necessário. Dito isso, podemos nos perguntar sobre a presença dessas visões da relação entre matemática e realidade nas configurações que a Modelagem Matemática assume na sala de aula e sobre as consequências dessa presença.

Na seção 2.1. considerei basicamente três perspectivas de Modelagem Matemática na Educação Matemática: a de Bassanezi (1994), a de Galbraith e Clatworthy (1990) e a de Borba, Meneghetti e Hermini (1997). De maneira geral, esses autores nos dão algumas características das formas pelas quais a Modelagem Matemática se estabelece na sala de aula.

Como já afirmei, todas as perspectivas têm, em comum, entre seus objetivos a utilização da matemática para o estudo de problemas ou situações reais. Além disso, Bassanezi (1994) passa a levar em conta os interesses dos alunos, o contexto no qual a Modelagem Matemática é efetivada e os recursos disponíveis, quando ela é utilizada na sala de aula de matemática. Já Galbraith e Clatworthy (1990) acrescentam que *os alunos deveriam aprender a cooperar como membros de uma equipe, deveriam desenvolver confiança e competência em comunicações escritas e verbais e, portanto, deveriam aprender a preparar relatórios (individuais e em grupos) e ser articulados ao explicar e defender decisões tomadas, métodos usados e conclusões alcançadas.*²⁸ (p. 138). Borba, Meneghetti e Hermini (1997), por sua vez, enfatizam a importância de os alunos escolherem o tema (ou problema) a ser trabalhado por meio da Modelagem.

Essa caracterização das perspectivas de Modelagem Matemática, apesar de fornecer indícios sobre como as atividades acontecem, não diz muito sobre a natureza da relação entre matemática e realidade que as diferentes perspectivas podem sustentar. Podemos nos perguntar, por exemplo: na sala de aula, o professor e/ou os alunos esperam que seja obtida, por meio da matemática, uma solução única do estudo do problema ou situação? Se sim, isso revelaria um aspecto platônico no processo de Modelagem. O professor poderia contra-argumentar, afirmando que, de maneira geral, simplificações, ou modificações, na situação inicial da Modelagem são previstas, o que poderia levar a uma outra solução. Essa argumentação, por sua vez, é semelhante a um dos princípios do formalismo, segundo o qual é possível criar um sistema formal a partir de dados concretos. Esse sistema forneceria uma solução, mas, ao mudarmos as condições iniciais, mudariam os axiomas e outra solução seria encontrada.

on the other the acceptability of a theory of pure mathematics for a given purpose.

²⁸ Tradução de *students should learn to co-operate as team members, should develop confidence and competence in both written and verbal communication, and should therefore learn to prepare reports (both individual and group), and to be articulate in explaining and defending decisions taken, methods used, and conclusions reached.*

Poderia não ser esse o caso nas situações em que o interesse dos alunos fosse colocado em destaque ou, além disso, quando houvesse preocupações como as apontadas por Galbraith e Clatworthy (1990). Talvez, considerando os interesses dos alunos, ou até mesmo se eles propusessem a situação a ser estudada, outros aspectos apareceriam e as visões platônica e formalista da matemática poderiam não estar tão em destaque. Mas os alunos poderiam sustentar visões de matemática semelhantes àquelas, já que eles têm uma vivência anterior na escola que, por sua vez, pode sustentá-las também. Eles poderiam ter liberdade de escolher o tema a ser trabalhado, mas poderiam também tentar encontrar um encaminhamento único para seu estudo, com uma visão de que os conceitos matemáticos são objetivos, perenes e que dariam a certeza para a solução encontrada. Essa visão pode estar presente, também, mesmo quando o objetivo é promover o trabalho em grupo, a comunicação dos resultados encontrados etc., se todos reverenciassem a certeza oriunda da formalização da matemática.

O que poderíamos dizer, então, sobre o contexto escolar no qual a atividade de Modelagem Matemática está inserida? Não poderia, também ele, estar construído de acordo com, além de legitimar, as visões formalista e platônica da matemática? Como já citei anteriormente, os trabalhos de Imenes (1989) e Garnica (2001), entre outros, enfatizam a forte presença dessas visões da natureza da matemática (e de sua relação com a realidade) no contexto da sala de aula, o que pode influenciar a perspectiva de Modelagem Matemática que se faz ali.

Após todos esses questionamentos, talvez seja natural perguntar: que mal há na presença de idéias platônicas ou formalistas na visão sobre a relação entre matemática e realidade na sala de aula? Afinal de contas, as teorias matemáticas não são importantes e confiáveis em resoluções de problemas que aparecem no nosso dia-a-dia? Não é assim que nossa sociedade tem funcionado, e bem, por séculos? A Modelagem Matemática não seria uma ótima maneira de “transmitir” as teorias matemáticas a nossos alunos para que eles pudessem aplicá-las em suas vidas profissionais e ajudassem a promover o progresso de nossa sociedade?

2.4.1. Ideologia da certeza e poder formatador da matemática

Todas as perguntas apresentadas no parágrafo anterior estão em concordância com o que Borba e Skovsmose (1997) denominam de *ideologia da certeza na educação matemática*. Esses autores vêem

*a ideologia da certeza como uma estrutura de interpretação geral e fundamental para um número crescente de questões que transformam a matemática em uma 'linguagem de poder'. Essa visão da matemática – como um sistema perfeito, como pura, como uma ferramenta infalível se bem usada – contribui para o controle político.*²⁹ (p. 17).

Em outras palavras, a *ideologia da certeza* sustenta uma visão da matemática que atribui a ela o poder de detentora do argumento definitivo em qualquer debate na sociedade. Dessa forma, ela é utilizada na apresentação de decisões políticas, por exemplo, de uma tal maneira a sugerir que a decisão tomada aponta o melhor caminho a ser seguido, sem deixar margens para contra-argumentações, o que caracteriza seu uso como *linguagem de poder*. Ou seja, a matemática participa de forma decisiva na estruturação do debate político, o que explicita sua dimensão política na sociedade. Assim sendo, aqueles que não têm acesso à matemática estão sujeitos ao controle e vontades daqueles que o têm e que detêm o poder autoritário na sociedade, já que a impossibilidade de acesso significa não participar do complexo debate político, sustentado por essa ciência. Como consequência, podem-se reforçar as desigualdades sociais, o racismo, discriminações sócio-econômicas etc..

Borba e Skovsmose (1997) apontam, ainda, que a ideologia da certeza é sustentada em diversos segmentos da sociedade, como nos meios de comunicação, no governo, nas escolas, por meio de uma visão de matemática como um corpo de conhecimento exato, objetivo, inquestionável, que pode ser aplicado ampla e irrestritamente no nosso dia-a-dia. Há mitos sobre a matemática, como os apontados por Machado (1997) – “a matemática é independente do empírico”, “a matemática é o estudo das estruturas abstratas”, “a matemática ensina a pensar” – e outros, como “os números expressam a verdade”, “isso é certo como dois e dois são quatro”, que ajudam a sustentar a ideologia da certeza.

Na escola, a ideologia da certeza perpassa as atividades, as atitudes, o contexto, os materiais etc.. Podemos perceber sua presença nos exercícios de matemática que “sempre” têm uma, e apenas uma, única resposta correta; na importância que se dá à resposta final, ao resultado, dos exercícios e não à maneira como eles foram tratados; na comunicação estabelecida entre professor e alunos, que segue o padrão pergunta do professor, resposta do aluno, correção do professor – padrão sandwich de comunicação, segundo Alrø e Skovsmose (2001) –; no pânico que se estabelece no dia da “prova de matemática”; na admiração/respeito que é devotado aos que são “bons alunos em matemática”. Todo esse

²⁹ Tradução de ... *the ideology of certainty as a general and fundamental frame of interpretation for an increasing number of issues which transform mathematics in a 'language of power'. This view of mathematics – as a perfect system, as pure, as an infallible tool if well used – contributes to political control.*

mito que encobre a matemática possui características em comum com aquelas de suas filosofias platônica e formalista.

Entretanto, mais uma vez, que mal há na ideologia da certeza? Como afirmam Borba e Skovsmose (1997), ela estabelece a matemática como a linguagem do poder e contribui para o controle político e

*nós acreditamos ser necessário lutar contra esse mito se nosso objetivo ético é construir uma pedagogia que combata a opressão na sociedade, já que essa visão de matemática corrobora a noção de que a matemática é livre da influência humana e superior aos seres humanos.*³⁰ (p. 17).

A Modelagem Matemática, como nos apontam esses autores, pode ajudar a sustentar a ideologia da certeza. Essa ligação aparece claramente nas bases dessa ideologia:

- (1) A matemática é perfeita, pura e geral, no sentido de que a verdade de uma afirmativa matemática não se fia em nenhuma investigação empírica. A verdade matemática não pode ser influenciada por nenhum interesse social, político ou ideológico.*
- (2) A matemática é relevante e confiável porque pode ser aplicada a todo tipo de problemas reais. As aplicações da matemática não têm limite, já que sempre é possível matematizar um problema.*³¹ (p. 18).

A Modelagem Matemática está diretamente ligada à segunda base apresentada acima. Quando fazemos uma leitura daquela idéia geral que perpassa todas as perspectivas de Modelagem Matemática – utilizar a matemática para resolver um problema não-matemático da realidade – acreditando na possibilidade de aplicá-la de forma irrestrita, estaremos apoiando essa segunda base da ideologia da certeza. Mas a ligação da Modelagem Matemática com essa ideologia não pára por aí: ela também pode sustentar a

³⁰ Tradução de *we find it necessary to struggle against this myth, if our ethical goals are to construct a pedagogy that fights oppression in society, since this view of mathematics corroborates the notion that mathematics is free of human influence and above humans.*

³¹ Tradução de *(1) Mathematics is perfect, pure and general in the sense that the truth of a mathematical statement does not rely on any empirical investigation. The truth of mathematics cannot be influenced by any social, political or ideological interest. (2) Mathematics is relevant and reliable because it can be applied to all sorts of real problems. The applications of mathematics have no limit, since it is always possible to mathematise a problem.*

primeira base. Se acreditamos que a Modelagem Matemática vai fornecer respostas neutras aos problemas da realidade, respostas livres de interesses sociais, políticos ou ideológicos, estaremos, mais uma vez, apoiando a ideologia da certeza e todas as conseqüências que ela acarreta.

As idéias apresentadas no parágrafo anterior estão intimamente ligadas ao *poder formatador da matemática* lançado por Skovsmose (1994). Essa idéia também é amplamente discutida em outros trabalhos seus, como em Skovsmose (1999a) e (2000a). Buscarei sumarizar seus principais aspectos na medida em que eles levem em conta a Modelagem Matemática.

De acordo com Skovsmose (2000a), a tese do poder formatador da matemática pode ser formulada da seguinte maneira: *categorias fundamentais da tecno-natureza são continuamente moduladas e eventualmente constituídas pela matemática*.³² (p. 5). Ele utiliza o termo tecno-natureza para enfatizar que não é possível conceber o mundo em que vivemos como um ambiente livre dos efeitos da tecnologia: o mundo é continuamente reconstruído por ela. A tese do poder formatador da matemática chama a atenção para o fato de, em muitos casos, a matemática ser utilizada para estabelecer ações sociais e tomar decisões. E essa utilização da matemática está ligada à Modelagem Matemática. Acredito ser de grande valia considerarmos literalmente a inter-relação que Skovsmose (2000a) estabelece entre Modelagem Matemática e poder formatador da matemática.

*Para enfatizar a complexidade do papel da matemática dentro da sociedade [que é considerada na tese do poder formatador da matemática], nós podemos considerar a noção de 'modelagem'. (...) 'Modelagem se tornou parte de uma bem-elaborada 'metafísica' sobre matemática. A idéia é simplesmente a de que a 'realidade' é 'retratada' por meio da matemática. (...) Os diferentes elementos em um modelo matemático se referem a entidades na realidade e manipulações do modelo fornecem informações sobre a realidade.*³³ (p. 4).

Skovsmose (2000a) critica essa visão de Modelagem Matemática. Ele afirma que, ao invés de considerar uma teoria de aplicações que retrata a realidade, *nós temos que*

³² Tradução de *Fundamental categories of techno-nature are continually modulated and eventually constituted by mathematics*.

³³ Tradução de *To emphasise the complexity of the role of mathematics within society, we can take a look at the notion of 'modelling'. (...) 'Modelling' has become part of a well-elaborated 'metaphysics' about mathematics. The idea is simply that 'reality' is 'pictured' by means of mathematics. (...) The different elements in the mathematical model refer to entities in reality, and manipulations of the model provide informations about reality.*

*entender o profundo envolvimento da matemática em questões sociais.*³⁴ (p. 4). Borba e Skovsmose (1997) acrescentam, ainda, que conceber a Modelagem Matemática a partir da perspectiva de descrição da realidade aplica-se apenas a uma parte limitada dela. *Por meio de modelos matemáticos, nós também nos tornamos capazes de projetar uma parte do que se torna realidade. Nós tomamos decisões baseadas em modelos matemáticos e, dessa forma, a matemática dá forma à realidade.*³⁵ (p. 19).

Essa crença na possibilidade de aplicação da matemática (por meio da Modelagem Matemática, por exemplo) de forma irrestrita e neutra pode tornar-se mais forte ainda na escola, segundo Borba e Skovsmose (1997). Esses autores consideram, especialmente, os problemas escritos, como aqueles que normalmente são encontrados em livros didáticos, nos quais se apresenta uma situação hipotética – por exemplo, dada a receita de um prato para quatro pessoas, como fazê-la para sete pessoas? – e espera-se encontrar uma única resposta (no mundo perfeito das idéias de Platão), reforçando o que eles denominam de paradigma do falso-verdadeiro. Segundo esses autores, as aplicações da matemática apoiadas no paradigma do falso-verdadeiro podem reforçar a crença de que aplicar a matemática é a melhor maneira de resolver os problemas da realidade. Entretanto, os alunos aprendem a lidar com os problemas escritos em um contexto escolar, o que pode levar ao perigo de se acreditar que *questões e dificuldades em aplicações reais da matemática são ‘similares’ a questões e dificuldades que eles encontram quando lidando com problemas escritos. Essa crença elimina todo um conjunto de problemas relacionados a aplicações da matemática fora da escola.*³⁶ (p. 18). É como se se estabelecesse uma barreira entre a matemática escolar e os problemas da realidade.

Se a Modelagem Matemática na Educação Matemática não considera discussões a respeito da complexa inter-relação entre matemática e realidade apontada pela tese do poder formatador da matemática ela reforçará, de alguma forma, a ideologia da certeza, e estará contribuindo para o controle político que é legitimado por essa ideologia.

Após toda essa discussão sobre a relação entre matemática e realidade que pode ser apoiada pelas perspectivas de Modelagem Matemática na Educação Matemática, acredito que seja possível estabelecer uma perspectiva que esteja coerente com minhas concepções.

³⁴ Tradução de *we have to understand the deeper involvement of mathematics in social affairs.*

³⁵ Tradução de *By means of mathematical models, we also become able to ‘design’ a part of what becomes reality. We make decisions based on mathematical models and, in this way, mathematics shapes reality.*

³⁶ Tradução de *questions and difficulties in real applications of mathematics are ‘similar’ to the questions and difficulties they face when dealing with word problems. This belief eliminates a whole range of problems related to applications of mathematics outside schools.*

2.5. A Perspectiva de Modelagem Matemática na Educação Matemática Adotada nesta Pesquisa

Início a apresentação da perspectiva de Modelagem Matemática na Educação Matemática adotada nesta pesquisa com a abertura de parênteses. Abro-os aqui para reconhecer que o texto escrito até agora é uma pequena amostra da construção dessa perspectiva. Ela não se apóia exclusivamente nas idéias apresentadas até aqui: ela é fruto de todas as questões sobre as quais venho refletindo e discutindo com meus pares, buscando alternativas nos autores estudados; são questões que nem sempre podem ser resgatadas pela escrita. Ela também não está isolada de outras questões presentes nesse período de tempo, como por exemplo, as referentes às concepções de Educação Matemática. Acredito ser uma tarefa para um projeto maior, um projeto de vida, talvez, o de tecer todas essas relações, o que não farei aqui, mesmo porque essas idéias ainda não estão completamente amadurecidas. Entretanto, não é por não me dedicar a essa tarefa agora que deixarei de mostrar algumas características da concepção de Educação Matemática em que acredito. Com essa última frase, fecho os parênteses e retomo o encaminhamento para a perspectiva de Modelagem Matemática na Educação Matemática adotada nesta tese.

Borba e Skovsmose (1997) afirmam que, na sala de aula, a ideologia da certeza pode ter como fonte a estrutura de comunicação entre professor e alunos. *Os alunos não se deparam com argumentações, mas sim com referências a uma autoridade aparentemente uniforme e consistente (...).*³⁷ (p. 19). Eles acreditam que discussões sobre essa estrutura de comunicação pode ser uma forma de desafiar a ideologia da certeza na Educação Matemática. Entretanto, eles enfatizam que essa não é a única maneira: discussões sobre abordagens filosóficas da matemática, mudanças na estrutura do currículo para incorporar o desenvolvimento de projetos, ênfase na necessidade de os alunos escolherem seus próprios problemas em atividades de Modelagem Matemática, entre outras, podem ser formas alternativas de desafiar a ideologia da certeza em Educação Matemática.

Skovsmose (1999a), por sua vez, afirma que *há uma necessidade de que a educação matemática seja considerada pela sociologia como de importância especial, como uma área que poderia revelar novos aspectos da dinâmica social.*³⁸ (p. 34). Ele acrescenta que, em particular, a Educação Matemática torna-se importante nas discussões sobre o papel da matemática na sociedade em que ela opera segundo a tese do poder formatador

³⁷ Tradução de *The students are not met with argumentations but with references to a seemingly uniform and consistent authority (...).*

da matemática. Para esse autor, uma maneira de efetivar tal abordagem da matemática dá-se pela *Educação Matemática Crítica*. Skovsmose (2000a) afirma que a Educação Matemática Crítica não é um tópico particular da matemática, mas sim *uma expressão de algumas preocupações mais amplas sobre a educação matemática*.³⁹ (p. 2). Ele enumera algumas dessas principais preocupações:

(1) A educação não pode ser discutida apenas em termos de preparação para a educação futura ou para o mercado de trabalho. Escolarização também significa preparação para cidadania e participação na vida social e política. O que isto significa para a educação matemática?

(2) A matemática poderia servir como uma ferramenta para identificar e analisar aspectos críticos da vida social?

(3) Como a educação matemática poderia considerar os interesses e competências dos alunos para o desenvolvimento do conhecimento e aprendizagem?

(4) A educação matemática poderia fornecer 'filtros culturais' sendo, por exemplo, guardião do portão para a sociedade tecnológica. Como questões sobre igualdade, equidade e justiça poderiam estar refletidas na sala de aula de matemática?

(5) A matemática poderia se tornar uma ferramenta problemática para resolver uma larga gama de problemas, já que a própria matemática é parte da sociedade tecnológica. A matemática não pode ser apenas uma ferramenta para crítica; deve-se também dirigir uma crítica à própria matemática e nesse sentido ela se torna um 'objeto de crítica'. O que isso significa para a educação matemática?

(6) Toda sala de aula se torna uma micro-sociedade e pode representar a democracia em espécie (ou de outra forma). O que isto significa para as interações entre alunos e professor na sala de aula de matemática? (Skovsmose, 2000a, p. 2).

³⁸ Tradução de *there is a need for mathematics education to be considered of special importance by sociology as an area that could reveal new features of social dynamics*.

³⁹ Tradução de *an expression of some broader concerns about mathematics education*.

Levando em conta todas as considerações apontadas acima, a Modelagem Matemática na Educação Matemática, nesta tese, será considerada como uma abordagem, por meio da matemática, de um problema não-matemático da realidade, ou de uma situação não-matemática da realidade, escolhida pelos alunos reunidos em grupos, de tal forma que as questões da Educação Matemática Crítica embasem o desenvolvimento do trabalho.

Devo deixar bem claro que o fato de eu ter adotado essa perspectiva não significa que esteja afirmando que ela é a perspectiva de Modelagem Matemática na Educação Matemática. Todas as outras citadas neste capítulo também o são. Aliás, foi a riqueza da diversidade que me levou a refletir sobre, e estruturar, toda essa discussão a respeito de Modelagem Matemática na Educação Matemática. Pode até ser o caso de as perspectivas apresentadas também contemplarem os aspectos destacados na perspectiva acima. Entretanto, os autores não deixam isso explícito.

Neste capítulo, levantei a hipótese de que a existência de diferentes perspectivas de Modelagem na Educação Matemática poderia ser uma consequência da compreensão que se tem do que vem a ser “problema da realidade”. Para investigar a hipótese, incursionei pela filosofia da matemática, considerada aqui como parceira da filosofia da Educação Matemática, procurando compreender a relação entre matemática e realidade que elas sustentam. Entretanto, após esse estudo, cheguei à conclusão que não basta estudar os relatos apresentados pelos pesquisadores, nem considerar a “definição” de Modelagem Matemática que eles apresentam, para concluir, de forma decisiva, qual é a relação entre matemática e realidade que está subjacente a cada perspectiva.

Podemos concluir, daí, que todo esse estudo foi em vão? Acredito que não. A dúvida levantada pela diversidade de perspectivas fez-me embrenhar por estudos filosóficos que se mostraram importantes de serem considerados quando da opção de trabalhar com Modelagem Matemática na Educação Matemática. Como bem apontam Borba e Skovsmose (1997), discussões sobre aspectos filosóficos da matemática são importantes se se pretende desafiar a ideologia da certeza na Educação Matemática. E, como os estudos que realizei até agora sugerem, a Modelagem Matemática é um potencial desencadeador para tais discussões.

Além da questão filosófica, é importante também destacar a questão da comunicação na Educação Matemática. Tanto Borba e Skovsmose (1997), quando questionam a ideologia da certeza, quanto Skovsmose (2000a), quando sugere a Educação Matemática Crítica para discutir o papel social da matemática, destacam a importância de se estar atento para o estilo da comunicação entre alunos e professor e entre os alunos. Talvez não tenha sido possível atingir uma compreensão mais profunda sobre a relação entre

matemática e realidade nas diferentes perspectivas de Modelagem apresentadas, justamente porque suas estruturas de comunicação não estavam explícitas.

Esse último parágrafo remete-me à pergunta diretriz desta tese – Que discussões ocorrem, e como elas ocorrem, em um ambiente de ensino e aprendizagem de Cálculo no qual a Modelagem Matemática e as tecnologias informáticas estão presentes?. O termo “discussões” está diretamente ligado às estruturas de comunicação que se estabelecem, no caso, quando os alunos de Cálculo estão desenvolvendo um trabalho de Modelagem Matemática em um ambiente informatizado. Assim, acredito que, por meio desta pesquisa, será possível avançar um pouco mais na direção dessas discussões que envolvem a Modelagem Matemática, a relação entre matemática e realidade subjacente à perspectiva de Modelagem e o estilo de comunicação que se estabelece, tudo isso na Educação Matemática. Entretanto, como a pergunta diretriz nos faz lembrar, também as tecnologias informáticas fazem parte desse contexto. Considero, então, no próximo capítulo, a Modelagem Matemática e as tecnologias informáticas na Educação Matemática.

Capítulo 3

Modelagem Matemática e Tecnologias Informáticas na Educação Matemática

O contexto no qual esta pesquisa foi desenvolvida consiste em um ambiente de ensino e aprendizagem de Cálculo no qual a Modelagem Matemática e as tecnologias informáticas estão presentes. O capítulo 2 foi dedicado à Modelagem Matemática e à Modelagem Matemática na Educação Matemática. O objetivo deste capítulo é então considerar a questão das tecnologias informáticas nesse contexto.

Para tanto início, na seção 3.1., retomando alguns dos autores considerados no capítulo 2, dando destaque agora à maneira como eles tratam a questão das tecnologias informáticas com relação à Modelagem Matemática.

Essa questão é expandida, na seção 3.2., para o caso da Modelagem Matemática na Educação Matemática. Destaco nessa análise o trabalho de Blum e Niss (1991), que traz um estudo da arte sobre Modelagem Matemática considerando, entre outros aspectos, as tecnologias informáticas. Concluo o capítulo retomando, na seção 3.3., a perspectiva de Modelagem Matemática adotada nesta pesquisa, dando maior ênfase para o papel das tecnologias informáticas e buscando compreendê-la de forma mais profunda.

3.1. Modelagem Matemática e Tecnologias Informáticas

Uma grande parte dos autores que se dedicam ao estudo da Modelagem Matemática trata, simultaneamente, a questão do uso das tecnologias informáticas, como por exemplo Cross e Moscardini (1985), Blum e Niss (1991), Hannon e Ruth (1994) e Bartkovich et al. (1996).

Cross e Moscardini (1985) afirmam que, com a crescente elaboração dos trabalhos em Modelagem Matemática, os computadores tornaram-se fortes aliados. Isso aconteceu, segundo esses autores, como consequência da matemática envolvida no modelo construído. Muitas vezes eram necessários cálculos laboriosos e o computador revelou-se uma ferramenta importante em um ambiente de Modelagem.

Bartkovick et al. (1996) acrescentam que os problemas reais dificilmente possuem números inteiros como dados e, normalmente, requerem uma grande quantidade de cálculos, o que pode ser tratado com facilidade pelas tecnologias informáticas.

De acordo com Blum e Niss (1991),

*os computadores não apenas possibilitam um maior detalhamento, uma maior precisão e rapidez nos cálculos para o tratamento de mais dados, para o exame dos efeitos de variação de parâmetros, para a obtenção de melhores ilustrações etc., como também, na maioria dos casos, eles são simplesmente indispensáveis para que a abordagem de um dado modelo matemático seja acessível ou real.*¹ (p. 52).

Podemos perceber, assim, a partir desses trabalhos, uma necessidade inicial dos computadores como uma ferramenta na execução de cálculos complexos. Seu potencial para lidar com cálculos elaborados liberta o indivíduo que está desenvolvendo algum modelo matemático de modo que ele se preocupe apenas com a compreensão e interpretação da situação e dos resultados, sem perder tempo ou energia com contas, fórmulas, lógica matemática etc..

Entretanto, na visão desses autores, esse não é o único papel dos computadores na Modelagem Matemática. De acordo com Hannon e Ruth (1994), na ausência de modelos computacionais para eventos dinâmicos, *nós estávamos freqüentemente limitados a manipular sistemas reais para entender as relações de causa e efeito.*² (p. vii). Havia a possibilidade, por exemplo, de provocar pequenas mudanças no meio ambiente e avaliar as conseqüências. Entretanto, essas experimentações em sistemas sociais ou ecológicos podem ter conseqüências graves, provocando perdas irreversíveis. Os autores apresentam, então, os computadores como um caminho para essa situação: podemos usá-los para fazer simulações, ou seja, para imitar as situações reais e realizar experiências que, nesse caso, não provocariam prejuízos.

Esses autores nos mostram, então, dois argumentos sobre a importância dos computadores na Modelagem Matemática: efetuar cálculos e realizar simulações. Os computadores e as tecnologias informáticas de maneira geral são considerados, dessa

¹ Tradução de *Not only do computers constantly allow for greater detail, accuracy, and rapidity in calculations, for the handling of more data, for examining the effects of changing terms or parameters, for providing better illustrations etc., in most cases they are simply indispensable for the mere 'cracking' of a given mathematical model to be accessible or realistic.*

² Tradução de *we were often left to manipulate real systems in order to understand the relationships of cause and effect.*

forma, como ferramentas a serviço dos seres-humanos na resolução de problemas do dia-a-dia, por meio da Modelagem Matemática.

Considerarei até agora, neste capítulo, a Modelagem Matemática de forma geral, sem me deter no caso da Modelagem na Educação Matemática. Sendo assim, o objetivo principal está na resolução de algum problema não-matemático da realidade e os dois argumentos a favor do uso de computadores estão diretamente ligados a esse objetivo. Vejamos, então, como essa parceria – Modelagem Matemática e tecnologias informáticas – se estabelece no caso da Educação Matemática.

3.2. Modelagem Matemática e Tecnologias Informáticas na Educação Matemática

De maneira geral, nossa sociedade tem vivido, de forma marcante, a influência das novas tecnologias, influência esta que, inclusive, está chegando às salas de aula (Penteado, Borba & Gracias, 1998, Machado, 1999). Os computadores têm-se revelado uma fonte fértil de possibilidades para o ensino e a aprendizagem de forma geral e da matemática, em particular. Alguns trabalhos, como por exemplo os de Borba, Meneghetti e Hermini (1997) e Graham (1993), além dos citados acima e de vários outros, têm apontado algumas vantagens da utilização de computadores em aulas de matemática. Graham (1993), por exemplo, afirma que *um aspecto essencial do uso do DERIVE (software usado no curso por ele descrito) nesse curso, é seu uso como elemento que proporciona um ambiente de investigação, mais do que simplesmente uma ferramenta para produzir respostas.*³ (p. 174).

Esses trabalhos, em particular, mostram a conciliação do uso das tecnologias informáticas com o desenvolvimento de projetos de Modelagem Matemática em cursos de Cálculo ou Pré-cálculo em universidades. Borba, Meneghetti e Hermini (1997), ao descreverem o trabalho de Modelagem desenvolvido por um grupo de alunas do curso de Ciências Biológicas, afirmam que *o uso das calculadoras no enfoque calculadora-experimental possibilitou, entre outras coisas, que, durante os trabalhos de modelagem, grupos de alunos (...) fizessem uso da mesma sem serem explicitamente solicitados.* (p. 68).

Essa última afirmativa mostra uma certa harmonia na parceria entre Modelagem Matemática e tecnologias informáticas. Parece haver uma solicitação natural pelo uso de computadores e/ou calculadoras quando se está desenvolvendo algum trabalho de

³ Tradução de *An essential feature of the use of DERIVE in this course is that it is used to provide an investigative environment, rather than as a tool that simply produces answers.*

Modelagem Matemática, e essa naturalidade já era apontada no contexto externo à Educação Matemática.

Segundo Blum e Niss (1991), à medida que os computadores estão se tornando mais acessíveis, financeira e tecnicamente, estão entrando nas aulas de matemática e sendo utilizados para lidar com Modelagem Matemática. Nesse trabalho, os autores fazem um estudo da arte sobre resolução de problemas, Modelagem e aplicações a outras áreas na Educação Matemática. Eles apresentam algumas noções e conceitos básicos relacionados ao tema, os mais importantes argumentos a seu favor, a situação na época, as tendências e as linhas prospectivas de desenvolvimento da resolução de problemas, Modelagem e aplicações na Educação Matemática. Apresentam, também, algumas questões e problemas relacionados com o assunto.

A partir de uma revisão da literatura sobre o tema na Educação Matemática, Blum e Niss (1991) apresentam cinco argumentos a favor da inclusão das aplicações, Modelagem Matemática e resolução de problemas nessa área. São eles:

- 1) o argumento formativo: que enfatiza o desenvolvimento de competências gerais e atitudes dos alunos;
- 2) o argumento da “competência crítica”⁴: que diz respeito à preparação dos alunos a viver e agir como cidadãos sociais em uma sociedade cada vez mais influenciada pela utilização da matemática por meio da Modelagem;
- 3) o argumento da utilidade: que enfatiza que a Educação Matemática deve preparar os alunos para utilizá-la em outras áreas, no caso em que ela faz parte da formação de outros cursos;
- 4) o argumento do “retrato da matemática”: que se refere à importância de a Educação Matemática estabelecer, junto aos alunos, uma compreensão acerca das várias faces da matemática, como ciência e como campo de atividade na sociedade e na cultura;
- 5) o argumento da “promoção da aprendizagem da matemática”: que afirma que resolução de problemas, Modelagem e aplicações ajudam os alunos a aprender matemática.

Dentre as tendências apresentadas pelos autores está o crescente envolvimento dos computadores na Modelagem Matemática. Eles afirmam que existe uma tendência de aumento quantitativo e qualitativo do envolvimento dos computadores na Educação Matemática no caso da Modelagem e aplicações da matemática. Mais à frente, ao apresentarem as questões e os problemas relacionados à Modelagem Matemática na

⁴ As aspas nas expressões foram colocadas pelos autores.

Educação Matemática, Blum e Niss (1991) dedicam uma seção de seu trabalho ao papel e impacto dos computadores.

Segundo esses autores, quatro aspectos são de relevância óbvia com relação ao uso de tecnologias informáticas na Modelagem Matemática:

- 1) a possibilidade de lidar com problemas mais complexos e dados mais realísticos;
- 2) a possibilidade de melhor se concentrar nos processos de Modelagem devido ao alívio que as tecnologias proporcionam aos cálculos de rotina;
- 3) a possibilidade de melhor compreender os problemas por meio de variação de parâmetros, estudos numéricos, algébricos e gráficos;
- 4) a possibilidade de lidar com problemas que podem ser inacessíveis do ponto de vista teórico para uma dada idade, por meio de simulações numéricas ou gráficas.

Alguns desses aspectos já foram destacados no caso geral da parceria entre Modelagem Matemática e tecnologias informáticas, enquanto o último, especificamente, diz respeito à Educação Matemática. Um fator interessante que esses autores acrescentam com relação à relevância da utilização de computadores em atividades de Modelagem Matemática é que *a existência de ferramentas poderosas sempre tem implicações não apenas para os métodos, mas para os objetivos e conteúdos também.*⁵ (p. 58). Eles apontam, então, mais quatro aspectos relacionados ao uso de tecnologias informáticas na Modelagem Matemática:

- 5) a desvalorização de habilidades ligadas a rotinas computacionais e a valorização de habilidades relacionadas com Modelagem como, por exemplo, a construção, aplicação e interpretação de modelos;
- 6) a possibilidade de tratar com mais facilidade certos conteúdos matemáticos que são mais próximos de Modelagem, tais como equações diferenciais e de diferenças no ensino médio, sistemas dinâmicos e teoria do caos no ensino superior etc.;
- 7) uma maior abertura para Modelagem e aplicações nos currículos;
- 8) a possibilidade e necessidade de lidar com problemas que precisam dos computadores para serem tratados.

Fazendo uma analogia com o raciocínio desenvolvido no capítulo 2 desta tese, percebemos, então, que ocorrem modificações nos objetivos e questões ligados ao uso de computadores na Modelagem Matemática, quando consideramos esse conjunto na Educação Matemática. A preocupação, na Educação Matemática, não está apenas em

⁵ Tradução de *the existence of powerful tools always has implications not only for methods but for goals and contents as well.*

facilitar os cálculos ou simular situações, há preocupações, também, com a formação dos alunos, com os conteúdos matemáticos necessários, com o currículo, entre outras.

Entretanto, como toda mudança, ela traz consigo alguns problemas e riscos, também apontados por Blum e Niss (1991):

- 1) a possibilidade de atrofia das habilidades dos alunos em aritmética e geometria;
- 2) a desvalorização de habilidades de cálculos de rotina, que até agora ajudaram os alunos a passar nas provas, ou seja, a demanda para os alunos será maior no que diz respeito à matemática;
- 3) paradoxalmente, a realidade pode ficar mais distante da sala de aula, já que os computadores apresentarão um retrato da realidade e simulações vão substituir situações reais;
- 4) *esforços e atividades intelectuais dos alunos podem ser substituídos por mero apertar de botões*⁶ (p. 59);
- 5) o caso da “matemática computacional” pode ser superestimado, especialmente a matemática discreta e numérica;
- 6) *o interesse crescente por computadores e sua crescente disponibilidade na sala de aula podem, em alguns casos, agir em detrimento da modelagem e aplicações no ensino de matemática.*⁷ (p. 59).

Alguns desses problemas e riscos têm sido temas de pesquisas na área da informática na Educação. Blum & Niss (1991) afirmam que não possuem nenhuma receita sobre como resolvê-los, mas chamam a atenção para a importância de o professor e os alunos estarem plenamente conscientes de sua existência, mesmo porque essa consciência vai ao encontro de um dos objetivos que esses mesmos autores apontam como primordiais na Educação Matemática, que é a postura crítica. Chegamos então a uma característica da perspectiva de Modelagem Matemática adotada nesta pesquisa.

⁶ Tradução de *Intellectual efforts and activities of students may be replaced by mere button pressing.*

⁷ Tradução de *the growing interest in computers and their increasingly easy availability in the classroom may, in some cases, even act to the detriment of modelling and applications in mathematics instruction.*

3.3. Retomando a Perspectiva Adotada nesta Pesquisa

Considero, nesta pesquisa, Modelagem Matemática na Educação Matemática como uma abordagem, por meio da matemática, de um problema não-matemático da realidade, ou uma situação não-matemática da realidade, escolhida pelos alunos reunidos em grupos, de tal forma que as questões da Educação Matemática Crítica embasem o desenvolvimento do trabalho.

Essa perspectiva não traz, explicitamente, nenhuma informação sobre a questão da utilização das tecnologias informáticas em uma atividade de Modelagem Matemática na Educação Matemática. Entretanto, ela tem pontos em comum com a perspectiva de Borba, Meneghetti e Hermini (1997), apresentada no capítulo 2. Segundo esses autores, *a Modelagem pode ser vista como o esforço de descrever matematicamente um fenômeno que é escolhido pelos alunos com o auxílio do professor.* (p. 63). Modelagem Matemática, entendida dessa forma, é apresentada por Borba e Penteado (2001) como um enfoque didático-pedagógico que está em *ressonância*⁸ com as novas mídias informáticas e com sua visão de conhecimento. Esses autores tomam emprestado de Lincoln e Guba (1985) o termo *ressonância* e o utilizam para realçar uma notável coerência e interdependência entre o enfoque didático-pedagógico, a mídia e a visão de conhecimento que possuem.

Borba e Penteado (2001) afirmam que as atividades com calculadoras gráficas e computadores, além de proporcionarem uma multiplicidade de representações (visual, sonora, escrita), enfatizam a *experimentação* como um enfoque fundamental em *ressonância* com sua visão de conhecimento. Segundo esses autores, *o enfoque experimental explora ao máximo as possibilidades de rápido feedback das mídias informáticas e as facilidades de geração de inúmeros gráficos, tabelas e expressões algébricas.* (p. 43). Esse enfoque tem sido utilizado em turmas da disciplina Matemática Aplicada do primeiro ano da graduação em Biologia da UNESP de Rio Claro. Nas atividades, os alunos, divididos em grupos, fazem experimentações e investigações com as calculadoras gráficas ou computadores, geram várias conjecturas e tentam construir argumentos para validá-las ou refutá-las.

O enfoque experimental estabelece, assim, o que Skovsmose (2000b) denomina *cenário para investigação*. Segundo esse autor,

⁸ O termo *ressonância*, utilizado pela física, traz a idéia de transferência de energia de um sistema para outro, indicando que não existe apenas uma harmonia entre os sistemas mas uma interferência recíproca ou transformação entre eles. Essa transferência de energia pode vir a causar a destruição de um dos sistemas, mas como toda metáfora é limitada, acredito que Borba e Penteado (2001) utilizam apenas a parte interativa pressuposta pelo termo *ressonância*.

Um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações. O convite é simbolizado pelo “O que acontece se...?” do professor. O aceite dos alunos ao convite é simbolizado por seus “Sim, o que acontece se...?”. Dessa forma, os alunos se envolvem no processo de exploração. O “Por que isto...?” do professor representa um desafio e os “Sim, por que isto...?” dos alunos indicam que eles estão encarando o desafio e que estão procurando por explicações. (...) No cenário para investigação, os alunos são responsáveis pelo processo. (p. 73).

É importante realçar que, no enfoque experimental, o “convite” à formulação de questões não precisa ser feito, necessariamente, pelo professor: os próprios alunos podem ter a iniciativa de formular as questões e desafiá-las. Dessa forma, esse enfoque estimula, segundo Borba e Penteado (2001), a utilização de problemas abertos e, daí, estabelece-se a sinergia entre a Modelagem – um enfoque que enfatiza a proposição de problemas, ou situações, e pesquisa por parte dos alunos – e uma mídia que facilita tal atividade.

Essa sinergia, por outro lado, leva-nos à visão de conhecimento que Borba e Penteado (2001) sustentam. Essa visão destaca a importância das diferentes mídias, como a oralidade, a escrita e a informática, na geração de novos conhecimentos. Apoiando-se em Lévy (1993), Borba e Penteado (2001) entendem a informática como

uma nova extensão de memória, com diferenças qualitativas em relação às outras tecnologias da inteligência e permite que a linearidade de raciocínios seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação, e em uma “nova linguagem” que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea. (p. 46).

Esses autores entendem que a produção de conhecimento depende do uso de determinada mídia. Eles utilizam a metáfora da unidade coletiva seres-humanos-com-mídias como o produtor do conhecimento. A idéia dessa metáfora é enfatizar a importância, tanto das mídias quanto dos seres-humanos, na produção de conhecimento, o que já ocorria no caso das mídias oralidade e escrita, mas que só pôde ser percebida por estarmos vivendo, agora, o surgimento dessa nova mídia.

