

Equações Diferenciais Parciais I

Paulo Cupertino de Lima
Departamento de Matemática - UFMG

Agosto, 2013

Sumário

Sumário	1
1 Introdução	3
1.1 O que são equações diferenciais parciais?	3
1.2 De onde vêm as equações diferenciais parciais?	3
1.3 Equações diferenciais parciais e leis de conservação	4
2 Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem	7
2.1 Definição e classificação	7
2.2 Equações diferenciais parciais quasi-lineares	7
2.2.1 Alguns exemplos simples	8
2.2.2 Equações quasi-lineares gerais a duas variáveis independentes	14
2.2.3 Equações quasi-lineares a n variáveis independentes	22
2.3 Equação de primeira ordem geral	24
2.3.1 Equação de primeira ordem geral com duas variáveis independentes	24
2.3.2 Equação de primeira ordem geral com n variáveis independentes	31
2.3.3 As equações de Hamilton-Jacobi	32
3 Soluções fracas de equações de leis de conservação	33
3.1 A necessidade de soluções descontínuas	33
3.2 Condição de salto	35
3.3 Definição formal de solução fraca	41
4 Equações de Segunda ordem para funções de duas variáveis	47
4.1 Características para equações lineares e quasi-lineares de segunda ordem	47
4.2 Classificação de equações quasi-lineares de segunda ordem	49
4.3 Propagação de singularidades	49
4.4 A equação linear de segunda ordem	52
4.5 A equação da onda em uma dimensão espacial	56
4.5.1 O problema de valor inicial e de contorno	59
4.5.2 A corda semi-infinita	61
4.6 Sistemas de equações de primeira ordem	63
4.7 Apêndice - O Teorema do Ponto fixo de Banach	69

5	Os Teoremas de Cauchy-Kowalevski e Holmgren	71
5.1	Notação de multi-índices	71
5.2	Séries infinitas múltiplas	72
5.3	O Problema de Cauchy	76
5.4	Funções Analíticas reais	81
5.4.1	A prova do Teorema de Cauchy-Kovalevski	87
5.5	A identidade de Lagrange-Green	90
5.6	O teorema de unicidade Holmgren	93
6	Equação de Laplace	99
6.1	Identidade de Green, soluções fundamentais e equação de Poisson	99
6.2	O Princípio de Máximo	107
6.3	O problema de Dirichlet no Disco	108
6.4	Funções harmônicas em duas dimensões	113
6.5	Métodos de espaço de Hilbert	114
6.5.1	Preliminares	114
6.5.2	Reformulando o problema de Dirichlet como um funcional linear limitado num espaço de Hilbert	116
7	Equação da onda	124
7.1	O Método das médias esféricas	124
7.2	Método de Hadamard	130
7.3	O princípio de Duhamel	131
7.4	Problemas mistos (valor inicial e de contorno)	132
8	Equação de Calor	135
8.1	Transformada de Fourier	135
8.2	A solução da equação do calor	137
8.3	A fórmula de Talyor	140
8.4	O princípio de máximo	141
8.5	Método de energia para provar unicidade	147
8.6	O Método de Perron	148
8.6.1	Regularidade de soluções	148
8.6.2	Soluções não-negativas	148

Capítulo 1

Introdução

1.1 O que são equações diferenciais parciais?

Vagamente falando, uma equação diferencial parcial é uma equação que envolve uma função desconhecida $u(x_1, \dots, x_n)$ e suas derivadas parciais de até uma certa ordem. A ordem de uma equação diferencial parcial é a ordem da derivada mais alta que aparece na mesma. Por exemplo, uma equação diferencial de primeira ordem nas variáveis x, y é da forma

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

enquanto uma equação diferencial parcial de segunda ordem nas variáveis x, y é da forma

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}, u_{yy}) = 0.$$

1.2 De onde vêm as equações diferenciais parciais?

As equações diferenciais parciais vem de problemas de modelagem em ciências (Física, Biologia, etc). Alguns exemplos de tais equações são

- a equação de Burger com viscosidade

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx},$$

que aparece em várias áreas da matemática aplicada, dentre elas modelagens de dinâmica de gases e de fluxo de tráfico.

- a equação de Laplace

$$\Delta u = 0,$$

onde é o operador $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. A equação de Laplace e suas generalizações aparecem em vários contextos, dentre eles, teoria de potencial (teoria de gravidade de Newton, eletrostática), geometria riemanniana (operador de Laplace-Beltrami), processos estocásticos (solução estacionária da equação de Kolmogorov para o movimento browniano), análise complexa (as partes real e imaginária de uma função analítica são soluções da equação de Laplace).

- a equação de calor

$$u_t = k\Delta u,$$

usada para modelar a evolução temporal da temperatura de um corpo.

- a equação da onda

$$u_t = c^2\Delta u,$$

que descreve a propagação de uma onda num meio.

- a equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\psi,$$

onde $|\psi(x, t)|^2$ dá a probabilidade de encontrarmos uma partícula no ponto x e no instante t , estando ela sujeita a um potencial V .

- as equações de Navier-Stokes

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\nabla p + \nu\Delta v + f(x, t),$$

que é um sistema de equações diferenciais parciais que modela o movimento de um fluido, $v(x, t)$, $p(x, t)$ e $f(x, t)$ são o campo de velocidade, a pressão e a força externa no ponto x , no instante t .

1.3 Equações diferenciais parciais e leis de conservação

Muitas equações diferenciais parciais vêm de leis de conservação, a seguir daremos um exemplo simples de tal equação.

Exemplo 1. *Considere uma rua começando no ponto x e terminando no ponto $x + \Delta x$. Se $u(x, t)$ é a densidade de carros no ponto x , no instante t , então a quantidade total de carros na rua no instante t é*

$$\int_x^{x+\Delta x} u(s, t) ds.$$

Admitindo que a variação desta quantidade seja decorrente apenas do fluxo f de carros através dos pontos x e $x + \Delta x$, então a taxa de variação do número de carros entre os pontos x e $x + \Delta x$ no instante t , é dada pela seguinte lei de conservação

$$\frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} u(s, t) ds = f(u(x, t)) - f(u(x + \Delta x, t)). \quad (1.1)$$

Mostraremos que esta lei de conservação nos leva a uma equação diferencial parcial para $u(x, t)$. De fato, assumindo que u seja de classe C^1 , então (1.1) pode ser reescrita como

$$\int_x^{x+\Delta x} u_t(s, t) dx = f(u(x, t)) - f(u(x + \Delta x, t)),$$

portanto

$$\frac{\int_x^{x+\Delta x} u_t(s, t) dx}{\Delta x} = \frac{f(u(x, t)) - f(u(x + \Delta x, t))}{\Delta x}.$$

Assumindo que f seja de classe C^1 e tomando-se o limite quando Δx tende a 0, temos

$$u_t(x, t) = -(f(u(x, t)))_x.$$

Logo, a densidade de carros $u(x, y)$ satisfaz à equação diferencial parcial quasi-linear de primeira ordem

$$u_t + (f(u))_x = 0. \quad (1.2)$$

Se em (1.2) fizermos $f(u) = \frac{u^2}{2}$, teremos a equação

$$u_t + uu_x = 0, \quad (1.3)$$

chamada de **equação de Burger sem viscosidade**. Ela é também usada para modelar o movimento de uma onda, neste caso $u(x, t)$ é a altura da onda no ponto x , no instante t . Em várias aplicações ela aparece como simplificação de modelos mais complexos e sofisticados. Apesar da sua simplicidade, ela esconde vários fenômenos inesperados, como veremos.

Assim como no exemplo visto acima, muitas leis de conservação são expressas por meio de equações integrais e garantem que certa grandeza física (energia, calor, massa, etc) é preservada ou transformada durante um processo. A seguir daremos outro exemplo de equação diferencial parcial que vem de uma lei de conservação.

Exemplo 2. Seja $u(x, t)$ a massa de uma certa substância num ponto $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ no instante t . Seja $\Omega \subset U$ uma região para a qual vale o Teorema da Divergência, então a massa total em Ω no instante t é dada por

$$\int_{\Omega} u(s, t) dx.$$

Pode ser que a massa esteja sendo produzida (ou destruída) de dentro de U , digamos por meio de uma reação química. Vamos chamar de $f(x, t, u)$ a densidade de massa que é produzida (ou destruída) no instante t no ponto $x \in U$. Portanto, a taxa na qual a massa é produzida (ou destruída) em Ω no instante t é

$$\int_{\Omega} f(s, t, u(s, t)) ds.$$

Podemos assumir que devido a mobilidade da massa haja um fluxo $\Phi(x, t, u)$ da mesma para dentro ou para fora de U , portanto o seu fluxo através de Ω é

$$\int_{\partial\Omega} \Phi(s, t, u) \cdot \vec{n} dS(s),$$

onde \vec{n} é o vetor normal unitário à superfície $\partial\Omega$, apontando para fora. Portanto a lei de conservação de massa é

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(s, t) ds = - \int_{\partial\Omega} \Phi(s, t, u(s, t)) \cdot \vec{n} dS(s) + \int_{\Omega} f(s, t, u(s, t)) ds.$$

Do Teorema da Divergência, temos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(s, t) ds = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \Phi(s, t, u(s, t)) ds + \int_{\Omega} f(s, t, u(s, t)) ds.$$

Se u for de Classe C^1 , podemos passar a derivada em relação a t para dentro da integral e teremos

$$\int_{\Omega} u_t(s, t) ds + \int_{\Omega} \nabla \cdot \Phi(s, t, u(s, t)) ds = \int_{\Omega} f(s, t, u(s, t)) ds.$$

Em particular, se $x \in U$ e Ω for a esfera de raio $r > 0$ centrada em x , assumiremos r suficientemente pequeno para que ela esteja contida em U . Então dividindo a última equação pelo volume $V(\Omega)$ e tomando o limite quando r tende a zero, segue do Teorema do Valor Médio que

$$u_t + \nabla \cdot \Phi = f, \tag{1.4}$$

nos dando outra equação diferencial parcial que vem de uma lei de conservação.

Capítulo 2

Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem

2.1 Definição e classificação

Uma equação diferencial parcial de primeira ordem é uma equação da forma

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0, \quad (2.1)$$

onde $u(x_1, \dots, x_n)$ é uma função desconhecida.

Se a equação (2.1) for linear nas derivadas parciais u_{x_i} 's, ou seja, se puder ser colocada sob a forma

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n, u) u_{x_i} = c(x_1, \dots, x_n, u), \quad (2.2)$$

dizemos que ela é **quasi-linear**. Se a equação (2.2) puder ser colocada na forma

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) u_{x_i} = c(x_1, \dots, x_n) \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) u_{x_i} = c(x_1, \dots, x_n) u, \quad (2.3)$$

dizemos que a equação ela é **linear**.

Dizemos que u é uma solução de (2.1) numa região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, se ao substituirmos $u(x_1, \dots, x_n)$ e as suas derivadas parciais na equação (2.1) ela é satisfeita identicamente para todo (x_1, \dots, x_n) em Ω .

2.2 Equações diferenciais parciais quasi-lineares

2.2.1 Alguns exemplos simples

Para darmos uma idéia de como resolver equações quasi-lineares, nesta seção consideraremos alguns casos particulares. A teoria geral será apresentada nas duas seções seguintes.

Exemplo 3. *Considere o seguinte problema de valor inicial (podemos tratar a variável y como o tempo):*

$$au_x + u_y = 0 \quad (2.4)$$

e

$$u(x, 0) = h(x), \quad (2.5)$$

onde assumiremos que a é uma constante.

A equação (2.4) é linear de primeira ordem, ela é um caso particular de **equação de transporte linear**. Ela modela o transporte, digamos de impurezas, num fluxo de fluido uniforme.

Ao longo de uma curva no plano parametrizada por $x = x(t)$ e $y = y(t)$, temos

$$\frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = u_x \frac{dx}{dt} + u_y \frac{dy}{dt},$$

em particular, se

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad (2.6)$$

e u for uma solução de (2.4), temos teremos

$$\frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = au_x(x(t), y(t)) + u_y(x(t), y(t)) = 0,$$

portanto u é constante ao longo de curvas satisfazendo (2.6). Tais curvas são chamadas de **curvas características projetadas** de (2.4). Como a é constante, as curvas características projetadas são retas paralelas ao vetor $(a, 1)$, ou seja

$$x = x_o + at \quad e \quad y = y_o + t \quad \text{ou} \quad x = x_o - ay_o + ay. \quad (2.7)$$

Estas retas passam pelos pontos $(x_o - ay_o, 0)$ e (x_o, y_o) , como u é constante ao longo destas retas, temos

$$u(x_o, y_o) = u(x_o - ay_o, 0) = h(x_o - ay_o).$$

Tendo em vista a arbitrariedade de (x_o, y_o) , segue que para todo x, y , temos

$$u(x, y) = h(x - ay).$$

Portanto a equação (2.4) transporta o dado inicial (2.5) na direção do vetor $(a, 1)$, sem mudar a sua forma, por isso ela é chamada de **equação de transporte passiva**.

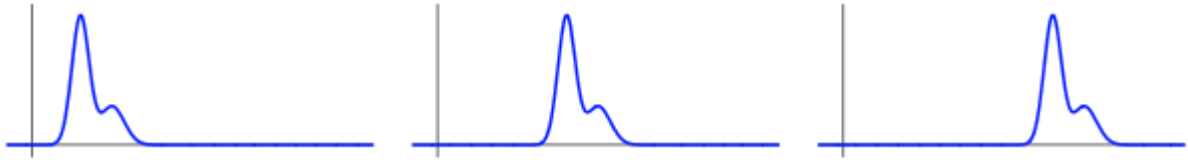


Figura 2.1: A solução do problema de valor inicial (2.4) e (2.5), mostrada em três instantes diferentes. É uma onda viajante.

Resumindo, se quisermos o valor de u no ponto (x_o, y_o) , pegamos a curva característica projetada (reta) que passa por este ponto, encontramos a sua interseção com o eixo x , ou seja, o ponto $(x_o - ay_o, 0)$ e fazemos $u(x_o, y_o) = h(x_o - ay_o)$. Portanto a solução em qualquer ponto é completamente determinada a partir do dado inicial. O que aconteceria se tivéssemos especificado o dado inicial sobre uma curva característica projetada, digamos $x = ay$? Neste caso seria dado $u(as, s) = h(s)$ ou invés de $u(s, 0) = h(s)$.

Ao resolvermos (2.4) e (2.5) o que fizemos foi encontrar uma superfície solução $S : z = u(x, y)$, contendo uma curva γ dada por

$$x = s, \quad y = 0, \quad z = h(s).$$

A curva característica projetada de (2.4) passando por $(s, 0)$ em $t = 0$ é dada por

$$x = X(s, t) = s + at, \quad y = Y(s, t) = t, \tag{2.8}$$

ao longo da mesma

$$u = Z(s) = h(s).$$

Como a solução desejada é $u = z(x, y)$, isto significa que temos que expressar s em termos de x e y , o que é imediato de (2.8) e obtemos $s = x - ay$. Em geral, estaremos interessados em encontrar uma superfície solução de (2.4) que contenha uma curva dada por

$$x = f(s), \quad y = g(s), \quad z = h(s). \tag{2.9}$$

A curva característica projetada passando $(f(s), g(s))$ em $t = 0$ é dada por

$$x = f(s) + at, \quad y = g(s) + t \tag{2.10}$$

ao longo da qual $u = Z(s) = h(s)$. Para encontrarmos $u(x, y)$ devemos ser capazes de expressar s em função de x e y . De (2.10) facilmente eliminamos t e encontramos

$$x - ay = f(s) - ag(s) \equiv w(s),$$

portanto, se

$$w'(s) = f'(s) - ag'(s) = (-g'(s), f'(s)) \cdot (a, 1) \neq 0, \tag{2.11}$$

ou seja, se o **campo vetorial** $(a, 1)$ **for transversal à curva plana** $(f(s), g(s))$, a função w terá inversa

$$s = w^{-1}(x - ay).$$

Portanto,

$$u(x, y) = h(w^{-1}(x - ay))$$

é solução do problema de Cauchy (2.4) e (2.9).

Quando a curva $(f(s), g(s))$, na qual escolhemos especificamos o dado inicial satisfaz a condição (2.11), dizemos que ela é **não característica**.