A busca de ressonância entre a visão de conhecimento e o enfoque didático-pedagógico, diante dessa concepção sobre a produção de conhecimento, conduz a uma maneira diferente de pensar sobre a questão educacional. É interessante destacar, neste ponto, que um dos problemas apontados por Blum e Niss (1991) – a atrofia das habilidades dos alunos em aritmética e geometria – é tratado por Borba e Penteado (2001) de uma outra forma. Para esses autores, é mais importante analisar as possibilidades e dificuldades que se apresentam a partir do uso da informática na Educação do que reduzir a discussão às melhoras ou pioras da prática educativa quando se utilizam tais tecnologias. Este posicionamento está coerente com a metáfora seres-humanos-mídias como responsáveis pela produção de conhecimento, pois as habilidades, que foram atrofiadas, segundo Blum e Niss (1991), eram aquelas relacionadas à mídia escrita. Sendo assim, com a incorporação de novas mídias ao ser que produz conhecimentos, o que parecia ser atrofia faz parte, de fato, de uma transformação das habilidades.

Em um outro trabalho, Borba (2000) afirma que, *ao utilizar essa metáfora para pensar as práticas educativas, é preciso pensar na mudança do conhecimento produzido por essas novas unidades, a questão epistemológica, e na forma de desenvolver novas práticas para esses sistemas seres-humanos-mídias, a questão educacional.* (p. 10). Trata-se, então, da busca da ressonância entre a questão epistemológica e a educacional.

Seguindo esse raciocínio, o autor afirma que *hoje é bem mais importante saber gerar um problema, delimitá-lo para que possa ser resolvido, do que saber uma técnica que resolva todos os problemas de uma dada classe de problemas matemáticos, por exemplo.* (p. 10). Vem daí também a sua conclusão sobre a ressonância entre a perspectiva de Modelagem que ele apresenta e a produção de conhecimento pelo ser cognitivo seres-humanos-com-mídias. Posso extrapolar um pouco essa conclusão do autor para afirmar que, por trás dela, está a idéia de que o conhecimento se produz a partir de estabelecimentos de problemas, questionamentos, e busca de soluções. E que, diante de sua preocupação com a *cidadania*, é desejável que o processo de produção de conhecimento seja levado para a sala de aula, responsabilizando o aluno por participar de todo o processo, desde a proposição do problema até sua(s) solução(ões).

A concepção de *cidadania* de Borba (2000) reivindica a democratização do acesso à tecnologia, visto que todo cidadão tem o direito de “ler o mundo” por meio da nova linguagem (imagens, sons, escrita etc.) associada aos computadores. E ele acrescenta que essa leitura deve ser entendida como a concepção de leitura crítica do mundo de Paulo Freire. Segundo Freire (1967), a criticidade *implica na apropriação crescente pelo homem de sua posição no contexto. Implica na sua inserção, na sua integração, na representação objetiva da realidade.* (p. 61). Ele considera que a atitude crítica é a única maneira de os

seres humanos realizarem sua integração, superando a situação de simples acomodação na sociedade. Freire (1967) fala também na *transitividade crítica, a qual chegaríamos com uma educação dialogal e ativa, voltada para a responsabilidade social e política, e que se caracteriza pela profundidade na interpretação dos problemas*. (p. 61). Essa postura transitivamente crítica implica, segundo esse autor, numa volta à matriz verdadeira da democracia.

Borba e Penteado (2001) reforçam essa reivindicação da democratização do acesso à tecnologia, ao questionarem a postura que coloca a importância do uso da informática na Educação na preparação dos alunos para o mercado de trabalho. Eles entendem que *uma visão mais ampla da educação deve subordiná-la à noção de cidadania e que devemos lutar para que a noção sobre o que é cidadão inclua os deveres e os direitos não subordinados aos interesses apenas das grandes corporações*. (p. 16).

Retornamos, então, a algumas características da Educação Matemática Crítica apresentadas por Skovsmose (2000a). Como já apontei no capítulo 2, o papel da Educação na preparação para cidadania e participação na vida social e política, a matemática como um meio de identificar e analisar aspectos críticos da vida social, entre outros, são algumas das preocupações da Educação Matemática Crítica.

Fecha-se, assim, mais um elo de compreensão da perspectiva de Modelagem Matemática adotada nesta pesquisa. Repito-a aqui para auxiliar nessa compreensão: uma abordagem, por meio da matemática, de um problema não-matemático da realidade, ou uma situação não-matemática da realidade, escolhida pelos alunos reunidos em grupos, de tal forma que as questões da Educação Matemática Crítica embasem o desenvolvimento do trabalho.

Essa perspectiva, por considerar as questões da Educação Matemática Crítica e por responsabilizar os alunos pela escolha da situação a ser abordada, está em ressonância com as preocupações referentes à cidadania apontadas por Borba (2000) e Borba e Penteado (2001). Como já afirmei, ela também está em ressonância com a visão de conhecimento apresentada por esses autores, apesar de não se referir, explicitamente, à questão das mídias.

Restaria, então, compreender a ênfase na reunião dos alunos em grupos para o desenvolvimento dos trabalhos de Modelagem. Para tal, volto-me novamente para a pergunta diretriz desta pesquisa: Que discussões ocorrem, e como elas ocorrem, em um ambiente de ensino e aprendizagem de Cálculo no qual a Modelagem Matemática e as tecnologias informáticas estão presentes?. A importância dos grupos está na constituição de

uma situação que propicie as discussões no ambiente de ensino e aprendizagem de Cálculo. Discussões, por exemplo, sobre o papel da matemática na sociedade, sobre as questões filosóficas acerca da matemática, as discussões matemáticas, as relacionadas com o problema ou situação escolhida pelo grupo, entre várias outras. Além disso, como já enfatizei no fim do capítulo 2, devemos estar atentos para a maneira como essas discussões ocorrem, ou seja, para o estilo da comunicação que acontece entre os alunos, o que nos remete para o tema do próximo capítulo: Comunicação e Educação Matemática.

Capítulo 4

Comunicação e Educação Matemática

O foco desta pesquisa são as discussões que ocorrem entre alunos de Cálculo desenvolvendo projetos de Modelagem Matemática em ambientes computacionais. Nos capítulos 2 e 3, busquei uma abordagem teórica para Modelagem Matemática e tecnologias informáticas na Educação Matemática. Resta-me, portanto, considerar a questão das “discussões”. O termo sugere, em relação à educação, uma referência à comunicação que acontece entre as personagens de um ambiente educacional. Sendo assim, este capítulo é dedicado à comunicação na Educação Matemática, tendo como objetivo tematizar, de forma inicial, o que vem a ser “discussão” e apresentar possíveis leituras dessa discussão na Educação Matemática.

Afirmo que a abordagem tem um formato inicial porque reconheço a existência de outras teorias que tratam do assunto, mas que, entretanto, não serão consideradas aqui. Procedi desta forma pois, como já descrevi no capítulo 1, a questão das discussões só foi incorporada à pesquisa em um estágio relativamente avançado, depois da realização do trabalho de campo. Esse fato teve consequências também na opção feita por determinados autores que tratam do tema, já que os estudos que vinha realizando sobre Modelagem Matemática e tecnologias informáticas na Educação Matemática influenciaram a escolha de teorias sobre comunicação e Educação Matemática.

Feita essa ressalva, inicio uma primeira abordagem sobre comunicação na seção 4.1.. A seguir, considero as discussões matemáticas na seção 4.2., seguida do tema negociação de significado na seção 4.3.. Finalizo o capítulo tratando de diálogo e discussão na Educação Matemática, na seção 4.4..

4.1. Comunicação: uma Primeira Abordagem

Esta primeira abordagem sobre o tema “comunicação” terá um caráter menos teórico, por tratar de expressões de uso difundido em nosso cotidiano. Dentre as várias acepções listadas pelo dicionário Aurélio (Ferreira, 2000) para o verbete “comunicação”, destaco as duas seguintes:

1. *Ato ou efeito de emitir, transmitir e receber mensagens por meio de métodos e/ou processos convencionados, quer através da linguagem falada ou escrita, quer de outros sinais, signos ou símbolos, quer de aparelhamento técnico especializado, sonoro e/ou visual;*
2. *a capacidade de trocar ou discutir idéias, de dialogar, de conversar, com vista ao bom entendimento entre pessoas.*

Comunicação, dessa forma, diz respeito a uma maneira de interação entre pessoas, seja através da fala, da escrita, de gestos ou de algum outro meio, com o objetivo de compartilhar algo. Quero destacar três verbos nas acepções apresentadas acima: conversar, discutir e dialogar, assim como os respectivos substantivos associados a eles – conversa, discussão e diálogo. Cada um desses termos traz um estilo de fala associado a ele e são comumente utilizados em nosso cotidiano, como exemplifico a seguir.

A comunicação pode ocorrer por meio de uma conversa entre pessoas. A palavra “conversa” é a que tem, dentre as três destacadas anteriormente, um menor comprometimento ou envolvimento das pessoas que dela participam. Podemos, por exemplo, conversar despreocupadamente sobre as condições do tempo com algum desconhecido em um ponto de ônibus, enquanto este não chega. Estaremos, assim, “jogando conversa fora”, o que denota o pouco grau de importância atribuído a tal conversa. Na sala de aula, quando o professor reclama que algum aluno conversa muito, ele pode estar querendo destacar a maior importância do conteúdo que está sendo “discutido” pela turma em detrimento da importância da “conversa” do aluno. Devo ressaltar, entretanto, que essa compreensão mais comum do termo “conversa” não é a única, já que podemos falar, por exemplo, de conversas sérias e importantes.

Quando utilizamos a palavra “discussão” em uma situação do tipo “houve uma terrível discussão entre os vizinhos por causa da música alta na casa de um deles”, entendemos que os vizinhos brigaram, falaram alto e talvez até se xingaram devido a um desentendimento, compreendido aqui como falta de acordo. Nesse caso, a palavra discussão carrega um sentido negativo, pois as pessoas que discutem falam muito, mas se entendem pouco. Pode haver, nesse caso, uma contradição com a compreensão do termo comunicação apresentada anteriormente, já que aquela destaca a busca de um *bom entendimento entre pessoas*. Entretanto, no exemplo apresentado, apesar de os vizinhos não concordarem com relação ao volume da música, aquele que reclama pode deixar clara a sua mensagem: não quer que a música seja tocada em tão alto volume. Sendo assim, podemos dizer que há uma comunicação entre eles, mesmo que ela não ocorra de forma harmoniosa.

A palavra “discussão” pode ter uma compreensão mais pacífica, quando as pessoas envolvidas têm o objetivo de debater alguma questão em busca de um entendimento. Nesse caso, estão ligados a ela os termos *examinação*, *investigação* e *questionamento* (Ferreira, 2000).

Com relação à palavra “diálogo”, temos a seguinte acepção: *troca ou discussão de idéias, de opiniões, de conceitos, com vista à solução de problemas, ao entendimento ou à harmonia* (Ferreira, 2000). Então, quando duas ou mais pessoas dialogam, elas buscam algum encaminhamento para uma situação problemática que têm em comum.

Posso perceber, assim, uma grande proximidade, pelo menos da forma como estou tratando esses termos até esse momento, entre *discussão* e *diálogo*. Em ambos existe o objetivo de buscar algum entendimento por meio de *investigação* ou *troca de idéias*.

Esses dois termos – *discussão* e *diálogo* – estão bem próximos da idéia inicial que eu tinha ao buscar as discussões dos alunos desenvolvendo projetos de Modelagem Matemática em ambientes computacionais. Não que não seja interessante *conversar* descompromissadamente sobre matemática ou sobre problemas da realidade, mas meu interesse nesta pesquisa é buscar estilos de comunicação nos quais exista um maior grau de envolvimento dos alunos. Sendo assim, considerarei esses dois termos na Educação Matemática.

4.2. Discussões Matemáticas

Ao buscar, na literatura, trabalhos que tratam de *discussões*, encontrei em Bussi (1998) a questão das *discussões matemáticas*. Essa autora, utilizando uma perspectiva vygotskiana, vê as discussões matemáticas como uma parte representativa do drama protagonizado por professor e alunos envolvidos em alguma atividade matemática na sala de aula. Ela destaca que esses atores têm papéis diferentes, de acordo com as diferentes funções que desempenham na sala de aula, embora estejam engajados em uma mesma atividade indivisível.

Bussi (1998), buscando uma abordagem para discussões matemáticas que leve em conta tanto a responsabilidade do professor quanto a dos alunos no processo de ensino e aprendizagem, utiliza a metáfora musical de diferentes vozes articuladas em polifonia para simbolizar tais discussões. Nessa metáfora, o termo *vozes* é usado para significar *uma forma de falar e pensar que representa uma perspectiva individual e [ao mesmo tempo] a*

*condição de membro de uma categoria cultural e social particular.*¹ (p. 17). Nesse sentido, tanto o professor quanto os alunos não falam por si só, mas trazem, em suas falas, as suas experiências em outros contextos sócio-culturais. As vozes dos diferentes atores se encontrariam, então, de forma harmoniosa, naquela atividade matemática em comum.

Acredito que a idéia apresentada por Bussi (1998) para *discussões matemáticas* poderia ser tratada, de forma mais geral, como *discussões* na Educação Matemática. Afirmo isso porque, apesar de o contexto considerado pela autora, no qual as discussões ocorreram, ter sido uma sala de aula de matemática, nem sempre as discussões se restringiram a essa disciplina, como podemos verificar em algumas situações que ela examina. Em uma dessas situações, por exemplo, os alunos deveriam descrever como tinham organizado a atividade proposta no dia anterior: desenhar o canto da sala na qual tinham aulas. Na discussão que aconteceu, nem sempre foi possível distinguir o que era matemática do que não era.

No caso da pesquisa relatada nesta tese, pelo interesse no trabalho de alunos desenvolvendo projetos de Modelagem Matemática em ambientes computacionais, é desejável que a atenção não se restrinja às discussões matemáticas. Além de haver a dificuldade de destacar a matemática nas discussões, há também o desejo de considerar as relações dessa disciplina com a realidade, de uma forma mais geral, como já foi apontado nos capítulos 2 e 3. Naqueles capítulos, chamei a atenção para a importância de se discutir o papel da matemática na sociedade, aspectos filosóficos da matemática, questões matemáticas abordadas por meio da informática, entre várias outras. Como também foi apontado naqueles capítulos, a parceria entre Modelagem Matemática e tecnologias informáticas é um ambiente fértil para desencadear tais discussões e, se eu restringisse meu interesse às discussões matemáticas dos alunos, estaria contradizendo o posicionamento teórico que venho adotando nesta pesquisa.

Colocando-me dessa forma, abro a possibilidade para que várias (e talvez divergentes) frentes de discussões sejam consideradas e analisadas no contexto da pesquisa. Os alunos, diante de uma atividade proposta pelo professor, como aquela do contexto no qual os dados desta pesquisa foram coletados, podem não saber qual é sua intenção. Em outras palavras, quando várias frentes são possíveis, é importante que o significado do que se fala, do que se faz e do que se pretende seja negociado. Consideremos então a negociação de significado.

¹ Tradução de ... *a form of speaking and thinking that represents an individual perspective and the membership of a particular cultural and social category.*

4.3. Negociação de Significado

O conceito de negociação de significado tem sido utilizado por interacionistas como Voigt (1994). Segundo esse autor, os objetos, eventos e conhecimentos, em uma sala de aula de matemática, são concebidos de formas diferentes pelas pessoas envolvidas e, como consequência, constroem, individualmente, diferentes significados matemáticos. Um significado considerado-como-compartilhado² pode ser construído por meio da negociação de significados entre professores e alunos no curso das interações que ocorrem na sala de aula.

Apesar de não criticar explicitamente as idéias apresentadas no parágrafo anterior, Waschescio (1998) critica o uso que os interacionistas fazem de tais idéias, afirmando que eles não esclarecem como esses processos sociais de negociação de significado contribuem para o desenvolvimento conceitual de cada indivíduo e, conseqüentemente, para a aprendizagem. Essa discussão, por não fazer parte do foco de interesse desta pesquisa, não será estendida aqui. Ressalto, entretanto, que não utilizarei as teorias interacionistas acerca da aprendizagem, restringindo-me apenas às suas idéias, apresentadas acima, sobre negociação de significados.

Dando uma conotação diferente para essa noção, Christiansen (1997) apresenta a idéia de que uma negociação de significado pode ser também uma negociação de tarefa. Ela afirma que significado sempre diz respeito a um contexto particular e que, *portanto, a negociação de significado pressupõe uma compreensão da situação considerada-como-compartilhada*.³ (p. 1).

Nesse trabalho, a autora considera a negociação de significado entre os alunos de um grupo e entre o grupo e a professora, em um primeiro contato com uma atividade de Modelagem Matemática. Durante o desenvolvimento da atividade, os alunos questionaram que perspectiva de Modelagem Matemática deveriam utilizar, por não terem chegado a um acordo sobre em que extensão poderiam considerar informações além das fornecidas pela atividade. Christiansen (1997) conclui que, enquanto faziam tais questionamentos, os alunos questionavam, simultaneamente, os objetivos de tal atividade: ela deveria ser abordada

² Utilizarei esta expressão como uma tradução de *taken-to-be-shared*. De acordo com o glossário apresentado pelos também interacionistas Cobb e Bauersfeld (1995), esse conceito significa *entendido (pelo menos em seu uso comum) por todos os membros de uma cultura (e.g. uma sala de aula) por meio de negociação mútua. (...) A questão é que as concepções individuais se tornaram compatíveis de tal forma que os indivíduos interagem como se eles atribuíssem o mesmo significado aos objetos (...)*. (p. 297).

³ Tradução de *therefore, the negotiation of meaning presupposes a taken-to-be-shared understanding of the situation*.

como um exercício ou como um problema⁴? A autora acrescenta, ainda, que *a análise indica que os alunos [estavam] usando as discussões a respeito de perspectivas de modelagem para determinar o objetivo da atividade.*⁵ (p. 14).

Christiansen (1997) aponta vários níveis de desacordo ocorridos na situação analisada, mas não percebidos pela professora. A autora avalia que, se a professora tivesse percebido esses desacordos, ter-se-ia estabelecido uma ótima oportunidade para que os alunos entrassem em uma discussão para esclarecê-los e, talvez, para analisar a compreensão sobre o processo de Modelagem.

Na seção anterior afirmei que, devido aos interesses e contexto da presente pesquisa, os significados das atividades poderiam não ser compartilhados por aqueles que as desenvolveram e seria importante a negociação de significado. Acredito que o trabalho de Christiansen (1997) vem confirmar essa minha afirmação.

A ligação entre negociação de significado e negociação de tarefa é considerada, também, por Alrø e Skovsmose (1996a). Esses autores, quando falam em negociações de significados, referem-se a significados dos conceitos e significados das tarefas, já que o significado do conceito, ou de uma frase qualquer, é estabelecido de acordo com seu uso em determinada situação e segundo as perspectivas das pessoas que se comunicam. Para os autores, o significado matemático não é transmitido do professor para o aluno, nem é construído autonomamente por cada indivíduo: *o significado matemático emerge entre os participantes na interação do processo de ensino e aprendizagem.*⁶ (p. 6).

Alrø e Skovsmose (1996a) afirmam que é impossível haver negociação de significado entre duas partes se uma delas domina ou tem controle sobre a outra e que, *para falar sobre negociação, as duas partes devem se aceitar como iguais ou, no mínimo, elas têm de respeitar, mutuamente, suas perspectivas.*⁷ (p. 6). Dessa forma, é importante que haja uma *negociação de perspectivas*.

⁴ No estudo em questão, um exercício é aquele do tipo padrão, nos quais os alunos só se baseiam nas informações (ou dados) contidas em seu texto para resolvê-lo. Já em um problema, conhecimentos extras, que não estão no texto do exercício, podem ser considerados.

⁵ Tradução de *the analysis indicates that the students are using their discussion concerning modeling perspectives to determine the goal for their activity.*

⁶ Tradução de *Mathematical meaning rather emerges between the participants in the interaction of the teaching and learning process.*

⁷ Tradução de *in order to talk about negotiation, the two parties must accept each other as equals, or at least they have to respect each others' perspectives.*

As *perspectivas*, segundo Alrø e Skovsmose (1996a), pertencem ao *background*⁸ de uma comunicação. Normalmente, elas não são apresentadas de forma explícita, mas são a fonte dos significados.

*A perspectiva é decisiva nas coisas que escolhemos ver, ouvir e entender em uma conversa e ela se manifesta por meio do nosso uso da linguagem, nas coisas sobre as quais escolhemos falar ou não e na forma como nos entendemos.*⁹ (p. 5-6).

Desse modo, para que as pessoas se comuniquem, é importante que elas entendam ou aceitem, mutuamente, as perspectivas, ou seja, que elas compartilhem as perspectivas. Para compartilhar perspectivas é necessário que estas sejam negociadas e *negociar perspectivas parece pressupor que seremos capazes de conversar sobre como os conceitos que usamos adquirem seus significados.*¹⁰ (p. 6), o que se constitui uma tarefa difícil.

Em uma sala de aula de matemática, pode acontecer que a perspectiva do professor domine a dos alunos quando, por exemplo, ele corrige as atividades desses últimos, apontando o que está errado e orientando-os a refazer o exercício. Uma outra possibilidade é que professor e alunos compartilhem a perspectiva de que o objetivo das atividades seja dominar técnicas de cálculo. Há, também, a possibilidade de que professor e alunos tenham perspectivas diferentes, sem que, por algum momento, haja o domínio de uma sobre a outra, estabelecendo-se assim obstáculos para a comunicação. Segundo Alrø e Skovsmose (1996a), para que as negociações de perspectivas e de significados sejam possíveis, professor e alunos devem estar conscientes da proposta educacional que está acontecendo, de tal forma que os alunos tenham a oportunidade de fazer parte do processo: *negociação significa participar ativamente do processo.*¹¹ (p. 6).

Havendo, então, a aceitação e o respeito mútuo das diferentes perspectivas, é possível que haja uma negociação de significados entre professor e alunos e, por meio do diálogo, que cada um possa avaliar sua compreensão das falas dos outros. Essa compreensão pode ser aprimorada por meio da metacomunicação, que é a comunicação

⁸ Utilizarei essa palavra em inglês, devido a seu uso de certa forma difundido na comunidade de educadores, para me referir ao conjunto dos conhecimentos, experiência etc., de uma pessoa ou de um grupo de pessoas.

⁹ Tradução de *The perspective is decisive of the things one chooses to see, to hear, and to understand in a conversation, and it manifests itself through our use of language, in the things we choose to talk about and not to talk about, and in the way we understand each other.*

¹⁰ Tradução de *to negotiate perspectives seems to presuppose that we shall be able to talk about how the concepts we use acquire their meanings.*

¹¹ Tradução de *Negotiation means actively participating in the process.*

sobre a comunicação em processo, com o objetivo de se certificar se há uma compreensão mútua.

Quero enfatizar, nos processos de negociação de perspectivas e de significados apresentados por Alrø e Skovsmose (1996a), a importância do diálogo entre professor e alunos e entre os alunos. É por meio do diálogo que os participantes de um ambiente educacional podem negociar suas perspectivas, buscar compreendê-las e compartilhá-las, para negociar os significados das atividades, dos conceitos, dos resultados etc.. Entretanto, Alrø e Skovsmose (1996a) têm uma concepção particular de diálogo, que será considerada na próxima seção, juntamente com uma retomada do termo discussões.

4.4. Diálogo e Discussão na Educação Matemática

Uma primeira abordagem do termo diálogo foi feita na seção 4.1. como uma troca de idéias ou uma discussão visando ao entendimento sobre alguma questão ou à solução de algum problema. Essa é uma visão de diálogo ligada a seu uso cotidiano.

Alrø e Skovsmose (2001) utilizam o termo diálogo como uma conversa com certas qualidades, que são especificadas ao longo de seu estudo. O interesse desses autores está nos padrões de comunicação em uma sala de aula de matemática e, especificamente, eles buscam situações nas quais ocorrem diálogos, de acordo com a concepção que eles têm desse termo. Eles consideram o diálogo como o estilo de comunicação característico dos *cenários para investigação* e contrapõem esse estilo àquele presente na situação por eles denominada de *absolutismo da sala de aula*.¹² Consideremos, então, esses dois estilos de comunicação.

Alrø e Skovsmose (1996a) fazem um paralelo entre o absolutismo na filosofia da matemática e o *absolutismo da sala de aula*. A visão absolutista da matemática, em termos filosóficos, é aquela que considera que os conceitos matemáticos sejam verdades absolutas e, como tal, não podem ser questionados¹³. Na sala de aula de matemática, o absolutismo é traduzido na crença de que é possível que os alunos alcancem a verdade matemática absoluta e a forma de alcançar tal verdade é a correção dos erros.

¹² Skovsmose (2000b) e Alrø e Skovsmose (2001) contrapõem os *cenários para investigação* também ao *paradigma do exercício*. Esse último tem muitos aspectos em comum com o *absolutismo da sala de aula*. No caso do paradigma do exercício, esses autores enfatizam a organização das atividades na sala de aula de matemática, enquanto no absolutismo da sala de aula, a ênfase está no estilo de comunicação entre alunos e professor. Diante dos objetivos desta pesquisa, continuarei utilizando a expressão absolutismo da sala de aula.

¹³ O leitor pode ter uma visão um pouco mais detalhada da concepção absolutista da matemática na subseção 2.3.2. do capítulo 2 desta tese, no qual uma das escolas absolutistas da filosofia da matemática, o formalismo, foi foco de atenção.

Tendo a correção de erros como objetivo, o estilo de comunicação característico do absolutismo da sala de aula é repleto de expressões do tipo: *Este cálculo está errado!* – erro relacionado com o resultado de algum algoritmo, segundo Alrø e Skovsmose (1996a); ou *Você não deveria somar esses números mas sim subtraí-los!* – erro relacionado com o algoritmo usado; entre outros. O estilo de comunicação na sala de aula é caracterizado, de acordo com esses autores, *por uma relação assimétrica entre professor e alunos*.¹⁴ (p. 4): é o professor que tem o controle sobre os acontecimentos dentro da sala. Nesses contextos acontece o que Alrø e Skovsmose (1996a) denominam *padrão sandwich de comunicação*: o professor faz uma pergunta, cuja resposta ele conhece de antemão:

— *Qual é a derivada de $f(x)=\sin(x)$?*

O aluno responde:

— *$\cos(x)$.*

E o professor faz a avaliação:

— *Está certo, muito bem!*

Esse estilo fortalece a idéia de que toda questão matemática tem uma resposta correta. Ele é contraposto por Alrø e Skovsmose (2001) com o estilo de comunicação característico de um *cenário para investigação* (Skovsmose, 2000b). Como já afirmei no capítulo 3 desta tese, segundo esse autor,

Um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações. O convite é simbolizado pelo “O que acontece se...?” do professor. O aceite dos alunos ao convite é simbolizado por seus “Sim, o que acontece se...?”. Dessa forma, os alunos se envolvem no processo de exploração. O “Por que isto...?” do professor representa um desafio e os “Sim, por que isto...?” dos alunos indicam que eles estão encarando o desafio e que estão procurando por explicações. (...) No cenário para investigação, os alunos são responsáveis pelo processo. (p. 73).

Skovsmose (2000b) enfatiza que o cenário para investigação só se estabelece quando o convite à participação no cenário é aceito pelos alunos. A aceitação do convite, segundo esse autor, pode depender da natureza do cenário, da maneira como o convite é feito pelo professor e, certamente, do interesse dos alunos. Segundo Alrø e Skovsmose (2001), um processo de investigação não pode ser uma atividade forçada e, além disso,

¹⁴ Tradução de (...) *by an asymmetrical relationship between teacher and students.*

deve ser aberto, ou seja, os acontecimentos não podem ser planejados antecipadamente. Os alunos, aceitando o convite, tornar-se-ão proprietários e participantes ativos do processo de investigação. Assim, como um convite pode ser aceito, ou não, pelos alunos, é importante que o professor procure saber quais são as *boas razões* (Alrø & Skovsmose, 1996b) que eles possuem para aceitá-lo, ou não.

Segundo Alrø e Skovsmose (1996b), as *boas razões dos alunos* são motivos seriamente considerados por eles para procederem de determinada maneira. Elas podem ser *razões matemáticas*, quando o aluno argumenta utilizando seu conhecimento e experiência prévia com a matemática; podem ser *razões contextuais*, se o aluno leva em conta o contexto no qual algum problema se localiza e busca ali alguma razão para seu procedimento; as razões podem ser *organizacionais*, no caso de o aluno considerar que ele está em uma escola e que esta pressupõe certas maneiras de agir; e, finalmente, existem as *razões pessoais*, que se referem a experiências e *backgrounds* do aluno, que influenciam seus interesses e maneira de pensar.

A existência de vários tipos de boas razões dos alunos – e não podemos garantir que os apresentados acima esgotam todas as possibilidades – mostram a complexidade de se compreender os motivos que levam os alunos a aceitar, ou não, um convite para participarem de um cenário para investigação. Além disso, como Alrø e Skovsmose (1996b) nos alertam, uma boa razão nem sempre é aparente. *Portanto, ela tem que ser revelada e (re)formulada por meio de um diálogo na sala de aula.*¹⁵ (p. 32). Esses autores afirmam, também, que nem sempre as razões podem ser reconstruídas em um único caminho e os alunos podem possuir uma gama de razões para interpretar algum problema de determinada maneira. *Desta forma, há uma estreita conexão entre as boas razões do aluno e suas perspectivas.*¹⁶ (p. 32). E, segundo Alrø e Skovsmose (1996a), é por meio do diálogo que se dá a negociação de perspectivas e de significados.

Podemos perceber, assim, a importância do diálogo nas idéias de Alrø e Skovsmose: ele é o estilo de comunicação característico dos *cenários para investigação*, é primordial na busca das *boas razões* dos alunos para aceitarem ou não um convite à participação em um cenário para investigação, é por meio do diálogo que ocorrem as *negociações de perspectivas e de significados* em uma sala de aula de matemática. Em outras palavras, quando o diálogo é o estilo de comunicação em um ambiente educacional, os alunos se assumem como participantes ativos de sua Educação (Matemática).

¹⁵ Tradução de *therefore it has to be revealed and (re)formulated through a classroom dialogue (...)*

¹⁶ Tradução de *In this way there is a close connection between the student's good reasons and his perspectives.*

A partir das idéias de Alrø e Skovsmose apresentadas até agora, é possível perceber características da concepção de diálogo desses autores. Para eles, o diálogo não é apenas uma maneira de analisar alguma situação ou problema, ele é, também, uma forma de interação e comprometimento entre as pessoas. Nesse sentido os autores baseiam-se em Freire (1970), segundo o qual, ao entendermos o diálogo como um fenômeno humano, logo o associamos à *palavra*. Entretanto, para Freire (1970), *palavra* possui duas dimensões: ação e reflexão, que interagem de forma tão radical que a falta de uma delas implica o prejuízo da outra: sem ação, a palavra se torna verbalismo; sem reflexão, a palavra se torna ativismo. Dessa forma, a palavra verdadeira é aquela que traz, em si, ação e reflexão. Para Freire (1970),

A existência, porque humana, não pode ser muda, silenciosa, nem tampouco pode nutrir-se de falsas palavras, mas de palavras verdadeiras, com que os homens transformam o mundo. Existir, humanamente, é pronunciar o mundo, é modificá-lo. O mundo pronunciado, por sua vez, se volta problematizado aos sujeitos pronunciantes, a exigir deles novo pronunciar. (p. 78) (grifos do autor).

O diálogo é, então, segundo Freire (1970), o encontro entre os homens, mediado pelo mundo, para pronunciá-lo e, daí, modificá-lo. E, modificando-o, constituir novos problemas que exigem novo pronunciar e, assim, sucessivamente. Esse pronunciar o mundo para modificá-lo não é privilégio de alguns homens, mas, direito de todos.

A concepção de diálogo de Freire (1970) pressupõe a existência de *amor* entre os homens: o ato de amor está em comprometer-se com a causa de sua libertação. Ela pressupõe, também, a *humildade* daqueles que dialogam: os homens devem ser companheiros na pronúncia do mundo e não é possível haver diálogo se um se acha mais capaz que os outros. É necessário, também, que haja *fé* nos homens, em sua vocação de ser mais. Assim, *ao fundar-se no amor, na humildade, na fé nos homens, o diálogo se faz uma relação horizontal, em que a confiança de um pólo no outro é consequência óbvia.* (p. 81) (grifo do autor). Finalmente, para Freire (1970), é impossível a existência do diálogo se não há um *pensar crítico* entre os sujeitos:

Este é um pensar que percebe a realidade como processo, que a capta em constante devenir e não como algo estático. Não se dicotomiza a si mesmo na ação. “Banha-se” permanentemente de temporalidade cujos riscos não teme. (p. 82).

Assim, segundo Freire (1970), o diálogo se faz por meio do pensamento crítico e, simultaneamente, gera esse pensamento. A comunicação entre os sujeitos só se faz por meio do diálogo e, sem esta, não há verdadeira Educação (educação crítica).

Chegamos, então, semelhantemente a Alrø e Skovsmose (2001), à conclusão que a fundamentação para a Educação (Matemática) crítica é o diálogo, da forma como este é concebido por Freire (1970). Resta-me, então, esclarecer a relação entre *discussões*, termo que aparece na pergunta diretriz desta pesquisa, e *diálogo*, segundo a concepção que apresentei neste capítulo.

Alrø e Skovsmose (2001), quando apresentam uma discussão teórica sobre *diálogo*, alertam sobre o fato de que este é diferente de *discussão*. Segundo esses autores, *discussão*, em sua origem, no latim, significa quebrar em pedaços, enquanto *diálogo* objetiva a construção de um novo significado em um processo colaborativo de investigação. Poderíamos pensar, então, que enquanto a primeira quebra (e destrói) esse último constrói. Entretanto, esses mesmos autores utilizam em seu trabalho o verbo *discutir* de uma forma que não traz sentido algum de destruição. Por exemplo, eles *discutem* um modelo teórico proposto por eles e *discutem* a concepção de aprendizagem de matemática que possuem.

Acredito, então, que *discussão* pode ser entendida como uma forma de analisar alguma situação para examiná-la, compreendê-la, mas também como um primeiro passo em direção a um diálogo. Faço uma analogia, então, com a noção de negociação de perspectivas apresentada por Alrø e Skovsmose (1996a): é importante que as pessoas que comunicam busquem compreender e negociar suas perspectivas, ou seja, que discutam suas experiências, seu conhecimento etc., para que juntas, dialogando, construam significados.

Entretanto, estabelecer um limite bem definido entre discussão e diálogo não é tarefa fácil. Nos dados desta pesquisa, por exemplo, os alunos podem analisar situações e construir significados de uma forma tão interconectada, que seria difícil precisar quando se trata de uma discussão ou de um diálogo. Minha postura será, assim, a de analisar a comunicação que ocorre entre eles, podendo acontecer de ela se constituir em discussões ou diálogos, e aceitar o convite feito por Alrø e Skovsmose (2001) de buscar as possibilidades educacionais (mais especificamente, as possibilidades de comunicação em ambientes educacionais) proporcionadas pelas discussões (ou diálogos). Apontar as possibilidades, entretanto, não significa avaliar os dados como deficientes ou faltosos. Ao contrário, pretendo enfatizar como as situações e discussões são ricas em potencialidades, abrindo possibilidades para diálogos e questões pertinentes à Educação Matemática Crítica. Essa proposta pode parecer um pouco obscura agora, mas prefiro deixar que ela se

esclareça à medida que estiver sendo executada no capítulo 8, quando realizarei uma análise dos dados da pesquisa apoiada na literatura.

Entretanto, antes de iniciar a apresentação dos dados, tratarei, no próximo capítulo, de questões referentes a metodologia de pesquisa para, em seguida, apresentar o contexto no qual os dados foram coletados.

Capítulo 5

Metodologia de Pesquisa

Este capítulo é dedicado à apresentação da metodologia e dos procedimentos metodológicos utilizados nesta pesquisa para a coleta de dados. Na primeira seção aponto características da pesquisa que sugerem a metodologia qualitativa como uma opção adequada. Passo, então, a caracterizar a metodologia qualitativa para poder guiar-me no desenvolvimento da pesquisa.

Na segunda seção, apresento sucintamente o contexto e os participantes da pesquisa, ou seja, o local onde os dados foram coletados, juntamente com sua caracterização, e os sujeitos cujos projetos de Modelagem Matemática em ambientes computacionais são a fonte dos dados.

Logo em seguida, na seção 5.3, apresento os procedimentos metodológicos utilizados para a realização da coleta de dados e, finalmente, na seção 5.4, apresento a maneira como os dados foram tratados e analisados.

5.1. A Opção Metodológica

Para desenvolver a pesquisa aqui apresentada, buscando uma forma de lidar com sua questão central: “Que discussões ocorrem, e como elas ocorrem, em um ambiente de ensino e aprendizagem de Cálculo no qual a Modelagem Matemática e as tecnologias informáticas estão presentes?”, eu necessitava escolher uma metodologia de pesquisa. Essa escolha deveria estar coerente com os objetivos da pesquisa, com o contexto de seu desenvolvimento, com minha postura como pesquisadora, enfim, com a pesquisa como um todo. Deve haver, acredito, uma harmonia, um inter-relacionamento entre a opção metodológica e o todo da pesquisa.

Alves-Mazzotti (1998) afirma que *não há metodologias ‘boas’ ou ‘más’ em si, e sim metodologias adequadas ou inadequadas para tratar um determinado problema.* (p.160). Portanto, antes de iniciar a descrição dos procedimentos, é importante que eu mostre a adequação da metodologia adotada para a pesquisa.

Seguindo a recomendação dessa autora, procurei características da pesquisa que fundamentassem a escolha metodológica, buscando, assim, proporcionar uma certa coerência com o restante da pesquisa.

Logo no capítulo 1 encontramos algumas dessas características. A primeira delas refere-se à origem da própria pesquisa: ela nasceu de uma preocupação, em minha prática docente, que me instigou a desenvolvê-la, mesmo que tivesse sido de uma forma ainda incipiente. De acordo com Morse (1994) *a chave para selecionar um tópico de pesquisa qualitativo é identificar algo que prenderá nossa atenção no decorrer do tempo.*¹ (p. 220). Mais à frente a mesma autora afirma que *questões de pesquisa podem se originar também de um problema notado no decorrer da prática clínica, ou de uma experiência significativa que surge no decorrer do dia-a-dia.*² (p. 220). A expressão “prática clínica” usada pela autora vem de sua área de trabalho: a enfermagem. Substituindo-a então pela “prática docente”, podemos perceber a ligação com a origem de minha pesquisa.

Afirmar no parágrafo anterior que, no início, minha pesquisa não estava bem determinada, tendo uma forma ainda incipiente. Mas esse formato inicial indefinido realça uma outra característica marcante que ela possui: o seu *design* emergente (Lincoln & Guba, 1985). Como já discutido de forma inicial no capítulo 1, tanto o foco da pesquisa quanto os procedimentos metodológicos foram sendo construídos à medida que eu desenvolvia a pesquisa, fato que mostra o caráter emergente de seu *design*. Ao tratar do planejamento de pesquisas qualitativas, Alves-Mazzotti (1998), resume os argumentos usados por Lincoln e Guba (1985) para justificar a caracterização do foco e *design* de uma pesquisa como emergentes da seguinte maneira:

o foco e o design do estudo não podem ser definidos a priori, pois a realidade é múltipla, socialmente construída em uma dada situação e, portanto, não se pode apreender seu significado se, de modo arbitrário e precoce, a aprisionarmos em dimensões e categorias. O foco e o design devem, então emergir, por um processo de indução, do conhecimento do contexto e das múltiplas realidades construídas pelos participantes em suas influências recíprocas; (p. 147).

Esta é, então, mais uma característica comum entre a pesquisa aqui descrita e aquelas que adotam a abordagem qualitativa como opção metodológica. Devo ressaltar, entretanto que, apesar do caráter emergente do foco e do *design* da pesquisa, ela não foi

¹ Tradução de: *The key to selecting a qualitative research topic is to identify something that will hold one's interest over time.*

totalmente desprovida de um planejamento desde seu início. Alves-Mazzotti (1998) nos alerta para os perigos existentes quando nos embrenhamos em uma pesquisa muito pouco estruturada: podemos perder tempo, nos perder em um emaranhado de dados e não encontrar significado algum para eles. Assim, dado o objetivo da pesquisa, fiz um planejamento inicial sobre como desenvolvê-la, mas era um planejamento flexível, com diversas partes não estruturadas rigidamente.

O objetivo da pesquisa, como não poderia deixar de ser, é um fator determinante em sua caracterização. No caso desta, o objetivo é buscar detectar as discussões que ocorrem, e compreender como ocorrem, em um ambiente de ensino e aprendizagem de Cálculo, no qual a Modelagem Matemática e as tecnologias informáticas estão presentes. De acordo com Denzin e Lincoln (1994), *eles* (os pesquisadores qualitativos) *buscam respostas para questões que enfatizam como experiências sociais são criadas e como é dado significado a elas*.³ (p. 4). Essa caracterização é pertinente à pesquisa aqui apresentada, já que os alunos que dela participaram vivenciaram a experiência social de discutir matemática, problemas (matemáticos ou não), questões relacionadas ao computador etc..

Essa análise aponta características que me levam a optar pela metodologia qualitativa de pesquisa. Faz-se necessário, então, apresentar maiores detalhes sobre o estilo qualitativo de pesquisar para que os procedimentos sejam escolhidos e justificados, já que uma característica da pesquisa qualitativa é a explicitação de todas as escolhas e suas respectivas justificativas.

Denzin e Lincoln (1994), após fazerem uma sucinta apresentação histórica do desenvolvimento das pesquisas qualitativas, afirmam que elas têm significados diferentes em cada um desses momentos, mas que esses vários significados têm características em comum que permitem uma definição genérica:

Pesquisa qualitativa prevê pluralidade de método quanto ao foco, envolvendo uma abordagem interpretativa e naturalística do assunto pesquisado. Isso significa que os pesquisadores qualitativos estudam as coisas em seu ambiente natural, tentando dar sentido aos fenômenos, ou interpretá-los, em termos dos significados que as pessoas dão a eles. A pesquisa qualitativa envolve o uso e a coleção de uma variedade de materiais empíricos – estudo de caso, experiência pessoal, introspectiva, história de vida, entrevista e textos gerados a partir de observações, textos históricos, de

² Tradução de: *Research questions may also arise from a problem noted in the course of clinical practice, or from a significant experience that occurs in the course of everyday living.*

³ Tradução de: *They seek answers to questions that stress how social experience is created and given meaning.*

*interação e visuais – que descrevem momentos rotineiros e problemáticos e significados nas vidas dos indivíduos.*⁴ (p. 2).

Bogdan e Biklen (1994) apresentam cinco características básicas dos estudos qualitativos:

1. *Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal;*
2. *A investigação qualitativa é descritiva;*
3. *Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;*
4. *Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva;*
5. *O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.*

Levando em conta essa caracterização, mas sem ter o objetivo de estabelecer uma agenda rígida a seguir, comecei a planejar os procedimentos metodológicos a serem utilizados na pesquisa. Sabia que desejava observar alunos da disciplina Cálculo trabalhando em um ambiente no qual a Modelagem Matemática e as tecnologias informáticas estivessem presentes; sabia que queria observar, compreender e analisar as discussões que porventura ocorressem durante o trabalho. No entanto, não sabia como efetivar a observação, não sabia quem seriam os alunos, não sabia como chegar a eles e não sabia o que fazer antes de efetivar as observações propriamente ditas. Dessa forma o *design* da pesquisa foi-se construindo à medida que era planejado, o que passarei a descrever nas próximas seções.

Talvez, neste ponto, fosse pertinente a apresentação da(s) estratégia(s) de investigação a ser(em) utilizada(s) na pesquisa. Estudo de caso, etnografia, observação participante, alguma outra? (Denzin & Lincoln, 1994). Entretanto, devido à maneira como esta pesquisa se desenvolveu, com seu *design* emergente, acredito que seja mais prudente descrever cuidadosamente os procedimentos sem tentar encaixá-la em alguma estratégia de investigação.

⁴ Tradução de: *Qualitative research is multimethod in focus, involving an interpretative, naturalistic approach to its subject matter. This means that qualitative researchers study things in their natural settings, attempting to make sense of, or interpret, phenomena in terms of the meanings people bring to them. Qualitative research involves the studied use and collection of a variety of empirical materials – case study, personal experience, introspective, life story, interview, observational, historical, interactional, and visual texts – that describe routine and problematic moments and meanings in individuals' lives.*

5.2. O Contexto e os Participantes da Pesquisa

Antes de falar sobre os procedimentos metodológicos utilizados no desenvolvimento da pesquisa, acredito ser importante descrever como se deu a escolha do contexto e dos participantes dela. Alves-Mazzotti (1998) afirma que as três características essenciais de estudos qualitativos são a visão holística, a abordagem indutiva e a investigação naturalística. Segundo a autora, *a visão holística parte do princípio de que a compreensão do significado de um comportamento ou evento só é possível em função da compreensão das inter-relações que emergem de um dado contexto*. (p. 131). E para compreender estas inter-relações, penso ser importante descrever todo esse contexto, desde os primeiros contatos com o professor da turma até a coleta de dados propriamente dita. Entretanto, neste capítulo, limito-me a descrever a escolha do contexto e dos participantes para, só no capítulo seguinte, falar sobre as inter-relações existentes entre eles, ou melhor, entre nós.

Devido ao objetivo da pesquisa, necessitava encontrar algum trabalho envolvendo Cálculo, tecnologias informáticas e Modelagem Matemática. Durante essa busca, assisti à fita de uma conferência⁵, cujo título era “O Processo de Ensino-Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral com o Uso de Computador”, proferida por um professor de uma universidade pública do Estado de São Paulo⁶.

Nessa conferência o professor relatou seu trabalho com algumas turmas de Engenharia, em que ele utilizou a Modelagem Matemática e computadores. Entrei, então, em contato com esse professor, para obter maiores informações sobre seu trabalho e avaliar a possibilidade de coletar os dados de minha pesquisa nas turmas dele. Descobri, então, que o trabalho por ele realizado tinha muito em comum com o ambiente de ensino e aprendizagem de Cálculo que pretendia ter como contexto da pesquisa. Além disso, o professor se mostrou disponível para receber-me em suas aulas.

De acordo com o professor, seus alunos, às vezes individualmente, às vezes reunidos em grupos de 3 ou 4 participantes, escolhem ou elaboram um problema de sua área de trabalho (ou de interesse) para nele trabalhar durante todo o semestre, usando Modelagem e computadores. Todo esse trabalho, da elaboração do problema à sua resolução final, é denominado pelo professor de Projeto⁷. Os grupos desenvolvem seus projetos fora da sala de aula. Abordarei essa proposta de trabalho com o devido

⁵ Esta conferência foi proferida em um dos Seminários em Matemática e Educação Matemática que são promovidos pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - UNESP - Rio Claro.

⁶ Com a intenção de manter o anonimato dos participantes da pesquisa, não explicitarei o nome do professor, nem o da universidade à qual ele está vinculado.

⁷ No que se segue usarei tanto a palavra “projeto” quanto a palavra “trabalho” para designar a atividade desenvolvida pelos alunos.

detalhamento no capítulo seguinte, quando farei uma análise tanto de sua proposição pelo professor quanto de seu entendimento pelos alunos. Meu interesse em fazer essa pequena caracterização aqui deve-se apenas à necessidade de mostrar a proximidade entre o contexto idealizado na pergunta diretriz da pesquisa e o contexto das aulas desse professor.

Assim, o primeiro passo estava dado: havia encontrado um contexto no qual poderia coletar os dados para a pesquisa. Mas, retratando mais uma vez o caráter emergente do *design* da pesquisa, não sabia exatamente como escolher os alunos que acompanharia mais de perto, nem como efetivar este acompanhamento. Então comecei a assistir às aulas da turma, desde o início, no primeiro semestre de 1999, enquanto pensava em como dar continuidade à pesquisa. A construção desses procedimentos está descrita na seção seguinte.

5.3. Os Procedimentos

Como o foco da pesquisa são as discussões dos alunos desenvolvendo projetos de Modelagem Matemática em ambientes computacionais, a parte principal da coleta de dados foi a observação de grupos de alunos executando o trabalho proposto pelo professor. Mas, antes disso, era necessário conhecer individualmente cada membro desses grupos e localizá-los em um contexto mais amplo. Além disso, por estarmos no início da disciplina, os grupos ainda nem se haviam constituído, daí não ter sentido em querer acompanhar grupos naquele momento. Assim, enquanto a disciplina se desenvolvia, os grupos começavam a se formar e eu, ao observar as aulas, ia planejando os procedimentos seguintes.

Decidi, então, que, escolhidos os grupos, o passo seguinte seria uma entrevista individual, acompanhada por um questionário também individual, por meio dos quais eu poderia conhecer um pouco melhor cada participante.

Meu planejamento, então, foi o seguinte: começaria com a observação das aulas, escolheria os grupos a serem observados, faria uma entrevista com os membros dos grupos participantes, que também responderiam um questionário, e observaria os grupos trabalhando em seus projetos. Mas, após o término dos projetos, pareceu-me pertinente realizar mais uma entrevista com os membros dos grupos para fazer uma avaliação final de suas opiniões sobre tudo o que havia acontecido. Nas subseções seguintes, relatarei, com maiores detalhes, cada uma dessas etapas.

5.3.1. As observações de sala de aula e a determinação dos grupos participantes da pesquisa

A coleta de dados da pesquisa iniciou-se com a observação das aulas de Cálculo I da turma, desde o início do período letivo. O objetivo era tornar-me personagem “natural” dentro da turma, guardadas as devidas proporções, para obter grupos interessados em participar da pesquisa, e obter dados para caracterizar o contexto no qual os sujeitos da pesquisa estavam inseridos.

Procurei descrever todas as aulas a que assisti, destacando os atos dos alunos e do professor, o conteúdo abordado, o estilo de trabalho etc., além de expressar minhas impressões sobre os acontecimentos. Segundo Alves-Mazzotti (1998), a observação em estudos qualitativos caracteriza-se como não-estruturada, *na qual os comportamentos a serem observados não são predeterminados, eles são observados e relatados da forma como ocorrem, visando descrever e compreender o que está ocorrendo numa dada situação.* (p. 166). Cabe chamar a atenção, aqui, sobre a natureza dessa observação. Como era eu, pesquisadora, que estava observando e tomando notas durante as aulas, acredito ser mais adequado afirmar que os acontecimentos eram observados e serão descritos mais tarde, de acordo com minha perspectiva.

Logo na primeira aula o professor me apresentou para a turma e eu disse que estava lá para fazer uma pesquisa. Após um mês, aproximadamente, expliquei para os alunos o tema da pesquisa, quais eram meus objetivos e solicitei a participação de grupos voluntários. Dois grupos, com quatro componentes em cada, ofereceram-se.

Combinamos então que eu participaria de todas as reuniões feitas pelos grupos para o desenvolvimento dos projetos, as quais aconteceriam fora do horário de aula, e que eu filmaria essas reuniões. Antes, porém, marquei horários com os oito participantes para realizar as entrevistas.

5.3.2. As entrevistas iniciais

As entrevistas foram do tipo semi-estruturadas, nas quais algumas questões são lançadas para tornar claro o interesse da pesquisa, mas permite-se ao entrevistado respondê-las livremente, sem qualquer tipo de restrição (Fontana & Frey, 1994). O objetivo dessa entrevista era conhecer o perfil acadêmico de cada aluno, o conhecimento prévio de Cálculo que ele tinha e descobrir a sua expectativa em relação à disciplina. As questões da entrevista foram:

1. Gostaria que você falasse um pouco sobre a matemática que você estudou no 2º grau e a matemática que você está estudando em Cálculo I, comparando as duas, se possível.
2. Qual a sua opinião sobre o ensino de matemática com computadores? E sem computadores?
3. O professor pediu que vocês fizessem um trabalho para o final do curso. O que você entendeu sobre esse trabalho?

Seguindo a orientação de Fontana e Frey (1994), procurei ter em mente que *cada indivíduo tem sua própria história social e perspectiva pessoal do mundo*.⁸ (p. 374). Sendo assim, levei em conta suas sugestões para entender a linguagem dos alunos, decidir como me apresentar a eles, coletar material empírico etc.. Todas as entrevistas foram gravadas em cassete. As transcrições delas se encontram nos anexos de números 2 a 9 desta tese.

No mesmo dia da entrevista, os alunos responderam a um pequeno questionário, que continha questões sobre sua vida escolar. O modelo do questionário encontra-se no anexo 1.

Encerradas as entrevistas, continuei acompanhando as aulas, enquanto esperava ser contactada pelos grupos, por ocasião do início do desenvolvimento dos trabalhos.

5.3.3. As observações dos grupos

Assim que os grupos começaram a desenvolver seus projetos, entraram em contato comigo para eu participar de algumas das reuniões nas quais eles trabalhavam nesses projetos. Minha participação consistiu de observação do trabalho dos alunos, desde a formulação até a conclusão, passando por todos os passos do desenvolvimento.

Adler e Adler (1994) caracterizam a observação qualitativa como fundamentalmente naturalística, no sentido de que ela é efetivada no contexto natural onde os fatos acontecem, entre as pessoas que participam naturalmente dos acontecimentos, seguindo o fluxo natural dos mesmos. Assim, continuam eles, *observadores qualitativos não estão amarrados por categorias predeterminadas de medidas ou respostas, mas estão livres para buscar conceitos ou categorias que parecem significativas aos sujeitos*.⁹ (p. 378).

Desse modo observei os grupos nos locais onde eles se reuniam para desenvolver os projetos: em salas de aula desocupadas, em laboratórios de informática etc., e os grupos

⁸ Tradução de ... *each individual has his or her own social history and an individual perspective on the world*.

⁹ Tradução de: *Qualitative observers are not bound, thus, by predetermined categories of measurement or response, but are free to search for concepts or categories that appear meaningful to subjects*.

procuravam trabalhar naturalmente. Devo ressaltar aqui que planejava participar de todos os momentos em que os grupos estivessem discutindo os projetos, plano que se mostrou inviável já que morávamos em cidades diferentes e as discussões, muitas vezes, ocorreram repentinamente, impossibilitando minha presença para observação dos fatos. Quando isso acontecia, eu fazia uma espécie de entrevista coletiva em que os grupos relatavam e discutiam os temas da reunião efetivada sem minha participação. Esse fato será tratado de forma mais detalhada no capítulo referente à análise dos dados.

Adler e Adler (1994) apresentam uma classificação do papel do pesquisador, de acordo com sua atuação durante as observações. Eles consideram, logo de início, que o pesquisador é um membro do grupo observado, já que está necessariamente envolvido nos acontecimentos e é impossível considerar que ele não influencie os fatos. Assim, segundo os autores, três tipos de papéis do pesquisador predominam: o pesquisador-membro-completo, o pesquisador-membro-ativo e o pesquisador-membro-periférico. Essa classificação diz respeito ao grau de interação entre pesquisador e grupo pesquisado.

Optei por uma postura de observadora dos grupos como pesquisadora-membro-periférico, pois, de acordo com os autores citados acima, esse pesquisador *observa e interage próximo o suficiente dos membros para estabelecer uma identidade como membro interno sem participar daquelas atividades que constituem o núcleo do grupo*.¹⁰ (p. 380). Os outros dois tipos de papéis do observador pressupõem que o pesquisador assuma algum tipo de responsabilidade dentro do grupo, o que não aconteceu no meu caso. Entretanto, as observações foram permeadas por questões surgidas no decorrer do trabalho, que procuravam deixar bem claras as atitudes, compreensões e dúvidas dos alunos.

A prática da observação como técnica de coleta de dados em pesquisas sofre alguns questionamentos, segundo Adler e Adler (1994), no que diz respeito à validade e à confiabilidade dos dados obtidos apenas por meio de observações, já que o pesquisador confiaria exclusivamente em suas próprias percepções e seria influenciado por suas pré-concepções. Esses autores apresentam, entretanto, formas de estabelecer um maior rigor no uso da observação como técnica de coleta de dados. Uma dessas formas é um estilo de escrita, por ocasião do relato da pesquisa, com um grau de detalhamento tal, que puxa o leitor para bem próximo do mundo dos sujeitos. Buscarei alcançar esse grau de detalhamento nos capítulos referentes à apresentação do contexto e participantes e à análise dos dados.

Uma outra forma de estabelecer um maior rigor, segundo os mesmos autores, é combinar a observação com outras técnicas de coleta de dados. No caso desta pesquisa,

¹⁰ Tradução de : *they (the researchers) observe and interact closely enough with members to establish an insider's identity without participating in those activities constituting the core of group membership.*

todos os encontros com os alunos foram video-gravados. Além de ter esse objetivo de aumentar o rigor das observações, as gravações em vídeo foram realizadas para que a discussão não fosse prejudicada pela preocupação em anotar os dados e para permitir uma análise mais detalhada, *a posteriori*, do desenvolvimento dos projetos pelos grupos. Além disso, vídeo-gravei, também, as apresentações orais de todos os grupos da turma, de modo a poder verificar as conseqüências de minha interação com os dois grupos participantes da pesquisa. Possuo, também, todas as versões escritas dos projetos, fornecidas pelos grupos. A cada reunião, o trabalho escrito dos alunos sofria alguma mudança, e eles me entregavam essas versões que também retratavam o desenvolvimento dos projetos. As versões finais dos trabalhos dos dois grupos que acompanhei estão apresentadas, respectivamente, nos anexos 10 e 11 desta tese.

Ao fim do semestre letivo, todos os projetos estavam terminados e os grupos já os haviam apresentado aos colegas. Achei que seria pertinente, então, realizar uma entrevista final, individual, com os componentes dos dois grupos. Passo, então, a descrevê-la.

5.3.4. As entrevistas finais

O objetivo da entrevista final era fazer uma avaliação das opiniões dos componentes dos grupos sobre tudo o que havia acontecido. Ela foi individual, com as seguintes questões:

1. Com relação ao trabalho proposto pelo professor:
 - a) O que você entendeu sobre ele?
 - b) Qual a relação entre o trabalho e o curso de Cálculo I?
 - c) Qual a importância do computador para o trabalho?
 - d) Você aprendeu alguma coisa com o trabalho? O quê?
2. Sobre sua participação na pesquisa:
 - a) O que você achou de participar da pesquisa?

Essas entrevistas também foram gravadas em cassete. Busquei seguir as mesmas orientações utilizadas por ocasião das entrevistas iniciais, tanto na elaboração das questões (entrevista semi-estruturada), quanto no procedimento durante a realização das entrevistas. Como já estávamos no final do semestre quando essas entrevistas foram realizadas, consegui entrevistar apenas quatro dos oito participantes da pesquisa. As transcrições dessas quatro entrevistas encontram-se nos anexos de números 12 a 15.

5.4. A Análise dos Dados

Após o período da coleta de dados, que durou um semestre letivo, eu tinha em mãos uma grande quantidade de material: as notas de minhas observações em sala de aula, as fitas cassete com a gravação das entrevistas dos alunos, as fitas de vídeo com a gravação das reuniões dos grupos e todas as versões escritas dos projetos desenvolvidos pelos grupos. De acordo com Alves-Mazzotti (1998), esses dados

precisam ser organizados e compreendidos. Isto se faz através de um processo continuado em que se procura identificar dimensões, categorias, tendências, padrões, relações, desvendando-lhes o significado. Este é um processo complexo, não-linear, que implica um trabalho de redução, organização e interpretação dos dados que se inicia já na fase exploratória e acompanha toda a investigação. (p. 170).

Durante o período em que realizei a coleta de dados, não possuía categorias pré-estabelecidas a serem utilizadas e/ou verificadas nesses dados. Eu não buscava dados que confirmassem (ou contestassem) alguma teoria estabelecida *a priori*, mas sim, buscava compreender os fatos da maneira como eles ocorriam. Lincoln e Guba (1985) trazem, nesse sentido, a idéia da análise indutiva dos dados. Segundo esses autores,

*o investigador não trabalha, especificamente, nem com teorias nem com variáveis a priori; espera-se que elas sejam emergentes a partir da investigação. Os dados acumulados no campo devem assim ser analisados indutivamente (isto é, a partir de unidades em estado bruto específicas de informação em direção a categorias mais claras de informação) a fim de definir hipóteses funcionais locais ou questões que podem ser perseguidas.*¹¹ (p. 203).

Apesar de não levar categorias rigidamente pré-estabelecidas para o trabalho de campo, não posso dizer que estava isenta de qualquer tipo de pré-conceito: eu estava em uma turma de Cálculo I e sou professora de Cálculo I; a pergunta diretriz da pesquisa era algo que instigava-me e, assim, ela sempre vinha à mente, mesmo porque eu estava naquela turma, acompanhando aqueles alunos, com o objetivo de desenvolver a pesquisa;

¹¹ Tradução de: *...the investigator typically does not work with either a priori theory or variables; these are expected to emerge from the inquiry. Data accumulated in the field thus must be analyzed*

enquanto fazia a coleta de dados, dava continuidade aos estudos teóricos da pesquisa, o que me fazia atentar para determinados aspectos em detrimento de outros. Assim, poderia dizer que os dados são aqueles vistos por mim, com toda a experiência e vivência em mim acumuladas. Acredito ser esse um aspecto positivo, já que, não tendo certezas e vivenciando as dúvidas surgidas no desenrolar da pesquisa, enxergava dados que eram possíveis encaminhamentos das questões que tinha.

Com esse mesmo tipo de olhar, iniciei a análise dos dados. Como já ressaltai em outro momento, meu objetivo principal durante a coleta de dados era acompanhar os grupos enquanto desenvolviam seus projetos de Modelagem Matemática em ambientes computacionais. Então, foi da observação dos trabalhos dos grupos e das gravações de suas reuniões que retirei os *episódios* por meio dos quais obtive as informações relacionadas com a pergunta diretriz da pesquisa.

Os episódios são pequenas cenas ocorridas durante o desenvolvimento dos trabalhos. Eles foram escolhidos por chamarem minha atenção de pesquisadora com todos aqueles pré-conceitos citados anteriormente e que, portanto, me mostraram alguma luz com relação aos questionamentos levantados pela pesquisa: alguma discussão matemática, ou alguma discussão sobre o desenvolvimento do projeto, sobre o computador etc. Quando alguma dessas cenas chamava minha atenção, selecionava, na gravação, o início e o fim da discussão e tinha, assim, mais um episódio.

Escolhido o episódio, passava, então, para sua transcrição literal, na qual apresentava não apenas as falas dos participantes, mas também seus gestos, expressões, ações e tudo mais que pudesse ajudar na compreensão da cena. A seguir, inseri o que Skovsmose (1999b) denomina *frame*: comentários que intercalamos no decorrer do episódio, de cujas partes fazemos um pequeno resumo seguido de uma análise inicial. Os dados passam, assim, a possuir um aspecto mais inteligível e apresentável.

O passo seguinte foi a realização de uma primeira análise, que denomino análise de primeiro nível, em que expressei minhas primeiras impressões sobre o episódio, agora já considerado com seu respectivo *frame*. A apresentação desses episódios, assim como dessa primeira análise, acontece no capítulo 7 desta tese.

Em seguida, realizei o que denomino a análise de segundo nível (apresentada no capítulo 8), quando cada episódio foi analisado à luz da literatura.

As análises de alguns desses episódios foram discutidas em reuniões do GPIMEM. Eu apresentava a análise inicial que havia feito, os membros do grupo a liam, faziam seus

inductively (that is, from specific, raw units of information to subsuming categories of information) in order to define local working hypotheses or questions that can be followed up.

comentários, ponderando a respeito da pertinência do que eu havia escrito e dando sugestões sobre pontos que eu não tinha percebido. Após a reunião, eu reformulava a análise de acordo com a discussão. Esse procedimento é incentivado por Alves-Mazzotti (1998). Segundo essa autora, os colegas que participam desse tipo de discussão têm por função *apontar falhas, pontos obscuros e vieses nas interpretações, bem como identificar evidências não exploradas e oferecer explicações ou interpretações alternativas àquelas elaboradas pelo pesquisador*. (p.172).

Resta-me, então, mostrar o encaminhamento dado ao restante do material coletado durante o trabalho de campo. As versões escritas dos trabalhos foram usadas principalmente para subsidiar as transcrições e análises dos episódios. As anotações de minhas observações em sala de aula foram usadas para descrever o contexto no qual os dados foram coletados. Tomei as entrevistas como base para a descrição dos personagens/participantes da pesquisa.

Esclarecidas as questões sobre a metodologia de pesquisa e os procedimentos adotados, no próximo capítulo descreverei, de forma mais detalhada, o contexto no qual a pesquisa foi desenvolvida e apresentarei suas personagens.

Capítulo 6

O Contexto e os Participantes da Pesquisa

Apresento neste capítulo o contexto em que os dados desta pesquisa foram coletados. Como o meu interesse está voltado para grupos de alunos de Cálculo que desenvolveram projetos de Modelagem Matemática em um ambiente computacional, considero importante conhecer as aulas de Cálculo nas quais esses projetos foram desenvolvidos.

Assim, inicio apresentando, de maneira geral, o curso de Cálculo no qual os alunos participantes da pesquisa estavam matriculados. Apresento as aulas da disciplina em três momentos: aula na sala de aula convencional, aula no laboratório de informática e projetos de Modelagem Matemática. Dedico, então, a subseção 6.1.1. à descrição das aulas na sala convencional e a subseção 6.1.2. à descrição das aulas no laboratório de informática. Os projetos de Modelagem Matemática, por serem o foco de maior interesse da pesquisa, são descritos na seção 6.2.. Finalizo o capítulo apresentando as personagens desta pesquisa: os oito alunos participantes, o professor da turma e a pesquisadora.

6.1. As Aulas de Cálculo Diferencial e Integral I

Como já foi dito no capítulo 5, os dados desta pesquisa foram coletados em uma turma da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I, de uma universidade pública do Estado de São Paulo. As aulas aconteciam em três encontros semanais de 1 hora e 40 minutos cada, no período diurno. Os alunos dessa turma estavam, na época da coleta de dados, no primeiro período do curso de Engenharia Química. A escolha não foi intencional: o professor Sérgio¹ havia permitido que eu participasse de suas aulas de Cálculo no primeiro semestre de 1999 e foi-lhe designada pelo Departamento de Matemática da Universidade a turma de Engenharia Química. No início do semestre, o número de alunos na turma era 35. Esse número sofreu um acréscimo, que não computei, nas primeiras semanas de aula, devido às segunda e terceira chamadas do vestibular da Universidade.

¹ Adotarei um nome fictício para o professor da turma, assim como para os componentes dos grupos que participaram da pesquisa e para outras pessoas que forem citadas no decorrer da tese. Faço isso com a intenção de manter o anonimato e, portanto, a privacidade, dessas pessoas.

Talvez coubesse neste capítulo, mais particularmente nesta seção, uma discussão sobre a disciplina Cálculo. Poderia levantar pontos como: o alto índice de evasão, o grande número de alunos com notas baixas, o seu estado de disciplina de serviço para cursos da área de ciências exatas, dificuldades dos alunos, dificuldades dos professores etc.. Um pouco disso já foi feito no capítulo 1 desta tese. Existem inúmeros trabalhos que tratam dessas questões, alguns dos quais já citados e comentados no capítulo 1. Estava em um contexto coerente com aquele que desejava para coletar os dados de minha pesquisa, como já foi justificado no capítulo anterior, e é isto que estou levando em conta. O que farei aqui é uma descrição detalhada desse contexto, baseada em minhas notas de observação das aulas, acompanhada de uma pequena análise.

O curso de Cálculo do professor Sérgio pode ser dividido, de uma forma geral, em três momentos: aulas na sala de aula convencional, aulas no laboratório de informática e o desenvolvimento do projeto de Modelagem Matemática. Tratarei das duas primeiras instâncias nas subseções seguintes e do projeto na seção 6.2., por se tratar do alvo maior de meu interesse. Antes, entretanto, destacarei alguns aspectos gerais desse curso.

Uma particularidade do semestre em que participei das aulas do professor Sérgio foi um projeto desenvolvido em conjunto com o professor Carlos, do Departamento de Física da mesma Universidade. Carlos era o professor da disciplina Física I, da mesma turma. Eu não cheguei a ler o projeto que eles elaboraram, mas posso descrevê-lo a partir dos fatos que observei acontecendo. O objetivo do projeto era desenvolver as duas disciplinas – Cálculo I e Física I – em conjunto, de tal forma que o andamento de uma estivesse em compasso com o andamento da outra. Cada professor acompanhava as aulas do outro, quando possível, para fazer conexões com suas aulas. Os professores comentaram comigo, no decorrer do semestre, que não conseguiram planejar as duas disciplinas de maneira tão próxima como era o objetivo inicial deles, mas que avaliavam positivamente a aproximação que houve. Pude constatar essa aproximação algumas vezes nas aulas do professor Sérgio. O conceito de integral, por exemplo, foi introduzido a partir de uma aula de física que tratava do conceito de trabalho; e o professor Carlos, sempre que podia, fazia intervenções nas aulas de Cálculo. Não vou aprofundar a análise desse projeto, já que esse não era meu objetivo inicial, e também porque não tenho material suficiente para tanto. Ao citar a existência desse projeto, quero, na verdade, apontar aspectos importantes para a caracterização do professor Sérgio e de suas aulas.

Podemos perceber, então, a preocupação de Sérgio com a ligação entre o Cálculo e outras área do conhecimento. Ele tornou essa preocupação explícita em uma das aulas a que assisti, quando ele afirmou que seus princípios com relação ao Cálculo eram “problemas, perguntas, estudo e aplicações”. Essa sua característica podia ser percebida,

também, na maneira como ele conduzia as aulas, trazendo problemas que tratavam do uso de drogas, de questões ambientais etc., como também nas discussões que ele promovia sobre tais problemas. Cabe ressaltar, entretanto, que ele não dizia qual era a origem desses problemas, ou seja, se eles haviam sido retirados de alguma situação real ou se haviam sido inventados por ele. O professor preocupava-se, também, em chamar a atenção dos alunos sobre questões relacionadas à futura profissão deles, e fazia uma ligação entre suas preocupações com aplicações do Cálculo, e as exigências que eles encontrariam no mercado de trabalho.

Uma característica peculiar das aulas do professor Sérgio é que ele não segue literalmente nenhum livro-texto. Ele dá aos alunos, no início do semestre, as referências de alguns livros de Cálculo em que se baseia, sem, entretanto, eleger um deles como o principal. Inclusive, quando a aula é dedicada à resolução de exercícios, ele os escolhe, aleatoriamente, a partir de todos os “livros adotados”. Essa postura causa reações diversas entre os alunos. A maioria reclama, por se sentir desorientada com relação a que livro escolher para estudar. Entretanto, uma aluna, Valéria, que pertencia a um dos grupos que acompanhei durante o semestre, afirmou, em entrevista, que essa postura do professor levava os alunos a se tornarem mais independentes. Ao perguntar-lhe de que forma isso acontecia, ela afirmou que

É. Vai se tornar independente. Porque você não vai se preocupar é ... como era, dependente, entendeu? Eu vou seguir aquele livro porque o professor falou e eu não vou me preocupar em procurar outros, porque aquele que ele determinou então a prova vai ser igual aquela, tal. Então eu não vou atrás de livros que eu ... que ... que se enquadra melhor, entendeu? Que eu vá entender melhor, talvez. Porque existem vários livros que falam a mesma matéria de modos diferentes. Então, eu acho que, assim, você vai atrás, que nem, dos profe ... dos livros que os professores acham interessantes, mas você também vai procurar outros, e outros, talvez, que você entenda melhor a linguagem, que seja mais simples pra você entender. Eu acho que isso é legal porque você vai aprender a se virar, entendeu?

Perguntei-lhe, então, se ela estava acostumada a agir daquela forma e ela disse que sim, pois trabalhara na biblioteca da escola durante o Ensino Médio e tinha vários livros à sua disposição.

Além de não adotar um só livro, e talvez por esse motivo, o professor não seguia aquela ordem canônica dos cursos de Cálculo: funções, limites, derivadas, regras de

derivação e assim por diante. Ele começou o curso com derivadas e foi seguindo de acordo com o fluxo das situações que surgiam em sala de aula. Às vezes puxava um assunto da aula de física, às vezes considerava algum exercício de algum livro, outras vezes seguia um pouco a ordem de algum livro, mas não havia regra fixa. Isso causava uma certa revolta por parte de muitos alunos. Em entrevista, Pedro, um aluno-sujeito da pesquisa, afirmou que

A gente não sabe em que capítulo o professor está, a gente tem que descobrir. Aí o professor não deu o capítulo inteiro e a gente tem que descobrir que ele não deu o capítulo inteiro. A gente nunca sabe o que ele deu direito, o que ele não deu, porque ele não coloca um título na lousa, assim: ele tá dando isso.

Uma outra aluna-sujeito, Martha, afirmou em entrevista que:

Olha, sinceramente eu acho que eu ... eu me senti muito mais segura depois que eu estudei pelo livro que é uma seqüência ... sei lá é uma seqüência, né? Porque o Sérgio ele vai e volta, vai e volta, isso ajuda a gravar. Muita coisa que eu lia no livro eu lembrava dele falando, mas eu precisava ter uma seqüência, um roteiro, né, pra estudar.

Essas falas retratam um certo choque entre o que os alunos estavam acostumados a encontrar em uma sala de aula de matemática e o que eles estavam encontrando nas aulas de Cálculo. Os depoimentos dos três alunos mostram três níveis diferentes de perspectivas com relação aos estudos: Valéria já tinha um hábito de estudo que se adaptava bem ao estilo de aula do professor; Martha estava aprendendo a adaptar-se, construindo uma ponte entre suas aulas atuais e aquelas que tinha no Ensino Médio; Pedro, por sua vez, encontrava-se completamente perdido. Apesar do choque inicial, acredito que, com o andar da disciplina, os alunos foram encontrando sua maneira de estudar, pelo menos os sujeitos da pesquisa, já que as reclamações se limitaram ao início do semestre.

Destaquei aqui três características gerais da postura do professor Sérgio: preocupação em estabelecer relações da matemática com outras áreas do conhecimento, não adoção de livro-texto e não seguimento da ordem que normalmente é dada ao conteúdo de Cálculo.

Após considerar esses aspectos gerais, tratarei, com mais detalhes, nas subseções seguintes, dos encaminhamentos dados às aulas na sala de aula convencional e no laboratório de informática.

6.1.1. Sala de aula convencional

Das 17 aulas do professor Sérgio a que assisti, 12 foram realizadas na sala de aula convencional, que tinha uma disposição tradicional do mobiliário, ou seja, aproximadamente cinco filas com nove ou dez carteiras em cada, uma mesa maior, com cadeira para o professor na frente da sala, e um quadro-negro. Um dia na semana a aula acontecia em um anfiteatro.

A maioria das aulas era expositiva: o professor explicava a matéria no quadro e os alunos escutavam o que ele dizia. O professor procurava deixar os alunos à vontade para fazerem perguntas sobre o que estava sendo discutido. No início do semestre, os alunos estavam mais tímidos para fazer intervenções durante as exposições do professor, mas essa situação foi se alterando à medida que o tempo transcorria. Além de se sentirem mais à vontade para fazer perguntas e/ou observações, os alunos estavam mais entrosados entre eles, e as aulas foram se tornando um pouco mais “barulhentas” sem, entretanto, chegar a atrapalhar o seu andamento. As aulas ocorriam dentro do espírito descrito no início desta seção, a partir de exemplos da aula de física, de “problemas reais”, ou como a formalização de regras ou demonstração de teoremas. Muitas vezes o professor iniciava a aula colocando aos alunos questões que levariam ao assunto sobre o qual ele queria falar.

No entanto, as aulas expositivas não eram a regra geral com o professor Sérgio, que durante algumas delas orientava os alunos a se reunirem em duplas para resolver exercícios propostos por ele. O professor dava assistência às duplas que tinham dúvidas. Normalmente, ao fim dessas aulas, alunos iam ao quadro para resolver os exercícios.

Dentre as aulas na sala de aula convencional, uma em particular chamou minha atenção pelo nível de envolvimento de toda a turma. O professor iniciou-a ditando o seguinte problema:

Uma rede de água potável deve ligar uma central de abastecimento situada à margem de um rio de 500m de largura até um conjunto habitacional situado na outra margem do rio, 2000m abaixo da central. O custo da obra através do rio é de R\$640,00 por metro, enquanto o custo da obra por terra é R\$312,00. Qual a forma mais econômica de se instalar a rede de água potável?

Esse problema é um dos mais clássicos em cursos de Cálculo. O diferente nessa aula foi a participação entusiasmada de quase todos os alunos da turma na busca de uma solução. Cada um que tinha uma idéia diferente ia ao quadro-negro para apresentá-la para a turma. Os colegas, juntamente com o professor, avaliavam a idéia do aluno para aceitá-la ou descartá-la, utilizando, por exemplo, argumentos geométricos e calculadoras. Eles iam tentando alternativas, sem, entretanto, usar recursos do Cálculo para resolver o problema. Diante da idéia de um aluno, de considerar uma situação intermediária entre a ligação somente pelo rio e a ligação por terra que atravessava o rio perpendicularmente, o restante da turma não sabia como encontrar tal ponto intermediário. O professor disse que o Cálculo determinaria esse ponto e calculou a função custo da obra em função de incógnitas por ele escolhidas. A partir daí a turma esfriou, mas os alunos continuaram a ajudar o professor a resolver o restante do problema.

Percebo, nessa cena, uma tentativa de quebra, ou uma quase quebra do estilo tradicional de aulas. Havia uma mobilização geral para realização da tarefa de uma forma mais investigativa, permitindo que possíveis soluções fossem tentadas, avaliadas, aceitas ou recusadas. Mas, de repente, diante do impasse, eles voltaram para o estilo tradicional para buscar uma solução segura.

Outras cenas típicas do estilo de aula tradicional surgiam, quando se aproximava a data de alguma prova: os alunos faziam exercícios, desesperadamente, procurando o professor para tirar dúvidas. Ele dava dicas e alertava para possíveis questões e, como não poderia deixar de ser, havia um grande nível de tensão.

Em algumas das aulas convencionais, eram feitas referências às aulas no laboratório de informática, mas isso normalmente acontecia como uma recordação de algum resultado obtido lá e que estava sendo necessário no momento. Passemos, então, à discussão sobre as aulas no laboratório de informática.

6.1.2. Laboratório de Informática

Das 17 aulas do professor Sérgio a que eu assisti, 5 aconteceram no laboratório de informática, onde havia, aproximadamente, 30 computadores, dispostos em duas filas com cinco bancadas em cada e três computadores em cada bancada. Nem todos os computadores estavam disponíveis para uso como, por exemplo, o administrador da rede. Os computadores estavam dispostos de tal forma que os alunos, ao se sentarem diante deles, ficavam de frente para a tela de projeção, que se encontrava à frente do laboratório e a cujo lado havia um quadro branco. Havia um projetor pendurado no teto e um tablado na frente da sala, abaixo da tela de projeção e do quadro branco.

O programa, ou *software*, usado nas aulas do laboratório era o Maple (Maple, 1997), bastante sofisticado quanto aos recursos de que dispõe. Arrisco-me a dizer que todos os algoritmos normalmente executados em um curso de Cálculo podem ser realizados por esse *software*: cálculo de limites, derivadas, integrais. Ele também efetua cálculos mais elementares (somas, multiplicações etc.), tanto numérica quanto algebricamente, esboça gráficos em duas e três dimensões, resolve equações, equações diferenciais etc.. É possível também desenvolver pequenos programas por meio do Maple. A lista de recursos é bastante grande e, certamente, não será possível descrevê-la toda aqui, mas é importante ressaltar que penso ser possível discutir todo o conteúdo de um curso de Cálculo com o apoio desse *software*.

Entretanto, como todo recurso tecnológico, o Maple possui limitações. Já apontei uma delas em Araújo (2000) e a discutirei com mais detalhes no capítulo seguinte: trata-se de uma forma diferente da usual de representar graficamente a descontinuidade de uma função em um ponto. Quando uma função tem uma descontinuidade em um ponto, do tipo que os limites laterais da função nesse ponto existem mas são diferentes, o Maple constrói um segmento de reta vertical, ligando os dois pontos no plano cartesiano, o que causa uma impressão de continuidade. O *software* tem outras limitações e várias delas foram descobertas pelos alunos durante as aulas no laboratório, sendo que algumas delas já eram de conhecimento do professor.

Talvez não seja adequado denominar essas características do Maple de “limitações” do *software*. Gracias e Borba (2000), ao apresentarem um estudo que envolvia alunos trabalhando com calculadoras gráficas, discutem como as características, que normalmente são tidas como limitações dessa *mídia*, podem ser exploradas como possibilidades. A primeira palavra que vem à mente, em situações como essa, é limitações, porque o *software* apresenta diferenças, diria até inconsistências, com relação à *mídia* lápis-e-papel. Essas diferenças proporcionam ricas discussões matemáticas, como as apontadas no trabalho citado acima e que, portanto, podem ser encaradas como estímulo à discussão e não como limite. Além disso, o interesse de minha pesquisa recai, também, sobre esses tipos de discussões.

A primeira aula no laboratório foi, para a maioria dos alunos, o primeiro contato com o *software* Maple. Sendo assim, o professor propôs atividades mais elementares, de tal forma que os alunos comesçassem a compreender-lhe o funcionamento. Havia sempre um aluno no computador que estava ligado ao projetor, para que os colegas acompanhassem e conferissem o que estava sendo feito. Às vezes, o professor pedia a esse aluno para fazer alguma coisa em particular, que ele queria falar para a turma toda, e, então, o aluno tornava-se uma espécie de auxiliar do professor, e não tinha muita liberdade para explorar as

atividades que lhe eram propostas. A inexperiência da maioria da turma, aliada à rapidez do computador e do professor, causou um certo mal-estar em alguns alunos-sujeitos desta pesquisa. Podemos perceber isso na fala de Laura:

Eu não entendo muito de computadores, não manjo muito, então ... eu precisava me esforçar mais ainda pra usar o computador. Que nem a gente já teve aula de Cálculo no computador, tudo muito rápido, o gráfico aparece na hora, assim. Mas eu preciso me familiarizar, sei lá ... com os comandos, com as coisas. Porque eu acho que, às vezes, eu demoro mais pra entender, pra fazer o comando, do que se eu fosse fazer na mão mesmo.