Através deste exemplo simples, vimos que existe um compromisso entre a equação diferencial (2.4) e a curva $(f(s), g(s))$ na qual especificamos o dado inicial. Pode ser que em função desta curva, não tenhamos solução para o problema de Cauchy (2.4) e (2.9). Por exemplo se especificarmos o nosso dado sobre a curva Γ dada por $f(s) = as$ e $g(s) = 1$, então se (x_o, y_o) não estiver sobre Γ , a característica projetada passando por (x_o, y_o) será paralela a Γ , portanto não poderemos acessar o dado inicial através da mesma e o problema de Cauchy correspondente não terá solução.

Vale a pena ressaltar que se $J(s, t)$ for o Jacobiano da transformação (2.10), ou seja,

$$J(s, t) = \det \begin{pmatrix} X_s & Y_s \\ X_t & Y_t \end{pmatrix},$$

então (2.11) é equivalente a dizer que

$$J(s, 0) \neq 0$$

e pelo Teorema da Função Inversa, a condição de transversalidade é equivalente a dizer que a transformação (2.11) é localmente (para todo s e t pequeno) invertível, nos permitindo expressar s e t em função de x e y .

Vimos que a superfície solução $S : z = u(s, y)$ pode ser escrita como $S = \cup_s \gamma_s$, onde para cada s fixo, γ_s é a curva dada por $\gamma_s = \{(X(s, t), Y(s, t), h(s))\}$, a qual é chamada de **curva característica**. A projeção desta no plano xy é o que havíamos definido como uma **curva característica projetada**.

Note que γ_s é a solução do seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{dz}{dt} = 0,$$

com condições iniciais

$$x(0) = f(s), \quad y(0) = g(s), \quad z(0) = h(s),$$

portanto o que fizemos acima foi para cada s fixo encontrar a curva característica passando pela curva dada γ , em $t = 0$.

Exemplo 4. *Considere o seguinte problema*

$$u_y - xu_x = 0, \quad u(x, 0) = h(x) \tag{2.12}$$

que ainda é uma equação de transporte linear. Note que agora as características projetadas são dadas por

$$\frac{dx}{dt} = -x, \quad \frac{dy}{dt} = 1,$$

portanto,

$$x = se^{-t}, \quad y = t.$$

Destas relações encontramos

$$s = xe^y,$$

e concluímos que

$$u(x, y) = h(xe^y).$$

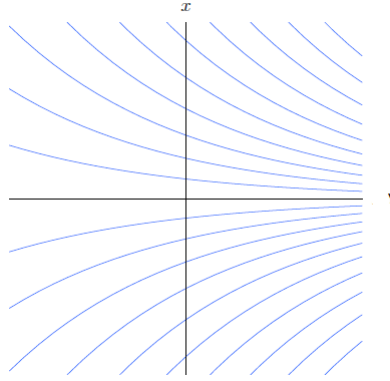


Figura 2.2: Curvas características projetadas da equação $u_y - xu_x = 0$.

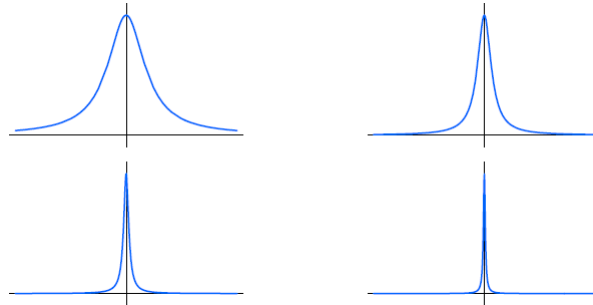


Figura 2.3: A solução de $u_y - xu_x = 0$, com $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$, nos instantes $y = 0, 1, 2, 3$.

Exemplo 5. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$u_y + uu_x = 0, \quad u(x, 0) = h(x). \quad (2.13)$$

A equação diferencial acima é exemplo de equação de transporte não linear ela é chamada de **equação de Burger sem viscosidade**. Neste exemplo o dado é prescrito na curva $\Gamma = \{(f(s), g(s))\}$, onde $f(s) = s$ e $g(s) = 0$, a qual é não-característica, pois

$$f'(s) - g'(s)h(s) = 1 \neq 0.$$

As curvas características são soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dx}{dt} = z, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{dz}{dt} = 0,$$

com condições iniciais

$$x(0) = s, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = h(s).$$

Encontramos

$$x = h(s)t + s \equiv X(s, t), \quad y = s \equiv Y(s), \quad z = h(s) \equiv Z(s). \quad (2.14)$$

No presente exemplo as curvas características projetadas ainda são retas, porém os seus coeficientes angulares não são mais constante, dependem do dado inicial $h(s)$. Das duas primeiras equações de (2.14), temos as seguintes expressões para as curvas características projetadas:

$$x - h(s)y = s \quad (2.15)$$

que são retas que passam por $(s, 0)$ e têm coeficiente angulares $\frac{dx}{dy} = h(s)$. Substituindo (2.15) na terceira equação de (2.14), temos

$$Z(s) = h(x - Z(s)y). \quad (2.16)$$

Agora é só lembrarmos que $u(x, y) = Z(S(x, y))$, onde $s = S(x, y)$ é obtido a partir das duas primeiras equações de (2.14), o que é possível, uma vez que a curva Γ é não característica. Portanto, de (2.16), temos

$$u(x, y) = Z(S(x, y)) = h(x - S(x, y)y) = h(x - yu(x, y)),$$

ou seja, u é dado implicitamente a partir da relação

$$u(x, y) = h(x - u(x, y)y).$$

Exemplo 6. *Se no Exemplo 5 fizermos*

$$h(x) = \alpha x + \beta,$$

onde α, β são constantes, então de (2.14), temos

$$u(x, y) = \alpha(x - yu(x, y)) + \beta,$$

e podemos calcular explicitamente a solução, encontrando

$$u(x, y) = \frac{\alpha x + \beta}{1 + \alpha y}.$$

Para y fixo o gráfico de u é uma reta. Se $\alpha > 0$ esta reta vai ficando horizontal, à medida em que y tende a infinito. Por outro lado, se $\alpha < 0$, a reta se torna vertical quando y se aproxima do valor crítico $y_* = -\frac{1}{\alpha}$ e a solução deixa de existir, veja Figura 2.4.

Das duas primeiras equações de (2.14) segue que as características projetadas no plano xy da equação de Burger são as retas

$$C_s : x = h(s)y + s,$$

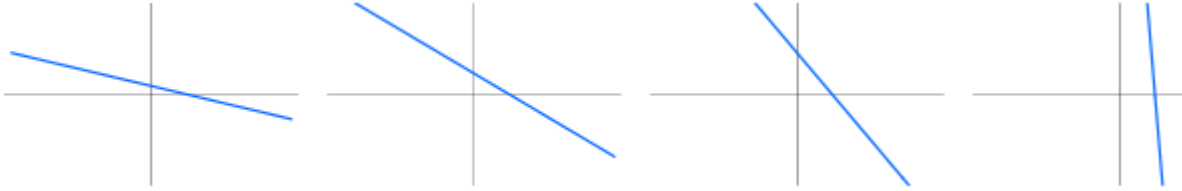


Figura 2.4: A solução da equação de Burger com condição inicial $h(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha = -0, 2$, $\beta = 0, 1$ nos instantes $y = 0, 3, 4$ e $4, 9$. O valor de $t_* = 5$.

as quais passam por $(s, 0)$ e os seus coeficientes angulares são iguais a $h(s)$. Ao longo de C_s , temos $u = h(s)$. Note que se $h'(s) < 0$, então as retas C_{s_1} e C_{s_2} , com $s_1 \neq s_2$, se cruzarão para algum valor de $y > 0$, ou seja, no ponto

$$(x_c, y_c) = \left(\frac{s_2 h(s_1) - s_1 h(s_2)}{h(s_2) - h(s_1)}, \frac{s_2 - s_1}{h(s_2) - h(s_1)} \right).$$

Portanto, temos um problema, pois sendo u constante ao longo destas retas, no ponto (x_c, y_c) a função deve tomar valores distintos $h(s_1)$ e $h(s_2)$, portanto não pode ser univalente, o que não é fisicamente aceitável.

Quando duas características projetadas se cruzam, dizemos que temos um **choque**. Derivando

$$u = h(x - uy)$$

em relação a x , temos

$$u_x = h'(s)(1 - yu_x),$$

portanto

$$u_x = \frac{h'(s)}{1 + h'(s)y},$$

logo, para $h'(s) < 0$, u_x se torna infinito no instante positivo

$$y = \frac{-1}{h'(s)}.$$

O menor y para o qual isto acontece corresponde ao valor $s = s_o$ no qual $h'(s)$ tem um mínimo. No tempo

$$T = -\frac{1}{h'(s_o)},$$

u_x explode, portanto, não pode haver uma solução de classe C^1 além deste tempo, isto é típico de equações não-lineares. Em particular, se quisermos uma solução u que esteja definida para valores de tempo maiores do que T , temos que abrir mãos dela ser de classe C^1 e introduzir a noção de solução fraca.

Exemplo 7. Se no Exemplo 5 fizermos $h(s) = e^{-s^2}$. Então para $s > 0$, $h'(s) < 0$, portanto, $h(s_1) > h(s_2)$ para $0 < s_1 < s_2$. Logo as características correspondentes a s_1 e s_2 se cortarão. Conforme mostramos na Figura 2.5, a parte mais alta da onda ultrapassará a parte mais baixa da onda, nos conduzindo a singularidades na solução. Uma solução não pode tomar valores múltiplos. Consequentemente, a onda não poderá ser solução de classe C^1 da equação de Burger depois do tempo y quando a onda se quebra.

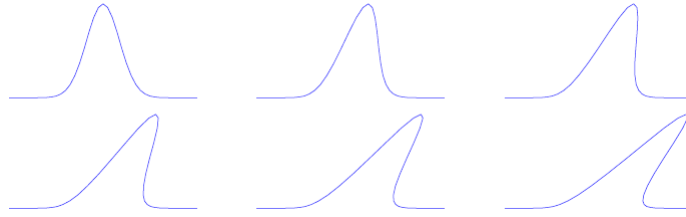


Figura 2.5: Mostramos a solução $u(x, y)$ do problema de valor inicial (2.13), com $h(s) = e^{-s^2}$, em seis instantes y .

2.2.2 Equações quasi-lineares gerais a duas variáveis independentes

A seguir consideraremos as equações quasi-lineares gerais, sem perda de generalidade, nos concentraremos no caso em que u é uma função de apenas duas variáveis, pois este caso é mais fácil de visualizarmos geometricamente, mas tudo que faremos a seguir se estende naturalmente para o caso em que u depende de n variáveis e isto será feito no final desta seção.

Quando temos apenas duas variáveis independentes, uma equação quasi-linear, tem a seguinte forma

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u). \quad (2.17)$$

Assumiremos que os coeficientes a , b e c estão em $C^1(\Omega)$, onde Ω é um aberto do \mathbb{R}^3 .

Se $u(x, y)$ é uma solução de (2.17), então a superfície $S : z = u(x, y)$ é chamada de **superfície integral**. De (2.17), para cada ponto de S , temos

$$(a(x, y, u(x, y)), b(x, y, u(x, y)), c(x, y, u(x, y))) \cdot (u_x(x, y), u_y(x, y), -1) = 0,$$

mas o vetor $(u_x(x, y), u_y(x, y), -1)$ é perpendicular a S em cada ponto $(x, y, u(x, y))$ e concluímos que o vetor $(a(x, y, u(x, y)), b(x, y, u(x, y)), c(x, y, u(x, y)))$ está no plano tangente a S no ponto $(x, y, u(x, y))$. Consequentemente, para encontrarmos uma solução de (2.17), olhamos para uma superfície S tal que em cada ponto $(x, y, z) \in S$, o vetor $(a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z))$ esteja no seu plano tangente. Como construir tal superfície?

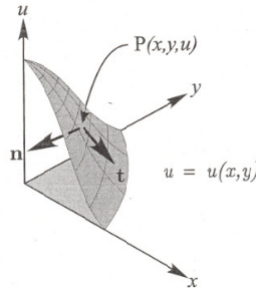


Figura 2.6: Superfície característica.

Podemos ver a superfície S como uma união de curvas, no nosso caso estas curvas são muito particulares, C , em cada ponto delas o vetor tangente tem que ser paralelo ao vetor

(a, b, c) , isto fará que em cada ponto S tangencie o campo (a, b, c) . Portanto C satisfaz o seguinte sistema de EDO 's autônomo

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y, z) \quad (2.18)$$

$$\frac{dy}{dt} = b(x, y, z) \quad (2.19)$$

$$\frac{dz}{dt} = c(x, y, z), \quad (2.20)$$

chamadas de **equações características** de (2.17). A curva C é chamada de uma **curva característica** do campo vetorial característico $(a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z))$.

Teorema 1. *Se uma superfície S é uma união de curvas características, então S é uma superfície integral.*

Prova. Para mostrarmos que S é uma superfície integral, devemos mostrar que em cada ponto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ de S vale a relação (2.17). Como S é a união de curvas características, então existe uma curva característica γ passando por P_o . Por definição o vetor tangente a γ em P_o é $(a(x_o, y_o, z_o), b(x_o, y_o, z_o), c(x_o, y_o, z_o))$, mas estando este no plano tangente a S no ponto P_o , o vetor normal a S neste ponto, $(u_x(x_o, y_o, z_o), u_y(x_o, y_o, z_o), -1)$, deve ser perpendicular a $(a(x_o, y_o, z_o), b(x_o, y_o, z_o), c(x_o, y_o, z_o))$, ou seja,

$$a(x_o, y_o, z_o)u_x(x_o, y_o, z_o) + b(x_o, y_o, z_o)u_y(x_o, y_o, z_o) = c(x_o, y_o, z_o)u_x(x_o, y_o, z_o),$$

portanto S é uma superfície integral. □

A seguir mostraremos que toda curva integral S é a união de curvas características, ou seja, por cada ponto de S a curva característica que passa por ele está contida em S .

Teorema 2. *Seja $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ um ponto da superfície integral $S : z = u(x, y)$. Seja γ a curva característica passando por P_o (a existência e unicidade da mesma segue dos teoremas de EDO). Então γ está em S .*

Prova. Seja $\gamma = \{(x(t), y(t), z(t))\}$ e $(x_o, y_o, z_o) = (x(t_o), y(t_o), z(t_o))$. A partir de γ e S definimos

$$U(t) = z(t) - u(x(t), y(t)), \quad (2.21)$$

como P_o está em S , então $U(t_o) = 0$. De (2.21) e de (2.18), temos

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{dz}{dt} - u_x(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} - u_y(x(t), y(t))\frac{dy}{dt} \\ &= c(x(t), y(t), z(t)) - u_x(x(t), y(t))a(x(t), y(t), z(t)) - u_y(x(t), y(t), z(t))b(x(t), y(t), z(t)). \end{aligned}$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$\frac{dU}{dt} = c(x, y, u(x, y) + U) - u_x(x, y)a(x, y, u(x, y) + U) - u_y(x, y)b(x, y, u(x, y) + U),$$

onde na expressão acima, x e y são as funções de t , dadas pela descrição de γ . Portanto a equação diferencial para U é da forma

$$\frac{dU}{dt} = f(t, U), \quad U(t_0) = 0. \quad (2.22)$$

Seja

$$g(x, y) = c(x, y, u(x, y)) - u_x(x, y)a(x, y, u(x, y)) - u_y(x, y)b(x, y, u(x, y)).$$

Como $(x(t), y(t), u(x(t), y(t)))$ está em S , para todo t , segue que $g(x(t), y(t)) = 0$, para todo t , logo

$$f(t, 0) = g(x(t), y(t)) = 0,$$

para todo t , o que implica que $U \equiv 0$ é uma solução de (2.22), da unicidade da solução de (2.22), segue que $U \equiv 0$ é a solução de (2.22), portanto, $z(t) = u(x(t), y(t))$ para todo t , o que implica que γ está em S . \square

Sejam S_1 e S_2 duas superfícies integrais e suponha que $P_o \in S_1 \cap S_2$. Seja γ a curva característica que passa por P_o (por cada ponto passa uma única curva característica), pelo Teorema anterior, γ tem que pertencer a S_1 e S_2 . Ou seja, **se duas superfícies integrais tem um ponto em comum, elas contém a curva característica que passa por este ponto.**

Uma maneira de selecionarmos uma $u(x, y)$ particular de um conjunto infinito de soluções de (2.17), consiste em preescrevermos uma curva γ no espaço xyz que deve estar contida na superfície integral $S : z = u(x, y)$. Seja γ representada parametricamente por

$$x = f(s), \quad y = g(s), \quad z = h(s), \quad (2.23)$$

estamos interessados numa solução de (2.17), tal que

$$h(s) = u(f(s), g(s)),$$

para todo s . Este problema é chamado de **Problema de Cauchy** para (2.17). Estaremos satisfeitos com uma solução local u do nosso problema definida para x, y próximos dos valores $x_o = f(s_o), y_o = g(s_o)$.