Na maioria das aulas, já havia, nos computadores, um arquivo com o assunto daquela aula. Nesses arquivos, era possível encontrar dados históricos sobre o Cálculo, teoria, exemplos resolvidos, exercícios propostos, algum roteiro para um tipo específico de exercício etc.. Em muitas das aulas, o professor seguia o que estava no arquivo, a partir do que o aluno, cujo computador estava ligado ao projetor, fazia, para ajudar o restante da turma a realizar nos respectivos computadores as tarefas propostas. Assim, o esquema dessas aulas era o seguinte: um aluno no computador ligado ao projetor, o professor em cima do tablado, falando o que deveria ser feito, apontando os resultados na tela e os alunos fazendo “a mesma coisa” em seus computadores.

A expressão “a mesma coisa” está entre aspas, acima, porque, simplesmente, era impossível todos seguirem o mesmo ritmo. Eu relatei essa percepção em minhas notas de campo:

Vejo que aula expositiva não combina com laboratório de computadores, porque se os alunos estão fazendo junto com o professor, todos trabalham em velocidades diferentes e cada um está em um ponto diferente. Se o professor fala sem que os alunos façam, como está tudo pronto em um arquivo, o professor vai mais rápido e os alunos não conseguem acompanhá-lo. (nota de campo, 17/05/1999).

Além de trabalharem em ritmos diferentes, às vezes os próprios caminhos seguidos por cada aluno eram diferentes, por mais que o professor tentasse uniformizar a turma com um roteiro, por exemplo. Acontecia de algum aluno interessar-se por um detalhe do exercício e deter-se nele, desistindo de acompanhar o professor; acontecia de alguém abrir

outro programa, ou acessar a Internet, por exemplo, e se entreter por lá, e cada um seguia em seu ritmo.

Acredito que, com essa descrição, eu tenha apontado as principais características das aulas do professor Sérgio. Apesar de já ter feito alguma análise no decorrer da descrição, o objetivo, nesta parte, era apenas tentar retratar o contexto no qual os dados da pesquisa foram coletados. Na seção seguinte, descreverei a proposta de projetos de Modelagem Matemática do professor, procurando analisá-la à luz do estudo desenvolvido nos capítulos 2 e 3.

6.2. O Projeto de Modelagem Matemática

O terceiro e último momento do curso de Cálculo do professor Sérgio, que descrevo aqui, são os projetos de Modelagem Matemática. Com relação à proposição dessa atividade, observei que as explicações do professor sobre os projetos de Modelagem nem sempre eram claramente compreendidos pelos alunos. Eles diziam não entender “o que o professor queria”. Decidi, então, apresentar o que, a partir da minha perspectiva, o professor disse (subseção 6.2.1.) e o que os alunos escutaram (subseção 6.2.2.). Depois dessa apresentação, faço uma análise da perspectiva de Modelagem Matemática do professor Sérgio.

6.2.1. O que o professor disse

O professor Sérgio solicitou aos alunos, desde o início das aulas, que escolhessem ou elaborassem um problema de sua área de trabalho (ou de interesse) para nele trabalhar durante todo o semestre. Os alunos deveriam reunir-se em grupos para buscar uma função real $f(x)$ que aparecesse no seu dia-a-dia. Foi-lhes sugerido que procurassem dados em experimentos realizados em outras disciplinas ou em jornais, revistas etc.. O objetivo, segundo o professor, era que os alunos levassem para a aula de Cálculo I algo pertencente às suas vidas para que criassem, discutissem, descobrissem fatos novos etc., trazidos pelo problema ou situação escolhida por eles, utilizando-se, para isso, dos conceitos de Cálculo e do *software* Maple.

O professor falava dessa função de diversas maneiras: função real, função do dia-a-dia, função originada de um problema real, função da vida real ou função do cotidiano.

Na primeira vez em que o professor se referiu aos projetos de Modelagem, solicitou que cada aluno levasse uma proposta, de acordo com o que ele havia explicado sobre o projeto, pois, inicialmente, o projeto era individual. Depois que os alunos levaram suas propostas e que o professor as devolveu com comentários, ele propôs então que os alunos se reunissem em grupos de 3 ou 4 componentes, pedindo-lhes para optar entre grupos escolhidos por eles mesmos ou grupos baseados em semelhanças entre os projetos individuais. Os alunos preferiram se agrupar de acordo com a amizade entre eles.

Com relação a esse processo inicial, tenho algumas observações a fazer. Segundo o professor, no semestre anterior os projetos tinham sido individuais. Devido ao meu interesse, conversei com ele sobre a possibilidade de desenvolver os projetos em grupos. Ele aceitou a proposta e pediu a minha opinião sobre o número de componentes em cada grupo. Concluimos que três seria um bom número e ele falou, na turma, que esse número poderia ser, no máximo, quatro. A maioria dos grupos ficou com quatro componentes. Também sugeri ao professor a importância de uma apresentação oral final de todos os grupos. Na nossa conversa, mais ou menos no meio do semestre, ele ficou de pensar na proposta. Por fim, ele acabou aceitando meus argumentos e combinou com a turma que haveria uma apresentação oral no fim do semestre.

Depois dessas negociações, estava estabelecido, então, que os alunos desenvolveriam os projetos em grupos de 3 ou 4 componentes e que haveria uma apresentação final para toda a turma. A maior parte dos projetos era desenvolvida fora da sala de aula. Às vezes, no decorrer das aulas, o professor fazia algum comentário sobre eles, ou dava alguma informação sobre datas etc.. O professor se colocava à disposição dos alunos para discutir os trabalhos, desde que um horário fosse agendado com ele. Devido à minha pesquisa, o professor sempre lembrava a turma de que eu precisava de grupos voluntários para serem acompanhados durante o desenvolvimento dos projetos. Procurei deixar bem claro qual era o meu objetivo ao acompanhar esses grupos, mas optei por detalhar as informações depois que eu tivesse obtido os grupos.

Com relação ao que seria desenvolvido nos projetos, o professor Sérgio falava sobre a função e enfatizava o que deveria ser feito com ela: trabalhar o conteúdo do Cálculo usando o *software* Maple. Ele pretendia que os grupos realizassem um estudo da função por meio de cálculo de limites, derivada, determinação de pontos de máximo e de mínimo, de intervalos de crescimento e de decrescimento, concavidade do gráfico, cálculo de integrais etc.. Ou seja, ele pretendia que os grupos usassem o conteúdo da disciplina e o Maple para estudar a função. Além disso, ele solicitava que os resultados obtidos fossem interpretados no contexto da situação real que deu origem à função.

Vejamos, agora, como foi a reação dos alunos diante dessa proposta do professor.

6.2.2. O que os alunos escutaram

Na entrevista inicial que realizei com os alunos participantes da pesquisa, conforme afirmei no capítulo 5, uma das questões dirigia-se, especificamente, ao projeto de Modelagem Matemática que eles deveriam desenvolver: *O professor pediu que vocês fizessem um trabalho para o final do curso. O que você entendeu sobre esse trabalho?*

Os alunos tiveram muitas dúvidas com relação ao que eles deveriam fazer. Isso pôde ser percebido, por exemplo, na fala de Pedro:

... a gente não sabia o que era bem que ele queria, que tipo de coisa deveria ser. A gente tinha que pôr a função, só propor ou ... ou o problema. A gente não tava entendendo. Isso eu percebi em todo mundo. E assim, no meu caso, eu peguei um livro de Cálculo, olhei os problemas que tinham função, aí eu peguei ... vi alguma coisa parecida do dia-a-dia e coloquei.

Pelo que pude perceber nas entrevistas, esse tipo de atividade era novidade para todos os alunos, o que explica, parcialmente, a dúvida inicial apontada por Pedro. Mas, a novidade maior, acredito, era o fato de terem de propor algo sem uma explicação detalhada pelo professor. Em outras palavras, o projeto era uma atividade bem aberta, se comparada, por exemplo, com suas atividades no Ensino Médio.

A maneira como foi proposto o trabalho, primeiro individual e depois em grupos, e o fato de eles terem de entregar uma proposta logo no início, também causou dúvidas entre os alunos, como podemos verificar pela fala da Paula:

O que eu entendi? Ah ... eu não sei ... foi um trabalho meio ... jogado. Porque a gente entrou, acho que no primeiro dia ou no segundo dia que a gente teve de aula com ele, ele falou: “ah, ... entrega uma função da vida cotidiana pra mim, né? Tragam ... é pro final do semestre”. Aí eu perguntei pra ele e ele falou “não, é pra semana que vem” ... uma coisa assim. Daí a gente fez, assim ... de um dia pro outro. Fizemos e entregamos pra ele.

Martha deu a seguinte interpretação para a proposta do professor:

... demorei pra entender que ele quer que a gente aprenda a pensar pra resolver problemas do dia-a-dia. Então ele não quer que a gente coloque uma funçãozinha qualquer, ele quer que a gente monte um problema, mesmo que tenha várias funções dentro ... pra gente conseguir resolver problemas do dia-a-dia.

Com essa fala, Martha parece expressar o sentido que o professor planejava dar ao projeto de Modelagem Matemática, mas demorou a entender isso, como ela mesma afirmou. Interpreto a situação dessa forma porque, durante suas aulas, o professor sempre se referia às condições que os alunos iriam encontrar do lado de fora da universidade, mencionando o mercado de trabalho como um local no qual eles tinham de resolver problemas. Juntamente com essa preocupação havia, também, na proposta dos projetos, a preocupação com o conteúdo da disciplina, e os alunos apreenderam esse fato, como podemos verificar na fala da Valéria:

Que eu preciso estudar uma função, né? Procurar uma função do ... do meu cotidiano e estudar. Achar derivada, achar pontos de máximos, de mínimos e ... achar limites, se tiver. Isso ... estudar uma função como a gente estuda na sala de aula, que ele passa uma função e a gente tem que estudar. Desenvolver ela totalmente, achar domínio, tudo. Isso sim, mas agora, pra escolher a função, eu acho que vai ser o pior.

Valéria expressa, no final dessa fala, a preocupação em encontrar a função em que se basearia o projeto de seu grupo. Vários dos outros participantes da pesquisa também tinham essa preocupação e todos estavam aguardando a discussão com o grupo para tomar alguma iniciativa.

Em síntese, podemos dizer que o professor propôs a atividade de Modelagem Matemática de uma maneira bem aberta: “busquem uma função real de seu dia-a-dia e utilizem o Cálculo e o Maple para discutir o problema ou situação real escolhida”. Essa forma de proposição, aliada à mudança de forma de seu desenvolvimento (de individual para em grupo), causou uma série de dúvidas nos alunos. Eles não estavam acostumados a lidar com atividades propostas da maneira como o foi, e tentavam obter do professor informações para compreender o que ele realmente queria. Os alunos foram, aos poucos, compreendendo como o trabalho deveria ser feito e qual era o objetivo da proposta.

Passarei, agora, a uma discussão sobre a perspectiva de Modelagem Matemática na Educação Matemática do professor Sérgio.

6.2.3. Uma análise da perspectiva de Modelagem Matemática do professor

No capítulo 2 apontei dois aspectos que podem ser preponderantes no entendimento das diversas perspectivas de Modelagem Matemática na Educação Matemática: o contexto no qual os projetos de Modelagem são desenvolvidos e a compreensão que se tem do “problema da realidade”, aliada a todas as questões apontadas naquele capítulo.

De acordo com a proposta do professor Sérgio, os alunos, reunidos em grupos, deveriam buscar uma função do seu dia-a-dia. Ele tinha o objetivo de que os alunos levassem para a aula de Cálculo I algo pertencente às suas vidas e que criassem, discutissem, descobrissem fatos novos trazidos pelo problema ou situação escolhida por eles, utilizando-se para isso dos conceitos de Cálculo e do *software* Maple. Entretanto, a partir dos esclarecimentos dados aos alunos no decorrer do semestre, pude perceber que existiu uma grande ênfase no conteúdo matemático, assim como no *software*, procurando seguir de perto o que ocorre normalmente na disciplina Cálculo.

Como compreender essa situação? Na análise que fiz sobre as aulas do professor Sérgio na seção anterior, constatei aspectos comuns ao estilo tradicional, como, por exemplo, aulas expositivas, tensão quanto às provas, dentre outros, assim como inovações quanto a esse estilo, como a preocupação em estabelecer relações entre a matemática e outras áreas do conhecimento, o não seguimento da ordem normalmente dada ao conteúdo etc.. Acredito que é esse também o caso aqui. Se por um lado o professor Sérgio buscava atividades mais inovadoras, por outro, a instituição, e talvez sua formação, assim como a formação dos alunos, levavam-no para uma prática mais próxima da tradicional. Pode ter acontecido, portanto, uma adaptação da perspectiva de Modelagem Matemática ao contexto em que ela estava inserida.

Consideremos, então, a questão do problema da realidade. Como já afirmei no capítulo 2, não basta estudar os relatos apresentados pelo professor, nem considerar a “definição” de Modelagem Matemática que ele apresenta para compreender qual é a relação entre matemática e realidade subjacente à perspectiva dele. Sendo assim, para tentar compreendê-la, considerarei como parâmetro, em princípio, a perspectiva de Modelagem adotada nesta pesquisa, qual seja, uma abordagem, por meio da matemática, de um problema não-matemático da realidade, ou uma situação não-matemática da realidade,

escolhida pelos alunos reunidos em grupos, de tal forma que as questões da Educação Matemática Crítica embasem o desenvolvimento do trabalho.

Há pontos em comum entre a perspectiva que adoto e aquela adotada pelo professor no 1o. semestre de 1999: os alunos trabalharam reunidos em grupos, os grupos escolheram a situação a ser abordada matematicamente e, levando em conta a ressonância entre enfoque didático-pedagógico e visão de conhecimento (Borba & Penteado, 2001), a Modelagem Matemática foi associada às tecnologias informáticas. Entretanto, não posso concluir tão diretamente sobre a presença das preocupações da Educação Matemática Crítica apontadas por Skovsmose (2000a). Duas delas, de certa forma, podem ser citadas: a consideração dos interesses e competências dos alunos para o desenvolvimento do conhecimento e aprendizagem e a Educação como preparação para a cidadania e participação na vida social e política.

Como os grupos foram responsabilizados pela escolha das situações e pelo desenvolvimento dos projetos, sem uma grande interferência do professor, acredito que os interesses e as competências dos alunos são ressaltados. Com relação à preparação para a cidadania, existe a preocupação do professor com o que os alunos podem encontrar do lado de fora da universidade. Apesar de mencionar algumas vezes a preocupação com as exigências do mercado de trabalho, não posso concluir que esta seja a única preocupação do professor, visto que ele também levava questões de cunho social (p. ex. consumo de drogas, ecologia, dentre outras) para a sala de aula. Sendo assim, não posso afirmar que o professor Sérgio subordina, totalmente, a educação às exigências do mercado de trabalho.

Cabe ressaltar, aqui, que o objetivo desta pesquisa não é avaliar a perspectiva de Modelagem Matemática do professor da turma na qual a coleta de dados foi realizada. A análise que apresento tem por objetivo dar a essa perspectiva um tratamento semelhante ao dado, no capítulo 2, a outras perspectivas de Modelagem Matemática na Educação Matemática, com o intuito de compreendê-la. Repetindo o que afirmei no início dessa subseção, não é a partir da observação de algumas aulas ou de algumas palavras do professor que será possível efetivar uma “análise completa” da perspectiva dele. Retomo, então, o destaque que Borba e Skovsmose (1997) e Skovsmose (2000a) dão ao estilo da comunicação na sala de aula. É meu interesse, isso sim, o surgimento (ou não) das questões referentes à Educação Matemática Crítica durante o desenvolvimento dos projetos de Modelagem pelos grupos. E isso será o foco no capítulo seguinte, em que os dados da pesquisa serão apresentados.

Até este ponto do capítulo, apresentei o contexto em que os dados desta pesquisa foram coletados, ou seja, contei uma história, já que a todo momento fiz referências às personagens, que me ajudaram a contá-la. Passo, agora, a apresentá-las.

6.3. As Personagens desta História

À medida que fui descrevendo o contexto no qual os dados foram coletados, coloquei alguns depoimentos dos alunos participantes da pesquisa. Estes, certamente, são os protagonistas desta história. Neste capítulo, entretanto, a participação deles foi pequena, quantitativamente falando, já que dediquei mais tempo à caracterização do curso ministrado pelo professor Sérgio. A participação maior dos alunos será descrita e analisada no capítulo seguinte, quando apresentarei os episódios diretamente ligados à pergunta diretriz desta pesquisa. Mas existe uma outra personagem a ser mencionada aqui: a pesquisadora, ou seja, eu. Coloco-me como personagem da história porque estava presente no contexto e pela escolha da metodologia qualitativa de pesquisa, apresentada no capítulo 5. Passemos então à apresentação das personagens.

6.3.1. A pesquisadora

Não pretendo apresentar-me, com detalhes, aqui, neste momento. Considero que isso já foi feito de forma satisfatória no capítulo 1 desta tese. Minha intenção, ao colocar-me no rol das personagens da pesquisa, é chamar a atenção, mais uma vez, para a interação explícita, complexa e fundamental entre pesquisador e campo de pesquisa em uma pesquisa qualitativa.

6.3.2. O professor

Muito já foi dito sobre o professor Sérgio neste capítulo. Ao caracterizar suas aulas, como o fiz, é impossível não deixar transparecer características suas. Tenho a acrescentar apenas dois pontos a respeito dele.

O primeiro desses pontos é a disponibilidade do professor para receber pesquisadores, professores etc. em suas aulas, assim como em seu gabinete. Outros pesquisadores, antes de mim, já participaram de suas aulas. Temos, também, o exemplo do professor Carlos, de física, que também assistiu às aulas de Sérgio devido ao projeto desenvolvido por eles. O gabinete do professor está sempre de portas abertas para receber colegas, alunos, tanto atuais quanto de semestres anteriores, e outros curiosos que, porventura, apareçam.

O outro ponto a destacar é que trabalho do professor chama a atenção em seu departamento. Afirmo isso baseada em uma conversa informal com um outro professor do mesmo departamento do Sérgio. Esse outro professor disse que o professor tradicional pensa que o aluno não sabe nada e que cabe a ele, professor, a tarefa de entregar tudo para o aluno. Mas o professor Sérgio, segundo seu colega, pede aos alunos para trazer coisas para a sala de aula, para mostrar o que sabem. “O Sérgio consegue fazer com que os alunos tragam coisas”, afirmou ele. Certamente não posso afirmar ser essa uma opinião generalizada no departamento dele, mas, esse depoimento espontâneo revela, de alguma forma, uma influência positiva em seu meio.

6.3.3. Os grupos

Como relatei no capítulo 5, após um mês, aproximadamente, de observações das aulas, dois grupos se ofereceram para participar da pesquisa. Esses grupos serão denominados, respectivamente, de Grupo 1 e Grupo 2.

O Grupo 1 era composto por quatro alunas: Laura, Martha, Paula e Valéria. O Grupo 2, por três alunas e um aluno: Marília, Pedro, Gizele e Fernanda.

Apresentarei, a seguir, o que denominei “retrato escrito” de cada uma dessas personagens. Os textos foram elaborados com base nas entrevistas iniciais e finais dos alunos e no questionário que eles responderam no início da disciplina. A transcrição dessas entrevistas, assim como o questionário que os alunos responderam encontram-se em anexo.

Retrato escrito de Laura

Laura era aluna do curso de Engenharia Química. Tinha 17 anos na época da pesquisa, é de uma cidade do interior de São Paulo, cursou parte do Ensino Fundamental em uma escola pública e a maior parte do Fundamental e todo o Ensino Médio em escola particular. Ingressou na universidade no 1º semestre de 99, através do vestibular.

Laura relatou que a matemática era dividida em três disciplinas em seu Ensino Médio: Geometria Analítica, Trigonometria e uma terceira, que tratava de funções, dentre outros tópicos. Ela não gostava muito de um professor, que tinha o quadro-negro desorganizado, não seguia a apostila, não fazia exercícios em aula e não “controlava” a classe. Em Cálculo, tudo era novidade para Laura, apesar de suas experiências com os pré-requisitos dessa disciplina não terem sido muito agradáveis. Entretanto, ela gostava do jeito do professor Sérgio tratar a classe. Para Laura, as aulas de Cálculo estavam sendo muito rápidas e ela tinha de pensar muito ao mesmo tempo e estudar bastante sozinha. Mas ela

afirmava que era esse mesmo o estilo de faculdades e que, se não fosse assim, como o professor poderia vencer todo o programa?

Laura acreditava que o computador auxilia nas aulas de Cálculo, apesar de não entender muito deles. Ela também achava muito rápidas as aulas no laboratório de informática, mas acreditava que, com a prática, ela iria se acostumar e que o computador iria ajudá-la. Para Laura, o fato de “ver” a matéria duas vezes (uma vez na sala de aula convencional e outra no laboratório de informática, não necessariamente nessa ordem), era muito bom, pois a ajudava a entender melhor a matéria.

Para Laura foi difícil entender o que era o projeto de Modelagem. Ela acreditava que o professor queria uma função que desse para trabalhar bastante e era difícil encontrar uma, do cotidiano, que satisfizesse essa exigência. Ela teria de encontrar *alguma coisa que existisse* para fazer tudo o que o professor fazia em sala com as funções dadas por ele. Laura estava contando com o grupo para pensar e tomar decisões sobre o projeto.

Após essa parte mais oficial da entrevista, Laura decidiu fazer um desabafo sobre suas experiências com Cálculo I. Ela estava preocupada com seu rendimento e acreditava que o nervosismo a tinha feito não se sair bem na primeira prova. A frustração era grande, pois ela sempre fora boa aluna e as coisas estavam diferentes naquele momento. Laura contou-me que uma professora do ciclo profissional de seu curso tinha alertado a turma sobre as consequências de reprovação em Cálculo I, mas que os tranquilizou, dizendo que isso era normal devido à adaptação à nova vida, à universidade e ao fato de eles ainda não se terem organizado para estudar. Esses comentários, juntamente com outros feitos por alunos veteranos sobre a mesma disciplina levaram Laura a sentir-se preocupada, o que perturbou seus estudos. Ela afirmou que embora estivesse aprendendo a matéria, tinha se saído mal na prova devido a essas preocupações.

Na entrevista final, ao ser perguntada sobre a relação entre o trabalho de Modelagem e a disciplina Cálculo I, Laura afirmou que o professor queria avaliar tudo que havia dado na disciplina e que, portanto, o trabalho tinha de englobar tudo. Quanto ao papel do computador, Laura enfatizou a visualização e os “enfeites” que ele viabilizava. Ela afirmou que o computador ajudou, também, na compreensão do conteúdo. Laura avaliou como positiva a experiência de desenvolver o projeto de Modelagem, pois era possível “ver a matemática na prática”. Quando falava em prática, ela se referia tanto ao projeto, quanto ao computador, afirmando que, anteriormente, o professor falava, ela copiava, decorava, mas não visualizava e que agora ela tinha de pensar e estudar, o que a levava ao aprendizado.

Sobre a participação na pesquisa, Laura afirmou que a presença da câmera a incomodou muito, levando-a, inclusive, a pensar em desistir. Mas sua boa vontade em

ajudar na pesquisa a fez prosseguir. Ela afirmou, também, que seu grupo se sentia na obrigação de fazer mais coisas, de tentar fazer melhor, e que elas tinham a preocupação de se programar devido à participação na pesquisa.

Retrato escrito de Martha

Martha era aluna do curso de Engenharia Química. Tinha 18 anos na época da pesquisa, veio de uma cidade do interior de São Paulo, onde cursou o Ensino Fundamental e Médio em escola particular. Ingressou na universidade no 1º semestre de 99, através do vestibular.

Para Martha, a matemática do Ensino Médio foi importante para sua aprovação no vestibular. Ela afirmou que teve algumas noções de Cálculo no cursinho, mas sem muito aprofundamento, e que estava acompanhando a disciplina sem dificuldades. Martha disse que só se sentiu segura na disciplina depois de estudar a matéria pelo livro, o qual a trazia em uma determinada seqüência. Ela gostava do estilo do professor Sérgio, com suas idas e vindas, como ela mesma disse, mas fazia questão de estudar, depois, pelo livro.

Martha se mostrou fascinada por computadores, afirmando que tinha facilidade com o Maple. Para ela, o computador dá uma resposta para a pergunta: por que você estuda matemática? Segundo Martha, foi na aula do laboratório que o professor deu um exemplo mais aberto que, para ela, tinha um fundamento e justificava o estudo de matemática. Para Martha, há matemática aplicada no computador e é mais fácil quando se usa o computador em alguma aplicação da matemática. Ela afirmou que o computador tem um programa com determinada finalidade, o que faz com que *you know where you are going to*. Questionada sobre essa última afirmativa, Martha disse que, no papel, não sabemos se o que fazemos está certo ou errado, o que não ocorre no computador, onde há menos chance de errar, e que, portanto, é possível ter uma visão mais geral, sem a preocupação com detalhes de cálculos. Continuando a comparação entre papel e computador, ela afirmou que com papel os procedimentos são meio automáticos, enquanto com o computador, é preciso pensar.

Sobre o projeto de Modelagem, Martha afirmou ter demorado, mas entendera o desejo do professor de que os alunos aprendessem *to think for yourself*. Ela também afirmou que iria aguardar as outras componentes do grupo para tomar decisões.

Na entrevista final, Martha afirmou que o trabalho de Modelagem tinha sido muito importante para ela entender a matéria e o Maple. Eu pedi-lhe para dar um exemplo de como isso ocorrera e ela citou o sólido de revolução. Martha disse ter dificuldades para enxergar figuras tridimensionais e que o Maple a tinha ajudado muito. Segundo suas

palavras, era *uma coisa mais concreta*. Para Martha, o projeto de Modelagem foi uma revisão geral da disciplina. Como na primeira entrevista, ela enfatizou a importância do computador para a visualização e para a despreocupação com cálculos.

Martha contou que houve uma certa disputa entre os grupos durante o semestre com relação aos trabalhos de Modelagem. Segundo ela, os grupos se isolaram para evitar cópias de idéias. Ela avaliou como muito positiva a experiência de desenvolver o projeto, enfatizando a importância de sua apresentação para a turma.

Com relação à participação na pesquisa, Martha afirmou não ter gostado muito no início devido às filmagens, mas que, com o desenvolvimento do trabalho, ela foi ficando mais descontraída. Confirmando o depoimento de Laura, ela também falou do compromisso de marcar horários e tentar fazer um trabalho de qualidade devido à pesquisa. Por outro lado, afirmou que a participação deixou o grupo mais empolgado.

Retrato escrito de Paula

Paula era aluna do curso de Engenharia Química, com 16 anos na época da pesquisa, procedente de uma cidade do interior de São Paulo. Coursou o Ensino Fundamental e Médio em escola particular. Ingressou na universidade no 1º semestre de 99, através do vestibular.

Ao comparar a matemática do Ensino Médio com o Cálculo na universidade, Paula destacou a organização da disciplina. Segundo ela, no Ensino Médio a matemática era dividida em várias disciplinas, enquanto no Cálculo, era tudo misturado. Paula afirmou que gostava muito do professor Sérgio, do seu estilo de voltar aos mesmos assuntos, mas achava que ele corria muito com as aulas. Ela gostaria que o ritmo fosse mais lento, como no Ensino Médio, quando os professores estavam mais próximos dos alunos. Entretanto, Paula se confessou surpresa quanto ao relacionamento entre professores e alunos na universidade. Ela ingressou no curso superior com a impressão de que haveria um relacionamento frio entre as pessoas e isso acabou não acontecendo.

Quanto ao conteúdo, Paula afirmou ter tido alguma noção de Cálculo no Ensino Médio mas que, mesmo assim, tinha ficado muito nervosa na primeira prova. Ela disse que todo mundo assusta os alunos de Cálculo.

Apesar de Paula não ter muita experiência com computadores, achava bom que eles fossem usados na escola. Para ela, depois de se formarem, as pessoas não vão ter tempo para ficar fazendo cálculos e é importante adquirir alguma familiaridade com *software* matemáticos. Sobre as aulas no laboratório de informática, Paula falou, novamente, da “aula corrida” do professor, afirmando que ela via os resultados, mas que não tinha tempo pra

pensar. Ela só conseguiu trabalhar melhor com o computador depois de fazer um trabalho que o professor tinha pedido. Aí, segundo ela, não tinha o professor do lado, dizendo o que deveria ser feito.

Sobre o projeto de Modelagem, Paula ficou um pouco confusa, no início, devido à maneira como o professor encaminhou as atividades (primeiro uma proposta individual, depois o projeto em grupo). Ela entendeu que era para levar uma função simples do cotidiano, mas só depois descobriu que isso deveria ser feito no computador.

Não houve entrevista final com Paula.

Retrato escrito de Valéria

Valéria era aluna do curso de Engenharia Química com 18 anos na época da pesquisa, procedente de uma cidade do interior de São Paulo. Coursou o Ensino Fundamental em uma escola pública e o Médio em escola particular. Ingressou na universidade no 1º semestre de 99, através do vestibular.

Ao comparar seu Ensino Médio com o Cálculo, Valéria destacou a adoção de livros-texto, relatando que, no Ensino Médio, os professores seguiam livros ou apostilas e os alunos não se preocupavam em buscar outras fontes, já que era no texto adotado que a prova seria baseada. Em Cálculo, entretanto, o professor tinha fornecido uma lista de referências, sem adotar nenhum livro, especificamente, o que dava ao aluno a liberdade de buscar os textos de sua preferência. Valéria apoiava essa segunda postura que, segundo ela, faz o aluno tornar-se mais independente, já que ele tem de *aprender a se virar*. Ela disse que estava acostumada a estudar dessa forma, porque trabalhava na biblioteca da escola e “tinha todos os livros em suas mãos”.

Sobre o uso de computadores, Valéria disse que tinha um pouco de dificuldade, pois o professor era muito rápido e ela não conseguia, simultaneamente, prestar atenção no que ele falava e trabalhar no computador. Segundo ela, a aula ficava muito dinâmica e ela não tinha tempo para pensar. Por outro lado, achava que isso seria um bom treino para aprender a fazer muitas coisas ao mesmo tempo. Valéria destacou, também, a vantagem da visualização no computador, afirmando que as aulas no laboratório e na sala de aula convencional se complementavam.

Com relação ao projeto de Modelagem, Valéria reclamou do prazo dado pelo professor para a apresentação da primeira proposta. Ela entendeu que era pra procurar uma função do cotidiano e estudá-la. Para ela, a parte mais difícil seria escolher a função. Em suas tentativas, Valéria disse que só encontrava funções polinomiais do primeiro grau, mas que, após algumas pesquisas, acabou tendo a idéia de trabalhar com a temperatura em

função das horas do dia². Ela pretendia reunir-se com o grupo para debater sobre como desenvolver o projeto.

Na entrevista final, Valéria afirmou que, para ela, o objetivo do trabalho era complementar o que tinham estudado em sala, aprender a lidar com o computador, aprender a *se virar sozinha*, aprender mais e pesquisar. Ela se mostrou entusiasmada quanto ao uso do computador no trabalho, afirmando que cada passo dado era uma conquista que a deixava feliz. Valéria ressaltou, novamente, a possibilidade de melhor visualização com o computador, a aprendizagem e a ajuda em cálculos difíceis. Segundo ela, no decorrer do semestre o seu medo de computador foi acabando e ele passou a ser um aliado na aprendizagem de Cálculo.

Ao final, Valéria destacou pontos que considerou importantes no desenvolvimento do projeto: o trabalho em grupo para pensar em uma função, elaboração de um texto, discussão com o professor, pesquisa, aprimoramento do trabalho, surgimento de idéias etc.. Para ela, desenvolver o projeto *foi um conhecimento a mais*.

Sobre a participação na pesquisa, Valéria também sentiu-se, inicialmente, intimidada pela câmera, mas afirmou ter-se acostumando. Ela gostou de um momento no desenvolvimento do projeto de seu grupo, quando comecei a fazer perguntas para o grupo³ como, por exemplo, “por que é assim?”. Valéria disse que eu estimulava seu grupo a pensar.

Retrato escrito de Marília

Marília era aluna do curso de Engenharia Química, com 19 anos na época da pesquisa, procedente de uma cidade do interior de São Paulo. Coursou a primeira série do Ensino Fundamental em uma escola pública e o restante do Fundamental e o Médio em escola particular. Ingressou na universidade no 1º semestre de 99, através do vestibular.

Marília acreditava que a matemática estudada no Ensino Médio era muito superficial se comparada ao que ela imaginava sobre Cálculo I afirmando que não tinha muito o que comparar, pois os conteúdos eram diferentes. Quanto ao andamento das aulas, achava que não havia muita diferença.

Sobre o uso de computadores, Marília afirmou ter um pouco de dificuldade, já que não os usara no Ensino Médio. Ela enfatizou a importância do uso *porque o mercado de trabalho exige que você tenha esse tipo de conhecimento*. Entretanto, para a matemática, Marília reconhecia o uso do computador como estranho. Ela acreditava que matemática é

² Essa função acabou sendo a inspiração para o trabalho do grupo de Valéria, como poderá ser constatado no capítulo seguinte.

³ Esse momento será analisado em um episódio no capítulo seguinte.

lógica, é conta, raciocínio, é *você escrevendo* e que no computador podemos desenvolver nosso raciocínio, mas ele já nos dá o resultado. É o computador que faz o trabalho e nós apenas apertamos teclas.

Com relação ao projeto de Modelagem, Marília entendeu que seu grupo deveria montar uma função relacionada com o dia-a-dia e fazer tudo dessa função. Esse “tudo” incluía descobrir o máximo, o mínimo, gráfico, entre outras coisas. Marília não estava certa sobre se o trabalho deveria ser feito à mão ou no computador.

Não houve entrevista final com Marília.

Retrato escrito de Pedro

Pedro era aluno do curso de Engenharia Química, com 18 anos na época, procedente de uma cidade do interior de São Paulo, onde cursou o Ensino Fundamental em uma escola pública e o Ensino Médio em uma escola particular; ingressou na universidade no 1º semestre de 99, através do vestibular.

Pedro, ao comparar suas aulas de matemática do Ensino Médio com as aulas de Cálculo I na universidade, destacou o tema “organização da aula”. Segundo ele, as aulas de Cálculo eram mais desorganizadas do que as aulas de matemática no Ensino Médio. Ele reclamou que o professor de Cálculo não seguia a ordem do livro, que não mantinha a turma informada quanto à localização da matéria no livro, que não dizia se a matéria tinha sido dada ou não e que não existia um acordo entre os professores quanto às datas das provas. Pedro disse que essa desorganização atrapalhava o seu planejamento de estudo, mas afirmou que não tinha dificuldades quanto ao conteúdo estudado.

Com relação ao uso de computador nas aulas de Cálculo, Pedro acredita que ele facilita as coisas e o vê como algo mais completo que as aulas, em que os efeitos dos problemas por ele detectados nas aulas são diminuídos.

Quanto ao trabalho solicitado pelo professor para o final do curso, Pedro afirmou não o ter entendido. Ele sabia que deveria encontrar uma função do dia-a-dia mas esperava que o professor falasse sobre essa função e sobre como ela deveria ser apresentada. Pedro reclamou, também, quanto ao desconhecimento, a princípio, da data de entrega do trabalho. Ele afirmou que percebia esse tipo de dúvidas em toda a turma. Por fim, Pedro escolheu uma função em um livro que, segundo seu julgamento, parecia com alguma coisa do dia-a-dia. Mesmo depois de escolher essa função, Pedro afirmou não estar entendendo o que deveria ser feito. Ele disse que o trabalho deveria ser feito em grupo, que todo o seu grupo tinha dúvidas sobre o trabalho e que os componentes pretendiam conversar para tomar decisões.

Em sua entrevista final, Pedro fez algumas críticas à maneira como a atividade de Modelagem aconteceu na disciplina. Ele criticou, primeiramente, a forma como o professor propôs a atividade, afirmando que se o trabalho era em grupo, então não deveria ter sido solicitada uma proposta individual, no início do semestre. Uma outra crítica se referia à solicitação do professor de que todo o conteúdo da disciplina fosse abordado no trabalho. Pedro afirmou que, se a proposta era considerar alguma situação do cotidiano, não havia razão para fazer cálculos que não tinham alguma interpretação ou significado nesse cotidiano. O seu grupo só seguiu a orientação do professor porque a atividade valia nota.

Segundo Pedro, seu grupo não teve dificuldades com relação ao Cálculo para desenvolver o projeto. A maior dificuldade deles foi com o Maple. Ele afirmou que o que eles aprenderam ao fazerem o trabalho foram os comandos desse *software*. Pedro destacou também o aprendizado promovido pelo trabalho em grupo, quando tomavam decisões em conjunto, argumentando para tentar convencer o colega etc..

Sobre a participação nesta pesquisa, Pedro afirmou que seu grupo tinha de ter tido mais responsabilidade, já que se haviam comprometido comigo. Entretanto, mesmo com o compromisso, às vezes eles não podiam esperar por mim para trabalhar no projeto, já que o tempo deles era curto e eles aproveitavam qualquer oportunidade.

Retrato escrito de Gizele

Gizele era aluna do curso de Engenharia Química, com 18 anos na época da pesquisa, procedente de Goiás. Coursou o Ensino Fundamental e Médio em escola particular. Ingressou na universidade no 1º semestre de 99, através do vestibular.

Para Gizele, no Ensino Médio as aulas eram mais detalhadas que em Cálculo, que ela tinha de estudar em casa para entender a matéria. Ela achava mais cômodo que a matéria fosse dada passo a passo, em sala, mas sentia-se recompensada por seus estudos em Cálculo. O conteúdo estava sendo novidade e ela afirmava estar gostando da matéria e do estilo das aulas do professor Sérgio.

Quanto ao uso de computadores, Gizele achava-o, “teoricamente”, bom, já que era uma necessidade profissional, mas tinha dificuldades para usá-lo e ficou um pouco perdida diante da rapidez do professor. Ela afirmou que só usava o computador quando o professor solicitava algum trabalho.

Sobre o trabalho de Modelagem, Gizele entendeu que era pra pegar uma função do cotidiano e “destrinchá-la” como o professor fazia nos exercícios. Ela planejava esperar pelo grupo para decidir sobre o que fazer.

Não houve a entrevista final com Gizele.

Retrato escrito de Fernanda

Fernanda era aluna do curso de Engenharia Química, com 18 anos na época da pesquisa, procedente de uma cidade do interior de São Paulo. Coursou o Ensino Fundamental em uma escola pública e o Médio em escola particular. Ingressou na universidade no 1º semestre de 99, na 4ª chamada do vestibular.

Fernanda afirmou sempre ter gostado de matemática e que achava necessário ter boa base para se sair bem em Cálculo. Ela estudou “derivada” no Ensino Médio, pois seu professor de física era formado em matemática e ele optou por usar esse conteúdo na cinemática. Mas, segundo Fernanda, esse professor não aprofundava o estudo, não considerando a definição de derivada, por exemplo, limitando-se a ensinar a regra de derivação de funções polinomiais. Para Fernanda, a grande diferença entre matemática do Ensino Médio e Cálculo era que, nesse último, eles iriam estudar assuntos que seriam aplicados no dia-a-dia e em suas profissões; e que no Ensino Médio ela não sabia qual era a utilidade daquilo que estava estudando. Perguntei-lhe se sabia qual era a utilidade daquilo que estava estudando e ela disse que tinha alguma idéia e citou o exemplo de um problema que o professor de Cálculo tinha apresentado em aula.

Sobre as aulas no laboratório de informática, Fernanda acreditava na importância de *aprender no computador, porque hoje em dia tudo vai ser no computador* e na facilidade, já que não precisava calcular nada e bastava saber os comandos. Por outro lado, achava que, para ela, era mais difícil entender a matéria com o computador, porque apenas dava um comando, mas não sabia o que estava sendo feito. Só depois de o professor explicar no quadro-negro é que ela entendia a matéria.

No que se refere ao trabalho de Modelagem, Fernanda entendeu que era para *fazer uma função do cotidiano* e achar tudo que o professor tinha dado em aula. Ela também não sabia como iria desenvolver o trabalho e ia aguardar o grupo.

Não houve entrevista final com Fernanda.

Encerro aqui a apresentação do contexto e dos participantes desta pesquisa. No próximo capítulo, darei início à apresentação e discussão dos dados.

Capítulo 7

Os Episódios

Apresento neste capítulo os episódios selecionados a partir das reuniões dos grupos desenvolvendo seus projetos de Modelagem Matemática em um ambiente computacional. As formas de escolha e de construção desses episódios já foram descritas no capítulo 5.

Como afirmei, também naquele capítulo, eu planejava, inicialmente, acompanhar todos os encontros dos dois grupos voluntários durante o desenvolvimento de seus projetos de Modelagem Matemática. Entretanto, no decorrer do semestre, isso logo se mostrou impossível de ser efetivado, já que morávamos em cidades diferentes e, muitas vezes, ocorreu de eles, repentinamente, decidirem fazer alguma reunião sem poder esperar que eu chegasse até lá para observá-la. Em duas ocasiões, quando isso aconteceu, uma de cada grupo, fiz uma espécie de entrevista coletiva na qual os grupos relataram e discutiram o que tinha ocorrido na reunião de que eu não pude participar.

Além dos desencontros, entre os dois grupos participantes da pesquisa, o grupo 1 mostrou-se mais compromissado em marcar os horários das reuniões comigo, o que foi determinante para eu ter uma quantidade muito maior de dados referentes a esse grupo. Apresento, então, quatro episódios retirados das reuniões do grupo 1, composto por Laura, Martha, Paula e Valéria; e um episódio do grupo 2, composto por Marília, Pedro, Gizele e Fernanda, seguidos do que denominei análise de primeiro nível.

7.1. Episódio 1 do Grupo 1: Imaginação e Realidade

Este episódio faz parte da primeira reunião do grupo 1 comigo. Nessa reunião as alunas componentes do grupo descreveram o que foi discutido na primeira reunião, em que elas começaram a fazer o trabalho proposto pelo professor e eu não estava presente. Nos primeiros minutos da reunião elas narraram como foi feita a escolha da função, objeto de estudo do trabalho. A situação escolhida foi a temperatura de uma cidade imaginária durante um dia em cada uma das quatro estações do ano. Elas construíram uma função para cada estação do ano e planejavam “ajuntar” de alguma forma estas funções em uma só, para representar a situação escolhida pelo grupo. Por não ser foco de interesse dessa pesquisa, não desenvolverei aqui uma análise da forma como o grupo construiu essa situação. Uma análise é realizada em Araújo e Barbosa (2001).

Neste episódio as alunas falaram sobre a função inventada por elas (a imaginação) e sobre uma possível função com dados reais (a realidade).

O episódio começa com as alunas explicando que a função tratada no projeto delas era imaginária, inventada por elas, e que o professor pediu para elas obterem dados “mais concretos”. Elas justificaram o procedimento dizendo que, com dados imaginários, elas poderiam obter um “gráfico perfeito” e que, se os dados fossem reais, o gráfico “oscilaria”. Elas iriam esperar pela ajuda do professor para trabalhar com uma função obtida a partir de “temperaturas reais”. Segue abaixo a transcrição dessa parte do episódio:

1a. parte

Jussara: Aí, como que vocês acharam essas temperaturas? Foi em algum livro?

As alunas: Não.

Laura: *Por enquanto essa é a cidade Sonho Meu ... a gente idealizou. Aí o professor falou pra gente que a gente tinha que pegar dados mais concretos.*

[Valéria esboça com o dedo, no ar, uma curva que oscila e afirma:]

Valéria: *Oscila, né?*

Laura: *É. Pra por junto no computador e o gráfico ficar certinho. Porque nosso gráfico tá perfeito.* [Desenha uma parábola côncava para baixo no ar com a mão]. *Tá assim redondinho.* [Traça alguns segmentos paralelos no ar, com a palma da mão].

Valéria: *Porque se for uma cidade assim, normal, sem ser Sonho Meu, o gráfico deve ... vai oscilar, vai variar* [desenha no ar, com o dedo, uma curva que oscila].

Martha: *Aí ele falou pra gente fazer desse jeito e pra gente ir falar com ele de novo pra ele ensinar pra gente como é que faz o gráfico ...*

Jussara: Tá. Então ...

Laura: *... com as temperaturas reais.*

Nessa passagem podemos perceber que as alunas estavam preocupadas em trabalhar com uma função cujo gráfico fosse conhecido delas. A atividade, como foi proposta pelo professor, era bem aberta, de tal forma que elas se sentiram à vontade para “decretar” que a variação da temperatura em uma cidade, inventada por elas, durante um dia, acontecesse segundo uma função polinomial do 2º grau. O nome dado à cidade, Sonho Meu, era usado pelo professor durante as aulas, quando queria falar de alguma cidade idealizada para descrever os problemas tratados em aula. As alunas previram que, se os dados fossem realmente coletados, por exemplo, através da medição da temperatura em uma cidade qualquer, durante vários instantes em um dia, elas poderiam obter um gráfico que não conheciam. Então, resolveram o problema buscando alguma função já conhecida

delas, para obter uma aproximação razoável. O computador, nesse ponto do trabalho, ainda não tinha sido usado. Elas planejavam desenhar o gráfico da função do trabalho no computador e usá-lo também para obter um gráfico para os dados reais que ainda iriam coletar. Para tanto, elas precisariam que o professor lhes ensinasse.

Dando continuidade ao episódio, as alunas afirmaram que determinariam a função, para cada estação do ano, a partir de três pontos (inventados por elas). Como eu não estava entendendo, Laura entregou-me o trabalho escrito e mostrou-me os dados e procedimentos. Laura reafirmou o que tinha sido dito anteriormente: que o gráfico obtido era perfeito, que ele poderia ser assim na cidade imaginária, mas que não deveria ser assim, como podemos perceber no diálogo que segue.

2a. parte

Jussara: Tá. Então vocês pegaram esses dados. Quantos ... quantos dados vocês têm?

Laura: *Temperatura máxima, temperatura ao meio-dia e a temperatura à meia-noite.*

Jussara: Deu quantos pontos?

Laura: *No gráfico?*

Jussara: Vocês pegaram dados discretos?

[Laura entrega para mim a 1ª versão do trabalho (anexo 16). Apresento abaixo o que estava escrito, à mão, nessa versão].

Verão

temperaturas $\begin{cases} \text{mínima : } 20^\circ \rightarrow 0 \text{ h} \\ \text{máxima : } 40^\circ \rightarrow 12 \text{ h} \end{cases}$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$12 = \frac{-b}{2a}$$

$$b = -24a$$

$$b = -24 \left(\frac{-5}{36} \right)$$

$$b = \frac{10}{3} \approx 3,333$$

$$y = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$40 = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$160a = -576a^2 + 80a$$

$$576a^2 = -80a$$

$$a = \frac{-5}{36} \approx -0,139$$

$$f(x) = \frac{-5}{36} x^2 + \frac{10}{3} x + 20$$

Martha: *A gente pegou os pontos. Três pontos.*

[Laura vai me mostrando, no trabalho: “*temperatura máxima, temperatura mínima, o x do vértice, o y do vértice, aí a gente deu o c também.*”]

Martha: *Porque o c seria a temperatura mínima à meia-noite que é 0 horas, 24 horas.*

Laura: *É. Aí fizemos o estudo para construir o gráfico.*

Jussara: Tá.

Laura: *E o gráfico que ficou aqui atrás ficou perfeito, mas não é assim que deveria ser, né? Nessa cidade ele pode ser.*

[Eu olho o trabalho, superficialmente, e entrego-o para Laura.]

Jussara: Depois eu vou tirar cópia disso, tá legal?

Nessa parte as alunas explicaram o modo como colocaram em prática o que tinham planejado no caso da função que representaria a temperatura no verão. Elas consideraram que a temperatura mínima, 20°C , seria atingida a 0 hora (ou 24 horas) e a temperatura máxima, 40°C , às 12 horas. Como pode ser constatado na 1ª versão do trabalho escrito (anexo 16), elas usaram procedimentos algébricos para determinar a expressão da função e usaram o esquema utilizado pelo professor em sala de aula para esboçar o gráfico, mesmo sabendo de antemão que ele seria uma parábola, cujo vértice e interseção com o eixo-y elas já conheciam. Mas se voltarmos ao capítulo 6, no qual descrevo a proposta do projeto de Modelagem feita pelo professor, verificamos que ele solicitou que fosse feito um estudo da função, usando o conteúdo da disciplina. Assim, o grupo obteve a expressão da função para, em seguida, realizar esse estudo, da forma como o professor havia solicitado. O grupo afirmou, novamente, que a função poderia ser assim “perfeitinha”, porque se tratava de uma cidade imaginária, e não de uma cidade real.

A seguir, o grupo relatou como foi feita a escolha dessa função, a partir da idéia do trabalho inicial de Valéria, mostrando também as diferenças entre o trabalho dela e o trabalho do grupo.

3a. parte

Jussara: Bom. Então a idéia dessa função surgiu ... por quê?

Laura: *Foi o trabalho da Valéria. Cada uma fez uma para apresentar pra ele [o professor]. Ele devolveu. E essa foi a da Valéria.*

Jussara: Você tinha feito desse jeito, Valéria?

Valéria: *É ... eu tinha, assim ... pensando, né? Comecei a pesquisar. Porque ele falou que era uma função que deveria ser assim, do cotidiano. Aí a que me pareceu que daria certo seria esta, né? Aí eu passei no papel, pensei, tal.*

Jussara: Você fez exatamente esta? Era desse jeito que você tinha pensado?

Valéria: *Não. Não eram os mesmos valores.*

Jussara: A idéia era a mesma?

Valéria: *A idéia era. Era praticamente a mesma. Menos as estações do ano. Eu peguei só a temperatura em um dia.*

Martha: *Porque quando a gente deu o trabalho pra ele, era pra gente bolar o enunciado e esboçar uma função. Era pra gente desenvolver uma função pra ele. Aí com essas funções, era pra gente montar grupos e esses grupos estudarem uma dessas funções.*

[O gravador desliga nesse momento e eu paro para arrumar.]

Laura explicou que o trabalho de Valéria foi a origem da situação escolhida pelo grupo. Valéria falou que o grupo tinha decidido modificar sua idéia inicial. Não foi discutido o porquê das alterações feitas no trabalho da Valéria, mas podemos levantar algumas hipóteses. A primeira delas é que o grupo não queria apenas copiar o trabalho, criando algo a mais que ele não possuía. Uma outra hipótese é que o grupo poderia ter achado a idéia de Valéria muito simples, já que considerava a temperatura em apenas um dia. Não está claro também se os dados de Valéria eram “imaginários” ou “reais”. Martha lembrou como a atividade tinha sido proposta.

As alunas esclareceram, então, qual era o plano delas: passar para o computador o que já tinham feito à mão e montar uma função “mais real”.

4a. parte

Jussara: E ... vocês ... o trabalho pra vocês, aí, tá completo já?

Laura: *Não. Falta colocar as temperaturas reais.*

Martha: *Mas a gente tem primeiro que fazer isso no computador, mostrar para o professor...*

Jussara: Mas então qual é o destino que vocês vão dar pra esse?

[Aponto para o trabalho com Laura].

Laura: *Para essa folha?*

Jussara: Não, pra esses dados que vocês têm.

Laura: *A gente vai fazer ...*

Simultaneamente:

Martha: *A gente vai montar a função no computador. E depois que a gente montar com a cidade Sonho Meu, a gente vai pegar, por exemplo, de uma de nossas cidades, a temperatura, aí a gente montaria uma função mais real do que ...*

Jussara: Então vocês não vão usar esses dados?

Martha e Valéria: *Vamos.*

Martha: *É como se fossem dois enunciados, um da cidade Sonho Meu e outro de uma das nossas cidades.*

Nesta parte podemos destacar dois fatos principais: o papel do computador no trabalho do grupo, pelo menos nesse momento inicial, e o plano de buscar uma “função real”. O computador para o grupo teria, aqui, a utilidade de passar a limpo o que tinha sido feito à mão. O trabalho escrito que o grupo me mostrou continha o estudo das quatro funções (uma para cada estação) feito nos moldes dos cursos de Cálculo I. O grupo pretendia, então, refazer tudo no computador, usando os recursos do *software* Maple V. Fica claro, nessa passagem, que o grupo pretendia fazer dois trabalhos: um como as alunas já tinham feito e outro usando uma “função mais real”.

Em seguida, as alunas procuraram explicar quais eram seus planos para a obtenção da função real.

5a. parte

[Eu estou com uma expressão de impaciência, diante do não entendimento do objetivo e das razões dos procedimentos do grupo.]

Jussara: E como vocês vão colher esses dados na ... em uma dessas cidades?

Martha: *A gente vai pegar no meio de um dia de cada estação do ano. Mas aí a gente tem que (...) outra cidade, né?*

Valéria: *Aí a gente poderia ver (...)*

Jussara: Ao invés de ... ?

Martha: *Ou então a gente pega de uma estação só, que é a que tá agora, né? (...) valores mais reais.*

Laura: *Procura as temperaturas do dia de hoje, por exemplo, que sai no jornal, a previsão, e faz pra saber, exatamente.*

Jussara: Hum, hum. Então vocês vão ter dois trabalhos?

[Todas resmungam alguma coisa. Umas dizem que sim, outras que não, trocando olhares entre elas.]

Valéria: *É um trabalho. Só que um numa cidade idealizada, que seria a normal, uma cidade assim ... que teria as estações do ano bem definidas que nem ...*

Martha: *É uma função que a gente pode fazer mais sozinha, sabe? Essa da cidade com as temperaturas normais a gente já não saberia fazer isso no computador sozinhas, achar uma função mais complexa. Então ele pediu pra gente pesquisar e, em cima disso, ele vai mostrar pra gente como é que faria com uma função real.*

Laura: *Ele falou que o esquema tá bom, que era isso mesmo, olhando só isso aqui. [aponta o trabalho que está em sua mesa].*

As alunas planejavam, em princípio, obter dados reais que correspondessem a seus dados imaginários, ou seja, elas pretendiam medir a temperatura ao meio-dia e à meia-noite em algum dia de cada estação. Mas perceberam a impraticabilidade do plano diante do prazo disponível para entregar o trabalho e acabaram caindo no plano inicial de Valéria: trabalhar com as temperaturas de um único dia. Mas, a penúltima fala de Laura mostra que elas não pensaram em medir, elas mesmas, as temperaturas, limitando-se a obter essas informações em jornais ou pelo serviço de previsão do tempo. O grupo chegou ao consenso de que o trabalho era um só, mas que tratava de duas situações. Martha justificou esse fato, afirmando que o grupo conseguiria trabalhar sozinho com a função imaginária e, para trabalhar com a função real no computador, elas precisariam da ajuda do professor.

Nessa parte do episódio eu não conseguia entender como o grupo ia trabalhar com as duas funções, a “imaginária” e a “real”, sobre a qual elas falavam. Eu já antevia a impossibilidade de coletar dados nas quatro estações do ano e queria saber como elas iriam fazê-lo. O grupo parecia não ter percebido isso. Então, durante a conversa, o grupo foi chegando à conclusão que o caminho mais viável seria lidar com a temperatura em um dia, apenas. Assim, é possível concluir que as alunas ainda não tinham pensado sobre como obter a “função real”. Talvez não tivessem nem pensado sobre a possibilidade de acrescentá-la ao trabalho, tendo feito isso apenas depois da sugestão do professor, segundo o que foi dito no início deste episódio. Reafirmou-se aqui que o grupo não conseguiria trabalhar sozinho com a “função real”, pois elas não sabiam que função ia dar, mas esperavam que o professor as ajudasse a resolver o problema.

7.1.1. Análise de primeiro nível do episódio 1

Nesse episódio, o grupo falou sobre a função escolhida para o trabalho solicitado pelo professor. Mais particularmente, as alunas explicaram que a função foi inventada por elas e que o professor tinha pedido-lhes para conseguir dados mais concretos. Na tentativa de compreender o plano delas para conseguir dados mais concretos, travou-se, então, um debate entre as alunas e eu, quando foram discutidas as similaridades e diferenças entre a “função imaginária” e uma possível “função real”, o porquê de se considerarem essas duas

funções, como trabalhar com as duas etc.. Desse debate podemos tematizar, então, uma discussão sobre “imaginação” e “realidade”. Na verdade, não houve uma discussão sobre a relação entre “imaginação” e “realidade” em um nível teórico: ela se restringiu ao exemplo do grupo, mas é possível tirar do debate algumas impressões, talvez fragmentadas, sobre a distinção que o grupo fazia entre “imaginação” e “realidade” e sobre como a matemática poderia ser usada relativamente a cada uma dessas duas dimensões.

Destaquei algumas expressões utilizadas pelas alunas para se referirem às funções:

- sobre a função imaginária: “certinho”, “perfeito”, “redondinho”, “a gente pode fazer mais sozinha”.
- sobre a função real: “oscilar”, “variar”, “a gente não saberia fazer isso no computador sozinhas”, “função mais complexa”.

Dentre essas expressões, algumas delas se referiam à forma das funções (ou de seus gráficos) e outras à maneira como as alunas poderiam lidar com elas.

Quanto à forma, a função imaginária, ou seu gráfico, eram designados como perfeitos, certos, e a função real como algo mais complexo, que oscilava e, conseqüentemente, talvez, como imperfeito. Com relação ao tratamento das duas funções, as alunas se julgavam mais capazes de lidar com a função imaginária, tanto que já estavam com o trabalho praticamente concluído, segundo os planos delas naquele momento. Já para lidar com a função real, elas diziam não saber como fazê-lo no computador e que precisariam do auxílio do professor.

Assim, é possível inferir que, para o grupo, imaginação e realidade eram mundos distintos. Na imaginação poderíamos inventar seres mais perfeitos, mais “redondinhos”, mais previsíveis e, portanto, mais fáceis de serem tratados. Na realidade, as coisas não eram tão previsíveis, sendo, portanto, mais difíceis de ser abordadas. A matemática, por sua vez, poderia ser usada para lidar tanto com a imaginação quanto com a realidade. Como a imaginação é inventada, o grupo inventou uma função adequada, nos seguintes moldes: que fosse matematicamente dominada por elas, mas coerente com a realidade. No caso da função real, o grupo necessitaria do computador e da ajuda do professor para encontrar sua representação matemática. Assim, a matemática seria uma forma de leitura da realidade, como também da imaginação, e poderia ser aplicada a ambas.

7.2. Episódio 2 do Grupo 1: A Continuidade da Função g

Neste episódio, as alunas, Paula, Valéria, Martha e Laura, estavam reunidas no Laboratório de Informática do Departamento de Matemática para desenvolver mais uma parte do trabalho delas. Uma primeira análise deste episódio já foi desenvolvida em Araújo (2000). Ele foi dividido em dois momentos, denominados na transcrição abaixo de Cena 1 e Cena 2, respectivamente, porque eu desconsidereei uma parte da reunião que ocorreu entre essas duas cenas. Elas foram agrupadas em um único episódio porque nelas surgiu uma discussão sobre a continuidade da função $g(x)$, que era o objeto de estudo do grupo.

$g(x)$ representava a temperatura em uma cidade fictícia (Sonho Meu) durante as quatro estações do ano, escrita em função do tempo x . Ela foi formulada a partir de quatro funções: $v(x)$, $o(x)$, $i(x)$, $p(x)$, que representavam, respectivamente, a temperatura em um dia típico do verão, um do outono, um do inverno e um da primavera dessa cidade. A função $g(x)$ foi expressa pela fórmula:

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{5}{36}x^2 + \frac{10}{3}x + 20 & \text{se } -x \leq 0 \text{ e } x - 24 < 0; \\ -\frac{17}{144}(x - 24)^2 + \frac{17}{6}x - 55 & \text{se } 24 - x < 0 \text{ e } x - 48 < 0; \\ -\frac{5}{48}(x - 48)^2 + \frac{5}{2}x - 110 & \text{se } 48 - x < 0 \text{ e } x - 72 < 0; \\ -\frac{5}{36}(x - 72)^2 + \frac{10}{3}x - 225 & \text{se } 72 - x < 0 \text{ e } x - 96 < 0. \end{cases}$$

E seu gráfico era:

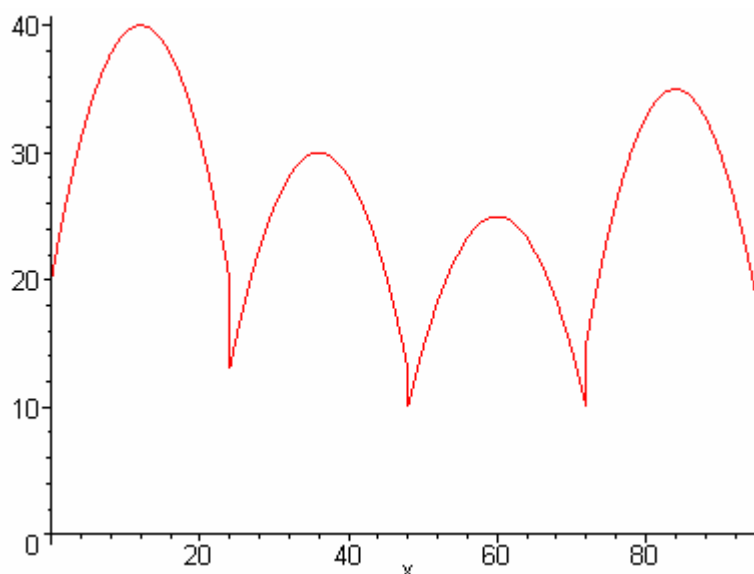


Figura 3: gráfico da função $g(x)$

Na primeira parte da Cena 1, Laura insistia com as colegas sobre a necessidade de discutir o comportamento da função g . Ela dizia que o professor tinha-lhes pedido para explicar “os biquinhos” que apareciam no gráfico de g . Martha estava tentando calcular os valores máximos e mínimos de g , mas tinha problemas com o *software*, o que a levou a não dar muita atenção ao que Laura dizia. Valéria e Paula apenas observavam o que acontecia.

Cena 1:

1a. parte:

[As alunas estão reunidas em frente a um computador: Martha está no comando do teclado e *mouse*, Laura está à sua direita, Paula à sua esquerda e Valéria à direita de Laura. Estou atrás do grupo, entre Martha e Paula.]

Laura: *Ele [o professor] quer que escreva alguma coisa. Tem que explicar ... Tem que explicar aquele gráfico com aqueles pontinhos ...* [Laura desenha com o dedo, no ar, uma curva semelhante ao gráfico de $g(x)$] *... com aqueles biquinhos, assim.*

Martha: *A gente escreve tudo no final.*

Laura: *Não. Teria que escrever junto com os subtítulos, né?*

Martha: *Ah! Depois a gente volta.*

Paula: *Depois a gente não sabe ...*

Jussara: *Escrever o quê, Laura?*

Laura: *Ele pediu ... Porque o gráfico ...* [Valéria pergunta alguma coisa.] *O quê?*

[Valéria e Laura discutem a colocação de algum parêntese.]

Laura: *Porque o gráfico fica todo assim, né?* [Laura desenha na mesa, com o dedo, o gráfico da função $g(x)$.] *E esses biquinhos, ele falou pra gente explicar o que acontece.*

Martha: *Não tá (?) nada, gente! Não tá certo, isto aqui.*

[Martha quer calcular os valores máximos de g e não consegue. As colegas observam o que ela está fazendo e dão alguns palpites. Laura insiste:]

Laura: *Tem que explicar o quê que acontece nesses pontinhos aqui.*

Martha: *Não é questão de explicar o lance. Isto é o de menos. Por enquanto a gente não consegue calcular isso.*

[Valéria procura entender o que está acontecendo.]

[A questão é a seguinte: Martha quer calcular os valores máximos e mínimos de g . O grupo já sabe que 12 é um ponto de máximo e o comando do Maple para calcular $g(12)$ é:

[> $g(12)$;

O programa deveria calcular o valor de $g(12)$, mas ele apenas repetia o comando, retornando com:

$g(12)$

E as alunas não entendiam o que estava acontecendo.]

Nessa primeira parte encontra-se a origem da discussão acerca da continuidade de g . Embora Laura e Martha estivessem com problemas aparentemente diferentes, – Laura queria explicar o que acontecia nos pontos de mínimo da função e Martha queria calcular seus valores máximos e mínimos – eles diziam respeito a uma mesma questão: a diferenciabilidade de g . E a discussão as levou à questão da continuidade.

Podemos notar nessa cena a “presença” do professor, na voz de Laura. Ela preocupava-se em explicar, interpretar e compreender os resultados matemáticos que estavam obtendo, porque o professor queria assim, enquanto Martha tinha um caráter mais prático, já que estava no comando do computador e preocupava-se com os cálculos que não conseguia fazer. Laura e Martha se destacavam como as líderes do grupo e Valéria e Paula se limitavam a acompanhar e tentar entender os problemas e discussões protagonizadas pelas outras duas.

Continuando a cena, Paula afirmou que a função não era contínua e que, portanto, não poderia ser derivável. Paula e Martha fizeram algumas afirmações relacionadas com a continuidade e diferenciabilidade de g , o que me levou a perguntar-lhes o que era uma função contínua. Laura aproveitou para reforçar sua insistência em explicar o comportamento da função. As alunas falaram sobre um teorema de Cálculo, que relaciona continuidade e diferenciabilidade de uma função e acabaram por concluir, a partir do gráfico da função, que ela era contínua, mas não derivável, como pode ser verificado pela transcrição abaixo.

2a. parte:

Paula: *Isto não é uma função contínua. Então não pode ser derivável.*

Valéria: *É.*

Jussara: Por que, Paula?

Martha: *Porque ele tem picos. Ele não é suave.*

Laura: *Isso é que tem que explicar.*

[Eu olho para Paula.]

Jussara: Ela não é contínua?

Paula: *É.*

Martha: *Ela não é suave.*

Jussara: Annn...

Martha: *Ela é parcialmente contínua.*

Paula: *Hum, hum.*

Jussara: O que é uma função contínua?

[Elas param um tempo, olham entre elas e Martha fala:]

Martha: *Ele não deu ... ele não explicou pra gente nos mínimos detalhes. Ele ensinou a gente a ver.*

Jussara: Mas pelo gráfico aí, você acha que ela é contínua?

Martha: *Ela é contínua porque ela não tem “pontos nulos”. Ela continua em todos os gráficos. Só que ela não tem derivada por causa desses picos.*

Jussara: Ah! Então ela não tem derivada em alguns pontos.

Laura: É.

Martha: *Toda função ... toda derivada ... não ...*

Valéria: *Pra função ter derivada, tem que ser uma função contínua.*

[Martha vai falando junto com Valéria.]

Jussara: Mas ela é contínua.

Martha: *Mas nem toda função contínua é derivável.*

Jussara: Ah!

Nessa segunda parte da cena, Paula, que só estava observando até então, deu uma possível explicação para o problema que Martha enfrentava com o *software*. Mas Martha logo reassumiu o papel de líder e não deixou que Paula se explicasse melhor, criando uma certa confusão entre continuidade e diferenciabilidade, a qual também foi possibilitada pelo grande número de intervenções que fiz nessa parte. Cabe fazer aqui uma autocrítica sobre meu procedimento nessa parte da cena: o grande número de perguntas que fiz causou dúvidas e ansiedade entre as alunas, além de, talvez, tê-las induzido a “falar o que eu queria ouvir”. Continuando minhas intervenções, perguntei o que era uma função contínua. As alunas sentiram-se constrangidas com essa pergunta, talvez por não saberem conceituar “continuidade” em termos matemáticos formais, mas Martha deu uma resposta, que eu incentivei, envolvendo recursos visuais para a questão. E, olhando para o gráfico de g , ela concluiu que a função era contínua e acrescentou que ela não era derivável devido aos “picos”, explícitos no gráfico. Fechando a cena, Martha e Valéria enunciaram corretamente um teorema de Cálculo, que era pertinente à questão. Ao fim, todas nós estávamos convencidas de que g era contínua, mas não derivável.

Na segunda cena desse episódio, a questão da continuidade de g voltou à discussão, depois de as alunas terem tratado de outras partes do trabalho. Tudo começou quando elas estavam listando os pontos críticos da função. As alunas decidiram como iriam buscar esses pontos críticos e chegaram a um acordo sobre quais eram os dois primeiros.

Cena 2¹:

1a. parte:

[Passado algum tempo, depois de tratar de outras partes do trabalho, as alunas voltam à questão da continuidade de g .]

Martha: *Humm*. [Martha está pensando sobre o que escrever em determinado ponto do trabalho. Laura sugere:]

Laura: “Os pontos críticos são ...”?

Martha: *Ele* [o professor] *vai perguntar por que a gente não calculou de novo, tá?*

Jussara: Explica de uma vez.

Martha: *Hum, hum. Eu explico na hora. Todo mundo sabe por quê? Porque só foi deslocado na direção x e não na direção y .*

Laura: *Então vão ser os mesmos.*

[Laura pega o mouse para buscar os valores.]

Laura: *Então vamos subir aqui pra ver. Espera aí. Tem que ir lá no começo. Essa aqui é a primeira?*

[Laura está procurando os pontos críticos de g , a partir das quatro funções usadas na sua constituição.]

Martha: *Olha, é o ponto (0,20).*

[Laura e Martha procuram pelo primeiro ponto crítico. Enquanto isso, as outras duas alunas esperam. Elas concordam que o primeiro ponto é o (0,20).]

Laura: *Agora que é o 12 e alguma coisa, não é? (12,40).*

Martha: *(?) que é lá em cima. Tá bom?*

As alunas chegaram à conclusão que poderiam buscar os valores máximos e mínimos da função g a partir das quatro funções quadráticas que a constituíam. Elas decidiram fazer dessa forma porque não conseguiram realizar os cálculos diretamente pelo Maple (ver a 1ª parte da Cena 1). Martha certificou-se de que todo o grupo estava consciente dos motivos que lhes permitiam fazer aquilo e Laura concluiu sobre a estratégia a ser usada para atingir seus objetivos. Elas, então, retornaram ao início do trabalho para buscar esses valores. Todas concordaram que os dois primeiros pontos críticos eram (0,20) e (12,40), respectivamente um ponto de mínimo e um de máximo. Foi quando Paula afirmou que o terceiro ponto crítico era (24,20), como está descrito a seguir.

O grupo estava listando os pontos críticos de g e Paula afirmou que o terceiro desses pontos era o (24,20). Laura se espantou com a afirmativa de Paula e surgiu uma certa inquietação entre as alunas: afinal, qual era o terceiro ponto crítico, (24,20) ou (24,13)? Após

¹ Consultar a figura 3, na página 110, para melhor compreender essa cena.

uma pequena discussão elas então concluíram que g era descontínua nesse ponto, o que foi induzido para os outros pontos de mínimo da função.

2a. parte:

Paula: (24,20) ...

Laura: 24 e 20?

Paula: *É porque é o mínimo, né?*

Martha: *Mas vai no outro, né?* [Aponta para a direita, na tela do computador.]

Laura: *Junta com o outro.*

[As alunas ficam olhando fixamente para a tela enquanto pensam. Laura está procurando pelos dados de que precisam para tirar a dúvida.]

Valéria: (0,13).

Laura: *Mas o (0,13) bate com o 24 ... (24,20).*

Martha: *Por isso é que ela é descontínua.* [Martha olha para mim.] *Então a função não é contínua.*

Laura: *Mas no gráfico ela ajunta!?*

Martha: *Mas isso é o que a gente tá vendo. E se ela for bem espaçada? Pode ser que ela não ajunte. (...) Vamos por (0,13). Não, (24,13).*

[As colegas concordam com Martha e ela procede da mesma forma com os outros pontos de mínimo de g .]

Nessa parte da cena, Paula, usando a simetria da primeira parábola que constituía o gráfico de g , concluiu que o terceiro ponto crítico dessa função possuía a mesma ordenada que o primeiro: o primeiro era (0,20) e o terceiro era (24,20). Laura, por sua vez, pensava que esse ponto correspondia ao primeiro ponto da segunda parábola – (24,13) –, o que fez surgir uma inquietação entre as alunas. Então Martha e Laura tentaram uma primeira solução para o problema, afirmando que as duas parábolas iam se juntar nesse terceiro ponto crítico. Pareceu que essa solução não foi muito satisfatória e as alunas pararam por alguns instantes para pensar, enquanto Laura tentava encontrar, no trabalho alguma solução. Valéria então constatou que o primeiro ponto da segunda parábola era o (0,13). Laura tentou juntar as duas parábolas, afirmando que os pontos “batiam” um com o outro, mas a impossibilidade disso ocorrer levou Martha a concluir que g era descontínua.

A reação de Martha nesse instante, olhando para mim com um ar de indignação, mostrou-me, enquanto assistia à cena, que eu a havia induzido a pensar que g era contínua. Na cena 1, algumas vezes ela insinuou pensar que a função fosse descontínua, mas o aspecto do gráfico induziu a todas nós, e a minha certeza, de professora de Cálculo, que ela

sabia que eu era, a fez mudar de idéia. Foi assistindo a essa parte da cena que percebi o quanto eu havia interferido na última parte da cena 1.

Martha sentiu-se mais confortável ao concluir que g era descontínua. Laura questionou a descontinuidade, usando um argumento visual, já que ela via a continuidade no gráfico, mas Martha logo colocou em dúvida o argumento visual de Laura, afirmando que elas poderiam não estar “enxergando” a descontinuidade. Martha, então, induziu esse fato para os outros pontos de mínimo da função, mas Laura ainda não estava muito segura quanto a esse procedimento, como podemos ver no desenrolar da cena.

Laura quis conferir o gráfico da função g , pois não tinha entendido porque o ponto era o $(24,13)$ e não o $(24,20)$. Ela então descobriu, no gráfico, um segmento de reta ligando esses dois pontos.

3a. parte:

Laura: *Eu não entendi por que é o 13 no 24 e não o 20. Posso ver o gráfico? Tem ele aqui?*

[Laura começa a procurar o gráfico de g com o mouse, enquanto as outras esperam. Quando ela o encontra ...]

Laura: *Ele tem uma ...*

Martha: *Tem essa abertura. Ele cai aqui. Tá vendo como ela é descontínua?*

Laura: *Olha! Ele fica reto!*

Martha: *Ela é descontínua, essa função. Não falei?* [Martha aponta na tela.]

Laura: *Oh! Ele fica retinho. Eu achei que ele tava assim,* [Laura desenha, na mesa, com o dedo, o gráfico, como se a função fosse contínua.] *mas ele não tá!*

[Após esclarecerem as dúvidas de Laura, as alunas continuam o trabalho.]

Laura não aceitou, ou não entendeu, a descontinuidade da função g , já que, para ela, a continuidade, pelo gráfico, era óbvia. Ela quis verificar o que havia no gráfico que a enganara quanto a esse fato e ficou, ao mesmo tempo, surpresa e satisfeita por encontrar uma justificativa que a ajudava a “montar o quebra-cabeças”: a função era realmente descontínua e o gráfico mostrava a descontinuidade, unindo, com um segmento vertical, os dois pontos com mesma abscissa. A representação no Maple desse tipo de descontinuidade era diferente daquela com lápis e papel.

7.2.1. Análise de primeiro nível do episódio 2

Nesse episódio o grupo 1 discutiu a continuidade da função g , objeto de estudo de seu trabalho. Elas julgaram, em princípio, que se tratava de uma função contínua, mas, no decorrer da discussão, concluíram que g era descontínua.

Enquanto o grupo trabalhava, alguns aspectos foram-se destacando, tais como uma discussão matemática, que culminou com a conclusão acerca da descontinuidade da função em estudo; a presença invisível do professor, que sempre era lembrado nas discussões; o papel de cada componente do grupo e do grupo todo durante o trabalho; os problemas enfrentados pelo grupo com o *software* Maple; e o meu papel, como pesquisadora, interferindo no trabalho do grupo. Passarei agora a discutir esses aspectos.

O grupo protagonizou uma discussão matemática até chegar à conclusão que a função era descontínua. Pude perceber que elas conheciam, intuitivamente, o conceito de continuidade e sabiam, seja por meio da visualização ou por meios empíricos², a partir de seus dados, verificar se uma função era contínua ou não. Destaco, na discussão, a autonomia das alunas para buscar soluções para os problemas que surgiam e para tirar conclusões coerentes com seus achados. O grupo descobriu um fato novo: uma maneira de verificar a continuidade de uma função usando o *software*, qual seja, observando se há um segmento de reta unindo dois pontos distintos com uma mesma abscissa. Durante a discussão, as alunas se apoiaram no gráfico de g e nas quatro funções quadráticas que a originaram, já que elas não fizeram referência à sua expressão algébrica. Esse detalhe teve consequências importantes, de que tratarei na análise de segundo nível desse episódio.

Apesar de não estar presente na reunião, o professor era sempre citado, na maioria das vezes por Laura e algumas vezes por Martha. Elas estavam preocupadas com o que ele queria que fosse feito, o que poderia perguntar etc..

Fica claro, nesse episódio, o papel de liderança que Martha e Laura exerciam no grupo: eram elas que mais falavam e davam a palavra final quando alguma decisão devia ser tomada. Mas as duas possuíam características diferentes no papel de liderança. Laura preocupava-se mais em compreender o como e o porquê das ocorrências enquanto Martha tinha um estilo mais prático e com menos apelos à discussão e questionamento. Paula e Valéria eram mais quietas durante a discussão, manifestando-se muito poucas vezes. Mas esse conjunto de diferenças mostrou-se importante no trabalho em grupo. Cada componente estava atenta para um aspecto do trabalho, o que levava todo o conjunto a se preocupar com a observação de uma delas.

² Por empírico refiro-me ao uso direto das informações provenientes dos dados do projeto de Modelagem Matemática do grupo.

O computador foi uma personagem importante nesse episódio. Em princípio, parecia-me que as alunas planejavam usá-lo apenas para “passar a limpo” o trabalho que estavam fazendo. Mas o *software* parecia não obedecer aos planos delas: ele não calculava os valores da função g e não representava uma função descontínua como elas esperavam que ele o fizesse. Esses obstáculos levaram-nas a buscar soluções alternativas para seus planos, o que só fez enriquecer a discussão.

Uma outra característica desse episódio, que merece ser discutida, é o meu papel de pesquisadora participante da discussão do grupo. No momento em que a reunião acontecia, eu não percebi a minha influência na discussão. Foi só depois, assistindo à gravação, que percebi ter deixado transparecer a minha opinião sobre a continuidade da função, o que influenciou o grupo. Mas, por outro lado, quando elas descobriram que eu, assim como elas, estava errada, sentiram-se mais confiantes e seguras acerca do que estavam fazendo.

7.3. Episódio 3 do Grupo 1: Simetria

Este episódio faz parte da mesma reunião à que pertence o episódio 2, considerado na seção 7.2. Sendo assim, o local da reunião, a disposição das alunas e a minha, no laboratório, eram os mesmos. Cronologicamente, ele ocorreu entre as cenas 1 e 2 do episódio 2.

As alunas estavam realizando um estudo da função $g(x)$, a partir do roteiro dado pelo professor: determinação do domínio, da imagem, das interseções com os eixos. O ponto seguinte era a verificação da simetria do gráfico em relação ao eixo- y e em relação à origem.

1a. parte

Laura: *Simetria.*

Martha: *Aqui a gente tem que falar que, como nenhuma das funções tem simetria, essa também não ...*

Laura: *... a soma delas também não.*

Martha: *Então tá.*

Laura: *Acho que não precisa ... Olha, já que tá ... tá escrito ... Tira esse pedaço aqui [aponta na tela] e deixa só as afirmações falsas ...*

[Laura sugere que Martha verifique, usando os comandos do Maple, se o gráfico de $g(x)$ é simétrico em relação ao eixo- y e em relação à origem. Os comandos do Maple correspondentes são:

[> is (g(-x) = g(x));

para a simetria em relação ao eixo-y e

[> is (g(-x) = -g(x));

para a simetria em relação à origem. O Maple retorna *true* no caso de a igualdade se verificar e *FAIL*, caso ela não se verifique. Entretanto, quando Martha tenta aplicar esse teste, o computador acusa um erro. Martha, então, olha para Laura com impaciência, batendo as pontas dos dedos na mesa. Laura percebe o problema e retorna para a idéia inicial].

Laura: *Então, como as funções anteriores também não possuem simetria, ou não possuíam*

...

[Martha vai digitando enquanto Laura dita].

Martha começou a explicar que o gráfico de g não era simétrico em relação ao eixo-y, porque os gráficos das quatro funções que a constituíam não eram. Laura quis fazer de outra forma, sugerindo que se aproveitasse a verificação da simetria do gráfico de uma das quatro funções que constituíam g . Martha seguiu a sugestão de Laura e usou, diretamente, os comandos do *software* para verificar a simetria. Contudo, o Maple não funcionou, propriamente, para a função g e acusou um erro ao invés de responder ao teste de simetria. Martha ficou um pouco impaciente e Laura, percebendo isso, retornou, sem questionamentos, à proposta inicial.

Como já descrito na seção 7.2., a função g foi construída a partir de quatro funções: v , o , i e p . A idéia inicial de Martha era induzir o resultado obtido sobre a simetria dos gráficos dessas quatro funções para o gráfico de g . Houve uma tentativa de avaliar essa simetria diretamente pelo *software*, mas o grupo não conseguiu. Esse fato vinha se repetindo durante todo o estudo da função g . Como ela era definida por quatro leis, tinha, portanto, um formato mais complexo do que as quatro funções que a constituíam; por exemplo, nem sempre o Maple aceitava os cálculos ou comandos que a envolviam. Era constante a acusação de erros pelo *software* e as alunas tinham de encontrar procedimentos alternativos para contornar esses problemas. Um procedimento que foi se tornando padrão para o grupo, nessas situações, era a indução dos resultados encontrados para v , o , i e p para a função g .

Até aquele momento, eu não tinha atentado para esse fato, talvez porque a indução dos resultados fosse possível para as outras situações surgidas até então. Entretanto, no

caso da simetria, a indução pareceu-me estranha e, na continuação do episódio, fiz para Laura uma pergunta que me incomodava.

2a. parte

Jussara: Você sabe explicar isto matematicamente, Laura?