Um caso especial do problema de Cauchy é quando γ tem a seguinte forma:

$$x = s, \quad y = 0, \quad z = h(s).$$

Em muitas situações a variável y será identificada como o tempo, por isso o problema de Cauchy acima é chamado de **problema de valor inicial**. A projeção de γ no plano xy é a curva

$$\Gamma = \{(f(s), g(s))\}.$$

Definição 1. (Condição de transversalidade) Dizemos que Γ é uma **curva não-característica** se para nenhum s ela não for tangente ao **campo vetorial característico projetado** $(a(f(s), g(s), h(s)), b(f(s), g(s), h(s)),$ ou seja, se

$$(-g'(s), f'(s)) \cdot (a(f(s), g(s), h(s)), b(f(s), g(s), h(s))) \neq 0. \quad (2.24)$$

De agora em diante assumiremos que (2.24) aconteça. Esta condição está nos dizendo que o campo característico projetado no plano xy , $(a(x, y, z), b(x, y, z))$ é transversal a Γ em cada ponto.

Para resolver o problema de Cauchy, partir de cada ponto da curva $\gamma = \{f(s), g(s), h(s)\}$, construiremos uma curva característica passando pelo mesmo, como isso nossas curvas características serão parametrizadas por dois parâmetros s e t , ou seja,

$$x = X(s, t), \quad y = Y(s, t), \quad z = X(s, t)$$

sendo que s nos dá informação do ponto de γ onde a curva característica está passando e t é o parâmetro que usamos para parametrizar a curva característica (para um s fixo). Portanto, temos que resolver o seguinte sistema de *EDO's*

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y, z) \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y, z) \quad \frac{dz}{dt} = c(x, y, z),$$

satisfazendo as condições

$$x(s, 0) = f(s), \quad y(s, 0) = g(s), \quad z(s, 0) = h(s).$$

Assumindo que a, b, c, f, g, h sejam de classe C^1 , segue da teoria de equações diferenciais ordinárias que o problema acima tem solução única $(X(s, t), Y(s, t), Z(s, t))$, a qual é de classe C^1 , nas variáveis s, t . A solução do nosso problema é $u = z(x, y)$, entretanto quando encontramos as curvas características o que temos é $z = Z(s, t)$, isto significa que precisamos encontrar s e t em função de x e y , das relações

$$x = X(s, t), \quad y = Y(s, t),$$

é neste ponto que entra a condição de transversalidade dada na Definição 1. O Jacobiano da transformação acima é

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(s, t)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial s} & \frac{\partial Y}{\partial s} \\ \frac{\partial X}{\partial t} & \frac{\partial Y}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, tendo em vista a condição (2.24), concluímos que

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(s, t)}(s, 0) = \det \begin{pmatrix} f'(s) & g'(s) \\ a(f(s), g(s), h(s)) & b(f(s), g(s), h(s)) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Logo pelo Teorema da Função inversa, veja Observação 1, a transformação

$$(x, y) = (X(s, t), Y(s, t))$$

possui inversa,

$$(s, t) = (S(x, y), T(x, y)),$$

para todo s e t suficientemente pequeno. Com isso construímos uma solução

$$z = Z(S(x, y), T(x, y))$$

do nosso problema. A unicidade da solução (2.17) e (2.23) segue do Teorema 2.

Observação 1. (O Teorema da Função Inversa) Dada uma transformação $G : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , digamos que

$$G(x) = (G_1(x), \dots, G_n(x)),$$

então o jacobiano de G num ponto $x_o \in U$ é definido como

$$\frac{\partial(G_1, \dots, G_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x_o) = \det \begin{pmatrix} G_{1,x_1}(x_o) & \cdots & G_{n,x_1}(x_o) \\ G_{1,x_2}(x_o) & \cdots & G_{n,x_2}(x_o) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ G_{1,x_n}(x_o) & \cdots & G_{n,x_n}(x_o) \end{pmatrix}.$$

Seja U um aberto do \mathbb{R}^n contendo x_o , $G : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e

$$\frac{\partial(G_1, \dots, G_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x_o) \neq 0.$$

O Teorema da Função Inversa diz que existem abertos $V \subset U$, contendo x_o e $W \subset \mathbb{R}^n$ contendo $z_o = G(x_o)$, tal que $G : V \rightarrow W$ é uma bijeção e sua inversa $G^{-1} : W \rightarrow V$ é de classe C^1 .

Exemplo 8. Resolva o seguinte problema de Cauchy

$$u_t + xu_x = 0, \quad u(x, 0) = h(x).$$

Resolução. Note que $\Gamma = \{(s, 0)\}$, $a(x, y, u) = x$, $b(x, y, u) = 1$ e $c(x, y, u) = 0$, logo

$$(a(f(s), g(s), h(s)), b(f(s), g(s), h(s)), c(f(s), g(s), h(s))) \cdot (-g'(s), f'(s)) = (r, 1) \cdot (0, 1) = 1 \neq 0,$$

logo Γ é não-característica. As equações diferenciais características são

$$\frac{dt}{dr} = 1 \quad \frac{dx}{dt} = x \quad \frac{dz}{dr} = 0,$$

com condições iniciais

$$t(r, 0) = 0, \quad x(r, 0) = r, \quad z(r, 0) = h(r).$$

Encontramos

$$t(r, s) = s + c_1(r), \quad x(r, s) = c_2(r)e^s \quad e \quad z(r, s) = c_3(r).$$

Usando as condições iniciais, concluímos que

$$t(r, s) = s, \quad x(r, s) = re^s \quad e \quad z(r, s) = h(r).$$

Podemos facilmente expressar r e s em termos de t e x :

$$s(x, t) = t, \quad r(x, t) = xe^{-t},$$

portanto,

$$u(x, t) = z(r(x, t), s(x, t)) = h(xe^{-t}).$$

Note que as características projetadas são as curvas

$$xe^{-t} = \xi,$$

onde ξ é uma constante, ao longo das quais $u = h(\xi)$. □

Exemplo 9. Resolva o problema

$$u_t + au_x = u^2, \quad u(x, 0) = \cos x.$$

Resolução. Note que o dado é prescrito na curva $\Gamma = \{(0, s)\}$, as equações características são dadas pelas equações

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{dx}{d\tau} = a, \quad \frac{dz}{d\tau} = z^2,$$

com condições iniciais

$$t(s, 0) = 0, \quad x(s, 0) = s, \quad z(s, 0) = \cos(s).$$

Encontramos

$$t(s, \tau) = \tau + c_1(s), \quad x(s, \tau) = a\tau + c_2(s) \quad e \quad -\frac{1}{z(s, \tau)} = \tau + c_3(s).$$

Usando as condições iniciais, concluímos que

$$t(s, \tau) = \tau, \quad x(s, \tau) = a\tau + s \quad e \quad z(s, \tau) = \frac{\cos s}{1 - \tau \cos s}.$$

Podemos facilmente expressar s e τ em termos de t e x :

$$\tau(x, t) = t, \quad s(x, t) = x - at,$$

portanto,

$$u(x, t) = z(s(x, t), \tau(x, t)) = \frac{\cos(x - at)}{1 - t \cos(x - at)},$$

que é uma solução para (x, t) próximo de Γ . Note que a solução explode quando

$$1 - t \cos(x - at) = 0,$$

em particular a primeira explosão ocorre quando $t = 1$, para valores de x satisfazendo $x = a + 2\pi n$, onde $n \in \mathbb{Z}$. □

Exemplo 10. Resolva a equação

$$u_x + xu_y = u, \quad u(1, y) = h(y).$$

Resolução. Note que o dado é prescrito na curva $\Gamma = \{(1, s)\}$, as equações características são dadas pelas equações

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = x, \quad \frac{dz}{dt} = z,$$

com condições iniciais

$$x = 1, \quad y = s, \quad z = h(s).$$

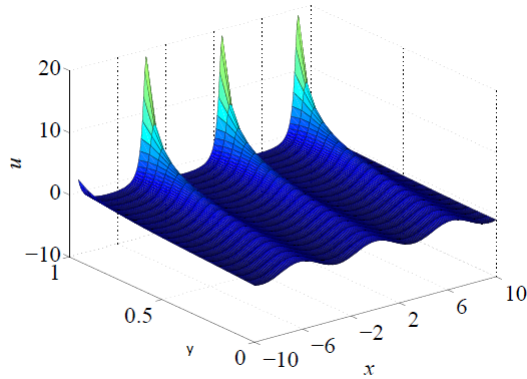


Figura 2.7: $u(x, t) = \frac{\cos(x-at)}{1-t \cos(x-at)}$.

Encontramos

$$x = t + 1,$$

portanto

$$y = t^2/2 + t + s.$$

Da equação diferencial para z encontramos

$$z = h(s)e^t.$$

Expressando s e t em função x e y , temos

$$t = x - 1, \quad s = y - (x - 1)^2/2 - (x - 1) = y - (x^2 - 1)/2,$$

$$u(x, y) = z(S(x, y), T(x, y)) = h\left(y - (x^2 - 1)/2\right) e^{x-1}.$$

□

Exercício 1. Use o método das características e encontre as soluções dos seguintes problemas:

(a) A solução de

$$x^2 u_x + xy u_y = u^2$$

que passa pela curva $u = 1$, $x = y^2$. Quando é que a solução se torna singular?

(b) A solução de

$$u_x + x^2 y u_y + u = 0,$$

tal que $u(0, y) = y^2$.

(c) A solução de

$$u_y = x u_x - u + 1,$$

tal que $u(x, 0) = \sin x$.

(d) A solução de

$$u_y + uu_x = -x$$

tal que $u(x, 0) = h(x)$.

Sugestão : ao resolver o sistema acoplado $x' = z$ e $z' = -x$, escreva-o como uma equação diferencial ordinária de segunda ordem $x'' + x = 0$, $x(0) = s$, $x'(0) = z(0) = f(s)$.

(e) A solução de

$$u_y - u^2 u_x = 3u,$$

tal que $u(x, 0) = f(x)$.

Respostas:(a) $u(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + x - y}$, (b) $u(x, y) = y^2 e^{-\frac{2}{3}x^3 - x}$. (c) $u(x, y) = 1 - \frac{1}{e^y} + \frac{\text{sen}(xe^y)}{e^y}$, (d) $u(x, y) = f(x \cos y - u \text{sen } y) \cos y - (x \cos y - u \text{sen } y) \text{sen } y$, (e) $u(x, y) = f\left(x - \frac{u^2}{6e^{6y}} + \frac{u^2}{6}\right) e^{3y}$

Exercício 2. Seja u a solução de

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = -u,$$

de classe C^1 no disco unitário Ω no plano xy . Suponha que $a(x, y(x+b(x, y)y) > 0$ na fronteira de Ω , Mostre que u se anula identicamente. (Sugestão: mostre que $\max_{\Omega} u \leq 0$ e $\min_{\Omega} u \geq 0$, usando condições para um máximo no ponto de fronteira).

Exercício 3. Seja u uma solução de classe C^1 de $u_y + uu_x = 0$ em cada uma das regiões separadas por uma curva $x = \xi(y)$. Suponha que u seja contínua, mas u_x tenha uma descontinuidade tipo salto na curva. Mostre que

$$\frac{d\xi}{dy} = u,$$

logo ξ a curva é característica. (Sugestão: Da equação de Burger, temos

$$(u_y^+ - u_y^-) + u(u_x^+ - u_x^-) = 0.$$

Além disso, $u(\xi(y), y)$ e $\frac{d}{dy}u(\xi(y), y)$ são contínuas na curva.)

Exercício 4. Mostre que a solução da equação

$$u_y + a(u)u_x = 0$$

com condição inicial $u(x, 0) = h(x)$, é dada por

$$u = h(x - a(u)y).$$

Mostre que a solução se torna singular em algum ponto $y > 0$, a menos que $a(h(s))$ é uma função não decrescente de s .

2.2.3 Equações quasi-lineares a n variáveis independentes

Uma equação quasi-linear mais geral para uma função $u = u(x_1, \dots, x_n)$ é da seguinte forma

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n, u) u_{x_i} = c(x_1, \dots, x_n, u), \quad (2.25)$$

as “curvas” características no espaço $x_1 \dots x_n z$ são dadas pelo sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x_1, \dots, x_n, z) \quad (i = 1, \dots, n), \quad \frac{dz}{dt} = c(x_1, \dots, x_n, z), \quad (2.26)$$

no problema de Cauchy queremos passar uma “superfície” integral $z = u(x_1, \dots, x_n)$ em \mathbb{R}^{n+1} numa variedade $(n - 1)$ -dimensional, Γ , dada parametricamente por

$$x_i = f_i(s_1, \dots, s_{n-1}) \quad (i = 1, \dots, n), \quad z = h(s_1, \dots, s_{n-1}).$$

Ao resolvermos o sistema (2.26), encontramos a solução (local) única

$$x_i = X_i(s_1, \dots, s_{n-1}, t) \quad (i = 1, \dots, n), \quad z = Z(s_1, \dots, s_{n-1}, t),$$

tal que

$$X_i(s_1, \dots, s_{n-1}, 0) = f_i(s_1, \dots, s_n) \quad (i = 1, \dots, n), \quad Z(s_1, \dots, s_{n-1}, 0) = h(s_1, \dots, s_{n-1}).$$

Como a solução a superfície desejada é $z = u(x_1, \dots, x_n)$, devemos encontrar s_1, s_{n-1}, t em termos de x_1, \dots, x_n , o que é possível se o Jacobiano

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial s_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial s_{n-1}} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial s_{n-1}} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \neq 0,$$

onde os a_i 's são calculados sobre γ , ou seja, $a_i = a_i(f_1(s), \dots, f_n(s), h(s))$.

Exemplo 11. *Resolva o seguinte problema de valor inicial*

$$u_z + u_x + u_y + u = 0, \quad u(x, y, 0) = h(x, y).$$

Neste exemplo o dado inicial é prescrito sobre a variedade γ dada por $x = s_1, y = s_2, z = 0$. As curvas características são soluções do seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{dz}{dt} = 1, \quad \frac{dw}{dt} = -w,$$

com condições iniciais

$$x(0) = s_1, \quad y(0) = s_2, \quad z(0) = 0, \quad w(0) = h(s_1, s_2).$$

A superfície solução é $w = w(x, y, z)$. Resolvendo o sistema acima, encontramos

$$x = t + s_1, \quad y = t + s_2, \quad z = t, \quad w = h(s_1, s_2)e^{-z}. \quad (2.27)$$

Das três primeiras equações de (2.27) expressamos s_1, s_2, t em termos de x, y, z e obtemos

$$s_1 = x - z, \quad s_2 = y - z, \quad t = z.$$

Substituindo estes valores na quarta equação de (2.27), temos

$$u(x, y, z) = h(x - z, y - z)e^{-z}.$$

Verifique que esta expressão realmente é a solução do problema. □

Exemplo 12. (A equação de Euler) Um caso particular de equação quasi-linear de primeira ordem em n variáveis é quando $a_i(x_1, \dots, x_n, z) = x_i$:

$$\sum_{i=1}^n x_i u_{x_i} = \alpha u \quad (2.28)$$

onde α é uma constante. Como a equação acima é singular na origem, consideraremos o seguinte problema de valor inicial

$$f_i = \begin{cases} s_i & i = 1, \dots, n-1 \\ 1 & i = n \end{cases}$$

$$z = h(s_1, \dots, s_{n-1}).$$

As equações características são dadas pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad \frac{dz}{dt} = \alpha z$$

com condições iniciais

$$x_i(0) = s_i \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad x_n(0) = 1, \quad z(0) = h(s).$$

Resolvendo as equações características encontramos

$$x_i = \begin{cases} s_i e^t & i = 1, \dots, n-1 \\ e^t & i = n \end{cases}$$

e

$$z = h(s_1, \dots, s_{n-1})e^{\alpha t}.$$

Portanto, $x_n = e^t$ e $s_i = \frac{x_i}{e^t} = \frac{x_i}{x_n}$, para $i = 1, \dots, n-1$. Logo

$$u(x_1, \dots, x_n) = x_n^\alpha h\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

Em particular, todo $\lambda > 0$, temos

$$u(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha u(x_1, \dots, x_n).$$

□

Exercício 5. Resolva o seguinte problema de valores inicial:

$$u_x + yu_y + u_z = u, \quad u(x, y, 0) = h(x, y).$$

Exercício 6. Encontre a solução o seguinte problema

$$u_z + xu_x + (x + z)u_y = z^3, \quad u(x, y, 0) = xy.$$

(Resposta: $u(x, y, z) = \frac{z^4}{4} + xe^{-z}(y - x - z^2/2 + xe^{-z})$).

2.3 Equação de primeira ordem geral

2.3.1 Equação de primeira ordem geral com duas variáveis independentes

Uma equação de primeira ordem geral nas variáveis independentes x, y é da forma

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \tag{2.29}$$

ou

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{2.30}$$

onde $p = u_x$, $q = u_y$. Assumiremos que $F_p^2 + F_q^2 \neq 0$, para garantir que (2.30) seja de primeira ordem. No ponto (x_o, y_o, z_o) esta equação estabelece uma relação funcional entre p e q . De fato, se assumirmos que $F_q(x_o, y_o, z_o, p, q) \neq 0$, então o Teorema da Função Implícita determina q em função de p :

$$F(x_o, y_o, z_o, p, q(p)) = 0,$$

para todo p (no caso quasi-linear, sabemos que $(p, q, -1)$ é perpendicular a um certo vetor, portanto, dado p , temos q).

Os planos tangentes ao gráfico de $z = u(x, y)$ são dados por

$$z - z_o = p(x - x_o) + q(p)(y - y_o), \tag{2.31}$$

os quais, quando p varia, descrevem uma família a um parâmetro de planos passando por (x_o, y_o, z_o) , estes planos têm como seu envelope uma superfície C , chamada de **Cone de Monge**, veja Figura 2.8. Em geral este cone não será circular reto, mas uma superfície regrada, em toda parte contendo uma reta de tangência com um dos plano dados por (2.31).

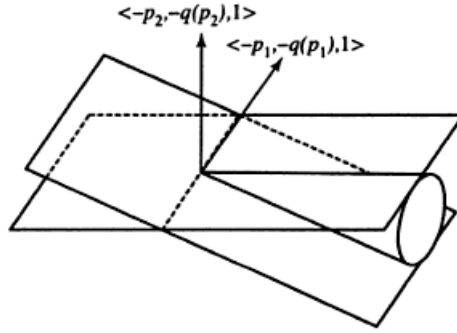


Figura 2.8: O cone de Monge e suas famílias de planos tangentes.

Observação 2. *Uma superfície C é regrada, se por cada um de seus pontos passa uma reta que também está em C . Exemplos de famílias regradas conhecidas são o plano e o cone. Tais superfícies podem sempre ser descritas (pelo menos localmente) como um conjunto de pontos que são varridos por uma reta se movendo, no caso do cone circular mantemos um ponto fixo e o outro sobre um círculo.*

Uma superfície integral é definida como a superfície S , tal que em cada ponto (x_o, y_o, z_o) ela tenha um plano tangente P que também é tangente ao cone de Monge C , isto é, P é da forma (2.31) para alguma escolha de p . A única reta de tangência entre C e P determina um campo de direção em S . As curvas integrais deste campo são chamadas de curvas características, embora elas dependam da escolha do plano tangente P , isto é, de uma escolha de p_o , visto que este determina $q = q(p_o)$. Note que no caso quasi-linear, $ap + pq = c$, o cone degenera-se a uma reta e não necessitamos especificar p_o .

As considerações geométricas acima também nos fornece uma maneira de construirmos soluções. Como no caso quasi-linear, queremos obter um sistema de equações diferenciais ordinárias que podemos integrar para obtermos as curvas características. Mas antes vamos descrever o processo analítico atrás da construção de cones de Monge através da família de planos tangentes (2.31).

Suponha que S_a seja uma família de superfícies em \mathbb{R}^3 dada por $z = w(x, y, a)$, onde w depende suavemente de x, y e do parâmetro real a . Considere também equação $\partial_a w(x, y, a) = 0$. Para cada a fixo, estas duas equações determinam uma curva γ_a em \mathbb{R}^3 . O envelope \mathcal{E} da família de superfícies S_a é exatamente a união destas curvas γ_a . A equação para \mathcal{E} é encontrado simplesmente resolvendo $\partial_a w(x, y, a) = 0$ para a em função de x e y , ou seja, $a = f(x, y)$ e substituindo em $z = w(x, y, a)$ e obtendo $z = w(x, y, f(x, y))$. Além disso, ao longo de γ_1 , a é constante e temos

$$dz = w_x dx + w_y dy, \quad 0 = w_{ax} dx + w_{ay} dy.$$

Aplicaremos o raciocínio acima à família S_p , de planos tangentes (2.31), ou seja,

$$z = w(x, y, p) = z_o + p(x - x_o) + q(p)(y - y_o),$$

portanto temos

$$dz = p dx + q dy, \tag{2.32}$$

$$0 = dx + \frac{dq}{dp} dy. \quad (2.33)$$

Derivando (2.30) em relação a p temos $F_p + F_q \frac{dq}{dp} = 0$, ou seja, $\frac{dq}{dp} = -\frac{F_p}{F_q}$, substituindo esta relação em (2.33), temos

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q}. \quad (2.34)$$

Equações (2.32) e (2.35) podem ser colocadas na forma paramétrica como

$$\frac{dx}{dt} = F_p(x, y, z, p, q) \quad (2.35)$$

$$\frac{dy}{dt} = F_q(x, y, z, p, q) \quad (2.36)$$

$$\frac{dz}{dt} = p \frac{dx}{dt} + q \frac{dy}{dt} = pF_p(x, y, z, p, q) + qF_q(x, y, z, p, q). \quad (2.37)$$

Entretanto, este é um sistema indeterminado de equações diferenciais, precisamos de equações para $\frac{dp}{dt}$ e $\frac{dq}{dt}$.

Derivando (2.29) em relação à x , temos

$$\begin{aligned} 0 &= F_x + F_u u_x + F_{u_x} (u_x)_x + F_{u_y} (u_y)_x \\ &= F_x + F_z p + p_x F_p + F_q (u_x)_y \\ &= F_x + F_z p + p_x F_p + F_q p_y \\ &= F_x + F_z p + p_x F_p + p_y F_q \\ &= F_x + F_z p + p_x \frac{dx}{dt} + q_y \frac{dy}{dt} \quad (\text{usamos (2.35) e (2.36)}) \\ &= F_x + pF_z + \frac{dp}{dt}. \end{aligned}$$

Com isso concluímos que

$$\frac{dp}{dt} = -F_x - pF_z. \quad (2.38)$$

De maneira analoga, mostramos que

$$\frac{dq}{dt} = -F_y - qF_z. \quad (2.39)$$

As equações (2.35) a (2.39) são chamadas de equações características e as soluções são chamadas de faixas características, porque as especificações de p e q nos dão pedaços dos planos tangentes ao longo da curva $(x(t), y(t), z(t))$, veja Figura 2.9.

Note que a fim de construirmos a superfície integral S , estamos realmente interessados somente no suporte da faixa, ou seja, a curva $(x(t), y(t), z(t))$, mas para encontrá-la precisamos também de encontrar as funções $p(t)$ e $q(t)$. Para resolver este problema (2.30), temos assumir que a curva γ é não característica, ou seja, em cada ponto seu o cone de Monge não é tangente à mesma naquele ponto. Mesmo assim o problema de Cauchy parece não razoável,

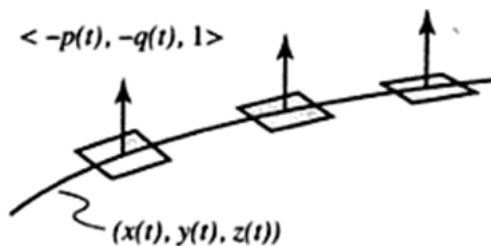


Figura 2.9: Faixa característica.

porque geometricamente (2.30) determina somente o cone ao longo de γ e não sabemos em que direção seguir ao longo da característica. Analiticamente, temos 5 equações para resolver, mas γ nos dá apenas os valores de x , y e z . A maneira de resolver isto é especificar ao longo de γ duas funções ϕ e ψ para dar condições iniciais para p e q . Geometricamente isto equivale a especificar o plano tangente em cada ponto de γ e substituir a curva uma faixa, veja a Figura 2.10.

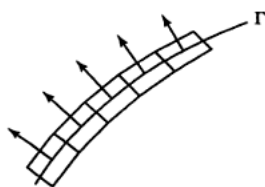


Figura 2.10: Condição inicial do problema de Cauchy.

Vamos agora supor que γ seja parametrizado por $f(s), g(s), h(s)$. A escolha do plano tangente ao longo de γ , ou seja, das funções ϕ e ψ não é arbitrária, elas devem satisfazer duas condições. Primeiro cada plano tangente deve ser tangente ao cone de Monge naquele ponto; em outras palavras, as funções ϕ e ψ devem satisfazer a equação

$$F(f(s), g(s), h(s), \phi(s), \psi(s)) = 0. \quad (2.40)$$

Além disso, os planos devem se ajustar suavemente em γ , como as escamas de um peixe. De (2.32) e (2.33), temos $\frac{dz}{ds} = p \frac{dx}{ds} + q \frac{dy}{ds}$, o que implica na condição

$$h'(s) = \phi(s) f'(s) + \psi(s) g'(s). \quad (2.41)$$

Dizemos que a curva $\Gamma = \{f(s), g(s)\}$ é não característica, se

$$(F_p(f(s), g(s), h(s), \psi_1(s), \psi_2(s)), F_q(f(s), g(s), h(s), \psi_1(s), \psi_2(s))) \cdot (-g'(s), f(s)) \neq 0 \quad (2.42)$$

quando isto acontecer, seremos capazes de inverter a função $G(s, t) = (x(s, t), y(s, t))$ e encontramos s e t em função de x, y .

Funções ϕ e ψ satisfazendo (2.40) e (2.41) não precisam ser únicas nem mesmo precisam existir. Isto significa que o problema de Cauchy pode não ter solução ou ter mais de uma solução. Entretanto, fixados ϕ e ψ satisfazendo (2.40) e (2.41), a solução $u(x, y)$ existe e é única, isto é consequência do problema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias.

Teorema 3. *Se Γ for não característica e se existirem funções ϕ e ψ satisfazendo (2.40) e (2.41), então existe uma solução para o problema de Cauchy próximo de γ , a qual é única para cada escolha de ϕ e ψ .*

Exemplo 13.

$$\begin{cases} u_x^2 + u_y^2 = 1 \\ u|_{\Gamma} = 0, \end{cases} \quad (2.43)$$

onde Γ é o círculo de raio 1 no plano xy .

Resolução.

$$F(x, y, z, p, q) = p^2 + q^2 - 1 = 0.$$

As equações características são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= F_p(x, y, z, p, q) = 2p, \\ \frac{dy}{d\tau} &= F_q(x, y, z, p, q) = 2q, \\ \frac{dz}{d\tau} &= pF_p(x, y, z, p, q) + qF_q(x, y, z, p, q) = 2p^2 + 2q^2 \\ \frac{dp}{d\tau} &= -F_x - pF_z = 0 \\ \frac{dq}{d\tau} &= -F_y - qF_z = 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Uma parametrização para Γ é $x = f(s) = \cos s$ e $y = g(s) = \sin s$, nela prescrevemos o dado inicial $h(s) = 0$. Portanto,

$$x(0) = \cos s, \quad y(0) = \sin s, \quad z(0) = 0.$$

Para prescrevermos o dado inicial para p e q devemos encontrar funções ψ_1 e ψ_2 , tais que

$$F(f(s), g(s), h(s), \psi_1(s), \psi_2(s)) = 0 \quad e \quad h'(s) = \psi_1(s)f'(s) + \psi_2(s)g'(s)$$

o que equivale a

$$\psi_1^2(s) + \psi_2^2(s) = 1 \quad e \quad -\psi_1(s) \sin s + \psi_2(s) \cos s = 0,$$

temos duas soluções possíveis:

$$(i) \quad \psi_1(s) = \cos s \quad e \quad \psi_2(s) = \sin s$$

ou

$$(ii) \quad \psi_1(s) = -\cos s \quad e \quad \psi_2(s) = -\sin s.$$

No caso (i) encontramos

$$x = (2\tau + 1) \cos s, \quad y = (2\tau + 1) \sin s, \quad z = 2\tau, \quad p = \cos s, \quad q = \sin s,$$

portanto

$$x^2 + y^2 = (2s + 1)^2 = (z + 1)^2.$$

Portanto a equação acima nos dá implicitamente a solução $u(x, y) = z(s(x, y), \tau(x, y))$:

$$(u + 1)^2 = x^2 + y^2,$$

o que implica que

$$u = -1 \pm \sqrt{x^2 + y^2},$$

mas a função $-1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ não satisfaz a condição de contorno, seu valor no círculo unitário é -2 . O que nos leva a solução

$$u(x, y) = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Se escolhermos a alternativa (ii), encontraremos

$$x = (-2\tau + 1) \cos s, \quad y = (-2\tau + 1) \sin s, \quad z = 2\tau, \quad p = -\cos s, \quad q = -\sin s,$$

portanto

$$x^2 + y^2 = (-2s + 1)^2 = (-z + 1)^2.$$

Portanto a equação acima nos dá implicitamente a solução $u(x, y) = z(r(x, y), s(x, y))$:

$$(-u + 1)^2 = x^2 + y^2,$$

o que implica que

$$u = 1 \pm \sqrt{x^2 + y^2},$$

mas a função $1 + \sqrt{x^2 + y^2}$ não satisfaz a condição de contorno, seu valor no círculo unitário é -2 . O que nos leva a solução

$$u(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

□

Exemplo 14. *Resolva o problema de Cauchy*

$$u_x u_y = u, \quad u(0, y) = y^2.$$

Resolução. Note que $F(x, y, z, p, q) = pq - z = 0$ e γ é parametrizada como $(0, s, s^2)$. Primeiro temos que completar γ a uma faixa $(0, s, s^2, \phi(s), \psi(s))$. De (2.40) e (2.41), ϕ e ψ devem satisfazer

$$\phi(s)\psi(s) - s^2 = 0, \quad 2s = \phi(s)0 + \psi(s)1,$$

ou seja,

$$\phi(s) = s/2 \quad e \quad \psi(s) = 2s.$$

Portanto as equações características são

$$\frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dy}{dt} = q, \quad \frac{dz}{dt} = 2pq = 2z, \quad \frac{dp}{dt} = p, \quad \frac{dq}{dt} = q.$$

Da terceira equação temos $z = C(s)e^{2t}$ e da condição inicial, encontramos $z = s^2 e^{2t}$. De maneira análoga, resolvemos as duas últimas equações e encontramos $p = s^{t/2}$, $q = 2s^t$. As duas primeiras características podem ser escritas como $\frac{dx}{dt} = 2se^t$ e $\frac{dy}{dt} = s^{t/2}$. Integrando-as e usando as condições iniciais, encontramos $x = 2se^t$ e $y = s(e^t + 1)/2$. Finalmente, para obtermos $u(x, y)$, observe que

$$x/2 + 2y = 2se^{2t}$$

portanto,

$$(x/4 + y)^2 = s^2 e^{2t} = z,$$

$$u(x, y) = (x/4 + y)^2.$$

□

Exercício 7. *Considere a equação*

$$u_x^2 + u_y^2 = u^2.$$

(a) *Encontre as faixas características.*

(b) *Encontre as superfícies integrais passando por pelo círculo $x = \cos s$, $y = \sin s$, $z = 1$.*

(Resposta: $z = e^{\pm(1-\sqrt{x^2+y^2})}$).

(c) *Encontre as superfícies integrais passando pelas retas $x = s$, $y = 0$, $z = 1$. (Resposta: $u = e^{\pm y}$).*

Exercício 8. *Encontre a solução de*

$$u_y = u_x^3$$

com $u(x, 0) = 2x^{3/2}$. (Resposta: $u = 2x^{3/2}(1 - 27y)^{-1/2}$).

Exercício 9. Encontre a solução de

$$u = xu_x + yu_y + (u_x^2 + u_y^2)/2$$

com $u(x, 0) = (1 - x^2)/2$.

Exercício 10. Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{1}{2}u_x^2 - u_y = -\frac{x^2}{2}, \quad u(x, 0) = x.$$

(Resposta: $u(x, y) = x \cos y + \frac{\sin(2y)}{4} + \frac{(x + \sin y)^2 \sin y}{2 \cos y}$).