Laura: [pensativa] *Matematicamente?*

Jussara: Por que você acha que isto acontece?

[Laura sorri, olha para mim, balança a cabeça positivamente e fala:]

Laura: *Boa pergunta.*

Valéria: *Porque a nossa função $g(x)$ (...)*

[Não é possível ouvir precisamente o que Valéria fala, mas ela faz referência às funções que constituem g . Martha está atenta à afirmativa de Valéria e sorri enquanto ela fala. Laura contrai os ombros e afirma:]

Laura: *Olhando o gráfico.*

Jussara: Então você concluiu isso mais pelo gráfico do que ...

Martha: *Não. Porque se você tem duas funções que não têm simetria, somando elas, colocando uma do lado da outra, que nem a gente fez, ela vai continuar sem simetria.*

Laura: *Não vai poder ...*

[Martha gesticula enquanto fala, representando a justaposição de gráficos de funções].

Laura: *Então... Isso eu sei, né?* [dirigindo-se a Martha] *Ela quer saber matematicamente, por que você afirma isso.*

[Silêncio por algum tempo].

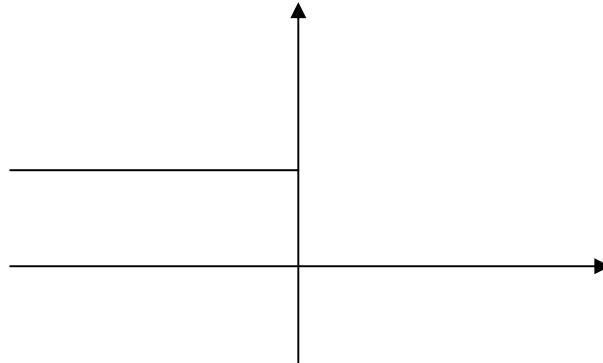
Eu pedi à Laura uma justificativa matemática para o resultado que ela e Martha utilizavam. Ela ficou pensativa por algum momento e acabou dizendo que era uma boa pergunta, sem, entretanto, dar uma resposta. Valéria e Martha afirmaram o que o grupo já vinha dizendo: se os gráficos de duas funções, não simétricos em relação ao eixo-y, forem justapostos, então o gráfico resultante também não será simétrico. Laura, que em princípio estava se apoiando na visualização do gráfico, percebeu que eu estava solicitando uma justificativa mais profunda que essa e chamou a atenção das colegas para o fato.

Fez-se um pouco de silêncio enquanto as alunas pensavam sobre minha pergunta, talvez para entendê-la, talvez para encontrar alguma resposta. Enquanto isso, eu também estava pensando. Diante do impasse, acabei interferindo de modo decisivo na reunião do grupo, como pode ser notado no desenrolar do episódio.

3a. parte

Jussara: Então olha, pega ... a reta ... [Eu estou pensando, inventando um contra-exemplo para o que Martha afirmou.] ... uma função que é a reta paralela ao eixo-x até o eixo-y.

[Eu esboço o seguinte desenho no ar, enquanto falo]



O grupo presta atenção no que eu falo].

Jussara: Pega a reta ... $y = 1$, tá? Para $x < 0$. Ela é simétrica?

[As alunas pensam por algum tempo].

Laura: *Pra $x < 0$, né? Maior e menor?*

[Laura aponta na mesa, como se tivesse um eixo-y ali desenhado, de um lado e de outro desse eixo].

[Eu esboço o gráfico de $y = 1$, $x < 0$ na mesa, com o dedo, enquanto vou falando. Todo o grupo está voltado para mim].

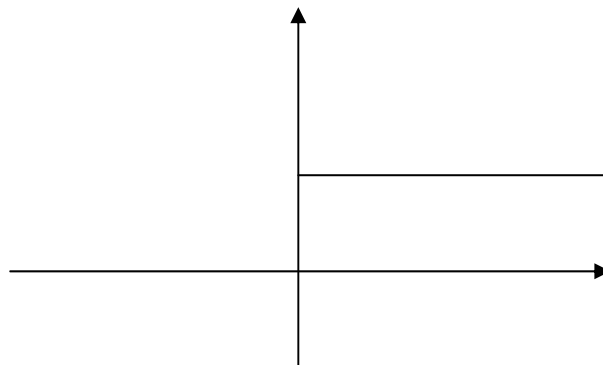
Jussara: A reta $y = 1$, tá? Para $x < 0$. Ela é simétrica em relação ao eixo-y?

Paula: *Eu acho que não.*

Jussara: Não.

Jussara: Aí, pega depois a reta $y = 1$ para $x > 0$.

[Eu esboço, na mesa, com o dedo, o seguinte desenho:



As alunas observam com mais atenção o que eu desenho do que o que eu falo].

Jussara: Ela é simétrica, em relação ao eixo-y?

Alunas: Não.

Jussara: Põe uma do lado da outra.

[Gesticulo como se estivesse colocando os gráficos lado a lado].

Jussara: É simétrico?

Paula: É.

[Eu sorrio e pergunto:]

Jussara: O que vocês falam?

[As alunas sorriem].

Martha: [Rindo] *Isso aqui é uma reta e a nossa é curvinha.*

Laura: *É! O nosso não é isso!*

Jussara: Isso é válido pra reta!?

Nessa parte do episódio eu apresentei um contra-exemplo para o resultado que o grupo estava utilizando para avaliar a simetria do gráfico da função $g(x)$ em relação ao eixo- y . Procurei construir, explicitamente, o exemplo para as alunas, utilizando os mesmos argumentos visuais que elas, sem dizer, diretamente, que ele contradizia o que elas afirmavam. Quando elas perceberam que a afirmativa delas era falsa, a primeira reação foi brincar, pois estavam rindo enquanto falavam, dizendo que meu contra-exemplo considerava retas, o que não era o caso do trabalho delas.

Como na seção 7.2., devo fazer uma autocrítica do meu comportamento como pesquisadora. Se comparado com minhas intervenções no episódio considerado naquela seção, interferei muito mais no episódio tratado aqui. Lá, limitei-me a fazer algumas perguntas que induziram as discussões do grupo. Aqui, eu simplesmente me esqueci de que era pesquisadora, de que não deveria interferir diretamente nos procedimentos das alunas, e me comportei como se fosse professora delas. Quando pedi uma justificativa matemática para Laura, minha intenção era desencadear alguma discussão sobre a afirmativa que o grupo fazia. Quis que as alunas questionassem o quê, para elas, era uma certeza, e procurassem provar ou refutar o que falavam. Entretanto, elas ficaram em completo silêncio, não sei se porque não perceberam o que eu pretendia, ou porque, simplesmente, não sabiam como encaminhar tal questionamento. Por ter deixado o grupo em suspense, senti-me responsável por desfazer a tensão e acabei cometendo o deslize de interferir decisivamente no trabalho, por mais que eu tivesse tentado não ser tão diretiva na apresentação do contra-exemplo.

Assim, deixei o grupo com a seguinte questão: a justificativa para o fato de o gráfico de g não ser simétrico em relação ao eixo- y não era a não-simetria dos gráficos de v , o , i e p . Qual era então a justificativa? Apesar de não ter colocado a questão nesses termos, ela

era óbvia pelo andar da conversa. Laura retomou, então, a discussão e encontrou um encaminhamento.

4a. parte

[Laura volta a falar sério].

Laura: *Ele* [o gráfico de $g(x)$] *não fica pra lá e pra cá do y* [gesticula com as mãos, mostrando o que fala]. *É tudo pra cá do y.*

[Laura gesticula, para representar a região à que se refere].

Jussara: Ah! Então é isso aí ... [aponto para Laura].

Laura: *O espelho não é o eixo?*

Paula: *Não pode passar do eixo.*

Martha: *É, a gente tem um domínio pra ver se ela é simétrica ou não.*

Laura: *É, a nossa não fica negativa.*

Martha: *A não ser se você quiser ...*

Jussara: Então tem jeito de ser simétrica em relação ao eixo-y?

Todas: *Não.*

Jussara: Então não é ... [eu paro um pouco, reticente] ... por causa daquela explicação que você deu. [dirigindo-me para Laura].

Laura: *Ahh! Entendi! Não é por causa das outras. É por causa do domínio.*

[Todas se voltam novamente para o computador e Martha retoma a digitação].

Martha: *Vamos mudar de novo.*

Laura: *Interessante ...*

Laura afirmou que, no caso da função do trabalho do grupo, o gráfico estava todo contido em apenas um lado do eixo-y, comparando esse eixo a um espelho. O grupo concordou com Laura. Martha fez referência ao domínio de g para verificar a simetria de seu gráfico. Eu concluí, então, de forma reticente, meu raciocínio anterior, dizendo que a justificativa para a não-simetria não era a que o grupo estava dando inicialmente. Feliz por ter compreendido a situação, Laura resumiu toda a conversa: não era por causa das outras funções, mas sim por causa do domínio de g . O grupo retomou, assim, a escrita do trabalho.

Nessa última parte do episódio, Laura comparou a situação do trabalho de seu grupo com a do contra-exemplo que eu dei. Ela percebeu que o ponto-chave no contra-exemplo era o fato de o gráfico possuir uma parte de cada lado do eixo-y, o que não acontecia com o gráfico da função g . Martha logo percebeu a ligação entre o “estar de cada lado do eixo-y” com o domínio da função. Houve uma manifestação entusiasmada do grupo quando elas perceberam a boa idéia de Laura. Eu continuei com minha “postura de professora”,

apoiando o raciocínio de Laura, e só me dei conta da grande interferência quando decidi corrigir o grupo, dizendo que elas tinham se equivocado quanto à justificativa inicial.

7.3.1. Análise de primeiro nível do episódio 3

Nesse episódio, o grupo 1 discutiu a simetria da função $g(x)$ em relação ao eixo-y. Em princípio, as alunas tentaram induzir, a partir da não-simetria dos gráficos das funções que constituíam g , a não-simetria do gráfico dessa última. Elas estavam certas dessa justificativa quando interfeiri na reunião e dei um contra-exemplo para a afirmativa que elas sustentavam. O grupo então concluiu sobre a importância de se considerar o domínio da função para analisar a simetria em relação ao eixo-y.

Um fato que merece destaque nesse episódio é a tentativa de indução de uma propriedade das funções v , o , i e p , que constituíam g , para a própria função g . Como já afirmei, essa não foi a primeira vez que o grupo procedeu dessa forma, sendo que, só naquele momento, atentei para esse fato. No episódio 2, por exemplo, as alunas buscaram os valores máximos e mínimos de g nas funções v , o , i e p . Para o grupo, esse procedimento parecia natural, já que as alunas o mencionavam alternadamente, sem serem questionadas pelas colegas.

Um momento decisivo nesse episódio foi minha interferência, que mudou totalmente o rumo das discussões do grupo. Diferentemente do ocorrido no episódio 2, quando não percebi minha interferência, no final do episódio aqui considerado, comecei a me policiar quanto às intervenções, mas, como já tinha começado a falar, acredito que a postura de professora foi mais forte e me fez prosseguir. Por outro lado, posso perceber que minha intervenção quebrou a sequência de procedimentos inquestionáveis das alunas. Até aquele momento, elas agiam sem refletir muito sobre o que faziam. Apesar de proceder inadequadamente como pesquisadora, acredito que minha intervenção como professora foi positiva para o grupo, pois esse episódio foi citado, pelas componentes do grupo nas entrevistas finais e na apresentação oral do trabalho para a turma, como um momento positivo da participação na pesquisa.

Minha intervenção na reunião teve, também, o papel de desencadeadora das conclusões do grupo. Certamente induzi as alunas a comparar meu contra-exemplo com a função estudada pelo grupo, mas elas saíram do silêncio que se seguiu ao meu questionamento para a busca de uma justificativa que, segundo o depoimento de Martha na entrevista final (ver anexo 13), ajudou-as a compreender melhor o que era simetria.

É importante ressaltar, também, o envolvimento das alunas no desenvolvimento do trabalho. Diante de um desafio, fosse originado de problemas com o Maple ou colocado por

mim, elas não desistiam enquanto não conseguiam um encaminhamento satisfatório, que as tirasse da tensão. Esse envolvimento pode ser notado em vários outros momentos do trabalho desse grupo.

7.4. Episódio 4 do Grupo 1: O Significado da Variável do Domínio

Este episódio também pertence à mesma reunião que originou os episódios considerados nas seções 7.2. e 7.3.. O grupo dava continuidade ao trabalho e o episódio iniciou-se quando perguntei às componentes do grupo qual era o domínio das funções v , o , i e p que constituíam a função g , conforme a transcrição que segue:

1a. parte

Jussara: Qual é o domínio de cada uma dessas funções aí: v , o , i , p ?

Laura: *Elas separadas?*

Martha: *Todas elas ...*

Jussara: Elas separadas.

Laura e Martha: *0 a 24.*

Jussara: De 0 a 24? E a função g , tá definida de 0 a 24?

Laura: *Não. De 0 a 96.*

[Passam-se alguns segundos. Martha, enquanto isso, continua digitando].

Diante de minha pergunta, Laura quis esclarecer se eu falava do domínio de cada função, separadamente; depois ela e Martha forneceram-me a informação que pedi: o domínio era “de 0 a 24”. Perguntei então qual era o domínio da função g e Laura disse que era de “0 a 96”.

Não ficou claro, pelas respostas de Laura e Martha, se os domínios de v , o , i e p eram $(0,24)$ ou $[0,24]$ nem se o de g era $(0,96)$ ou $[0,96]$ (nem qualquer outro intervalo semi-aberto com esses extremos). Chamo a atenção para esse detalhe porque, se voltarmos ao início da seção 7.2., na qual é apresentada a expressão da função g utilizada pelo grupo, podemos verificar que seu domínio era $[0,96) - \{24, 48, 72\}$. Posso concluir, então, que as alunas não consideraram a expressão algébrica de g para especificar seu domínio. O que elas consideraram então? Com relação às funções v , o , i e p , como o domínio dado pelas alunas foi “de 0 a 24”, acredito que se tratava do intervalo $[0,24]$, já que essas funções derivavam diretamente da situação real escolhida pelo grupo: as temperaturas de uma cidade em um dia, cuja variável do domínio representava o tempo. Analogamente, como a

resposta para o domínio de g foi “de 0 a 96”, acredito que o grupo estava pensando em $[0,96]$, ou seja, na quadruplicação de $[0,24]$.

Meu objetivo, ao considerar cuidadosamente a questão do domínio das funções envolvidas no projeto do grupo, é destacar que, apesar de todo o tratamento matemático dado a essas funções no decorrer do trabalho, as alunas mantinham para si, implicitamente, a situação não-matemática que as originaram: as respostas que me foram dadas nessa primeira parte do episódio basearam-se nessa situação e a expressão matemática foi esquecida.

Essas perguntas instigaram a curiosidade de Valéria acerca do significado da variável do domínio da função g , como podemos verificar na continuação do episódio.

2a. parte

Martha: *Tá! Então a gente tem que colocar as duas juntas?*

Paula: *É melhor.*

[Valéria fala com Laura algo que não é possível ouvir. Laura a ouve atentamente, faz um sinal de concordância e fala:]

Laura: *Não seria a hora...*

Valéria: *Não seria durante um dia!?*

Martha: *É porque é a junção dos gráficos, entendeu?*

Laura: [dirigindo-se para Valéria] *É, não tá mais ... vendo em horas. Não é o gráfico da temperatura em um dia. Não é mais.*

Martha: *É apenas um recurso matemático.*

Valéria falou algo em tom de voz bem baixo. Laura concordou com ela, mas disse que aquele não era o momento. Martha explicou a Valéria que era a junção dos gráficos, que era um recurso matemático, e Laura acrescentou que não se tratava mais de horas e que não era mais a temperatura em um dia.

Apesar de não ter sido possível ouvir o que Valéria falou, posso pressupor, a partir das respostas e justificativas dadas por suas colegas, que ela disse algo relacionado com o significado da variável do domínio. Na primeira parte, as alunas tinham a situação real como referência para falar sobre o domínio das funções. Nessa segunda parte, Laura deixou claro que não se tratava mais da temperatura em um dia e que o significado da variável do domínio, que antes eram as horas do dia, agora não era mais. Martha reforçou essa idéia, dizendo que estavam apenas utilizando um recurso matemático.

Temos, então, a seguinte situação: Martha e Laura falaram que o domínio de g era $[0,96]$, com um forte apelo à situação real. Questionadas por Valéria sobre o significado desse domínio, elas se refugiaram na matemática, afirmando que tinham abandonado a situação real. Entretanto, o domínio expresso matematicamente não era $[0,96]$. Como desenrolar essas contradições? Percebi que o questionamento de Valéria era fértil e a incentivei.

3a. parte

Jussara: Então pensa alto, Valéria.

Valéria: *Ahh! Não!*

[Valéria sorri timidamente, Laura ri da situação].

Martha: *Você tem que pensar alto pra gente poder saber o que você está pensando.*

Valéria: *Não ... sabe ... ? Porque aquele ... aquele gráfico das funções todas juntas... Esse aí* [Martha localiza o gráfico no computador]. *O domínio vai de 0 a 96. Nos outros gráficos, era de 0 a 24, que eram horas. Agora, esse de 0 a 96, não são mais horas porque ...*

Laura: *Não.*

Valéria: *... porque são todas as ... as estações juntas, entendeu?*

Laura: *As horas juntas, são quatro dias ... é ...*

Valéria: *Aí, a gente poderia colocar ...*

Laura: [voltando-se para Martha] *Você deu o gráfico da derivada, né?*

[A atenção das alunas volta-se novamente para o computador, Martha continua do ponto onde estavam antes da intervenção de Valéria. Ninguém dá continuidade ao que Valéria apontou. Ela, que era tímida, não insistiu no assunto e retornou para o que as colegas estavam fazendo. Eu também não incentivei a continuação da discussão].

Pedi à Valéria que repetisse em voz alta o que tinha dito. Ela relutou um pouco, mas acabou falando, incentivada também pelo pedido de Martha. Valéria, então, disse que os domínios das funções v , o , i e p representavam as horas do dia e que o de g não tinha mais esse significado porque eram as estações juntas. Ela tentou encaminhar alguma idéia mas foi interrompida por Laura, que queria retornar ao que faziam antes de sua intervenção. Após essa pequena passagem, ninguém mais voltou a esse assunto.

Ao ser incentivada a expor suas idéias, Valéria deixou claro que estava falando sobre o significado da variável do domínio. Entretanto, ela não colocou nos mesmos termos o questionamento que tinha feito anteriormente para Laura: ao mesmo tempo que falou do que se tratava, repetiu a justificativa dada por Laura e Martha, concordando com as idéias

delas. Valéria até tentou falar algo a mais, dizendo que “poderiam colocar ...” mas não concluiu a idéia.

7.4.1. Análise de primeiro nível do episódio 4

O principal ponto desse episódio é o questionamento de Valéria sobre o significado da variável do domínio da função g . Timidamente, ela lembrou que, no caso das funções v , o , i e p , o domínio era $[0,24]$ e que a variável do domínio representava o tempo em um dia. Ela queria saber, então, o que era a variável independente da função g . Martha e Laura convenceram-na, então, de que esse significado não existia mais no caso dessa última função, pois se tratava apenas de um recurso matemático.

Ao focar os domínios das funções que pertenciam ao projeto de Modelagem do grupo 1, um aspecto se destacou: a falta de clareza para as alunas do significado da variável do domínio da função g . Se por um lado estava claro para elas que a variável dos domínios de v , o , i e p representava o tempo no intervalo de um dia, por outro, isso não acontecia com g . Na primeira parte do episódio, pareceu-me que elas se basearam na situação real para especificar o domínio de g . Já na segunda parte, ao considerarem o questionamento de Valéria, as alunas afirmaram que o que faziam tinha base na matemática.

Essa falta de clareza pode ser compreendida se pensarmos na maneira como a situação-tema do projeto de Modelagem Matemática desse grupo foi construída. O grupo partiu de um tema não-matemático real (a temperatura em um dia) de uma cidade imaginária e criou uma função g , que era constituída de quatro funções, cada uma representando a temperatura em um dia típico de cada estação do ano dessa cidade. As alunas sabiam qual era o significado da variável do domínio de cada uma das funções que constituíam g , pois baseavam-se na situação real. Entretanto, não sabiam qual era o significado quando essas funções eram colocadas lado-a-lado, já que, dentro da situação real, essa ação não tinha uma correspondente. Na busca de um significado para essa variável, as alunas se alternavam entre uma interpretação na realidade e outra na matemática.

Esse episódio mostra, também, o papel de liderança, no grupo, exercido por Martha e Laura. Martha, por exemplo, disse à Valéria que ela deveria compartilhar suas idéias com o grupo, mas, ao mesmo tempo, ela, assim como Laura, faziam com que suas idéias prevalecessem. Não acredito que Martha e Laura tivessem a intenção de deter o poder dentro do grupo. A partir dos retratos escritos dessas duas alunas (subseção 6.3.3.), por exemplo, podemos perceber o grande compromisso que elas tinham com a participação na pesquisa. Talvez essa postura estivesse relacionada com a preocupação em propiciar

momentos que, na concepção delas, fossem interessantes para minha pesquisa. Aliada a essa característica de Laura e Martha, estava a timidez de Valéria. Durante toda a pesquisa ela se mostrou muito incomodada com presença da câmera de vídeo e raramente se manifestava durante as reuniões. Essa sua postura ficou evidente no episódio aqui considerado pois, ao ter um questionamento ao grupo, limitou-se a fazê-lo timidamente para uma colega e, sem maiores delongas, incorporou a orientação de Martha e Laura.

7.5. Episódio do Grupo 2: Por que o Sólido de Revolução?

Este episódio foi retirado da apresentação do projeto do grupo 2, composto por Marília, Pedro, Gizele e Fernanda, para toda a turma. Estávamos no laboratório de informática, o grupo estava de frente para a turma, utilizando os recursos disponíveis no laboratório. O professor Sérgio estava entre os outros alunos e eu, no fundo da sala, filmando as apresentações.

A situação real considerada pelo grupo em seu projeto de Modelagem Matemática foi a população de ratos em uma cidade em período de dois anos. Da mesma forma que o grupo 1, o grupo 2 inventou os dados para sua situação. Eu tive apenas uma reunião com o grupo, quando os componentes relataram a primeira reunião, que tinha acontecido sem a minha presença. Nessa única reunião comigo, os alunos afirmaram ter tentado, por um longo período de tempo, buscar uma situação real, mas não chegaram a um acordo, o que os levou a desistir. Consideraram, então, uma função polinomial de grau 4 e criaram uma historinha: ela representaria a população de ratos de uma cidade imaginária. Daí, eles seguiram o roteiro de estudo da função sugerido pelo professor. Os alunos disseram, também, que tentariam interpretar, na situação real, os resultados matemáticos que obtiveram.

Na apresentação para a turma, cada componente era responsável por uma parte. Em sua vez, Pedro decidiu questionar algumas partes do trabalho.

Pedro: *Esse aí é o sólido de revolução daquela função. (...) A gente não achou um motivo pra calcular o sólido de revolução. A gente pôs o sólido de revolução ...*

[As outras componentes do grupo interferem, talvez tentando impedir Pedro de continuar].

Pedro: *Não, mas é ... pra mostrar que a gente sabia fazer porque ...*

[Pedro é interrompido pela turma que começa a rir do que ele falou. Pedro também esboça um sorriso tímido].

Pedro: *Mas é verdade! Porque a gente não ... não tem por que explicar o sólido de revolução pra população de ratos.*

Uma outra componente do grupo: *Deixa pra depois, o responsável ...*

[Pedro está com uma expressão de indignação. Ele volta a mexer no computador, enquanto o professor pergunta:]

Professor: *Fernanda, vocês giraram este sólido em torno de que eixo?*

[Pedro olha para Fernanda, talvez esperando por sua resposta. A discussão volta para a matemática].

Neste episódio, Pedro afirmou que seu grupo não tinha um motivo para calcular o volume do sólido de revolução para uma função que representava a população de ratos. De qualquer forma, eles tinham feito para mostrar que sabiam fazer. As colegas do grupo tentaram impedir que Pedro continuasse seu questionamento e os colegas da turma riram do que ele falou. O professor quis saber qual tinha sido o eixo de rotação.

Essa não foi a única vez em que Pedro manifestou seus questionamentos sobre o que estava sendo pedido no projeto de Modelagem Matemática. Em sua entrevista final, (anexo 14), por exemplo, ele afirmou que

a gente fazia o que a gente achava que tinha significado físico, mas aí, depois, não era só aquilo, tinha que pôr mais coisas. Aí a gente tinha que pôr coisas que a gente não sabia explicar e não tinha significado nenhum, não representava nada. Então eu acho que não tem por que fazer uma coisa que ... já que é pra fazer do cotidiano, não tem por que fazer uma coisa que não tem nada a ver com o cotidiano, não vai explicar nada.

Pedro se referia à orientação dada pelo professor para o desenvolvimento do trabalho. Como já foi descrito no capítulo 6, o professor solicitava que os alunos buscassem uma função do dia-a-dia e que fizessem um estudo dessa função da forma como é feito, normalmente, nos cursos de Cálculo. Pedro não concordava que fosse assim. Para ele, apenas os cálculos que tinham significado para a situação do cotidiano deveriam ser efetivados e interpretados.

As colegas de grupo de Pedro tinham uma postura diferente: elas não queriam que Pedro manifestasse seu protesto. O professor, por sua vez, desconsiderou o questionamento de Pedro.

7.5.1. Análise de primeiro nível do episódio

Nesse episódio Pedro, componente do grupo 2, questionou o motivo de se seguir todo o conteúdo do Cálculo para estudar a situação do cotidiano. Para ele, como o projeto consistia em estudar uma situação real, não fazia sentido realizar cálculos que não tinham significado na situação. O grupo fez tudo o que o professor tinha pedido, mas Pedro decidiu tornar público o seu protesto.

As reações das outras pessoas desestimularam Pedro a continuar com seus questionamentos. As colegas de grupo tentaram impedi-lo, os colegas da turma riram dele e o professor não o apoiou. Vendo-se sozinho, ele não teve outra alternativa senão calar-se.

Encerro aqui a apresentação dos episódios selecionados a partir de reuniões dos grupos desenvolvendo seus projetos de Modelagem Matemática em um ambiente computacional e das análises de primeiro nível dos mesmos. Realizarei, no próximo capítulo, as análises de segundo nível desses episódios, levando em conta o referencial teórico discutido nos capítulos 2, 3 e 4.

Capítulo 8

Os Episódios à Luz da Literatura

Neste capítulo, retomarei os episódios apresentados no capítulo 7, realizando o que denomino análise de segundo nível, conforme já foi explicado no capítulo 5. Tendo em mente a pergunta diretriz da pesquisa - Que discussões ocorrem, e como elas ocorrem, em um ambiente de ensino e aprendizagem de Cálculo no qual a Modelagem Matemática e as tecnologias informáticas estão presentes? – realizo essa análise nas cinco próximas seções, considerando a teoria apresentada nos capítulos 2, 3 e 4, assim como toda a discussão já realizada sobre o contexto e os episódios da pesquisa. As análises de segundo nível desembocarão, por fim, em uma síntese apresentada na seção 8.6..

8.1. Análise de Segundo Nível do Episódio 1 do Grupo 1: Imaginação e Realidade

Nesse episódio, as componentes do grupo 1 relataram para mim que a função-tema de seu projeto de Modelagem era uma função imaginária, mas que elas pretendiam considerar uma função real. Assim, o tema das discussões foi “imaginação e realidade”. As alunas não discutiram o tema em um nível teórico, mas ele pode ser considerado para análise a partir da discussão ocorrida sobre a “função real” e a “função imaginária”.

Esse tipo de discussão foi detectado também por Christiansen (1997). Diferentemente de mim, a autora denomina essas duas situações de “realidade real” e “realidade virtual”. Como já afirmei no capítulo 4, nesse trabalho, a autora discute a negociação de significado entre os alunos e entre os alunos e a professora, em um contexto no qual uma atividade de Modelagem Matemática é proposta. Os alunos não sabiam que procedimento adotar diante da atividade: considerá-la, ou não, um exercício padrão, donde a autora conclui que *inserir a ‘realidade’ na sala de aula de matemática parece assim introduzir – ou aumentar – um conflito entre fazer exercícios e resolver problemas, o que prende os alunos em uma situação tensa ...*¹ (p. 20).

Acredito que tenha ocorrido esse fato no episódio aqui considerado. O grupo também não sabia como proceder diante da atividade proposta pelo professor: deveriam buscar uma

¹ Tradução de *Inserting ‘reality’ in the mathematics classroom thus seems to introduce – or enhance – a conflict between doing exercises and solving problems that catch the students in a tension...*

função real, como ele tinha proposto? A função real poderia ser como aquelas que apareciam nas aulas, ou seja, poderia ser inventada? Essa falta de clareza sobre como proceder teve como consequência a invenção de uma “função imaginária” e o plano da busca de uma “função real”, que acabou não acontecendo.

Podemos inferir, daí, algumas pistas sobre a visão que o grupo tinha de matemática e sua relação com a realidade. Uma pista vem do próprio procedimento das alunas componentes do grupo, que inventaram uma situação imaginária, apesar da solicitação de uma situação real. Elas se referiam a essa situação (função e/ou seu gráfico) utilizando expressões como “certinho”, “perfeito”, “redondinho”, “a gente pode fazer mais sozinha”. Esse procedimento sugere que, para as alunas, a matemática poderia ser aplicada, com perfeição, a um mundo imaginário. Podemos associar esse “mundo imaginário” ao Mundo das Formas platônico? Ou às abstrações pressupostas pelo formalismo? De qualquer forma, isso mostra que a matemática nas quais as alunas se sentiam mais seguras (“a gente pode fazer mais sozinha”) se aplicava a um mundo separado da realidade, que assumia contornos de perfeição. Entretanto, elas não descartavam a possibilidade de uma matemática mais “mundana” – a “função real” – mas, para lidar com ela, nesse mundo, o grupo necessitaria da ajuda do professor, seja pela falta de experiência com os dados reais, seja pela falta de experiência com computadores.

Quais teriam sido as razões para isto acontecer? Retornando ao capítulo 6, quando apresentei o contexto e os participantes da pesquisa, podemos verificar que a consideração de situações reais não era um procedimento comum nas aulas de Cálculo. As alunas seguiram, então, o modelo de suas aulas para desenvolver o projeto de Modelagem. Mais que isso, como percebemos a partir dos “retratos escritos” dos participantes da pesquisa (subseção 6.3.3.), a experiência anterior das alunas com a matemática apresentava essa disciplina como um corpo de conhecimentos formal e bem organizado logicamente. Tanto que o fato de o professor Sérgio não seguir a ordem em um livro-texto incomodou a todas. Sendo assim, o procedimento das alunas foi coerente com a experiência que elas traziam de sua escolarização anterior e com a prática de suas aulas de Cálculo.

Houve, portanto, um choque entre o que o professor pediu – buscar uma função real – e a experiência das alunas. Afinal de contas, qual era o objetivo da atividade? Posso dizer, então, que, implicitamente, as alunas estavam realizando uma *negociação de tarefa* (Christiansen, 1997). Na situação considerada por essa autora, os alunos não sabiam se poderiam, ou não, considerar informações que não eram dadas pela atividade, enquanto no episódio aqui analisado, a dúvida das alunas dizia respeito a buscar uma situação real ou inventar uma situação imaginária, já que elas não tinham nenhuma informação dada *a priori*. De qualquer forma, o objetivo da tarefa não estava claro para o grupo.

Christiansen (1997) acrescenta que, *mais que isso, a relação entre o objeto a ser matematizado (realidade virtual) e a realidade, que tem sido considerada como dada ou ignorada na aula de matemática des-contextualizada regular, está aberta à consideração* [ou está aberta à discussão] – *mas parcialmente fechada, novamente pela determinação implícita do objetivo.*² (p. 20). Em outras palavras, a autora afirma que a realidade não tem sido tematizada na sala de aula de matemática, apesar do aparecimento de situações que possibilitariam tais discussões. No contexto em que esta pesquisa foi realizada, a possibilidade de se considerar a realidade na aula de matemática era mais evidente que no trabalho dessa autora, se tomarmos a forma como o projeto de modelagem foi proposto pelo professor – buscar uma função da realidade. Mas, em concordância com o que afirma Christiansen (1997), a falta de clareza sobre o objetivo da atividade, causada pelo choque entre a proposta do professor e a experiência das alunas, fechou essa possibilidade.

Entramos, assim, no campo das *possibilidades de discussões* (Alrø e Skovsmose, 2001). Quando o professor solicitou a toda a turma que buscasse uma função da realidade, abriu-se a possibilidade de que esta entrasse na disciplina Cálculo e fosse discutida pelos grupos em seus projetos. Havia a possibilidade, por exemplo, de se tematizar o *poder formatador da matemática* (Skovsmose, 2000a), a partir de discussões sobre como a matemática estaria sendo usada na construção da realidade por meio do uso da Modelagem Matemática, em cada projeto. Essa discussão poderia dar origem a questões sobre a *ideologia da certeza na Educação Matemática* (Borba & Skovsmose, 1997).

Na reunião da qual este episódio faz parte, houve também a possibilidade de que tais questões fossem levantadas. Além das questões apontadas no parágrafo anterior, eu poderia, como consequência da proposição da “função imaginária” pelo grupo, ter encaminhado uma discussão sobre a visão de matemática das alunas, incursionando, assim, pelos campos da filosofia da matemática e da filosofia da Educação Matemática. Christiansen (1997) avalia que, na situação por ela analisada, a existência de desacordos sobre o objetivo da tarefa não estava clara para a professora e que, se estivesse, teria sido uma ótima oportunidade para discutir a compreensão dos alunos sobre o processo de modelagem. Acredito que, de certo modo, eu tinha clareza desse desacordo no episódio, mas eu não estava atenta sobre a importância de dialogar com as alunas sobre eles, e acabei ficando um pouco impaciente. Assim, a situação que possibilitava um diálogo acabou se limitando a uma confusa discussão entre o grupo e mim.

² Tradução de *Further, the relationship between the object for mathematization (virtual reality) and reality, which has been taken for granted or ignored in the regular de-contextualized mathematics class, is opened for consideration – but partially closed again by the implicit goal determination.*

8.2. Análise de Segundo Nível do Episódio 2 do Grupo 1: A Continuidade da Função g

Nesse episódio, as componentes do grupo 1 discutiram acerca da continuidade, ou não, da função que era tema de seu projeto de Modelagem. As principais discussões que ocorreram foram matemáticas e discussões sobre características do *software* relacionadas com os conceitos matemáticos envolvidos.

A discussão matemática central recaiu sobre a continuidade da função g . As alunas, primeiramente, pensavam que ela era contínua e, depois, concluíram que ela era descontínua. Como afirmei na análise de primeiro nível (subseção 7.2.1.), elas se apoiaram no gráfico de g , nas quatro funções quadráticas que a constituíam e no computador para chegar a tal conclusão. Entretanto, se as alunas se baseassem na expressão da função apresentada no início da seção 7.2., elas verificariam que haviam definido o seguinte domínio para a função: $[0,96) - \{24, 48, 72\}$. Considerando a definição de continuidade de uma função em um livro de Cálculo, por exemplo, em Swokowski (1983), encontramos o seguinte:

Dizemos que uma função f é contínua em um ponto a , se forem satisfeitas as seguintes condições:

- i) f estiver definida em um intervalo aberto contendo a ;
- ii) existir o limite de $f(x)$ quando x tende a a ;
- iii) $f(a)$ for igual ao limite de $f(x)$ quando x tende a a ;

Além disso, dizemos que f é contínua em seu domínio se as três condições acima forem satisfeitas para todos os pontos de seu domínio.

Se f for definida em um intervalo fechado $[a,b]$, dizemos que ela é contínua em seu domínio se ela for contínua em (a,b) e se for “contínua à direita” no extremo a e “contínua à esquerda” no extremo b do intervalo. Para definirmos continuidade à direita de um ponto, basta trocarmos a condição ii) acima por

- ii) existir o limite lateral de $f(x)$ quando x tende a a pela direita;

e fazermos as devidas adaptações em i) e em iii). De forma análoga, definimos continuidade à esquerda de um ponto.

Portanto, utilizando essa definição de continuidade, concluímos que g , definida como o foi, no início da seção 7.2., é uma função contínua. Reafirmo que seria esse o caso, se as alunas tivessem considerado a expressão matemática da função g . Entretanto, analisando o episódio, percebemos que o domínio que elas tinham em mente, enquanto discutiam, era o

intervalo $[0,96]$, já que elas analisaram a continuidade nos pontos 24, 48 e 72 que, em princípio, não pertenciam ao domínio. Sendo assim, apesar de definirem a expressão da função g da forma como o fizeram, as alunas utilizaram uma outra definição, equivalente àquela, mas com um outro domínio. De qualquer forma, a função g , sobre a qual o grupo discutia, era realmente descontínua nos pontos 24, 48 e 72 de seu domínio. Resta-me, então, o seguinte questionamento: se o grupo não utilizou a expressão algébrica de g para discutir sua continuidade, que argumentos³ foram utilizados, então?

Em três partes desse episódio podemos destacar três diferentes tipos de argumentos utilizados pelo grupo para discutir a continuidade da função. Os argumentos utilizados pelas alunas podem dar pistas sobre suas *boas razões* (Alrø & Skovsmose, 1996b) para utilizá-los.

Na 2a. parte da cena 1, o argumento apoiava-se na matemática apresentada em livros-texto, ou pelo professor, na sala. Paula buscou, em um teorema matemático, uma boa razão para Martha não conseguir calcular os valores máximos e mínimos de g : *Isto não é uma função contínua. Então não pode ser derivável*. Podemos dizer, então, que se tratava de uma razão matemática. O estilo de comunicação, que se seguiu à intervenção de Paula, não se mostrou frutífero para a elaboração do argumento: Martha interrompeu Paula, eu fiz muitas intervenções, buscando esclarecer os conceitos e teoremas matemáticos, as alunas misturavam os conceitos, talvez devido às minhas colocações, enfim, a discussão foi muito confusa. Mesmo assim, chegamos a um acordo – g era contínua – e o grupo continuou seu trabalho.

Na 2a. parte da cena 2, foram usados argumentos empíricos⁴, baseados nos dados que o grupo possuía. As alunas não concordavam sobre o terceiro ponto crítico da função g : (24,20) ou (24,13)? O que agravava a situação era a continuidade na qual o grupo acreditava até aquele momento. As alunas buscaram, então, uma explicação para a contradição que estava diante delas: os dois gráficos se encontrariam de alguma forma? Ou a hipótese inicial sobre a continuidade de g era falsa? As atitudes das alunas, nessa parte, sugerem que elas eram as proprietárias do processo de investigação. Diante da contradição, elas refutaram a hipótese da continuidade da função, que era, inclusive, apoiada por mim, e começaram a buscar justificativas para suas descobertas.

³ Argumento, aqui, é entendido como *raciocínio formando um todo distinto e bem concatenado que tem por finalidade provar ou refutar proposição ou teoria*. (Japiassú & Marcondes, 1998, p. 16). Enquanto argumentação é *o modo de apresentar e de dispor os argumentos, (...) Seu objetivo é o de convencer ou persuadir, mostrando que todos os argumentos utilizados tendem para uma única conclusão*. (op. cit. p. 15-16).

⁴ Por empírico refiro-me ao uso direto das informações provenientes dos dados do projeto de Modelagem Matemática do grupo.

Na 3a. parte da cena 2, o argumento era visual. Nessa parte, Laura, utilizando seus direitos de proprietária do processo de investigação, questionou a justificativa dada anteriormente por Martha para o fato de elas não “verem” a descontinuidade da função no computador. Ocorreu, então, uma *negociação de significados* (Alrø & Skovsmose, 1996a): o que significava aquela continuidade aparente do gráfico de g apresentado pelo computador? Segundo o que Martha afirmou na 2a. parte da cena 2, elas não viam a descontinuidade da função no computador porque esta não era visível. Esse argumento é parecido com uma idéia do formalismo, segundo a qual o matemático não pode se apoiar em figuras para construir as verdades matemáticas. Assim, as boas razões de Martha eram razões matemáticas. Já Laura percebeu que a continuidade aparente significava uma forma diferente de representação de descontinuidade pelo *software*, ou seja, ela levava em conta todos os componentes da situação na qual a atividade acontecia. Podemos dizer, então, que as boas razões de Laura eram organizacionais.

Acredito que um dos motivos dessa diversidade de argumentação foi a presença do computador na discussão protagonizada pelo grupo. Como pode ser notado na Figura 3 (seção 7.2.), o *software* Maple tem uma maneira não usual de representar pontos de descontinuidade do tipo daqueles da função g . Essa característica do *software* acabou induzindo as componentes do grupo, e a mim, com relação à continuidade da função. Talvez pela vivência educacional das alunas, o primeiro encaminhamento que elas tentaram foi o de argumentações matemáticas para encontrar uma solução para seu problema. Mas, o contexto da situação levou-as a buscar novas argumentações, empíricas e visuais, para fundamentar a discussão. Ou seja, o que poderia ser considerado limitação do *software* acabou se constituindo como uma *potencialidade* (Gracias & Borba, 2000) para discussões matemáticas.