2.3.2 Equação de primeira ordem geral com n variáveis independentes

A seguir consideraremos uma equação de primeira ordem geral com n variáveis independentes, a qual é da seguinte forma

$$F(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) = 0, \quad (2.45)$$

onde $p_i = u_{x_i}$ e $z = u$. O problema de Cauchy consiste em encontrar uma superfície integral no espaço $x_1 \dots x_n z$ passando por uma variedade $n - 1$ -dimensional γ , dada parametricamente por

$$z = h(s_1, \dots, s_{n-1}), \quad x_i = f_i(s_1, \dots, s_{n-1}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Isto é feito passando por cada ponto P de γ a faixa característica a γ em P . Primeiro completamos γ numa faixa encontrando funções $p_i = \phi(s_1, \dots, s_{n-1})$ para as quais

$$\frac{\partial h}{\partial s_i} = \sum_{k=1}^n \phi_k \frac{\partial f_k}{\partial s_i}, \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad (2.46)$$

$$F(f_1, \dots, f_n, h, \phi_1, \dots, \phi_n) = 0. \quad (2.47)$$

Uma faixa característica é um conjunto de "elementos" $(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n)$ dependendo do parâmetro t que satisfaz (2.45), as equações (2.46) e (2.47) o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx_i}{dt} = F_{p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -F_{x_i} - F_z p_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.48)$$

e

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i}. \quad (2.49)$$

Para assegurarmos existência devemos ter

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial s_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial s_{n-1}} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial s_{n-1}} \\ F_{p_i} & & F_{p_n} \end{pmatrix} \neq 0 \quad (2.50)$$

em cada ponto de γ .

2.3.3 As equações de Hamilton-Jacobi

Uma equação de primeira ordem geral com $n + 1$ variáveis independentes ($n \geq 1$) é forma

$$F(x_1, \dots, x_{n+1}, z, p_1, \dots, p_{n+1}) = 0, \quad (2.51)$$

um caso particular é quando

$$F \equiv p_{n+1} + H(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, p_1, \dots, p_n) = 0, \quad (2.52)$$

ou seja, F é linear em p_{n+1} e não depende explicitamente de z . A equação acima chamada de equação de **Hamilton-Jacobi**, a função $H(x, t, p)$ é chamada de **função de Hamilton**. Fazendo $t = x_{n+1}$, a equação parcial (2.52) pode ser escrita como

$$u_t + H(x, t, \nabla_x u) = 0. \quad (2.53)$$

As suas $2n$ equações características são

$$\frac{dx}{dt} = \nabla_p H(x, t, p) \quad (2.54)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\nabla_x H(x, t, p), \quad (2.55)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $p = (p_1, \dots, p_n)$. O sistema (2.54) e (2.55) é chamado de **sistema canônico de H** . Uma vez encontradas $x(t)$ e $p(t)$ acima, encontramos p_{n+1} e z a partir das equações características

$$\frac{dp_{n+1}}{dt} = H_t \quad (2.56)$$

$$\frac{dz}{dt} = p \cdot \nabla_p H - H. \quad (2.57)$$

Mostra-se que a equação de primeira ordem geral (2.45) pode ser transformada numa equação de Hamilton-Jacobi (2.52), o que torna o estudo de tal equação muito importante.

Capítulo 3

Soluções fracas de equações de leis de conservação

3.1 A necessidade de soluções descontínuas

Até então havíamos feito a hipótese da existência de uma solução suave de uma *EDP*; todavia, em muitas aplicações físicas soluções fracas (descontínuas) aparecem naturalmente, por isso é importante que generalizemos o conceito de solução, permitindo tais soluções. Esta seção deve ser vista mais como uma motivação para definirmos solução fraca, a sua definição formal só será dada na próxima seção.

Por definição uma solução de uma *EDP* tem que ser suave, ou seja, no caso de *EDP*'s de primeira ordem, as suas derivadas parciais de primeira ordem têm que ser contínuas. Portanto faz sentido calcularmos suas derivadas e substituí-las na *EDP* e verificar se, de fato, temos uma solução. Estas soluções são chamadas de **soluções clássicas**. Agora iremos generalizar o conceito de solução permitiremos que exista uma curva no espaço tempo ao longo da qual a superfície solução passa por um salto. Se existe uma descontinuidade na superfície solução no espaço tempo, deve existir uma maneira de verificarmos a solução ao longo desta curva de descontinuidade sem ter que calcular derivadas, uma vez que estas não existem. Nesta seção desenvolveremos este critério.

Exemplo 15. *Considere a equação de transporte linear*

$$u_t + cu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, c > 0,$$

sujeito à condição inicial

$$u(x, 0) = u_o(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

As características projetadas desta equação não dependem da condição inicial, são as retas $x - ct = \text{constante}$. O dado inicial se propaga ao longo destas retas, portanto a solução é $u(x, t) = u_o(x - ct)$. Em particular, como o dado inicial é descontínuo em $x = 0$, esta descontinuidade se propagará ao longo da reta $x = ct$.

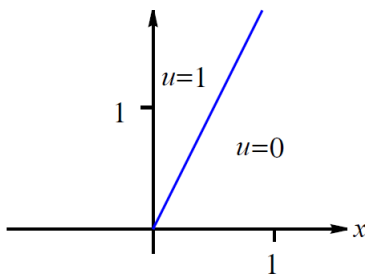


Figura 3.1: A solução do problema do Exemplo 15, com $c = 1/2$.

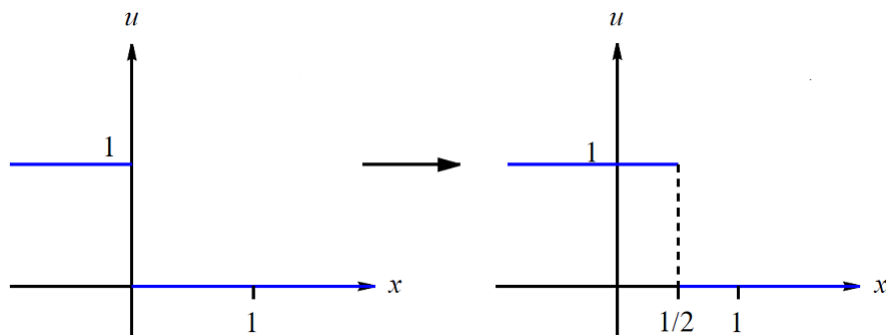


Figura 3.2: A solução do problema do Exemplo 15, com $c = 1/2$, nos instantes $t = 0$ e $t = 1$.

Exemplo 16. Considere a equação de Burger

$$u_t + uu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

com condição inicial

$$u(x, 0) = u_o(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

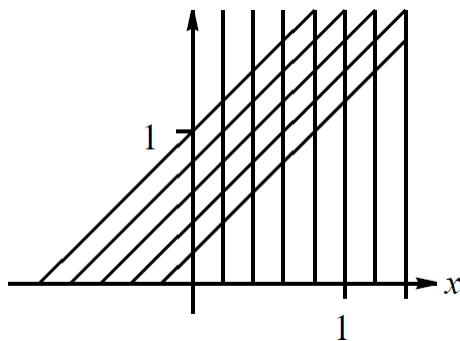


Figura 3.3: As características do problema de valor inicial do Exemplo 16.

Ao contrário do problema anterior, as curvas características da equação de Burger dependem da condição inicial, são retas passando por $(s, 0)$ com velocidade $u_o(s)$, veja Figura 3.3. Elas se colidem para $t > 0$ e como u é constante ao longo das características, temos um impasse. Um maneira de evitar tal impasse é introduzir retas $x = mt$, onde $m > 0$, ao longo

das quais a descontinuidade em $x = 0$ e transportada. Defina

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } x > mt \\ 1, & \text{se } x < mt. \end{cases} \quad (3.2)$$

então u satisfaz às condições iniciais e em cada lado da reta $x = mt$ temos uma solução clássica. A questão é como escolher m ? Devemos abrir mãos da unidade da solução neste problema? Existe outro tipo de solução que não consideramos?

Nas respostas destas perguntas estão os pilares da noção de soluções descontínuas de uma *EDP*. Como descontinuidades nas derivadas se propagam ao longo das características, então as descontinuidades na própria função devem se propagar ao longo de alguma curva especial no espaço tempo. Tais curvas são chamadas de **trajetórias de choque**. O que ditará esta trajetória de choque é a lei de conservação (a conservação deve acontecer até mesmo sobre a descontinuidade) na forma integral associada à *EDP*. A lei de conservação implicará numa condição de salto que permitirá que uma trajetória de choque se ajuste à solução sobre a descontinuidade. Das soluções dadas em (3.2), somente aquela com $m = 1/2$ satisfará a condição de choque.

3.2 Condição de salto

Considere a lei de conservação na forma integral

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = \Phi(a, t) - \Phi(b, t), \quad (3.3)$$

onde u é uma densidade e Φ é o fluxo associado, o qual pode depender de x , t e u . Por exemplo, se $u(x, t)$ for a densidade de massa, temos uma lei de conservação de massa, a qual nos diz que em cada instante a taxa de variação da massa no intervalo $[a, b]$ é igual ao fluxo de massa $\Phi(a, t)$ que está entrando em $[a, b]$ menos o fluxo de massa $\Phi(b, t)$ que está saindo de $[a, b]$.

Vimos que se u e Φ forem de classe C^1 , então 3.4 é equivalente a

$$u_t + \Phi_x = 0, \quad (3.4)$$

que é a forma diferencial da lei de conservação (3.4). Ou seja, (3.3) e (3.4) são equivalentes para u de classe C^1 . No entanto, (3.4) vale para funções mais gerais, não precisam ser C^1 , na verdade nem precisam ser contínuas.

Se em (3.4) fizermos $\Phi = u^2/2$, teremos a equação de Burger, ou seja, esta equação está associada a uma lei de conservação.

Assumiremos que a trajetória de choque seja dada por uma curva suave $x = s(t)$, ao longo da qual u tenha uma descontinuidade tipo salto e em cada lado da mesma u seja de classe C^1 , veja Figura 3.4. Mesmo que u e Φ tenham uma descontinuidade tipo salto, insistiremos que (3.4) seja válida e usaremos este fato para encontrarmos $x = s(t)$.

Sejam

$$u(s^-, t) = \lim_{x \rightarrow s(t)^-} u(x, t) \quad e \quad u(s^+, t) = \lim_{x \rightarrow s(t)^+} u(x, t).$$

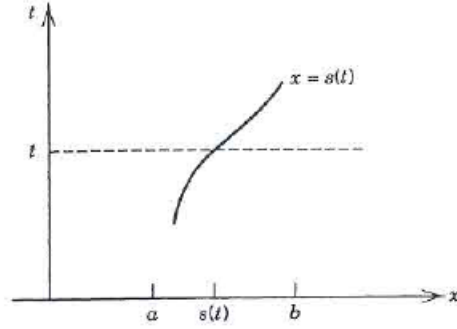


Figura 3.4: A trajetória de choque $x = s(t)$, ao longo da qual a descontinuidade se propaga.

Para explorar que u é de classe C^1 em cada lado de $x = s(t)$, reescrevemos a equação (3.4) como

$$\frac{d}{dt} \int_a^{s(t)} u(x, t) dx + \frac{d}{dt} \int_{s(t)}^b u(x, t) dx = \Phi(a, t) - \Phi(b, t). \quad (3.5)$$

Usando a regra de Leibniz para derivação sob o sinal da integral, temos

$$\int_a^{s(t)} u_t(x, t) dx + \int_{s(t)}^b u_t(x, t) dx + u(s^-, t) s' - u(s^+, t) s' = \Phi(a, t) - \Phi(b, t). \quad (3.6)$$

Tomando o limite quando a tende para $s(t)^-$ e b tende para $s(t)^+$, as duas integrais acima vão para zero, pois os integrandos são limitados e os comprimentos dos intervalos tendem a zero. Com isso obtemos a seguinte condição de salto, também chamada de **condição de Rankine-Hugoniot**:

$$s'[u] = [\Phi(u)], \quad (3.7)$$

onde [...] é o salto da quantidade que está dentro do colchete ao longo da descontinuidade, ou seja, é a diferença entre valores da quantidade quando nos aproximamos de $x = s(t)$ dos lados direito e esquerdo, respectivamente.

A quantidade $s'(t)$ é a velocidade do choque, ou seja, a velocidade com que a descontinuidade se propaga, portanto determina a posição do choque (descontinuidade) em cada instante.

No Exemplo 16 a solução tem uma descontinuidade tipo salto ao longo da reta $x = mt$. Embora esta função não esteja definida sobre a curva $x = mt$, ela é C^1 em cada lado desta curva. Para a equação de Burger, temos $\Phi(u) = u^2/2$, fazendo $u^+ = 0$ e $u^- = 1$ em (3.7), devemos ter

$$s'(t) = \frac{\Phi(u^+) - \Phi(u^-)}{u^+ - u^-} = \frac{u^+ + u^-}{2} = \frac{1}{2},$$

e concluímos que devemos ter $m = 1/2$, para que $u(x, t)$ satisfaça a condição de choque e, portanto, ser fisicamente apropriada. Logo

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & x < t/2 \\ 0, & x > t/2 \end{cases} \quad (3.8)$$

satisfaz a condição de choque, portanto é (a única) solução fraca (descontínua) do problema de valor inicial do exemplo (16), veja Figura 3.5.

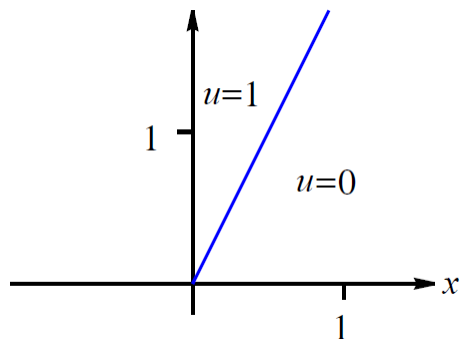


Figura 3.5: A solução do problema de valor inicial do Exemplo 16, satisfazendo a condição de choque.

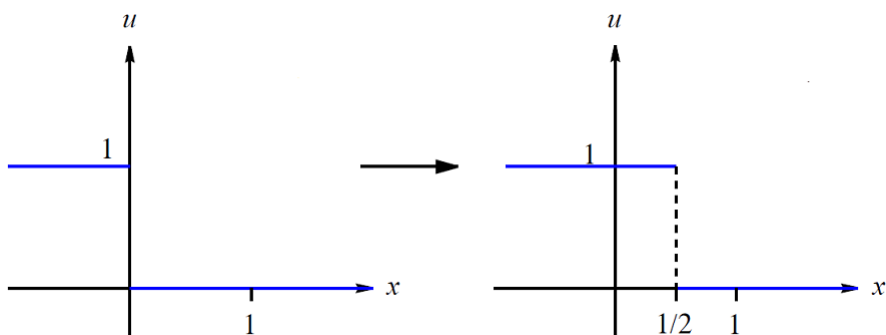


Figura 3.6: Mostramos a solução (3.8) nos instantes $t = 0$ e $t = 1$. Note que o choque (a linha vertical) se move com velocidade $1/2$.

Exemplo 17. Considere a equação de Burger com a seguinte condição inicial

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1 - x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases} \quad (3.9)$$

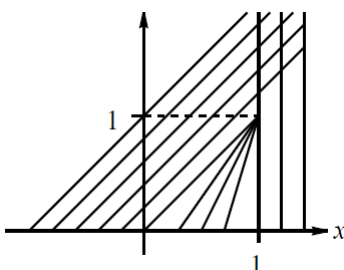


Figura 3.7: As curvas características projetadas dadas por (3.10).

As curvas características projetadas (veja Figura 3.7) são dadas por $x = h(s)y + s$, onde h é dada por (3.9), portanto elas são dadas por

$$x = \begin{cases} y + s, & s < 0 \\ (1 - s)y + s, & 0 < s < 1 \\ s, & s > 1. \end{cases} \quad (3.10)$$

Então para $y \leq 1$, temos

$$u(x, y) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \frac{1-x}{1-y}, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases} \quad (3.11)$$

Note entretanto que as curvas se intersectam em $y = 1$. Além daquele tempo y , as diferentes características projetadas estão pedindo para satisfazer condições diferentes, o que não pode acontecer. Não temos mais solução clássica. Como definir u para $y \geq 1$, de forma a satisfazer a condição de choque (3.7)? O dado inicial para $x < 1$ quer $u = 1$, enquanto que o dado inicial para $x > 1$ quer $u = 0$, para $y \geq 1$. Tentaremos fazer um compromisso definindo uma curva $x = \xi(y)$, tal que $u = 1$ à sua esquerda e $u = 0$ à sua direita. Em outras palavras, $u^- = 1$ e $u^+ = 0$. Da condição de choque, devemos ter $\xi'(y) = 1/2$, além disso queremos que $(1, 1)$ pertença a mesma, logo,

$$x = \frac{y + 1}{2}.$$

Portanto, para $y \geq 1$, faremos

$$u(x, y) = \begin{cases} 1, & x < \frac{y+1}{2} \\ 0, & x > \frac{y+1}{2}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Com isso u acima é uma solução clássica da equação de Burger em cada lado da curva $x = (y + 1)/2$ e satisfaz a condição de choque ao longo da curva de descontinuidade.

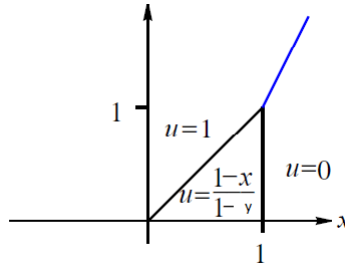


Figura 3.8: A solução fraca da equação de Burger com condição inicial (3.9).

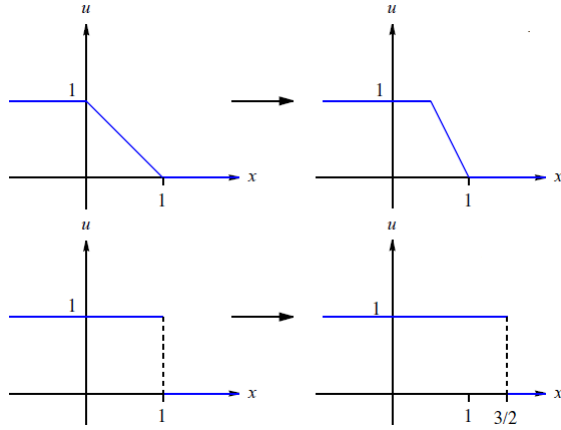


Figura 3.9: Mostramos a solução u nos instantes $y = 0$, $y = 1/2$, $y = 1$ e $y = 2$.

Exemplo 18. Considere a equação de Burger com o seguinte dado inicial

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

As curvas características projetadas da equação de Burger com dado inicial acima, veja Figura 3.10, são dada por

$$x = \begin{cases} s, & s < 0 \\ y + s, & s > 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

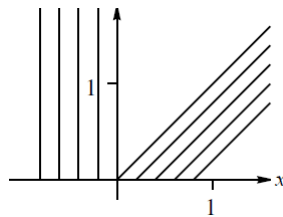


Figura 3.10: As curvas características da equação de Burger com dado inicial (3.13).

Embora estas características não se intersectem, ainda temos um problema. Temos uma região (**de rarefação**) na qual não temos informações suficientes (não temos características projetadas passando pela mesma). Como definir a solução na mesma? Veremos que é possível encontrarmos (infinitas) soluções que satisfazem às condições de choque. De fato, note que

$$u_1(x, y) = \begin{cases} 0, & x < y/2 \\ 1, & x > y/2 \end{cases} \quad (3.15)$$

é uma solução clássica em cada lado da curva $x = y/2$ e satisfaz a condição de choque, veja Figura 3.11.

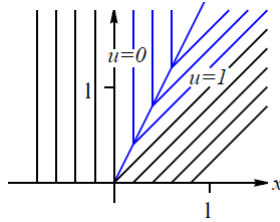


Figura 3.11: $u_1(x, y)$.

Outra possível solução é

$$u_2(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x/y, & 0 < x < y \\ 1, & x \geq y, \end{cases} \quad (3.16)$$

que é uma solução contínua (portanto não existe choque) do problema acima. Este tipo de solução parecida com um leque na região $0 < x < y$ é chamada de **onda de rarefação**, veja 3.12.

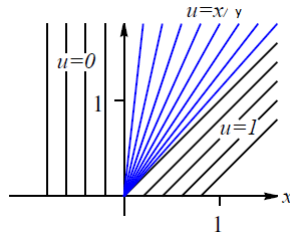


Figura 3.12: $u_2(x, y)$ a onda de rarefação.

Na verdade, podemos construir uma família a um parâmetro γ , de soluções descontínuas, satisfazendo a condição de choque. De fato, para cada $\gamma \in [0, 1)$, defina

$$u_\gamma(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ x/y, & \text{se } 0 \leq x \leq \gamma y \\ \gamma, & \text{se } \gamma y \leq x \leq \frac{\gamma+1}{2}y, \\ 1, & \text{se } x > \frac{\gamma+1}{2}y. \end{cases} \quad (3.17)$$

é fácil mostrar que tais soluções satisfazem a condição de choque (3.7). Portanto, encontramos infinitas soluções diferentes satisfazendo a condição de choque. Como tais soluções aparecem de problemas vindo da física, deve existir algum mecanismo que nos permita pegar a solução que seja fisicamente relevante. Se uma solução for mais realista fisicamente, gostaríamos de considerá-la nossa solução “real”.

Na seção seguinte formalizaremos o conceito de solução fraca e teremos uma condição adicional, chamada de **condição de entropia**, que nos permitirá selecionar uma única dentre as soluções fracas obtidas acima.

Exercício 11. *Encontre a solução da equação de Burger*

$$u_t + uu_x = 0, \quad t > 0$$

com dado inicial

$$u(x, 0) = h(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < -1 \\ 0, & \text{se } -1 < x < 1 \\ -1, & \text{se } x > 1. \end{cases} \quad (3.18)$$

Resposta: Para $t < 2$,

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < t/2 - 1 \\ 0, & \text{se } t/2 - 1 < x < -t/2 + 1 \\ -1, & \text{se } x > -t/2 + 1. \end{cases} \quad (3.19)$$

se $t > 2$,

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0 \\ -1, & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Exercício 12. Mostre que a função $u(x, y)$ definida para $y \geq 0$ por

$$u = -\frac{2}{3}(y + \sqrt{3x + y^2}), \quad \text{para } 4x + y^2 > 0, \quad u = 0, \quad \text{para } 4x + y^2 < 0$$

é uma solução fraca da equação de Burger.

3.3 Definição formal de solução fraca

Até então para nós uma solução descontínua de uma *EDP* era uma função u de classe C^1 da *EDP* em cada lado da trajetória de choque, a qual tinha um salto sobre a mesma, satisfazendo a relação de choque (3.7). Nesta seção formalizaremos o conceito de solução descontínua.

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + [f(u)]_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_o(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.21)$$

onde f é de classe C^1 em \mathbb{R} .

Seja $C_o^1(\mathbb{R})$ o conjunto das funções $\phi(x, t)$ de classe C^1 em \mathbb{R}^2 que se anulam fora de um conjunto compacto. Dizemos que o suporte de ϕ , denotado por $\text{supp } \phi$, é

$$\text{supp } \phi = \overline{\{(x, t) : \phi(x, t) \neq 0\}}.$$

Suponha que

$$\text{supp } \phi \cap \{t \geq 0\} \subset D,$$

onde $D = [a, b] \times [0, T]$, veja Figura 3.13.

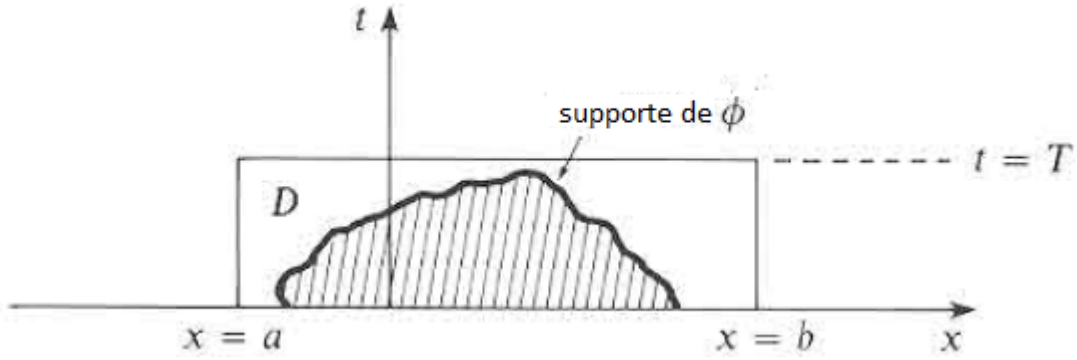


Figura 3.13

Seja $u = u(x, t) \in C^1$ uma solução clássica de (3.21). Então multiplicando a EDP que aparece em (3.21) por ϕ e integrando sobre o semiplano $\{t \geq 0\}$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int \int_{t>0} (u_t + [f(u)]_x) \phi \, dx dt \\
&= \int \int_D (u_t + [f(u)]_x) \phi \, dx dt \\
&= \int \int_D ((f\phi)_x + (u\phi)_t - f\phi_x - u\phi_t) \, dx dt \\
&= \int \int_D ((f\phi)_x + (u\phi)_t) \, dx dt - \int \int_D (f\phi_x + u\phi_t) \, dx dt \\
&= \int \int_D ((f\phi)_x - (-u\phi)_t) \, dx dt - \int \int_D (f\phi_x + u\phi_t) \, dx dt \\
&= \oint_{\partial D} -(u\phi) dx + (f\phi) dt - \int \int_D (f\phi_x + u\phi_t) \, dx dt \quad (\text{usamos o Teorema de Green}) \\
&= - \int_a^b u(x, 0) \phi(x, 0) dx - \int \int_D (f\phi_x + u\phi_t) \, dx dt \\
&\quad (\phi = 0 \text{ sobre as retas } x = a, x = b \text{ e } t = T, dt = 0 \text{ no eixo dos } x) \\
&= - \int_a^b u_o(x) \phi(x, 0) dx - \int \int_D (f\phi_x + u\phi_t) \, dx dt.
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\int \int_{t \geq 0} (f(u)\phi_x + u\phi_t) \, dx dt + \int_{t=0} u_o \phi dx = 0. \quad (3.22)$$

Mostramos que se u for uma solução clássica de (3.21), então para qualquer $\phi \in C_o^1$, vale (3.22). Por outro lado, a equação (3.22) faz sentido mesmo que u e u_o sejam apenas limitadas e mensuráveis, o que nos leva a seguinte definição de solução de (3.21).

Definição 1. Uma função limitada e mensurável $u(x, t)$ é chamada de **solução fraca** do problema de valor inicial (3.21) com dado inicial limitado e mensurável u_o , se (3.22) for válida para toda $\phi \in C_o^1$.

O conceito de solução dado na Definição 1 é uma generalização da noção de solução clássica. Ou seja, mostra-se que se (3.22) acontece para toda $\phi \in C_o^1$ e se u for de classe C^1 , então u é uma solução clássica de (3.21).

Mostraremos que nem toda descontinuidade é permitida, a condição (3.22) impõe uma restrição sobre as curvas de descontinuidades, em outras palavras, vale a condição de choque (3.7), como veremos a seguir. Suponha que Γ seja uma curva suave ao longo da qual u tem um descontinuidade de salto, ou seja, u tem limite bem definido em ambos os lados de Γ e é suave fora de Γ . Seja P um ponto sobre Γ e seja D uma bola centrada em P pequena o suficiente para que ela esteja na região $t > 0$. Suponha que em D a curva Γ seja dada por $x = x(t)$. Sejam D_1 e D_2 as componentes de D que são determinadas por Γ , veja Figura 3.14.

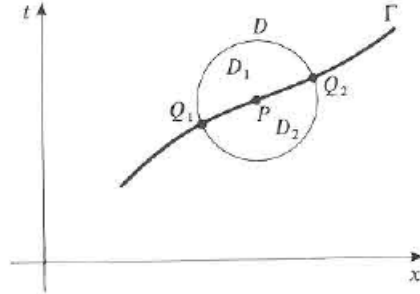


Figura 3.14

Seja $\phi \in C_o^1(D)$. De (3.22), como ϕ se anula em $t = 0$, temos

$$0 = \int \int_D (u\phi_t + f\phi_x) dxdt = \int \int_{D_1} (u\phi_t + f\phi_x) dxdt + \int \int_{D_2} (u\phi_t + f\phi_x) dxdt,$$

desdobramos a integral sobre D nas integrais sobre D_1 e D_2 , para explorarmos que u é suave em cada um dos conjuntos D_1 e D_2 . Seja $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t})$, como em D_i u é uma solução clássica, então $\nabla \cdot (f, u) = 0$, logo

$$(f, u) \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot ((f, y)\phi) - \nabla \cdot (f, u) \phi = \nabla \cdot ((f, y)\phi) = (f\phi)_x - (-u\phi)_t,$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} \int \int_{D_1} (u\phi_t + f\phi_x) dxdt &= \int \int_{D_i} (f, u) \cdot \nabla \phi dxdt \\ &= \int \int_{D_i} \nabla \cdot ((f, y)\phi) dxdt \\ &= \int \int_{D_i} ((f\phi)_x - (-u\phi)_t) dxdt \\ &= \oint_{\partial D_i} -(u\phi) dx + (f\phi) dt, \quad (\text{usamos o Teorema de Green}) \end{aligned}$$

como $\phi = 0$ em ∂D , fazendo $u_l = u(x(t) - 0, t)$ e $u_r = u(x(t) + 0, t)$, então

$$\int \int_{D_1} (u\phi_t + f\phi_x) dxdt = \int_{Q_1}^{Q_2} -(u_l\phi) dx + (f(u_l)\phi) dt$$

e

$$\int \int_{D_2} (u\phi_t + f\phi_x) dx dt = - \int_{Q_1}^{Q_2} -(u_r\phi) dx + \phi(f(u_r) - f(u_l)) dt$$

somando-se as duas expressões acima e fazendo $[u] = u_r - u_l$ e $[f(u)] = f(u_r) - f(u_l)$, temos

$$0 = \int_{Q_1}^{Q_2} \phi[-u] dx + [f(u)]\phi dt = \int_{\alpha}^{\beta} ([f(u)] - [u]s'(t)) \phi(s(t), t) dt$$

usamos o próprio t como parâmetro de Γ e assumimos que $t \in (\alpha, \beta)$. Tendo em vista a arbitrariedade de ϕ , concluímos que

$$[f(u)] - [u]s'(t) = 0.$$

De fato, se para algum $t_o \in (\alpha, \beta)$ tivéssemos $[f(u)] - [u]s'(t_o) \neq 0$, digamos

$$[f(u)] - [u]s'(t_o) = m > 0,$$

como $[f(u)] - [u]s'(t)$ é contínua, então existiria um $\delta > 0$, tal que $[f(u)] - [u]s'(t) > m/2$, para todo $t \in (t_o - \delta, t_o + \delta)$. Seja $P_o = (x(t_o), t_o)$, tome $R > 0$ suficientemente pequeno, tal que a bola D_R centrada em P_o de raio R esteja contida em D e a sua interseção com Γ esteja contida em $\{(x(t), t) : t \in (t_o - \delta, t_o + \delta)\}$. Tome $\phi \in C_o^1(D_R)$, tal que $\phi = 1$ em $D_{R/2}$, onde $D_{R/2}$ é a bola centrada em P_o de raio $R/2$. Então

$$\int_{\alpha}^{\beta} ([f(u)] - [u]s'(t)) \phi(s(t), t) dt = \int_{t_o - \delta}^{t_o + \delta} ([f(u)] - [u]s'(t)) dt > (m\delta)/2 > 0,$$

uma contradição.

Exemplo 19. Considere o problema de valor inicial (3.21) com condição inicial

$$u_o(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

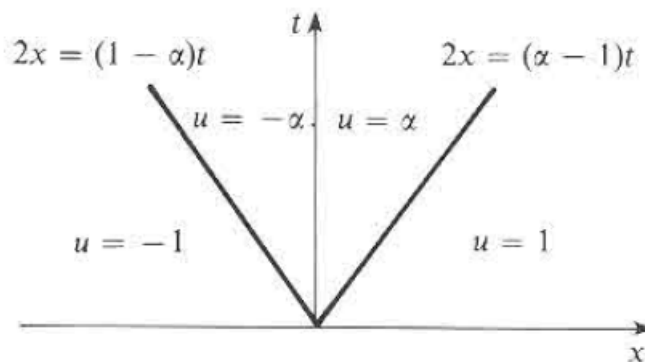


Figura 3.15

Para cada $\alpha > 1$, o problema acima tem uma solução fraca u_α , definida por (veja Figura 3.15)

$$u_\alpha(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } 2x < (1 - \alpha)t, \\ -\alpha, & \text{se } (1 - \alpha)t < 2x < 0 \\ \alpha, & \text{se } 0 < 2x < (\alpha - 1)t \\ +1, & \text{se } (\alpha - 1)t < 2x. \end{cases}$$

Este é outro exemplo que mostra que as soluções fracas não são únicas e se quisermos unicidade devemos impor alguma condição adicional. Como a equação de Burger vem de uma lei de conservação, deve existir algum mecanismo para pegarmos a solução fisicamente relevante, portanto devemos impor uma condição a priori nas soluções que nos permita distinguir a correta das outras.