A flexibilidade de argumentação neste episódio sugere uma visão de matemática diferente daquela aparente no episódio 1. Lá, a matemática mais familiar às alunas, era separada da realidade e caracterizada pela perfeição e certeza, aproximando-se das visões platônica e formalista dessa ciência. Aqui, até houve uma tentativa de uso da matemática para a busca de uma certeza, mas ela não foi frutífera para as alunas. Surgiram dúvidas, incertezas, que as impulsionaram a investigar os resultados matemáticos. Podemos perceber então uma visão diferente de matemática, que tem abertura para dúvidas e que é construída, em grupo, pelas alunas. Mas apenas pelas alunas? Há um aspecto importante que não posso deixar de mencionar: a presença da mídia informática. Poderia dizer então que o computador tem alguma responsabilidade na desestabilização das certezas matemáticas que as alunas tinham até então. Não posso afirmar, entretanto, se elas classificariam suas atividades, nesse episódio, como pertencentes à matemática, mas o fato de elas coordenarem conhecimentos matemáticos prévios com seus dados (imaginários) e

com o computador, apóia a visão de conhecimento apresentada por Borba (1999). Esse autor propõe a metáfora seres-humanos-lápis-e-papel-informática..., ou *seres-humanos-com-mídias*, para representar o sujeito que exerce o pensamento, baseado na *reorganização do pensamento* de Tikhomirov (1981) e no *pensamento coletivo* de Lévy (1993). Segundo essa metáfora, o pensamento não é centrado apenas nos seres-humanos, mas em um sistema constituído pelos seres-humanos e pelas mídias oralidade, lápis-e-papel, informática etc..

No episódio 2 do grupo 1, os seres-humanos pertencentes ao sistema que exercia o pensamento coletivo procuravam uma coerência entre as maneiras como as mídias lápis-e-papel e informática (no caso, o *software* Maple) usavam para representar a descontinuidade da função g , ou, usando a metáfora de Borba (1999), o grupo procurava o hífen que ligava a mídia lápis-e-papel à mídia informática. Vamos elaborar um pouco mais essa idéia.

Lévy (1993) afirma que o surgimento de novas mídias, como a informática, por exemplo, não causa o desaparecimento das outras que já existiam – oralidade, escrita. Entretanto, como ocorreu no episódio aqui considerado, pode haver alguma dissonância entre as formas de expressão em cada uma dessas mídias. Os seres-humanos que compõem o coletivo pensante seres-humanos-com-mídias buscam, de alguma forma, coordenar as dissonâncias que porventura apareçam. Portanto, a incorporação de novas mídias ao coletivo pensante seres-humanos-com-mídias causa uma reorganização do pensamento, como sugerido por Tikhomirov (1981), e esta, por sua vez, demanda uma negociação de significados entre os seres-humanos, buscando estabelecer uma *ressonância* (Lincoln & Guba, 1985) entre os vários componentes desse coletivo.

Uma característica importante desse episódio é que uma atividade de Modelagem Matemática em um ambiente computacional, proposta pelo professor, deu origem a uma discussão matemática, criada espontaneamente pelas alunas componentes do grupo. Ou seja, não foi proposto um exercício do tipo “verifique se a função $g(x)$ é contínua”, mas as alunas acabaram “fazendo” esse exercício, só que aqui ele foi proposto e executado segundo as necessidades e possibilidades do grupo. Entretanto, o grupo não retornou à situação original de seu projeto de Modelagem Matemática. Quais seriam então as *possibilidades* (Alrø & Skovsmose, 2001) para esse episódio?

Como a análise aqui apresentada sugere, as alunas do grupo 1 vivenciaram, nesse episódio, um *cenário para investigação* (Skovsmose, 2000b). Elas sentiam-se proprietárias do processo, levantavam hipóteses, buscavam justificativas, refutavam etc.. Entretanto, o tema das discussões limitou-se à matemática e ao *software*. As alunas poderiam ter reconsiderado a situação real do projeto de Modelagem Matemática para ampliar o *escopo de reflexão* (Alrø & Skovsmose, 2001). Para esses autores, a reflexão é uma consideração

consciente dos pensamentos, sentimentos e ações de alguém. Além disso, levando em conta que a matemática é parte integrante da vida cotidiana, é importante que o escopo das reflexões seja ampliado para além dessa disciplina, segundo as questões da Educação Matemática Crítica.

No episódio aqui considerado, o que significava a continuidade de g na situação real? Como coordenar esse significado com suas formas de representação pelas mídias lápis-e-papel e Maple? Essa discussão poderia demandar mais negociações de significados e o cenário para investigação atingiria um contexto mais amplo, na verdade, o contexto ao qual o grupo 1 pertencia: um ambiente de ensino e aprendizagem de Cálculo no qual a Modelagem Matemática e as Tecnologias Informáticas estão presentes.

Assim, se por um lado as alunas apresentaram, nesse episódio, uma visão de matemática diferente da do episódio 1, por outro, essa visão não ultrapassou os limites da escola. Ou seja, ao computador, elemento pertencente à escola (leia-se aqui universidade), foi permitido participar do curso de Cálculo, o que não aconteceu, nesse episódio, com a situação real, tema do projeto de Modelagem.

8.3. Análise de Segundo Nível do Episódio 3 do Grupo 1: Simetria

Nesse episódio, o grupo 1 discutiu a simetria da função $g(x)$ em relação ao eixo-y. Um aspecto que se destacou foi a grande interferência minha em seu desenrolar. Na verdade, acredito que ela tenha sido determinante dos acontecimentos do episódio. Essa interferência, entretanto, não foi a primeira: já no episódio 2, do mesmo grupo, eu interferi nas discussões. É importante refletir um pouco sobre essa interferência, pois ela diz respeito à metodologia de pesquisa.

No capítulo 5, classifiquei meu papel de pesquisadora, durante as observações, como *pesquisadora-membro-periférico* (Adler & Adler, 1994), já que eu estava necessariamente envolvida nos acontecimentos e exercia alguma influência nos fatos, embora não tivesse assumido nenhuma responsabilidade dentro do grupo. Desde o início das observações, o grupo sabia que meu papel, ali, era acompanhar o desenvolvimento de seu trabalho, mas sabiam, também, que eu era professora de Cálculo em uma universidade. Essa informação certamente influenciou a postura das alunas em relação a mim. Elas sempre levavam em consideração as minhas interferências e as respeitavam, acredito, porque sabiam quem eu era. Esse fato vem reforçar, pelo menos, duas características da pesquisa qualitativa: o papel do pesquisador como participante da pesquisa e sua influência na construção dos resultados.

Sinto-me mais confortável, então, para realizar a análise de segundo nível do episódio 3 do grupo 1, assumindo minhas interferências e procurando analisar suas consequências.

O grupo pretendia constatar e justificar a não-simetria do gráfico de g em relação ao eixo-y. Para tal, as alunas estavam considerando verdadeira a seguinte proposição matemática: se os gráficos de duas funções que não são simétricos em relação ao eixo-y forem justapostos, então, o gráfico resultante também não será simétrico em relação ao eixo-y. Para facilitar a análise, vamos denominar essa proposição de P.

Minha primeira intervenção no episódio foi um pedido de justificativa para P. Se eu tivesse afirmado, diretamente, que P era falsa, estaria operando segundo o *absolutismo da sala de aula* (Alrø & Skovsmose, 1996a). Nesse caso, as alunas apagariam o que tinham escrito e ficariam esperando que eu, uma representante da autoridade *que encobre a natureza das fontes de correção*⁵ (p. 4), dissesse qual era a *verdade matemática* que substituiria a proposição falsa. Contrariamente a esse procedimento, eu quis saber de Laura quais eram suas *boas razões* para fazer tal afirmativa, procurando uma maneira de fazer com que ela refletisse sobre a forma como estava lidando com a situação (Alrø & Skovsmose, 1996b).

Apesar de ter-me dirigido a Laura, o grupo todo tomou a questão para si. Valéria e Martha se limitaram a repetir a proposição P. Laura compreendeu minha questão, ficou pensativa e alertou as colegas sobre o que eu tinha solicitado. Diante do silêncio do grupo, apresentei o contra-exemplo, sem denominá-lo assim, durante a discussão. Meu objetivo foi *desafiar as boas razões* das alunas (Alrø & Skovsmose, 1996b). Enquanto eu apresentava o contra-exemplo, não disse que ele iria sugerir a falsidade de P, nem disse que seria um contra-exemplo. Foram as alunas que chegaram a essas conclusões, mas, certamente, apoiadas e induzidas por meu desafio. *Desafiar as boas razões, portanto, significa fazer com que os alunos reflitam sobre e expandam suas perspectivas e conhecimento*.⁶ (p. 33).

Tendo suas boas razões desafiadas, as alunas tinham de encontrar outras boas razões para a não-simetria do gráfico de g em relação ao eixo-y. Essa tarefa não foi difícil para o grupo: Laura comparou as duas situações, descobriu onde estava a diferença entre elas e Martha traduziu a justificativa em termos matemáticos: deve-se levar em conta o domínio da função para verificar sua simetria em relação ao eixo-y.

Todo esse diálogo ocorreu em um ambiente tranquilo e, ao mesmo tempo, entusiasmado. As alunas sentiam-se confortáveis, já que a discussão (ou o diálogo, nesse

⁵ Tradução de ...*which hides the nature of the sources of the correction*.

⁶ Tradução de *Challenging good reasons, therefore, means making the students reflect upon and widen their perspective and knowledge*.

caso) tinha-se iniciado a partir de suas perspectivas. Não fui eu, como professora, que expliquei algum tópico do conteúdo matemático.

Esse episódio sugere a importância do professor, ou de alguma outra pessoa com maior experiência, enquanto os alunos realizam alguma investigação. A importância da presença do professor durante o desenvolvimento de projetos de Modelagem Matemática foi enfatizada por Araújo e Salvador (2001). Nesse trabalho, destacamos o enriquecimento de tais projetos quando eles são continuamente avaliados pelo professor. Este, por meio do diálogo, pode chamar a atenção dos alunos sobre possíveis interpretações dos resultados obtidos.

Alrø e Skovsmose (2001) também enfatizam, em vários pontos de seu trabalho, a importância da presença do professor. Segundo esses autores, quando os alunos estão operando em um *cenário para investigação*, é possível que alguma idéia importante passe despercebida, ou que os alunos se apoiem em alguma hipótese falsa. Nesses casos, é importante a presença do professor para chamar a atenção dos alunos para outros caminhos possíveis, ou para desafiar as boas razões dos alunos.

8.4. Análise de Segundo Nível do Episódio 4 do Grupo 1: O Significado da Variável do Domínio

O tema das discussões, nesse episódio, foi o significado da variável do domínio da função g e das quatro funções utilizadas em sua constituição: v , o , i e p . Ele se iniciou a partir de um questionamento feito por uma das alunas, ao buscar alguma relação entre os domínios dessas funções. Sobre o domínio de v , o , i e p , acredito que não havia dúvida entre as alunas: para cada uma, ele era o intervalo $[0,24]$ e a variável do domínio representava o tempo em um dia.

Com relação ao domínio de g , as alunas apresentaram algumas contradições em suas falas sobre qual era ele e sobre seu significado. Em princípio, Laura afirmou que o domínio era $[0,96]$ e se baseava, acredito, na situação real. Entretanto, o domínio de g , a partir de sua expressão matemática, era $[0,96) - \{24,48,72\}$, como pode ser verificado na seção 7.2.. Valéria questionou as colegas sobre o significado da variável do domínio $[0,96]$, elas afirmaram que não se tratava mais do tempo, como no caso das funções v , o , i e p , e que ele era apenas um recurso matemático.

Podemos perceber então que, para especificar o domínio de g , as alunas, ora se baseavam na situação real, ora se baseavam na matemática. Esse aspecto é apontado, também, em Araújo e Barbosa (2001). Nesse estudo, cujo objetivo era buscar compreender

como os alunos interpretam e conduzem a tarefa de desenvolver um projeto de Modelagem, o projeto considerado para análise foi o mesmo elaborado pelo grupo 1. Uma das conclusões a que chegamos foi que o grupo mobilizou conhecimentos cotidianos e matemáticos para criar a situação que seria estudada em seu projeto. Diante do episódio aqui analisado, acrescentaria que a mobilização desses dois tipos de conhecimento ocorreu em outros momentos do desenvolvimento do projeto e não apenas na geração da situação. Entretanto, no instante em que a incompatibilidade dessas duas fontes se explicitou, Martha usou a matemática para justificá-la: *É apenas um recurso matemático*.

Parece-me, então, que, diante do impasse sobre o significado da variável do domínio, as alunas se refugiaram na certeza matemática. O impasse pode ter tido origem na maneira como o grupo criou a situação-tema de seu projeto de Modelagem Matemática, partindo de uma situação real não-matemática e inventando uma função imaginária que, em princípio, não tinha uma correspondência com a situação real. Esse impasse só se tornou explícito a partir do questionamento de Valéria. Entretanto, acredito que todo o grupo, de certa forma, tinha consciência do impasse, pois as colegas de Valéria deram-lhe, prontamente, uma justificativa matemática, ou seja, sua dúvida não causou espanto entre as colegas. Rapidamente, elas utilizaram a certeza matemática para fazer o impasse desaparecer. Esse procedimento mostra que a *ideologia da certeza* (Borba & Skovsmose, 1997) estava presente na reunião do grupo. A matemática foi utilizada para dar um argumento definitivo, para pôr fim a uma dúvida, e, como nos alertam esses autores, ela pode ser usada como a linguagem do poder, como pode ter sido o caso, em se tratando de “poder” dentro do grupo. Retomarei esse ponto um pouco mais à frente.

Esse episódio sugere que, apesar de todo o tratamento matemático dado à função-temperatura, no decorrer do trabalho, as alunas mantinham, implicitamente, para elas a situação não-matemática que a originou. Em outras palavras, a situação real ficou latente no decorrer do trabalho, mas sua participação no curso de Cálculo foi dificultada. Por outro lado, na análise do episódio 2, afirmei que foi permitido ao computador participar desse curso, ajudando a provocar, inclusive, algumas mudanças na visão de matemática que as alunas pareciam ter. Uma hipótese que posso levantar é que essa discriminação contou com o apoio do contexto no qual os episódios ocorreram. Vamos examinar essa hipótese mais cuidadosamente.

As componentes do grupo eram alunas de Engenharia em uma universidade, ou seja, elas eram futuras engenheiras que, dentro em breve, atuariam no mercado de trabalho. A informática, por sua vez, tem espaço garantido nesse último, já que, normalmente, é associada a desenvolvimento e progresso. Assim, era desejável que o computador estivesse presente na formação dessas alunas. Entretanto, a reflexão sobre

situações reais não possuía o mesmo *status* que a informática dentro da escola (ou da universidade). Concordo com Borba e Penteado (2001) quando questionam a postura que coloca a importância do uso da informática na Educação na preparação dos alunos para o mercado de trabalho. Diferentemente, a democratização do acesso à tecnologia deve estar em concordância com a formação de cidadãos críticos. Quanto ao uso de situações reais na escola, satisfazendo os interesses do mercado de trabalho, não tenho subsídios suficientes para refletir sobre ele.

A questão colocada por Valéria sobre o significado da variável do domínio de g foi um convite à negociação de significados. Quais eram, então, as possibilidades desse convite? Valéria praticamente segredou seu questionamento ao ouvido de Laura. Esta, por sua vez, poderia ter sugerido a Valéria que colocasse sua questão para todo o grupo. Haveria, então, um diálogo entre as alunas para examinar a questão, os domínios das funções, para negociar os significados das variáveis desses domínios e o significado daquela função criada por elas para representar a temperatura em quatro dias típicos de uma cidade imaginária. Alguém poderia ter lembrado, então, que o objetivo do projeto era estudar uma situação real e que, assim, seria importante interpretar os possíveis significados dos artifícios criados pelo grupo. Reconsiderando a situação-tema do projeto, o escopo de reflexão poderia ser ampliado mais ainda, podendo incluir, por exemplo, questões sobre o papel da matemática ao criar artifícios para compreender e atuar na realidade, o que originaria reflexões sobre o *poder formatador da matemática* (Skovsmose, 1994), uma das questões levantadas pela Educação Matemática Crítica.

Devemos atentar, entretanto, para o papel exercido por Laura e Martha no grupo, especificamente em dois momentos desse episódio. O primeiro deles, na 2a. parte do episódio, ao darem uma justificativa matemática para a questão colocada por Valéria, fazendo, talvez, uso do poder subentendido pela ideologia da certeza, sem deixá-la à vontade para que falasse mais sobre sua idéia. O segundo momento, na 3a. parte, quando Martha incentivou Valéria a seguir minha sugestão de “pensar alto”. Essas duas passagens, assim como algumas outras durante todo o desenvolvimento do projeto pelo grupo, retratam a liderança exercida por Laura e Martha. Nessa liderança, muitas vezes, parecia que elas assumiam o papel do professor.

Alrø e Skovsmose (1998) se referem a esse aspecto como a *presença invisível do professor*. Esses autores chamam a atenção para o fato de algum aluno do grupo assumir a postura do professor, no caso de sua ausência. Ainda segundo eles, *uma possível lógica dos alunos pode ser que quando o professor não decide, então alguém tem que fazê-lo*.⁷ (p.

⁷ Tradução de *A possible student logic can be that when the teacher will not decide, then somebody else has to do it.*

48). No caso do grupo 1, podemos dizer que Martha e Laura eram as representantes do professor. Mas qual era a intenção dessas alunas ao tomarem essa representatividade? Esses mesmos autores afirmam que *isso pode expressar a tentativa dos alunos de criar diretrizes claras para o direcionamento da educação*.⁸ (p. 48). O grupo tinha um objetivo: desenvolver o trabalho, e alguém tinha de assumir a liderança para garantir que tal objetivo fosse alcançado. Além disso, como já afirmei na análise de primeiro nível desse episódio (subseção 7.4.1.), Martha e Laura mostraram-se muito compromissadas com a participação na pesquisa e, exercendo a liderança, elas “garantiriam” o acontecimento de fatos que, na concepção delas, fossem interessantes para a pesquisa.

Esse compromisso das alunas vem sugerir, mais uma vez, a forte relação entre os participantes da pesquisa e seus resultados. Assim como eu, pesquisadora, interferei no andar dos acontecimentos, as componentes desse grupo (em especial Martha e Laura) também tomaram atitudes em função da participação na pesquisa. Ou seja, de certa forma, os dados dessa pesquisa tomaram o formato que têm por serem parte de uma pesquisa, o que também é uma característica da abordagem qualitativa. Vamos analisar, então, algumas consequências desse compromisso de Martha e Laura.

Como era o exercício da liderança delas? Mais especificamente, como se dava a comunicação entre elas e suas colegas? Acredito que a maneira como Martha e Laura exerciam sua liderança, aliada à timidez de Valéria, inibiram essa última na exposição de suas idéias. Havia, assim, um desnível entre os papéis que elas exerciam no grupo e, de acordo com Alrø e Skovsmose (1996a), como não havia uma equidade entre as duas partes, a negociação de significados enfrentava obstáculos.

Não estaria sendo justa com Martha e Laura se fechasse essa análise com o parágrafo anterior. Elas tinham suas *intenções* (Alrø & Skovsmose, 1998) para *agir* daquela forma: desenvolver um ótimo projeto de modelagem e proporcionar situações interessantes para a presente pesquisa. Segundo esses autores, as *ações* são constituídas por *intenções*, e essas pressupõem envolvimento, compromisso e participação nas atividades. Não podemos negar as ótimas *intenções* de Martha e Laura no desenrolar dos episódios. A questão é que, de acordo com Alrø e Skovsmose (1998), *intenções não caem do céu; pelo contrário, elas são formadas com base na experiência, impressões, preconceitos, preferências etc.*⁹. (p. 49). E como podemos perceber em suas entrevistas, ou em seus “retratos escritos” (subseção 7.3.3.), as experiências anteriores dessas alunas as levavam a enxergar, assim, o papel do professor na sala de aula.

⁸ Tradução de *It may express the student's attempt to create clear guidelines for the direction of the education*.

⁹ Tradução de *Intentions do not emerge out of the blue; rather, they are formed on the basis of experience, impressions, prejudice, preferences, etc.*

8.5. Análise de Segundo Nível do Episódio do Grupo 2: Por que o Sólido de Revolução?

Nesse episódio do grupo 2, Pedro reivindicou que o trabalho deveria cumprir seu objetivo, qual seja, estudar uma situação real. Sendo assim, não fazia sentido realizar cálculos que não tinham significado para a situação. A origem desse protesto está na orientação do professor Sérgio, que solicitava que fosse feito um estudo da função-tema dos projetos de Modelagem, como é feito, normalmente, nos cursos de Cálculo.

Podemos perceber algumas transformações na postura de Pedro no decorrer do semestre. Em sua entrevista inicial, ele reivindicava a apresentação da matemática pelo professor nos moldes formalistas, seguindo uma ordem lógica. No desenvolvimento do projeto de Modelagem por seu grupo, Pedro apoiou a criação de uma situação imaginária, como acontece tradicionalmente nas aulas de matemática, mas tentou disfarçar a invenção dos dados, apresentando a versão final do trabalho como se eles fossem reais. Ao final do semestre, na apresentação do trabalho para a turma e em sua entrevista final, ele questionou a realização de cálculos que não tinham significado para o tema do trabalho de seu grupo. Poderíamos dizer, então, que o contato com o projeto de Modelagem Matemática em um ambiente computacional instigou Pedro a desafiar a visão de matemática que ele tinha, aproximando-a mais da realidade?

A reivindicação de Pedro faz voltar à cena a negociação de significados. Para ele, a não existência de um significado explícito para algum cálculo seria uma justificativa para se eliminar esse cálculo. Entretanto, ele poderia dialogar com suas colegas de grupo sobre os possíveis significados desse cálculo.

Aqui, a exemplo do ocorrido no episódio 4 do grupo 1, o convite à negociação de significado feito por um componente do grupo também foi negado. Meu objetivo em retomar esse ponto é que, no episódio considerado nesta seção, havia uma inversão de papéis, se comparado com o episódio anterior. Lá, a aluna que fez o convite para a negociação de significado era “liderada”; aqui, Pedro era o líder do grupo.

Na análise do episódio anterior, poderíamos levantar a hipótese de que características pessoais de Valéria, Laura e Martha tivessem sido responsáveis pelo não acontecimento da negociação de significados. No episódio considerado nesta seção, Pedro não era tímido, tinha uma forma incisiva de colocar suas idéias e exercia a posição de líder do grupo. Entretanto, essas suas características não foram suficientes para desencadear uma negociação de significados: ele foi impedido de falar pelas colegas do grupo, pela turma e pelo professor, cada um à sua maneira.

A tentativa frustrada de Pedro vem reforçar a hipótese que levantei na seção anterior, quando analisava o episódio 4 do grupo 1: a escola (ou a universidade) não estava receptiva a discussões e reflexões sobre situações reais, mais particularmente, sobre o uso que é feito da matemática nessas situações. Entretanto, as tentativas de Valéria, no episódio anterior, e de Pedro, neste episódio, sugerem que a proposição do desenvolvimento do projeto pelo professor Sérgio possibilitaria uma abertura da escola para esse tipo de reflexão. Para que essa abertura fosse aproveitada, como nos indicam esses dois últimos episódios, seriam necessárias algumas negociações.

Segundo Alrø e Skovsmose (1996a), negociações de perspectivas e de significado não são tarefas fáceis. As negociações são colocadas por eles como formas de desafiar o *absolutismo da sala de aula* e o desafio não depende apenas de mudança de atitudes do professor. *Esse absolutismo não está apenas enraizado em uma atitude, mas em toda a estrutura escolar.*¹⁰ (p. 6). Em toda sua vida escolar, os alunos encontram um certo discurso que influencia suas expectativas com relação ao papel do professor e ao seu próprio papel e estas, por sua vez, influenciam a forma como a comunicação acontece na sala de aula.

O absolutismo da sala de aula, associado por esses autores ao absolutismo na filosofia da matemática, apóia a idéia de que os conceitos matemáticos são verdades inquestionáveis que podem ser alcançadas pelos alunos por meio da correção de erros. As verdades matemáticas estariam, então, em um mundo à parte de nossa realidade. Essa pode ser uma justificativa para o obstáculo encontrado por Valéria e Pedro em seus questionamentos. O ambiente escolar carrega essa visão de matemática, que pressupõe uma separação entre a matemática que é ali considerada e os problemas e situações da realidade. Apesar da proposição do projeto pelo professor, solicitando que uma situação real fosse levada para a sala de aula de matemática, toda a instituição escolar conspira para que essas situações fiquem fora da escola, já que essa tem sido a tradição.

A reivindicação de Pedro, por ter ocorrido diante de toda a turma, abriria a possibilidade para que ocorresse uma negociação de significados entre todos, alunos e professor, com relação, por exemplo, aos objetivos do projeto de Modelagem Matemática. Como foi sugerido na análise do episódio 1, esses objetivos não estavam claros para a turma e uma discussão sobre esse tema, mesmo no final do trabalho, era uma possibilidade para que ocorresse um diálogo sobre as perspectivas de Modelagem Matemática dos alunos e do professor já que, segundo Christiansen (1997), *sua perspectiva influenciará a*

¹⁰ Tradução de *This absolutism is not only rooted in an attitude but in the whole structure of schooling.*

*sua percepção de modelagem na situação educacional, em situações futuras de trabalho e como cidadãos.*¹¹ (p. 12).

8.6. Algumas Conclusões

Após as análises de segundo nível dos episódios, retomo, mais uma vez, a pergunta diretriz desta pesquisa: “Que discussões ocorrem, e como elas ocorrem, em um ambiente de ensino e aprendizagem de Cálculo no qual a Modelagem Matemática e as Tecnologias Informáticas estão presentes?”. Meu primeiro passo em busca de uma *resposta*¹² a essa pergunta foi um estudo teórico sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática, que culminou com a elaboração da perspectiva de Modelagem Matemática adotada na pesquisa.

Considerarei essa perspectiva na subseção seguinte para refletir sobre a Modelagem Matemática que acabou por se efetivar no trabalho de campo, destacando a influência dos procedimentos metodológicos nessa reflexão. Dessa análise, e levando em conta as análises de segundo nível dos episódios, um aspecto que se destaca é a visão de matemática, e sua relação com a realidade, sustentada pelos componentes do grupo. Discutirei esse aspecto na segunda subseção. Outros aspectos que se destacaram nas análises de segundo nível são: o objetivo da atividade, as negociações de significado, a presença do professor e as possibilidades.

8.6.1. A perspectiva de Modelagem Matemática

Após um estudo teórico apresentado no capítulo 2, elegi a seguinte perspectiva de Modelagem Matemática na Educação Matemática: uma abordagem, por meio da matemática, de um problema não-matemático da realidade, ou uma situação não-matemática da realidade, escolhida pelos alunos reunidos em grupos, de tal forma que as questões da Educação Matemática Crítica embasem o desenvolvimento do trabalho. Uma pergunta que pode ser feita é se essa foi a perspectiva que aconteceu no trabalho de campo. Como podemos analisar esta última tendo como parâmetro a perspectiva de Modelagem Matemática na Educação Matemática adotada nesta pesquisa?

¹¹ Tradução de ... *their perspective will influence their perception of modelling in the instructional situation, in later work situations, and as citizens.*

¹² Afirmar que busco uma “resposta” para a pergunta diretriz da pesquisa não quer dizer que tenho o objetivo de encontrar uma “solução” para algum problema posto por essa pergunta e nem que essa resposta é única. Utilizo essa palavra apenas como um par complementar à palavra “pergunta”, ou seja, considerando que, quando se pergunta algo, busca-se uma resposta. Relembro, ainda, que esta pesquisa tem a abordagem qualitativa como fundante metodológico e que, como tal, oferece um sentido específico à palavra “pergunta”. À palavra “resposta” corresponderá, então, um sentido sugerido pela palavra “pergunta”, assim compreendida.

No capítulo 6 (subseção 6.2.3.), realizei uma análise da perspectiva de Modelagem do professor Sérgio, baseada apenas na maneira como ele propôs a atividade para os alunos e nas negociações sobre o que deveria ser feito, que ocorreram no decorrer do semestre. Naquele momento, destaquei a presença de aspectos tradicionais e inovadores na forma como tal atividade foi proposta.

Na presente subseção, refletirei sobre a perspectiva de Modelagem que acabou acontecendo nos trabalhos dos grupos que foram acompanhados nesta pesquisa. Assim, o que está em foco, aqui, não é, necessariamente, a perspectiva de Modelagem do professor, mas sim a que eu percebi a partir da prática. Portanto, torna-se importante ressaltar o papel dos procedimentos metodológicos adotados na pesquisa para a construção dessa reflexão.

O procedimento metodológico, a partir do qual os episódios se originaram, foi a observação dos grupos desenvolvendo os projetos. Minha presença, nos momentos em que os alunos trabalhavam nos projetos, foi responsável por fazer-me “enxergar” aspectos que dificilmente poderiam ser acessados sem um acompanhamento *in loco*. Tomemos, por exemplo, a perspectiva de Borba, Meneghetti e Hermini (1997): *o esforço de descrever matematicamente um fenômeno que é escolhido pelos alunos com o auxílio do professor*. (p. 63). Na prática descrita por esses autores, o professor lança a proposta, tem algumas reuniões com os grupos no desenvolvimento dos projetos, assiste à apresentação do grupo para a turma no final do semestre e avalia a versão escrita do trabalho. O que ocorre nos intervalos entre esses contatos, apenas o grupo saberia dizer. Esse diferencial proporcionado pelo acompanhamento pode ser confirmado, também, quando comparamos a quantidade de episódios do grupo 1 (quatro) com a quantidade de episódios do grupo 2 (um). Como já disse, acompanhei mais de perto o trabalho do grupo 1, o que possibilitou o surgimento de um número maior de situações importantes – os episódios – de serem consideradas para análise.

Entretanto, minha presença não foi importante apenas para detectar os episódios. Como afirmei nas seções 8.3. e 8.4., a consciência, por parte das componentes do grupo 1, da participação em uma pesquisa e de minha posição de professora de Cálculo teve consequências no andamento das reuniões. Em outras palavras, os resultados de uma pesquisa podem sofrer influências dos procedimentos adotados, do pesquisador e dos participantes.

A influência desse conjunto de fatores pode ser percebida nesta pesquisa, como já afirmei, na prática de Modelagem que aconteceu no trabalho de campo. Olharei para essa prática tendo, como parâmetro, a perspectiva de Modelagem Matemática na Educação Matemática adotada nesta pesquisa. Cronologicamente, essa perspectiva estava sendo construída à medida que eu realizava a coleta dos dados, e ainda não tinha a sua forma

final, só estabelecida no momento da análise dos dados. Assim, vários aspectos da perspectiva adotada não eram foco de minha atenção enquanto acompanhava os grupos, mas, passaram a ser, na análise dos episódios.

Há pontos em comum entre a perspectiva que adoto e aquela ocorrida na prática: os alunos trabalharam reunidos em grupos, os grupos escolheram a situação a ser abordada matematicamente e a Modelagem Matemática foi associada às tecnologias informáticas. Entretanto, isso não é suficiente para concluir sobre a presença das preocupações da Educação Matemática Crítica, apresentadas na seção 2.5.. Para tanto, os episódios são essenciais.

Parece-me que, diante da análise dos episódios, a única questão da Educação Matemática Crítica presente no desenvolvimento dos projetos de Modelagem pelos grupos foi aquela que diz respeito à consideração dos interesses e competências dos alunos para o desenvolvimento do conhecimento e aprendizagem. As outras, que dizem respeito à preparação para cidadania e participação na vida social e política, ao uso da matemática como ferramenta para identificar e analisar aspectos críticos da vida social, à reflexão na sala de aula de matemática de questões sobre igualdade, equidade e justiça, à crítica da própria matemática e à democratização entre os componentes da “micro-sociedade” representada pela turma, não foram percebidos.

Entretanto, as questões da Educação Matemática Crítica, naquele momento, não eram foco de atenção do professor, nem dos alunos nem minha, ou seja, elas não faziam parte de nossas boas razões. Além disso, como afirmei no capítulo 2, dois aspectos podem ser preponderantes no estabelecimento da perspectiva de Modelagem Matemática: o contexto no qual os projetos são desenvolvidos e a compreensão que se tem do “problema da realidade”. Esses, por sua vez, estão intimamente ligados à visão de matemática, e de sua relação com a realidade, que é o tema da próxima subseção.

8.6.2. Matemática e realidade

Diante da atividade proposta aos alunos pelo professor, no início do semestre, que escolhessem ou elaborassem um problema de sua área de trabalho (ou de interesse) e utilizassem o Cálculo e o Maple para abordá-lo, coube aos alunos decidir o que seria esse problema ou situação. A tomada dessa decisão, acredito, pode ter sido influenciada pela visão que os alunos tinham sobre realidade e sobre como a matemática se localizaria e se relacionaria com ela. Essa visão, obviamente, não seria o resultado de uma profunda reflexão filosófica sobre o tema, mas, sim, de algumas impressões que os alunos deixaram transparecer ao longo do trabalho. Nas análises de segundo nível de alguns episódios,

aponte aspectos que podem ajudar a caracterização da visão de matemática que os participantes da pesquisa tinham.

Relativamente aos aspectos comuns aos dois grupos, destaco a criação de situações imaginárias como resposta à solicitação de uma situação real. Confesso que, no momento em que isso me foi revelado, pensei que minha pesquisa estava fadada a um fim precoce. Apesar de não ter realizado, até aquele momento, uma reflexão mais profunda sobre o que vinha a ser Modelagem Matemática, a proposição de uma situação real era primordial para mim.

Aprendi, pelo menos, duas lições com esse susto. A primeira delas coloca sob foco, mais uma vez, os procedimentos metodológicos que adotei. Quando o professor propõe, por exemplo, que um grupo busque uma situação real, o que lhe dará certeza sobre a “realidade” da situação? Mais importante que saber se a situação é real, ou não, o professor, ao não acompanhar de perto o desenvolvimento do trabalho, pode deixar passar a possibilidade de tentar compreender as razões de os grupos agirem desta ou daquela forma. Talvez, o modo de agir dos alunos diante de uma atividade de Modelagem Matemática, longe dos olhos do professor, reflita características do contexto no qual a atividade acontece. A outra lição chama minha atenção para a importância, no que diz respeito aos estudos sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática, de se refletir, juntamente com professor e alunos, sobre a perspectiva de Modelagem que ocorre na prática que é foco do estudo, ao invés de se rotularem as práticas como “isto não é modelagem” ou “aquilo é modelagem”. Acredito que, a partir dessa reflexão, muito se poderá compreender, por exemplo, sobre a visão de matemática e sua relação com a realidade, que essas pessoas têm. Um exemplo dessa reflexão ocorre aqui, nesta subseção, e terá prosseguimento a seguir.

As componentes do grupo 1 afirmaram, no episódio 1, que se sentiam mais seguras para lidar com uma matemática perfeita, utilizada em um mundo imaginário, mas admitiam a aplicação da matemática em situações reais, embora não se sentissem seguras para tanto. Essa idéia se assemelha bastante à da diferenciação entre matemática pura e matemática aplicada segundo o platonismo, apresentada na subseção 2.3.1.. De acordo com essa escola filosófica, a matemática pura descreve as formas matemáticas existentes no Mundo das Formas platônico, enquanto a matemática aplicada é utilizada para descrever a realidade constituída de objetos empíricos pertencentes ao mundo sensorial.

Essas mesmas alunas, no episódio 4, fizeram uso da certeza matemática para pôr fim a um impasse, surgido no grupo, relativo ao significado da variável do domínio da função que estavam estudando. Essa postura sugere que o grupo (ou algumas de suas componentes) tinha idéias semelhantes àsquelas sustentadas pela ideologia da certeza.

Assim, parece-me que o grupo 1 tinha uma visão de matemática que tem semelhanças com o platonismo, conferindo a essa ciência um certo grau de perfeição e certeza que permite que ela seja aplicada a nosso mundo cotidiano. Como já afirmei na seção 8.1., essa visão de matemática pode ter origem na experiência escolar das alunas, já que ela tinha sido preponderante em suas vidas escolares.

Entretanto, essa visão que as alunas tinham da matemática não era totalmente fechada a outras perspectivas. Esse aspecto tornou-se explícito no episódio 2, quando a utilização da certeza matemática não foi frutífera para resolver o impasse das alunas sobre a continuidade da função que estavam estudando. As alunas, sem hesitar, lançaram-se em um processo de investigação, mobilizando conhecimentos matemáticos, dados da situação imaginária e recursos computacionais, para decidir acerca da continuidade, ou não, da função-tema de seu projeto. Isso sugere que, para as alunas, a matemática não tem, necessariamente, de dar uma resposta final aos problemas. Parece-me então que elas utilizam a certeza matemática quando esta lhes é conveniente, quando ela pode oferecer um encaminhamento satisfatório para algum impasse.

Quanto ao grupo 2, não tive informações suficientes para refletir sobre as visões de matemática das três garotas. Já com relação a Pedro, talvez por ele se expressar com mais facilidade, foi possível fazer algumas considerações a esse respeito. Apesar das poucas informações que tive sobre o trabalho do grupo 2, uma hipótese que posso levantar é a de que o projeto de Modelagem Matemática em um ambiente computacional influenciou a visão de matemática que Pedro tinha.

No início do semestre, ele reclamou da não apresentação da matemática, pelo professor, em uma ordem lógica, talvez nos moldes do formalismo. Durante o desenvolvimento do projeto de Modelagem, Pedro não questionou a criação de uma situação imaginária e forjou a apresentação de dados “reais”. Entretanto, ele questionou a solicitação de se realizar o estudo da função do cotidiano da forma como normalmente é feita nos cursos de Cálculo. Apesar de levantar a hipótese de alguma mudança na visão de matemática de Pedro, não tenho informações suficientes que a apóiem. De qualquer forma, a postura dele é uma ponte para uma reflexão sobre a receptividade do contexto escolar a situações da realidade.

A idéia de considerar a receptividade do contexto escolar a situações da realidade surgiu a partir de uma comparação que fiz entre a forma como o computador foi incorporado às atividades e a reação da maioria das pessoas quando alguém se referia às situações reais que eram temas dos projetos. Pareceu-me que o computador era mais bem aceito que as situações da realidade. Os episódios 2 e 4 do grupo 1 e o episódio do grupo 2 foram os que mais influenciaram essa minha hipótese.

As alunas do grupo 1, apesar de terem uma visão de matemática semelhante à do platonismo e de se apoiarem, em alguns momentos, na ideologia da certeza, estiveram abertas, no episódio 2, a um *cenário para investigação* na matemática. Essa abertura sugere a aceitação de dúvidas na matemática, relegando menos importância à ideologia da certeza. Acredito que esse fato tenha sido causado pelo trabalho no ambiente computacional. Em outras palavras, as alunas permitiram que o computador se incorporasse a suas atividades e este, por sua vez, causou alguma desestabilização na certeza acerca da matemática que as alunas possuíam. Uma hipótese que levantei foi a de a universidade estar aberta à incorporação da informática a suas atividades de ensino devido à associação que normalmente é feita entre computadores e progresso. Essa receptividade às tecnologias informáticas podia estar ligada aos interesses do mercado de trabalho que, no futuro, iria receber os alunos participantes desta pesquisa.

Já as situações reais não tiveram a mesma recepção no curso de Cálculo. Um primeiro obstáculo surgiu logo na proposição dos temas dos projetos, já que os dois grupos propuseram situações imaginárias. Mas mesmo as situações imaginárias não foram bem recebidas: em dois momentos, pelo menos, um no episódio 4 do grupo 1 e outro, no episódio do grupo 2, a tentativa de dois alunos de discutir essas situações encontrou diversos obstáculos que os fizeram desistir. Por que razões as situações reais não eram bem-vindas na escola (ou na universidade)? Será que a visão de matemática presente nas instituições escolares é responsável pelos obstáculos oferecidos às situações reais?

Parece-me, então, que a proposição de um projeto de Modelagem Matemática em um ambiente computacional convida as tecnologias informáticas e as situações reais a fazerem parte das atividades escolares, mas que, a recepção dada a cada um desses dois enfoques didático-pedagógicos é diferente. Por outro lado, a tentativa de dois alunos, de iniciar a discussão de questões referentes às situações reais, sugere que a Modelagem abre possibilidades, na escola, para discussões e reflexões sobre situações reais e sobre o uso que é feito da matemática nessas situações.

8.6.3. O objetivo da atividade

Discussões relacionadas com o objetivo da atividade proposta pelo professor podem ser percebidas, principalmente, no episódio 1 do grupo 1 e no episódio único do grupo 2. Realço que esse tema não foi abordado diretamente, ou seja, ninguém propôs a discussão dos objetivos da atividade.