Definição 2. Dizemos que uma solução fraca satisfaz a **condição de entropia** se

$$\frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} \leq \frac{E}{t}, \quad a > 0, t > 0, \quad (3.23)$$

onde E é independente de x, t e a .

A condição de entropia nos diz que se fixarmos um $t > 0$ e permitimos x variar de $-\infty$ a $+\infty$, só podemos saltar para baixo ao passarmos pela descontinuidade, ou seja, $u_r < u_l$. Dentre as soluções u_α do exemplo 19, a única que satisfaz a condição de entropia é aquela com $\alpha = 1$, pois devemos ter $u_r < u_l$.

A seguir enunciaremos os teorema de existência e de unicidade de soluções fracas satisfazendo a condição de entropia, as demonstrações estão fora do objetivo deste curso, mas o leitor interessado pode encontrá-las no livro do Smoller, veja [4].

Teorema 4. (Existência de soluções fracas) Seja $u_o \in L_\infty(\mathbb{R})$ e $f \in C^2(\mathbb{R})$ com $f'' > 0$ em $\{u : |u| \leq \|u_o\|_\infty\}$. Então existe uma solução u de (3.21) com as seguintes propriedades:

(a) $|u(x, t)| \leq \|u_o\|_\infty \equiv M, (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

(b) Existe uma constante $E > 0$ dependendo somente de M ,

$$\mu = \min\{f''(u) : |u| \leq \|u_o\|_\infty\} \quad e \quad A = \max\{|f'(u)| : |u| \leq \|u_o\|_\infty\},$$

tal que para todo $a > 0, t > 0$ e $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} \leq \frac{E}{t}, \quad a > 0, t > 0.$$

(c) u é estável e depende continuamente de u_o no seguinte sentido: se $v_o \in L_\infty(\mathbb{R})$ com $\|v_o\|_\infty \leq \|u_o\|_\infty$ e v é a solução de (3.21) correspondente a v_o , então para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_1 < x_2$ e todo $t > 0$,

$$\int_{x_1}^{x_2} |u(x, t) - v(x, t)| dx \leq \int_{x_1 - At}^{x_2 + At} |u_o(x) - v_o(x)| dx.$$

Teorema 5. (Unicidade de soluções fracas) *Seja $f \in C^2$, $f'' > 0$ e sejam u e v duas soluções fracas satisfazendo a condição (3.23). Então $u = v$ em quase todos os pontos, em $t > 0$.*

Se $f'' > 0$, da condição de entropia, devemos ter $u_r < u_l$, portanto da condição de choque e do Teorema do Valor Médio, temos

$$s = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} = f'(\xi),$$

onde $u_r < \xi < u_l$, logo se $f'' > 0$, detemos

$$f'(u_r) < f'(\xi) < f'(u_l),$$

portanto

$$f'(u_r) < s < f'(u_l),$$

chamada de **desigualdade de entropia**.

Capítulo 4

Equações de Segunda ordem para funções de duas variáveis

4.1 Características para equações lineares e quasi-lineares de segunda ordem

Uma equação quasi-linear de segunda ordem mais geral é da forma

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d \quad (4.1)$$

onde a, b, c, d dependem de x, y, u, u_x, u_y . Aqui o problema de Cauchy consiste em encontrar uma solução u de (4.1) com valores (compatíveis) dados de u, u_x, u_y sobre uma curva γ no plano xy . Seja

$$x = f(s), \quad y = g(s) \quad (4.2)$$

uma parametrização de γ . Prescrevemos os dados de Cauchy sobre γ

$$u(f(s), g(s)) = h(s), \quad u_x(f(s), g(s)) = \phi(s), \quad u_y(f(s), g(s)) = \psi(s). \quad (4.3)$$

Note que ao longo de γ , os valores de uma função $v(x, y)$ e as suas derivadas v_x e v_y estão relacionados

$$\frac{dv(f(s), g(s))}{ds} = v_x(f(s), g(s))f'(s) + v_y(f(s), g(s))g'(s). \quad (4.4)$$

A fórmula acima aplicada a solução do problema de Cauchy implica na identidade entre os dados

$$h'(s) = \phi(s)f'(s) + \psi(s)g'(s). \quad (4.5)$$

Em particular, não podemos especificar mais de duas das funções h, ϕ, ψ arbitrariamente. Ao invés disso, em γ especificamos os valores de u e da derivada normal de u ($\nabla u \cdot \vec{n} = (u_x, u_y) \cdot (-g', f')/\sqrt{f'^2 + g'^2}$):

$$u(f(s), g(s)) = h(s), \quad \frac{-u_x(f(s), g(s))g'(f(s), g(s)) + u_y(f(s), g(s))f'(s)}{\sqrt{f'(s)^2 + g'(s)^2}} = \chi(s), \quad (4.6)$$

com isso resolvemos o problema de compatibilidade de entre os dados u , u_x e u_y .

Condições de compatibilidades acontecem para derivadas parciais de ordem superior de qualquer função em γ , em particular, fazendo $v = u_x$ e $v = u_y$, respectivamente, de (4.5), temos

$$\frac{du_x}{ds} = u_{xx}f'(s) + u_{xy}g'(s), \quad \frac{du_y}{ds} = u_{xy}f'(s) + u_{yy}g'(s) \quad (4.7)$$

(para simplificar a notação omitidos os argumentos $(f(s), g(s))$ nas derivadas de u , teríamos condições de compatibilidade envolvendo derivadas de ordens superiores, mas que não nos interessam na presente apresentação, visto que a equação (4.1) é de segunda ordem). Nas relações (4.7) usamos apenas o fato que estamos calculado derivadas ao longo de γ , ou seja a Regra da Cadeia. Agora se u for solução de (4.1), teremos uma equação a mais na nossa condição de compatibilidade, ou seja, temos o seguinte sistema de equações

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d \quad (4.8a)$$

$$f'u_{xx} + g'u_{xy} = \phi' \quad (4.8b)$$

$$f'u_{xy} + g'u_{yy} = \psi'. \quad (4.8c)$$

Estas equações determinam de maneira única as derivadas u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} a menos que

$$\Delta = \begin{vmatrix} f' & g' & 0 \\ 0 & f' & g' \\ a & 2b & c \end{vmatrix} = ag'(s)^2 - 2bf'(s)g'(s) + cg'(s)^2 = 0. \quad (4.9)$$

Definição 3. Dizemos que a curva inicial γ é característica (em relação à equação diferencial e os dados) se $\Delta = 0$ ao longo de γ . Se $\Delta \neq 0$ ao longo de γ , dizemos que ela é não-característica.

Note que no diz respeito à equação diferencial (4.1) o status de uma curva ser (ou não) característica só depende dos coeficientes das derivadas de segunda ordem!

Ao longo de uma curva não-característica, os dados de Cauchy determinam de maneira única as derivadas de segunda ordem de u . Na verdade, podemos encontrar sucessivamente derivadas de ordens superiores de u ao longo de γ , desde que elas existam. Em particular, se num dado ponto (x_o, y_o) sobre γ todas as derivadas de u existirem, ao derivarmos sucessivamente a equação diferencial, encontraremos tais derivadas e com isso teremos uma série de potências formal para a solução do problema de Cauchy em termos de potências de $x - x_o$ e $y - y_o$:

$$\sum_{n_1, n_2 \geq 0} \frac{1}{n_1! n_2!} \frac{\partial^{n_1+n_2} u}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2}}(x_o, y_o) (x - x_o)^{n_1} (y - y_o)^{n_2}.$$

Exemplo 20.

No caso de uma curva inicial característica, as equações (4.8a,b,c) são inconsistentes, a menos que identidades adicionais sejam satisfeitas pelos dados iniciais. Consequentemente o problema de Cauchy com dados prescritos numa curva característica geralmente não tem solução (ou se existe, não é única).

Para uma curva característica, segue da condição (4.9) que

$$ady^2 - 2bdxdy + cdx^2 = 0, \quad (4.10)$$

que pode ser resolvida para dy/dx na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad (4.11)$$

que é uma equação diferencial ordinária para γ , desde que a, b, c sejam funções conhecidas de x, y . Este é o caso em que uma solução fixa $u(x, y)$ de (4.1) é considerada, ou no caso em que a equação é linear, pois os coeficientes a, b, c dependem apenas de x, y . O coeficiente d embora dependa de x, y, u, u_x, u_y , não aparece na definição de curva característica. Por exemplo, para a equação da onda em uma dimensão espacial, temos $u_{tt} - c^2u_{xx} = 0$, portanto as curvas características satisfazem às equações diferenciais ordinárias $\frac{dt}{dx} = \pm \frac{1}{c}$, ou seja, $\frac{dx}{dt} = \pm c$, portanto, $x \pm ct = k$, onde k é uma constante. No caso da equação de calor $u_t - u_{xx} = 0$, a equação característica é solução da equação $\frac{dt}{dx} = 0$, portanto, $t = k$.

Quando a curva é dada implicitamente por uma equação $\phi(x, y) = \text{constante}$, então tomando a diferencial de ϕ , obtemos $\phi_x dx + \phi_y dy = 0$, então ao longo de γ a equação (4.10) reduz-se a

$$a\phi_x^2 + 2b\phi_x\phi_y + c\phi_y^2 = 0. \quad (4.12)$$

No caso da equação da onda em uma dimensão espacial, as equações características são dadas por $\phi(x, y) = k$ e $\eta(x, y) = k$, onde $\phi(x, t) = x + ct$ e $\eta(x, t) = x - ct$.

4.2 Classificação de equações quasi-lineares de segunda ordem

Temos a seguinte classificação de uma equação diferencial dada por (4.1):

- (a) Elíptica se $ac - b^2 > 0$
- (b) Parabólica se $ac - b^2 = 0$
- (c) Hiperbólica se $ac - b^2 < 0$.

Se considerarmos o caso de variáveis reais, segue de (4.11) que no caso hiperbólico temos duas famílias de curvas características, uma no caso parabólico e nenhuma no caso elíptico. Portanto, a equação $u_{xx} + u_{yy} = 0$ é elíptica, a equação $u_{tt} - c^2u_{cc} = 0$ é hiperbólica e a equação $u_t - ku_{xx} = 0$ é parabólica.

4.3 Propagação de singularidades

As curvas características estão intimamente relacionadas com a propagação de certos tipos de singularidades. Vimos que o problema de Cauchy determina de maneira única os valores das derivadas segundas de u ao longo de uma curva não-característica. Uma maneira de definir uma solução generalizada de (4.1), não necessariamente de Classe C^2 , consiste em considerar soluções de classe C^1 com saltos nas derivadas segundas ao longo de γ . Mais precisamente, assumiremos que um certa região do plano seja dividida por uma curva γ em duas porções

I e II , nas quais existem duas soluções u^I e u^{II} de (4.1), de classe C^2 , nos fechos de I e II , respectivamente. Estas duas soluções definem uma solução u na união de I e II , com descontinuidades ao longo de γ . Tal função u não pode ser uma função generalizada de (4.1), a menos que (4.1) seja válida em algum sentido generalizado. Isto requer condições de transição ao longo de γ . Se quisermos que u seja de classe C^1 , então u^I e u^{II} e as suas derivadas parciais de primeira ordem devem coincidir sobre γ . Se as suas derivadas segundas também coincidirem, então u é uma solução clássica de (4.1). Como u^I e u^{II} têm os mesmos dados de Cauchy sobre γ , portanto, descontinuidades nas derivadas segundas de u só podem acontecer se γ for uma curva característica (se u^I e u^{II} e as suas derivadas parciais de primeira ordem são contínuas, então as derivadas de parciais de segunda ordens de u^I e u^{II} seriam iguais se γ não for característica, não havendo portanto um salto nas mesmas).

Na análise que se segue, assumiremos que a equação seja linear, ou seja,

$$0 = Lu = a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + 2d(x, y)u_x + 2e(x, y)u_y + f(x, y)u,$$

onde os coeficientes são regulares. Seja Ω um aberto de \mathbb{R}^2 , γ um arco em Ω de modo que $\Omega - \gamma$ consiste de dois conjuntos abertos e disjuntos I e II . Seja γ dada por $x = \phi(y)$ e suficientemente regular.

Definição 4. *Seja v uma função definida em Ω , dizemos que v tem uma descontinuidade de salto ao longo de γ se $v = v^I$ em I , $v = v^{II}$ em II e v^I é contínua em $I + \gamma$ e v^{II} é contínua em $II + \gamma$. O salto de v em $(\phi(y), y)$, denotado por $[v]$, é dado por*

$$[v] = v^{II}(\phi(y), y) - v^I(\phi(y), y).$$

A função v é contínua ao longo de γ se, e somente se,

$$[v] = 0$$

ao longo de γ . Note que se v^I, v^{II} forem de classe C^1 em $I + \gamma$ e $II + \gamma$, respectivamente, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}[v] &= v_x^{II}(\phi(y), y)\phi'(y) + v_y^{II}(\phi(y), y) - (v_x^I(\phi(y), y)\phi'(y) + v_y^I(\phi(y), y)) \\ &= (v_x^{II}(\phi(y), y) - v_x^I(\phi(y), y))\phi'(y) + (v_y^{II}(\phi(y), y) - v_y^I(\phi(y), y)) \\ &= [v_x]\phi' + [v_y], \end{aligned}$$

$\phi' = \frac{dx}{dy}$ nos dá a velocidade com que a singularidade se move ao longo de γ .

Suponha que u^I e u^{II} sejam de classe C^2 em $I + \gamma$ e $II + \gamma$, respectivamente, e que u seja de classe C^1 em Ω . Portanto

$$[u] = [u_x] = [u_y] = 0$$

portanto, subtraindo a equação diferencial formada por u^I e u^{II} ao longo de γ , temos

$$a[u_{xx}] + 2b[u_{xy}] + c[u_{yy}] = 0, \quad (4.13)$$

pois os coeficientes são contínuos. Então

$$0 = \frac{d}{dy}[u_x] = [u_{xx}]\phi' + [u_{xy}], \quad 0 = \frac{d}{dy}[u_y] = [u_{xy}]\phi' + [u_{yy}] \quad (4.14)$$

usamos que $[u_{xy}] = [u_{yx}]$. De fato,

$$[u_{xy}] = u_{xy}^{II}(\phi(y), y) - u_{xy}^I(\phi(y), y) = u_{yx}^{II}(\phi(y), y) - u_{yx}^I(\phi(y), y) = [u_{yx}],$$

pois $u^I, u^{II} \in C^3$.

De (4.14), os saltos das derivadas segundas de uma solução $u \in C^1$ ao longo de γ não são independentes. Se fizermos $[u_{xx}] = \lambda$ (intensidade do salto), então

$$[u_{xx}] = \lambda, \quad [u_{xy}] = -\lambda\phi', \quad [u_{yy}] = \lambda\phi'^2. \quad (4.15)$$

Desta equação e de (4.13), temos

$$\lambda(a - 2b\phi' + c\phi'^2) = 0.$$

Então se γ não for característica, da seção anterior devemos ter $a - 2b\phi' + c\phi'^2 \neq 0$, logo $\lambda = 0$. Portanto, conforme havíamos dito, ao longo de uma curva não característica as derivadas segundas de u não têm saldo. Se a curva γ for característica, em princípio não podemos dizer se haverá ou não saltos das derivadas segundas de u ao longo da mesma. No entanto, mostremos que ao longo de uma curva característica ou não temos saltos das derivadas segundas de u em nenhum ponto, ou temos saltos nas derivadas segundas de u em todos os pontos. Em outras palavras, sobre uma curva γ for característica, ou seja,

$$a - 2b\phi' + c\phi'^2 = 0, \quad (4.16)$$

então ou $\lambda(y)$ nunca se anula ou é identicamente nulo.