Com relação ao episódio 1 do grupo 1, utilizei as idéias de Christiansen (1997), segundo as quais negociação de significados podem ser, também, negociação de tarefas, para compreender um certo desacordo existente nesse grupo, em sua primeira reunião

comigo: o professor tinha solicitado ao grupo que buscasse uma função da realidade para ser estudada com os recursos do Cálculo e do Maple; o grupo inventou uma situação imaginária; na reunião do grupo comigo, as componentes afirmaram que o professor tinha-lhes pedido para buscar dados mais concretos, mas que tinha dado aval para o que tinham feito até então. Assim, houve uma discussão entre o grupo e mim sobre as similaridades e diferenças entre a “função imaginária” e uma possível “função real”, o porquê de se considerarem essas duas funções, como trabalhar com as duas etc.. Estávamos, então, negociando significados, mas, simultaneamente, estávamos realizando uma negociação de tarefas: qual era o objetivo da tarefa, buscar uma situação real ou criar uma situação imaginária?

Já no episódio do grupo 2, Pedro questionou, na apresentação do trabalho para a turma, o fato de eles terem de realizar, em seu projeto, cálculos que não tinham significado na situação real. Utilizando as palavras de Pedro, *já que é pra fazer do cotidiano, não tem por que fazer uma coisa que não tem nada a ver com o cotidiano* (Anexo 14). Nesse caso, acredito que não houve discussão alguma: houve uma tentativa de negociação por parte de Pedro.

Nas duas passagens destacadas aqui, podemos perceber que os objetivos da atividade proposta pelo professor não estavam totalmente claros para os alunos. Eu já tinha sugerido essa hipótese no capítulo 6, quando apresentei o contexto no qual os dados dessa pesquisa foram coletados, e decidi apresentar o projeto de Modelagem Matemática em dois momentos: “o que o professor disse” e “o que os alunos escutaram”.

A clareza, ou não, dos objetivos das atividades que ocorrem em sala de aula influenciam o estilo da comunicação que ocorre ali. Alrø e Skovsmose (1996a, 1998) e Christiansen (1997) enfatizam a importância de se deixar claro para os alunos seus objetivos, sob pena de deixá-los à deriva, tentando adivinhar os planos do professor, ao invés de incentivá-los a se engajarem na atividade. Assim, *a comunicação na sala de aula de matemática assume um caráter particular quando o objetivo geral do ensino não é esclarecido para os alunos*.¹³ (Alrø & Skovsmose, 1998, p. 42), ou seja, é importante que se explicita os objetivos das atividades se se pretende estabelecer, na sala de aula, um estilo de comunicação que prime pelo diálogo. Entretanto, é importante enfatizar que a explicitação dos objetivos das atividades não garante que o diálogo se estabeleça. Uma forma de explicitar os objetivos da atividade é por meio da negociação de significados.

¹³ Tradução de *communication in mathematics education assumes a particular character when the overall aim of the teaching is not made clear to students*.

8.6.4. Negociação de significados

Durante as análises de segundo nível dos episódios, a negociação de significados foi um dos aspectos que mais se destacou. Abordei tanto o acontecimento de negociações quanto a dificuldade em estabelecê-las.

No episódio 4 do grupo 1 e no episódio do grupo 2 destaquei a não aceitação do convite à negociação de significado feito por algum aluno. Nos dois casos, um componente do grupo abriu a possibilidade de que significados fossem negociados: no primeiro deles, o significado da variável do domínio da função g e, no segundo, os significados dos cálculos que o grupo realizou. Entretanto, os alunos que fizeram o convite depararam-se com obstáculos à negociação desses significados.

Alrø e Skovsmose (1996a) nos alertam sobre as dificuldades que podem ser encontradas quando se tenta propor a negociação de significados. Acredito que os obstáculos colocados não são intencionais, constituindo-se em consequências de características dos contextos nos quais as atividades são realizadas. Normalmente, nas salas de aula de matemática, o padrão de comunicação é aquele característico do absolutismo da sala de aula, no qual professor e alunos têm seus papéis bem definidos: o professor explica a matéria, designa tarefas, corrige exercícios, enfim, é ele que direciona todos os acontecimentos; o aluno faz exercícios, responde às questões colocadas pelo professor e só se manifesta quando lhe é permitido. Além disso, toda a escola está organizada de tal forma a dar suporte para esse absolutismo: existe um programa a ser cumprido dentro de um prazo estipulado.

Entretanto, no decorrer do desenvolvimento dos projetos de Modelagem Matemática no ambiente computacional aqui considerado, esses obstáculos à negociação de significados, às vezes, foram transpostos com sucesso pelos alunos. Destaco, em particular, as discussões que ocorreram nos episódios 2 e 3 do grupo 1.

No episódio 2 do grupo 1, enfatizei a negociação de significados protagonizada pelas alunas, procurando compreender uma “dissonância” entre as formas de representação do gráfico de uma função descontínua com duas mídias diferentes: lápis-e-papel e *software* Maple. Em outras palavras, os seres-humanos que compunham o *coletivo pensante seres-humanos-com-mídias* realizaram uma negociação de significados com o objetivo de buscar uma ressonância entre os vários componentes desse coletivo. A postura das alunas nesse episódio, como proprietárias do processo de investigação, levantando hipóteses e refutando-as ao encontrarem uma contradição, sugerem a ocorrência de um *cenário para investigação*.

Também no episódio 3, o estilo da comunicação que ocorreu entre o grupo e mim possui características típicas de um cenário para investigação. Apesar de eu ter interferido de forma significativa no andar dos acontecimentos, eu o fiz de uma forma especial. Diante de uma proposição matemática considerada inquestionável pelo grupo, busquei suas *boas razões* para fazer tal afirmativa. Lancei, então, um desafio às boas razões, ao qual as alunas responderam com a busca de novas boas razões.

Caracterizei a organização das atividades nesse episódio como um cenário para investigação por eu ter feito às alunas um convite para considerarem, com mais cuidado, a proposição posta por elas. Eu perguntei: *por que essa proposição?* e as alunas aceitaram o desafio, tentando dar uma justificativa para o que afirmavam. As alunas tomavam a atividade para si, participando ativamente do processo. Dessa forma, o estilo de comunicação predominante foi o diálogo que, por sua vez, iniciou-se a partir das perspectivas do grupo e transcorreu de forma tranqüila e entusiasmada.

Minha intervenção nesse episódio vem sugerir, então, a importância da presença do professor.

8.6.5. Presença do professor

A “presença” do professor durante o desenvolvimento do projeto também foi um aspecto que se destacou. Coloquei a palavra “presença” entre aspas porque ela não diz respeito, especificamente, à presença do professor Sérgio, docente responsável pela disciplina Cálculo para a turma, durante as reuniões dos grupos. Quando falo em “presença do professor” quero me referir à *presença invisível do professor*, por meio da representação de duas alunas componentes do grupo 1, e à postura de professora assumida por mim no episódio 3.

A presença invisível do professor destacou-se principalmente no episódio 4 do grupo 1. Ali, Martha e Laura assumiram uma postura semelhante à de um professor, tomando para si a liderança do grupo. A liderança exercida pelas duas apresentava um certo desnível com relação às duas outras colegas de grupo, o que, como nos alertam Alrø e Skovsmose (1996a), causa obstáculos à negociação de significados, como ocorrido naquele episódio. Entretanto, Martha e Laura tinham suas *intenções* ao assumirem tal postura: zelar pelo bom encaminhamento do projeto que desenvolviam e cooperar com a presente pesquisa.

A outra situação em que destaco a presença do professor foi quando comportei-me como se fosse professora delas. Entretanto, como já mencionei na subseção anterior, essa interferência deu-se de tal forma que a situação configurada pôde ser caracterizada como um cenário para investigação. Se, diferentemente, eu permanecesse em silêncio, a

proposição colocada pelo grupo não seria desafiada e as alunas continuariam o trabalho sem refletirem sobre suas perspectivas. Enfatizo, então, a importância da presença do professor, ou de alguém com maior experiência, em um cenário para investigação, para fazer uma avaliação contínua, chamar a atenção dos alunos sobre possíveis interpretações, ou caminhos a serem seguidos, ou para desafiar as boas razões dos alunos, incentivando, assim, o processo de investigação.

É importante enfatizar, entretanto, que a presença do professor, às vezes, pode se configurar em um obstáculo ao cenário para investigação: suas colocações podem ser feitas de tal forma que inibam o processo de investigação. Como afirmam Alrø e Skovsmose (1996a), as dificuldades para que haja negociação de significados e, portanto, diálogos e cenários para investigação, estão enraizadas no absolutismo da sala de aula, que tem sido hegemônico nas salas de aula de matemática. Em outras palavras, a pura presença do professor na reunião de um grupo, por exemplo, não garante o estabelecimento de um cenário para investigação: ele deve estar atento e velar para que a comunicação entre ele e o grupo seja o diálogo e, por meio dele, fazer um convite aos alunos para que participem da atividade.

8.6.6. Possibilidades

Decidi falar sobre as possibilidades sugeridas a partir dos episódios analisados nesta pesquisa devido a um convite feito por Alrø e Skovsmose (2001). Nesse trabalho, os autores apontam que atos dialógicos podem transformar-se em aprendizagem crítica. Entretanto, eles encerram esse trabalho enfatizando que não podem dizer o que realmente *vai acontecer*, mas, sim, que eles propõem um quadro teórico para discutir o que *pode acontecer*. Esses autores se apóiam em duas características dos diálogos para fazer tal afirmativa: sua fragilidade e sua imprevisibilidade. Acredito que os dados da presente pesquisa são ricos em exemplos dessas duas características dos diálogos. Assim, ao invés de nos sugerir que nos limitemos a realizar um trabalho descritivo, Alrø e Skovsmose (2001) nos convidam a refletir sobre as possibilidades educacionais dos contextos de ensino e aprendizagem. Foi nesse sentido que busquei, em cada episódio analisado, encontrar suas possibilidades. Convido o leitor, então, a alçar um voo a partir dos episódios para refletirmos sobre suas possibilidades.

Ao realizar a análise de segundo nível do episódio 2 do grupo 1, percebi que ele possuía algumas características típicas dos cenários para investigação. Entretanto, como avalei naquele momento, o *escopo das reflexões* limitou-se à matemática e a características do *software*. Alrø e Skovsmose (2001) nos alertam sobre a importância de se ampliar o escopo das reflexões para além da matemática, considerando que ela é parte integrante de

nossa realidade e que, por isso, devemos refletir sobre a confiabilidade de algum resultado em um contexto específico, sobre a adequação de se utilizar, ou não, a matemática para resolver determinado problema e sobre as consequências de seu uso. Assim, no episódio 2, o estilo de comunicação presente, característico de um cenário para investigação, poderia abrir a possibilidade para uma ampliação do escopo de reflexão.

Se por um lado, no episódio 2, o estilo de comunicação era o diálogo mas o escopo de reflexão era restrito, por outro, no episódio 4, a possibilidade de ampliação desse escopo era mais evidente, diante da reconsideração, por Valéria, da situação real, mas houve um obstáculo à negociação de significados e, portanto, ao diálogo. No episódio 4 do grupo 1, Valéria fez um convite às colegas para que negociassem o significado da variável do domínio da função g . Esse convite, se aceito, abriria a possibilidade do estabelecimento de um cenário para investigação e ampliaria o escopo de reflexão, se comparado àquele do episódio 2. Nesse caso, as alunas poderiam dialogar sobre o significado da variável do domínio de g e ampliar, mais ainda, o escopo de reflexão, dialogando sobre o significado da própria função criada por elas. Por sua vez, esse diálogo poderia levá-las a uma reflexão sobre o papel da matemática ao criar artifícios para compreensão da realidade e atuação sobre ela.

A possibilidade de levar a realidade para dentro da sala de aula de matemática pode ser percebida também no episódio 1 do grupo 1. Ali, ao relatarem para mim a criação da situação real que seria tema de seu projeto de Modelagem Matemática, as alunas entraram em um campo fértil em possibilidades para que a realidade entrasse na sala de aula de matemática: a forma como o professor propôs o projeto para a turma – buscar uma função da realidade – e a maneira como as alunas o realizaram, inventando uma situação imaginária, abririam a possibilidade para um diálogo sobre o que seria essa “realidade” e sua relação com a matemática. Ali, poderíamos discutir questões ligadas ao *poder formador da matemática* e à *ideologia da certeza na Educação Matemática*. Entretanto, o estilo de comunicação, segundo o qual essa discussão aconteceria, também teria um papel no estabelecimento, ou não, de um cenário para investigação e no caráter crítico desse cenário.

Como afirmam Alrø e Skovsmose (1996a), *a comunicação na sala de aula é produzida por, assim como reproduz, uma filosofia da matemática, tanto para os alunos quanto para o professor*.¹⁴ (p. 5). Esses autores não querem dizer, com isso, que o professor defende alguma filosofia de antemão e que pretende transmiti-la para os alunos. Querem dizer, isto sim, que o estilo de comunicação sugere algumas idéias sobre a natureza da

¹⁴ Tradução de *the classroom communication is produced by, as well as reproduces, a philosophy of mathematics both for the students and for the teacher*.

matemática que é apoiada pelo professor e alunos. A ideologia da certeza, por exemplo, é uma consequência do estilo de comunicação originado no absolutismo da sala de aula.

Reforçando o que afirmei no parágrafo anterior, tanto Borba e Skovsmose (1997), quando questionam a ideologia da certeza, como Skovsmose (2000a), quando sugere a Educação Matemática Crítica para discutir o papel social da matemática, destacam a importância de se estar atento para o estilo da comunicação que acontece entre alunos e professor e entre os alunos.

Assim, o contexto no qual os dados desta pesquisa foram coletados – um ambiente de ensino e aprendizagem de Cálculo no qual a Modelagem Matemática e as Tecnologias Informáticas estão presentes – é fértil em possibilidades para a constituição de cenários para investigação que abordem as questões levantadas pela Educação Matemática Crítica.

Capítulo 9

Considerações Finais

Iniciei esta tese com uma apresentação do “processo de construção da pergunta diretriz” da pesquisa. A princípio, instigada por questões de minha prática docente na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I, preocupava-me com a “aprendizagem” dos alunos, mas não tinha muita clareza sobre o que vinha a ser essa tal “aprendizagem”. Guiada por minhas inquietações, acabei me deparando, em um levantamento bibliográfico, com dois enfoques pedagógicos que chamaram minha atenção: Modelagem Matemática e Tecnologias Informáticas. Comecei, então, uma pesquisa teórica sobre esses enfoques na Educação Matemática e, simultaneamente, preparava e executava a coleta de dados da pesquisa. Esses dados foram coletados em uma turma de Cálculo I, do curso de Engenharia Química, em uma universidade pública do Estado de São Paulo. Acompanhei mais de perto o desenvolvimento, por dois grupos dessa turma, de projetos de Modelagem Matemática em ambientes informatizados e selecionei episódios das filmagens de suas reuniões durante a execução dos projetos.

A conjunção, em um processo de influência mútua, entre os dados e os trabalhos teóricos que estava estudando acabou por me levar a propor uma outra pergunta diretriz para a pesquisa, a qual permaneceu até o final:

Que discussões ocorrem, e como elas ocorrem, em um ambiente de ensino e aprendizagem de Cálculo no qual a Modelagem Matemática e as tecnologias informáticas estão presentes?

Continuei, então, meus estudos sobre Modelagem Matemática e Tecnologias Informáticas na Educação Matemática, mas com a atenção voltada para essa nova pergunta diretriz. O foco estava, agora, nas discussões dos alunos ou, de forma mais geral, no estilo de comunicação que se estabelecia entre os alunos (e entre os alunos e mim) durante o desenvolvimento de projetos de Modelagem Matemática em ambientes informatizados.

Já no capítulo 2 desta tese referi-me à importância de se estar atento ao estilo de comunicação na Educação Matemática, quando se pretende desafiar a *ideologia da certeza* apresentada por Borba e Skovsmose (1997); e quando se leva em conta a sugestão de Skovsmose (2000a) de considerar a *Educação Matemática Crítica* para discutir o papel social da matemática. Outros fatores também são importantes quando se tem tais objetivos

como, por exemplo, a abertura de possibilidades para discussões sobre abordagens filosóficas da matemática, mudanças na estrutura do currículo para incorporar o desenvolvimento de projetos, ênfase na necessidade de os alunos escolherem seus próprios problemas em atividades de Modelagem Matemática, dentre outras.

Levando em conta a discussão teórica realizada no capítulo 2, a perspectiva de Modelagem Matemática na Educação Matemática adotada nesta pesquisa é uma abordagem, por meio da matemática, de um problema não-matemático da realidade, ou uma situação não-matemática da realidade, escolhida pelos alunos, reunidos em grupos, de tal forma que as questões da Educação Matemática Crítica embasem o desenvolvimento do trabalho. Essa abordagem está em ressonância, como foi apontado no capítulo 3, com as preocupações referentes à *cidadania*, da forma como foi discutido por Borba (2000) e Borba e Penteado (2001), e com a visão de *conhecimento* desses mesmos autores, que considera que a produção de conhecimento depende do uso das mídias, incluindo-se, aí, as *Tecnologias Informáticas*.

No capítulo 4, apoiei-me em Alrø e Skovsmose (2001) e em Freire (1970) para caracterizar esse estilo de comunicação que desafia a *ideologia da certeza* e o *poder formatador da matemática* como o *diálogo*. Utilizando então as questões teóricas discutidas nos capítulos 2, 3 e 4, realizei, no capítulo 8, uma análise dos episódios, que foram selecionados a partir das reuniões dos grupos que desenvolviam projetos de Modelagem Matemática. Farei, a seguir, uma abordagem dessa análise, dividindo-a em duas partes: discussões e possibilidades.

Por fim, como iniciei esta tese apresentando inquietações em minha prática docente, encerrá-la-ei apontando algumas implicações que esta pesquisa pode vir a ter, não apenas em minha prática docente, mas também em futuras pesquisas.

9.1. Discussões

Um aspecto que se destacou nesta pesquisa foi a negociação de significados entre os alunos (e entre os alunos e mim). Às vezes, surgiam obstáculos às negociações, noutras, elas ocorriam de forma livre, constituindo cenários para investigação.

É interessante destacar que o convite às negociações foi aceito, ou seja, os cenários para investigação foram constituídos, quando o tema em debate era matemático. Tentativas de se iniciarem negociações de significados, relacionados com a situação real que era tema dos projetos de Modelagem Matemática, depararam-se com obstáculos. Como podemos compreender essa situação?

Os alunos sabiam que estavam matriculados em Cálculo Diferencial e Integral, ou seja, em uma disciplina matemática. De suas vivências escolares, eles sabiam que tipo de assunto era discutido em matemática. Daí ser natural para eles que temas como continuidade de funções e simetria de gráficos fossem abordados nas discussões. A novidade relativa às suas vivências escolares anteriores foi o estilo de comunicação no qual as discussões ocorreram: ela não se limitou à resposta dos alunos seguindo a alguma pergunta do professor. As alunas do grupo 1 levantaram hipóteses, tentaram justificá-las ou as refutaram, procuraram boas razões que sustentassem seus argumentos, ou seja, elas se comportaram como proprietárias das atividades.

Acredito que a presença do computador tenha sido importante para o estabelecimento desses cenários para investigação. A imprevisibilidade dos acontecimentos, quando se trabalha em ambientes informatizados, abre possibilidades para que investigações aconteçam. Mas a simples presença dos computadores não garante a existência de investigações: é importante que os alunos aceitem o convite às investigações, seja ele feito pelo professor ou pelos próprios alunos diante das possibilidades abertas pelo computador. No caso desta pesquisa, não foram oferecidos obstáculos às negociações de significados quando estes surgiam em decorrência da presença do computador.

O mesmo não ocorreu quando a negociação de significados se relacionava com a situação da realidade. Por duas vezes, ao tentarem propor diálogos que envolviam a situação da realidade, os alunos tiveram seus convites rejeitados, não estabelecendo, portanto, cenários para investigação. Esse fato merece ainda maior destaque por estarmos nos referindo à proposição de uma atividade de Modelagem Matemática, a qual pressupõe a busca de uma situação do dia-a-dia. Em outras palavras, foi solicitado aos alunos que buscassem situações do cotidiano para serem estudadas, e que utilizassem, para isso, o conteúdo matemático e o computador, mas quando surgiu a possibilidade da constituição de cenários para investigação envolvendo essas situações do cotidiano, obstáculos foram colocados.

Uma hipótese que levantei é da escola (ou a universidade) estar mais receptiva à incorporação da informática às atividades de ensino, devido à associação que normalmente se faz entre computadores e progresso científico, do que à consideração de situações reais. Esse tratamento diferenciado pode ser justificado por uma visão de matemática que a separa da realidade. Entretanto, a Modelagem abre, na escola, possibilidades para discussões e reflexões sobre situações reais e sobre o uso que é feito da matemática nessas situações.

A visão de matemática vigente no contexto escolar pode ter causado, ou pode ter-se aliado, à falta de clareza quanto aos objetivos da atividade proposta para os grupos que

participaram desta pesquisa. Se diálogos tivessem ocorrido, contando com orientações do professor, ou mesmo minhas, atentando para as questões da Educação Matemática Crítica, talvez estabelecessem-se cenários para investigação com um escopo de reflexão que ultrapassassem os muros da escola. Entramos, assim, no campo das possibilidades.

9.2. Possibilidades

Encerrei o capítulo 8 afirmando que o contexto no qual os dados desta pesquisa foram coletados – um ambiente de ensino e aprendizagem de Cálculo no qual a Modelagem Matemática e as Tecnologias Informáticas estão presentes – é fértil em possibilidades para a constituição de cenários para investigação que abordem as questões levantadas pela Educação Matemática Crítica. Cheguei a essa conclusão a partir da análise dos episódios, levando em conta, prioritariamente, as questões da comunicação na Educação Matemática.

Por outro lado, a partir das discussões teóricas realizadas nos capítulos 2 e 3, levantei a hipótese de que a parceria entre Modelagem Matemática e Tecnologias Informáticas poderia gerar um ambiente de ensino e aprendizagem rico em possibilidades de discussões sobre o papel social da matemática e sobre outras questões levantadas pela Educação Matemática Crítica.

Portanto, a partir da análise dos dados da pesquisa, aponte as potencialidades desse ambiente e essas, por sua vez, já tinham sido cogitadas teoricamente. Então, por que não foram estabelecidos cenários para investigação com o escopo de reflexão suficientemente amplo para abordar questões levantadas pela Educação Matemática Crítica? Uma parte dessa responsabilidade pode estar na visão de matemática sustentada no contexto escolar, e uma maneira de desafiar essa visão, acredito, está relacionada com a comunicação na sala de aula de matemática.

Conforme a teoria discutida nesta pesquisa já apontou, o estilo de comunicação entre professores e alunos e entre os alunos exerce forte influência no estabelecimento de cenários para investigação e ampliação do escopo de reflexão. No caso dos dados desta pesquisa, os componentes dos grupos não estavam atentos a, nem foram orientados sobre, a comunicação entre eles. Além disso, eu, como pesquisadora, não tinha a intenção prévia de me colocar como uma participante no desenvolvimento dos projetos e, na maioria das vezes, permanecia em silêncio. Eu também não estava atenta ao estilo de comunicação entre os componentes dos grupos, já que, à época da coleta dos dados, a pergunta diretriz ainda estava em sua primeira versão. Resumindo, o estilo de comunicação não era foco de

atenção durante o desenvolvimento dos projetos de Modelagem Matemática em ambientes informatizados que foram a fonte da coleta dos dados.

Assim, não basta que proponhamos o desenvolvimento de projetos de Modelagem Matemática, não basta que estejamos equipados com laboratórios de informática ou calculadoras gráficas, não basta que, como professores de matemática, julguemos como legítimas as questões da Educação Matemática Crítica. Em conjunto com tudo isso, devemos estar atentos para a prática escolar como um todo e para o estilo de comunicação estabelecido no desenvolvimento das atividades para que eles estejam em ressonância com o ambiente de ensino e aprendizagem constituído pela Modelagem Matemática e Tecnologias Informáticas e fundamentado pela Educação Matemática Crítica.

9.3. Uma Ponte para o Futuro . . .

Chegando ao fim desta tese, acredito que seja importante retomar as inquietações que me impulsionaram a desenvolver a pesquisa. Todas as idéias aqui apresentadas e discutidas não estavam presentes enquanto vivia minha prática docente, como professora de Cálculo I. Agora, talvez, seja o momento de vivenciar, na prática, todas essas idéias que experienciei aqui em um nível teórico.

Relendo o que escrevi acerca de minhas inquietações de professora de Cálculo, consigo perceber uma visão de matemática e de Educação Matemática que têm diferenças significativas se comparadas ao que penso hoje. Naquele momento meus objetivos pareciam relacionar-se com como levar os alunos a alcançar uma matemática inquestionável, previamente dada, e com como tornar aquele conteúdo atraente e significativo para meus alunos, sem comprometer o cumprimento do programa da disciplina. Hoje, essa visão já não existe mais.

Sobre minha prática docente, as questões que agora me instigam dizem respeito a como colocar em prática a Modelagem Matemática em conjunto com as Tecnologias Informáticas nas aulas de Cálculo, levando em conta as idéias aqui defendidas. Sei que o contexto que me espera poderá oferecer obstáculos à minha prática, mas esta pesquisa me dá suporte para enfrentar tais obstáculos por meio do diálogo, respeitando sempre as perspectivas de meus colegas. Assim, minha prática docente provocou inquietações que me impulsionaram a desenvolver uma pesquisa e esta, por sua vez, devolve-me à prática com uma quantidade ainda maior de inquietações.

A retomada da prática docente certamente me conduzirá a outras inquietações que me impulsionarão a novas pesquisas. Posso vislumbrar uma dessas inquietações: a questão

da aprendizagem em ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo no qual a Modelagem Matemática e as Tecnologias Informáticas estão presentes. Essa frase, apesar de ter o mesmo formato daquele primeiro esboço de uma pergunta de pesquisa, apresentada no capítulo 1, difere muito dela em termos qualitativos. Agora, a parceria entre Modelagem Matemática e Tecnologias Informáticas tem um sentido especial para mim. Aprendizagem, embora não esteja expressa ainda em palavras, certamente está ligada a questões da comunicação na Educação Matemática. É um desafio pensar que poderei realizar uma pesquisa a partir de minha própria prática docente.

Foi em nome de minha prática que vim, e é em nome dela que vou. Não vim sozinha, e tampouco parto sozinha. Também, um pouco de mim ficou de onde eu vim e deixo para vocês um pouco de mim.

Iniciei esta tese comparando a pergunta diretriz de uma pesquisa com uma bússola, que ajuda a nos orientarmos. Encerrá-la-ei comparando essa pergunta com uma janela. Refletir sobre as possibilidades teórico-práticas apontadas por uma pergunta diretriz e pela pesquisa que ela demanda é como me apoiar nos parapeitos das janelas por ela subentendidas e olhar para a paisagem que elas me permitem enxergar. Enfatizo aqui que a janela foi construída por mim, pesquisadora, e que, portanto, o foi de acordo com minha capacidade de construtora, e que ela está ajustada à altura de meu corpo. Além disso, ao olhar por essa janela, posso não perceber aspectos da paisagem que se destacariam para outras pessoas. Deixo, então, ao leitor um convite para refletir sobre a paisagem que ele enxerga. Deixo-o também à vontade para promover alguma reforma na janela, se assim ele julgar importante.

Jussara de Loiola Araújo

Rio Claro, abril de 2002.

Referências Bibliográficas

ADLER, P. A.; ADLER, P. Observational Techniques. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Eds.). *Handbook of Qualitative Research*. California: Sage Publications, 1994. cap. 23, p. 377-392.

ALEXIADES, V.; SOLOMON, A. D. *Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes*. Washington: Hemisphere Publishing Corporation, 1993, 323 p.

ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. On the Right Track. *For the Learning of Mathematics*, Vancouver, v. 16, n. 1, p. 2-8 e p. 22, feb. 1996a.

ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. Students' Good Reasons. *For the Learning of Mathematics*, Vancouver, v. 16, n. 3, p. 31-38, nov. 1996b.

ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. That Was Not the Intention! Communication in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*, Vancouver, v. 18, n. 2, p. 42-51, june 1998.

ALRØ, H., SKOVSMOSE, O. *Dialogue and Learning in Mathematics Education: Intention, Reflection, Critique*. 2001. 241p. No prelo.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O Método nas Ciências Sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. *O Método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa*. São Paulo: Editora Pioneira, 1998. parte I, p. 107-188.

ANASTÁCIO, M. Q. A. *Considerações sobre a Modelagem Matemática e a Educação Matemática*. 1990. 100 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1990.

ARAÚJO, J. L. A Função é Contínua ou não?: discussões que decorrem de uma atividade de modelagem matemática em um ambiente computacional. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2000. *Anais...* Rio Claro: Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, 2000. p. 47-52.

ARAÚJO, J. L.; BARBOSA, J. C. Face a Face com a Modelagem Matemática: como os Alunos Interpretam e Conduzem essa Atividade? 2001. No prelo.

ARAÚJO, J. L.; SALVADOR, J. A. Mathematical Modelling in Calculus Courses. In: MATOS, J. F.; BLUM, W.; HOUSTON, S. K.; CARREIRA, S. P. (Eds.). *Modelling and Mathematics Education: ICTMA 9: Applications in Science and Technology*. Chichester: Horwood Publishing, 2001. cap. 17 p. 195-204.

BARBOSA, J. C. O que Pensam os Professores sobre Modelagem Matemática? *Zetetiké*, Campinas, v. 7, n. 11, p. 67-85, jan./jun. 1999.

BARBOSA, J. C. Uma Perspectiva para a Modelagem Matemática. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2000. *Anais...* Rio Claro: Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, 2000. p. 53-59.

BARBOSA, J. C. *Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores*. 2001. 253 f. Tese (Doutorado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

BARTKOVICH, K. G. et al. *Contemporary Calculus*. Massachusetts: Janson Publications Inc, 1996. 512 p.

BASSANEZI, R. C. Modelling as a Teaching-Learning Strategy. *For the Learning of Mathematics*, Vancouver, v. 14, n. 2, p. 31-35, june 1994.

BASSANEZI, R. C.; FERREIRA, W. C. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo: Harbra Ltda, 1988.

BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. V. M. *Filosofia da Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2001. 87 p.

BIEMBENGUT, M. S. *Qualidade no Ensino de Matemática na Engenharia: uma proposta metodológica e curricular*. 1997. 305 f. Tese (Doutorado) – Curso de Engenharia de Produção e Sistemas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1997.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem Matemática no Ensino*. São Paulo: Editora Contexto, 2000. 127 p.

BLUM, W. Applications and Modelling in Mathematics Teaching and Mathematics Education – Some Important Aspects of Practice and of Research. In: SLOYER, C.; BLUM, W.; HUNTLEY, I. (Eds.). *Advances and Perspectives in the Teaching of Mathematical Modelling and Applications*. Yorklyn: Water Street Mathematics, 1995. p. 01-20.

BLUM, W.; NISS, M. Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, v. 22, n. 1, p. 37-68, feb. 1991.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação Qualitativa em Educação Matemática. Uma Introdução à Teoria e aos Métodos*. Tradução M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994. 336 p.

BORBA, M. C. O Uso de Calculadoras Gráficas no Ensino de Funções em Sala de Aula. In: SEMANA DE ESTUDOS EM PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1995. *Anais...* Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 1995. p. 67-72.

BORBA, M. C. Graphing Calculators, Functions and Reorganization of the Classroom. In: BORBA, M. C.; SOUZA, T. A.; HUDSON, B.; FEY, J. (Eds.). *The Role of Technology in the Mathematics Classroom*. Rio Claro: Editora Cruzeiro, 1997. p. 53-60.

BORBA, M. C. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. In BICUDO, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 285-295.

BORBA, M.C. O Computador é a Solução: mas qual é o Problema? Rio Claro, 2000. (manusc.)

BORBA, M. C.; MENEGHETTI, R. C. G.; HERMINI, H. A. Modelagem, Calculadora Gráfica e Interdisciplinaridade na Sala de Aula de um Curso de Ciências Biológicas. *Revista de Educação Matemática da SBEM-SP*, [São José do Rio Preto], v. 5, n. 3, p. 63-70, 1997.

BORBA, M. C.; SKOVSMOSE, O. The Ideology of Certainty in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*, Kingston, v. 17, n. 3, p. 17-23, nov. 1997.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2001. 98 p.

BUSSI, M. G. B. Joint Activity in Mathematics Classrooms: a Vygotskian Analysis. In: SEEGER, F.; VOIGT, J.; WASCHESCIO, U. (Eds.). *The Culture of the Mathematics Classroom*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. p. 13-49.

CABRAL, T. C. B. *Vicissitudes da Aprendizagem em um Curso de Cálculo*. 1992. 2 v. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1992.

CABRAL, T. C. B. *Contribuições da Psicanálise à Educação Matemática: a Lógica da Intervenção nos Processos de Aprendizagem*. 1998. 233 f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1998.

CASSOL, A. *Produção de significados para a derivada: taxa de variação*. 1998. 178 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

CATAPANI, E. C. *Alunos e Professores em um Curso de Cálculo em Serviço: o que Querem?* 2001. 128 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

CHRISTIANSEN, I. M. When Negotiation of Meaning is also Negotiation of Tasks: Analysis of the Communication in an Applied Mathematics High School Course. *Educational Studies in Mathematics*. Dordrecht, v. 34, n. 1, p. 1-25, 1997.

COBB, P.; BAUERSFELD, H. (Eds.) *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1995. 306 p.

CROSS, M.; MOSCARDINI, A. O. *Learning the Art of Mathematical Modelling*. Chichester: Ellis Horwood, 1985, 155 p.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. *A Experiência Matemática*. Tradução: Fernando Miguel Louro e Ruy Miguel Ribeiro. Lisboa: Gradiva, 1995, 401 p.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. Introduction: Entering the Field of Qualitative Research. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Eds.). *Handbook of Qualitative Research*. California: Sage Publications, 1994. cap. 1, p. 1-17.

DOSSEY, J. A. The Nature of Mathematics: its Role and its Influence. In GONWS, D. (Ed.). *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*. USA, 1992. p. 39-48.

ERNEST, P. *The Philosophy of Mathematics Education*. London: Falmer Press, 1991.

FANTINEL, P. C. *Representações Gráficas Espaciais para o Ensino de Cálculo e Álgebra Linear*. 1998. 387 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

FERREIRA, A. B. H. *Novo Aurélio: O Dicionário da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro: Lexikon Informática Ltda.; Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 2000. 1 CD-ROM. Windows 95/98.

FONTANA, A.; FREY, J. H. Interviewing: the Art of Science. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Eds.). *Handbook of Qualitative Research*. California: Sage Publications, 1994. cap. 22, p. 361-376.

FRANCHI, R. H. O. L. *A modelagem como estratégia de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de engenharia*. 1993. 148 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1993.

FREIRE, P. *Educação como Prática da Liberdade*. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1967. 150 p.

FREIRE, P. *Pedagogia do Oprimido*. Rio de Janeiro: Editora Paz e Terra, 1970. 184 p.

GALBRAITH, P. L.; CLATWORTHY, N. J. Beyond Standard Models – Meeting the Challenge of Modelling. *Educational Studies in Mathematics*. Dordrecht, v. 21, p. 137-163, 1990.

GARNICA, A. V. M. É Necessário Ser Preciso? É Preciso Ser Exato? “Um Estudo sobre Argumentação Matemática” ou “Uma Investigação sobre a Possibilidade de Investigação”. In: CURY, H. N. (Org.). *Formação de Professores de Matemática: uma Visão Multifacetada*. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001. p. 49-87.

GRACIAS, T. S.; BORBA, M. C. Explorando possibilidades e potenciais limitações de calculadoras gráficas. *Educação e Matemática*. Lisboa, n. 56, p. 35-39, jan./fev. 2000.

GRAHAM, E. Mathematical Modelling in an Extended Engineering Course. In BREITEIG, T.; HUNTLEY, I.; KAISER-MESSMER, G. (Eds.). *Teaching and Learning Mathematics in Context*. London: Ellis Horwood, 1993. p. 173-183.

HANNON, B.; RUTH, M. *Dynamic Modeling*. New York: Springer-Verlag New York, Inc., 1994. 248 p.

HEID, M. K. Resequencing Skills and Concepts in Applied Calculus Using the Computer as a Tool. *Journal for Research in Mathematics Education*. Reston, v. 19, n. 1, p. 3-25, 1988.

HERSH, R. *What is Mathematics, Really?* New York: Oxford University Press, 1997. 343 p.

IMENES, L. M. P. *Um Estudo sobre o Fracasso do Ensino e da Aprendizagem da Matemática*. 1989. 326 p. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1989.

JAPIASSÚ, H.; MARCONDES, D. *Dicionário Básico de Filosofia*. 3. ed. rev. e ampl. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998. 296 p.

KÖRNER, S. *The Philosophy of Mathematics: an Introductory Essay*. New York: Dover Publications, Inc., 1968. 198 p.

LAUTEN, A. D.; GRAHAM, K.; FERRINI-MUNDY, J. Student Understanding of Basic Calculus Concepts: Interaction with the Graphics Calculator. *Journal of Mathematical Behavior*, New Jersey, v. 13, p. 225-237, 1994.

LÉVY, P. *As Tecnologias da Inteligência: o futuro do pensamento na era da informática*. Tradução: Carlos Irineu da Costa. São Paulo: Editora 34, 1993. 203 p.

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G. *Naturalistic Inquiry*. Califórnia: Sage Publications, Inc., 1985. 416 p.

MACHADO, N. J. *Matemática e Realidade*. 4. ed. São Paulo: Cortez Editora, 1997. 103 p.

MACHADO, N. J. Informática na Escola: significado do computador no processo educacional. In MACHADO, N. J. *Epistemologia e Didática: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente*. 3. ed. São Paulo: Cortez Editora, 1999. p. 231-257.

MAPLE V Release 5 – Waterloo Maple Inc., 1997. 1 CD-ROM. Windows 95/98.

MATOS, J. F. Mathematics Learning and Modelling: Theory and Practice. In: GALBRAITH, P.; BLUM, W.; BOOKER, G.; HUNTLEY, I. D. (Eds.). *Mathematical Modelling: Teaching and Assessment in a Technology-Rich World*. Chichester: Horwood Publishing Limited, 1998. p. 21-27.

MONTEIRO, A. *O Ensino de Matemática para Adultos através do Método Modelagem Matemática*. 1991. 310 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1991.

MORELATTI, M. R. M. *Criando um Ambiente Construcionista de Aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral I*. 2001. 261 f. Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

MORSE, J. M. Designing Funded Qualitative Research. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Eds.). *Handbook of Qualitative Research*. California: Sage Publications, 1994. cap. 13, p. 220-235.

PALMITER, J. R. Effects of Computer Algebra Systems on Concept and Skill Acquisition in Calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, Reston, v. 22, n. 2, p. 151-156, 1991.

PENTEADO, M. G.; BORBA, M. C.; GRACIAS, T. S. Informática como Veículo para Mudança. *Zetetiké*, Campinas, v. 6, n. 10, p. 77-86, jul./dez. 1998.

QUESADA, A. R.; MAXWELL, M. E. The Effects of Using Graphing Calculators to Enhance College Students' Performance in Precalculus. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, v. 27, p. 205-215, 1994.

SAD, L. A. *Cálculo Diferencial e Integral: uma Abordagem Epistemológica de Alguns Aspectos*. 1998. 371 f. Tese (Doutorado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

SKOVSMOSE, O. *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994. 246 p.

SKOVSMOSE, O. *Mathematical Agency and Social Theorising*. Roskilde: Centre for Research in Learning Mathematics, Royal Danish School of Educational Studies, 1999a. 46 p. Publication n. 10.

SKOVSMOSE, O. *Investigando a Comunicação na Sala de Aula Sob a Perspectiva da Educação Matemática*. 1999b. Notas de aula.

SKOVSMOSE, O. Aporism and Critical Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*, Kingston, v. 20, n. 1, p. 2-8, mar. 2000a.

SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000b.

SOUZA JR., A. J. *Trabalho Coletivo na Universidade: Trajetória de um Grupo no Processo de Ensinar e Aprender Cálculo Diferencial e Integral*. 2000. 323 f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

STILLMAN, G. The Emperor's New Clothes? Teaching and Assessment of Mathematical Applications at the Senior Secondary Level. In: GALBRAITH, P.; BLUM, W.; BOOKER, G.; HUNTLEY, I. D. (Eds.). *Mathematical Modelling – Teaching and Assessment in a Technology-Rich World*. Chichester: Horwood Publishing Limited, 1998. p. 243-253.

SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com Geometria Analítica*. Tradução: Alfredo Alves Faria. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, v. 1, 1983. 618 p.

TALL, D. Student's Difficulties in Calculus. Plenary presentation in Working Group 3 of the International Congress on Mathematical Education 7 (ICME-7), Quebec, 1992.

TIKHOMIROV, O. K. The Psychological consequences of computerization. In: WERTSCH, J. V. (Ed.) *The concept of activity in soviet psychology*. New York: M. E. Sharpe. Inc, 1981. p. 256-278.

VILLARREAL, M. E. *O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas*. 1999. 402 f. Tese (Doutorado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

VOIGT, J. Negotiation of Mathematical Meaning and Learning Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. Dordrecht, v. 26, p. 275-298, 1994.

WASCHESCIO, U. The Missing Link: Social and Cultural Aspects in Social Constructivist Theories. In: SEEGER, F.; VOIGT, J.; WASCHESCIO, U. (Eds.). *The Culture of the Mathematics Classroom*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. p. 221-241.