Nas contas acima, necessitamos apenas que u^I, u^{II} fosse de classe C^2 em fechos de $I + \gamma$ e $II + \gamma$, respectivamente. Somente agora precisaremos que estas funções sejam de classe C^3 . Veremos como a intensidade do salto λ se propaga ao longo de γ . De (4.15), temos

$$\lambda' = \frac{d\lambda}{dy} = \frac{d}{dy}[u_{xx}] = [u_{xxx}]\phi' + [u_{xxy}] \quad (4.17)$$

e

$$-(\phi'\lambda)' = \frac{d}{dy}[u_{xy}] = [u_{xxy}]\phi' + [u_{xyy}]. \quad (4.18)$$

Derivando a equação diferencial em relação a x , temos

$$au_{xxx} + 2bu_{xxy} + cu_{xyy} + (a_x + 2d)u_{xx} + (e + 2b_x)u_{xy} + c_x u_{yy} + (2d_x + f)u_x + 2e_x u_y + f_x u = 0.$$

Portanto, temos

$$a[u_{xxx}] + 2b[u_{xxy}] + c[u_{xyy}] + (a_x + 2d)[u_{xx}] + 2(e + b_x)[u_{xy}] + c_x[u_{yy}] = 0. \quad (4.19)$$

Note que

$$\begin{aligned} a[u_{xxx}] + 2b[u_{xxy}] + c[u_{xyy}] &= a[u_{xxx}] + 2b[u_{xxy}] + c(-(\phi'\lambda)' - [u_{xxy}]\phi') \quad (\text{usamos (4.17)}) \\ &= a[u_{xxx}] + (2b - c\phi')[u_{xxy}] - c(\lambda\phi')' \\ &= a[u_{xxx}] + (2b - (c\phi'))(\lambda' - [u_{xxx}]\phi') - c(\lambda\phi')' \quad (\text{usamos (4.18)}) \\ &= (a - 2b\phi' + c\phi'^2)[u_{xxx}] + (2b - c\phi')\lambda' - c(\lambda\phi')' \\ &= (2b - c\phi')\lambda' - c(\lambda\phi')' \quad (\text{usamos (4.16)}) \\ &= 2(b - c\phi')\lambda' - c\lambda\phi''. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}(a_x + 2d)[u_{xx}] + (e + 2b_x)[u_{xy}] + c_x[u_{yy}] &= (a_x + 2d)\lambda + 2(e + b_x)(-\phi'\lambda) + c_x(\phi'^2\lambda) \\ &= (a_x - 2b_x\phi' + c_x\phi'^2 + 2d + 2e\phi')\lambda.\end{aligned}\quad (4.21)$$

Substituindo (4.20) e (4.21) em (4.19), temos a seguinte equação diferencial ordinária:

$$0 = 2(b - c\phi')\lambda' + (a_x - 2b_x\phi' + c_x\phi'^2 + 2d - 2e\phi' - c\phi'')\lambda,$$

cujas solução é

$$\lambda(y) = \lambda_0 e^{\int_{y_0}^y \frac{a_x - 2b_x\phi' + c_x\phi'^2 + 2d - 2e\phi' - c\phi''}{2(b - c\phi')} ds},$$

portanto λ nunca se anula ou é identicamente nulo, estamos assumindo que $b - c\phi' \neq 0$. \square

4.4 A equação linear de segunda ordem

Uma equação linear de segunda ordem mais geral é da seguinte forma

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + 2du_x + 2eu_y + fu = 0 \quad (4.22)$$

onde os coeficientes a, b, c, d, e, f dependem apenas das variáveis independentes x, y .

A fim de obter uma forma mais conveniente da equação introduziremos as novas variáveis independentes ξ e η através da substituição

$$\xi = \phi(x, y) \quad \eta = \psi(x, y), \quad (4.23)$$

a qual suporemos invertível, ou seja,

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Fazendo $v(x, y) = u(\xi(x, y), \eta(x, y))$, da regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned}v_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ v_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\ v_{xx} &= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \\ v_{yy} &= u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} \\ v_{xy} &= u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}.\end{aligned}$$

Portanto se $v(x, y)$ é solução de (4.22), ela se transforma em

$$A(\xi, \eta)u_{\xi\xi} + 2B(\xi, \eta)u_{\xi\eta} + C(\xi, \eta)u_{\eta\eta} + D(\xi, \eta)u_\xi + E(\xi, \eta)u_\eta + Fu = 0, \quad (4.24)$$

onde

$$\begin{aligned}
A(\xi, \eta) &= a\phi_x^2 + 2b\phi_x\phi_y + c\phi_y^2, \\
B(\xi, \eta) &= a\phi_x^2 + b(\phi_x\phi_y + \phi_y\psi_x) + c\phi_y^2 \\
C(\xi, \eta) &= a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2 \\
D(\xi, \eta) &= a\phi_{xx} + 2b\phi_{xy} + c\phi_{yy} \\
E(\xi, \eta) &= a\psi_{xx} + 2b\psi_{xy} + c\psi_{yy} \\
F(\xi, \eta) &= f.
\end{aligned}$$

É fácil mostrar que

$$B^2 - AC = (b^2 - ac) \left(\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right)^2.$$

Portanto, $B^2 - AC$ e $b^2 - ac$ têm o mesmo sinal, ou seja, se a transformação é invertível, ela preserva a natureza da equação diferencial.

Vamos escolher a transformação de forma que a equação diferencial fique mais simples. No caso hiperbólico, introduziremos as características como novas coordenadas. Sejam

$$\xi = \phi(x, y) = \text{constante}, \quad \eta = \psi(x, y) = \text{constante}$$

duas famílias de características no plano xy . Portanto, de (4.12), ϕ e ψ devem satisfazer

$$a\phi_x^2 + 2b\phi_x\phi_y + c\phi_y^2 = 0, \quad a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2 = 0,$$

o que implica que $A = 0$ e $C = 0$, portanto a equação fica na forma normal:

$$u_{\xi\eta} + D(\xi, \eta)u_{\xi} + E(\xi, \eta)u_{\eta} + Fu = 0. \quad (4.25)$$

Fazendo um nova mudança de coordenadas (rotação de 45 graus)

$$x' = \xi + \eta, \quad y' = \xi - \eta,$$

a equação pode ser transformada em

$$u_{x'x'} - u_{y'y'} + 2D'u_{x'} + 2E'u_{y'} + F'u = 0.$$

No caso elíptico, onde $ac - b^2 > 0$, não existem características reais, podemos encontrar ϕ e ψ de modo transformar (4.22) numa equação onde $A = C$ e $B = 0$. Isto é obtido fazendo-se

$$\phi_x = \frac{b\psi_x + c\psi_y}{W}, \quad \phi_y = -\frac{a\psi_x + b\psi_y}{W},$$

onde $W = \sqrt{ac - b^2}$. Eliminando ϕ nas equações acima, vemos que ψ tem que ser solução da equação de Betrami

$$\left(\frac{a\psi_x + b\psi_y}{W} \right)_x + \left(\frac{b\psi_x + c\psi_y}{W} \right)_y = 0.$$

Exemplo 21. (A equação da Tricomia)

$$u_{yy} - yu_{xx} = 0. \quad (4.26)$$

Para esta equação $ac - b^2 = -y$. Portanto, para $y < 0$, $ac - b^2 > 0$ e a equação é elíptica. Para $y > 0$, $ac - b^2 < 0$ e a equação é hiperbólica. No eixo x ela é parabólica. De (4.10) a equação característica reduz-se a

$$-ydy^2 + dx^2 = 0$$

ou

$$dx + \pm\sqrt{y} dy = 0, \quad \text{para } y > 0.$$

As curvas características para $y > 0$ são portanto

$$3x \pm 2y^{3/2} = \text{constante}.$$

A transformação

$$\xi = 3x - 2y^{3/2}, \quad \eta = 3x + 2y^{3/2}$$

reduz a equação a forma normal

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{6} \frac{u_\xi - u_\eta}{\xi - \eta} = 0.$$

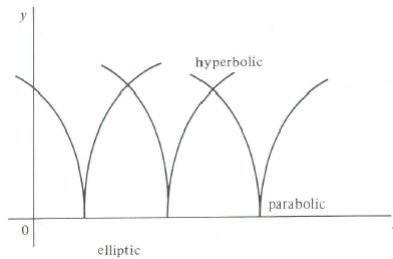


Figura 4.1: As curvas características de $u_{yy} - yu_{xx} = 0$.

Exemplo 22. Classifique a equação abaixo e encontre a sua solução geral.

$$xyu_{xx} + x^2u_{xy} - yu_x = 0.$$

Note que $ac - b^2 = -\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 \leq 0$, portanto para $x > 0$ a equação é hiperbólica, é parabólica se $x = 0$ e elíptica se $x < 0$. Para $x > 0$, as suas características são dadas por

$$y' = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{x^2/2 \pm x^2/2}{xy} = \begin{cases} 0, & \text{ou} \\ x/y \end{cases}.$$

Portanto, $y = \text{constante}$ ou $x^2 - y^2 = \text{constante}$. Logo temos a seguinte mudança de variáveis $\xi(x, y) = x^2 - y^2$ e $\eta(x, y) = y$. Com isso a nossa equação se transforma em

$$u_{\xi\eta} = 0 \quad (\text{desde que } x \neq 0).$$

Integrando esta equação em relação à η , encontramos

$$u_\xi = f(\xi),$$

onde f é uma função arbitrária de uma variável. Portanto,

$$u(\xi, \eta) = \int f(\xi) d\xi + G(\eta) = F(\xi) + G(\eta).$$

Voltando às variáveis originais, temos

$$v(x, y) = u(x^2 - y^2, y) = F(x^2 - y^2) + G(y)$$

é a solução da equação original, onde F e G são funções de uma variável arbitrárias, de classe C^2 . Por conveniência, podemos usar a mesma letra, ou seja, u para a solução do problema original, portanto temos

$$u(x, y) = F(x^2 - y^2) + G(y).$$

Exemplo 23. Classifique a equação abaixo e encontre a sua solução geral.

$$x^2 u_{xx} + y^2 u_{xy} + 2yu_x = 4x^2.$$

Note que $ac - b^2 = (xy)^2 - x^2y^2 = 0$, logo a equação é parabólica para todo x . A equação para a sua característica é dada por

$$y' = \frac{b}{a} = \frac{y}{x}.$$

Portanto,

$$\frac{y}{x} = \text{constante}.$$

Considere a seguinte transformação

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y}{x}.$$

Com isso a nossa equação se transforma em

$$u_{\xi\xi} = 4.$$

Integrando esta equação em relação à ξ , encontramos

$$u_\xi = 4\xi + g(\eta).$$

Integrando novamente em relação à ξ , encontramos

$$u(\xi, \eta) = 2\xi^2 + \xi f(\eta) + g(\eta).$$

Voltando às variáveis originais, temos

$$v(x, y) = 2x^2 + xf\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$$

é a solução da equação original, onde f e g são funções de uma variável arbitrárias, de classe C^2 .

4.5 A equação da onda em uma dimensão espacial

O exemplo mais simples de equação hiperbólica é a equação da onda em uma dimensão, dada por

$$Lu = u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad (4.27)$$

u é uma função das variáveis independentes x e t , a posição e o tempo, respectivamente, u pode ser visto como o deslocamento vertical de partículas numa corda vibrante e c é uma constante positiva, que dá a velocidade com que a onda se propaga no meio (corda). As características são duas famílias de retas, dadas por $x \pm ct$. Fazendo

$$x + ct = \xi, \quad \eta = x - ct,$$

a equação (4.27) se transforma em

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

A equação acima diz que $u_\eta(\xi, \eta)$ não depende de η .

$$u_\xi = f_1(\xi),$$

a qual integrada em relação a ξ nos dá

$$u(\xi, \eta) = \int f_1(\xi) d\xi + G(\eta) = F(\xi) + G(\eta).$$

Voltando a variável original, a solução é da seguinte forma

$$u(x, t) = F(c + ct) + G(x - ct), \quad (4.28)$$

onde u será de classe C^2 se, e somente se, F, G forem de classe C^2 . As funções $v = F(x + ct)$ e $w = G(x - ct)$ satisfazem às equações de transportes passivos $v_t - cv_x = 0$ e $w_t + cw_x = 0$, portanto representam ondas se propagando (sem mudar a forma), com velocidades c para a direita e esquerda respectivamente. Portanto a solução $u(x, t)$ é a superposição de duas ondas se propagando sem mudar a forma, com velocidade c para a direita e esquerda, respectivamente.

Considere o problema de valor inicial

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x). \quad (4.29)$$

Portanto de (4.28) e (4.29), temos

$$u(x, 0) = F(x) + G(x) = f(x) \quad (4.30)$$

$$u_t(x, 0) = cF'(x) - cG'(x) = g(x). \quad (4.31)$$

Derivando (4.30) em relação à x , temos

$$F'(x) + G'(x) = f'(x).$$

Portanto, temos o seguinte sistema para F' e G' :

$$F'(x) + G'(x) = f'(x), \quad F'(x) - G'(x) = g(x)/c. \quad (4.32)$$

Somando as duas equações de (4.32), encontramos

$$F'(x) = f'(x)/2 + g(x)/2c,$$

a qual integrada de 0 a x nos dá

$$F(x) = f(x)/2 + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds + F(0) - f(0)/2$$

Subtraindo as duas equações de (4.32), encontramos

$$G'(x) = f'(x)/2 - g(x)/2c,$$

a qual integrada de 0 a x nos dá

$$G(x) = f(x)/2 - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds + G(0) - f(0)/2.$$

Note que de (4.30), $F(0) + G(0) = f(0)$, portanto ao somarmos as expressões para F e G acima, as constantes de integração desaparecerão. Portanto

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi. \quad (4.33)$$

Para $f \in C^2$ e $g \in C^1$ a expressão acima é uma solução de classe C^2 do problema de valor inicial (4.27) e (4.29). A expressão acima é chamada de Fórmula de D'Alembert.

Definição 5. Note que $u(x, t)$ é determinado de maneira única a partir dos valores das funções iniciais f, g no intervalo $[x - ct, x + ct]$, cujas extremidades são cortadas pelas curvas características pelo ponto (x, t) . Este intervalo é chamado de domínio de dependência da solução no ponto (x, t) .

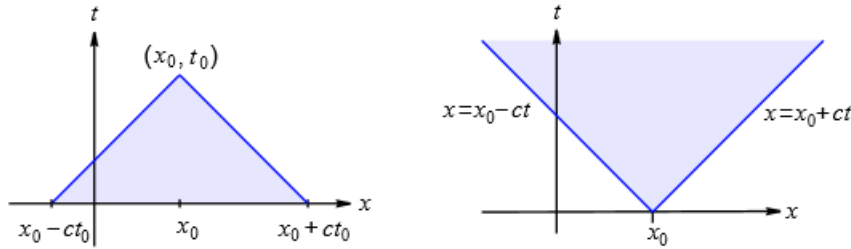


Figura 4.2: A figura da esquerda mostra o domínio de dependência solução u no ponto (x_0, t_0) . A figura da direita mostra o domínio de influência do ponto $(x_0, 0)$.

Definição 6. O valor inicial no ponto $(x_0, 0)$ no eixo dos x influencia $u(x, t)$ somente nos pontos (x, t) que estão na região em forma de cunha que é limitada pelas características através de $(x_0, 0)$, ou seja, para $x_0 - ct < x < x_0 + ct$.

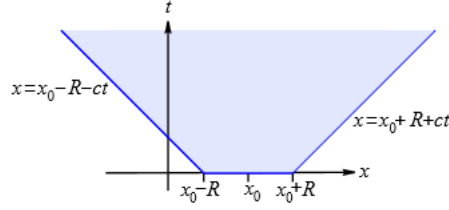


Figura 4.3: $\{(x, t) : t \geq 0, x_0 - R - ct \leq x \leq x_0 + R + ct\}$

Portanto, se o dado inicial estiver suportado no intervalo $\{x : |x - x_0| \leq R\}$, então a solução estará suportada na região $\{(x, t) : t \geq 0, x_0 - R - ct \leq x \leq x_0 + R + ct\}$. Portanto, se o dado inicial tiver suporte compacto, a solução terá suporte compacto. Este fenômeno é chamado de velocidade de propagação finita da equação da onda.

Para dados iniciais com suporte compacto, podemos mostrar usando método de energia que a solução do problema de valor inicial (4.27) e (4.29) é única, portanto é dada pela Fórmula de D'Alembert. De fato, defina

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (u_t^2 + c^2 u_x^2) dx.$$

Então

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{xt}) dx \\ &= c^2 \int_{-\infty}^{\infty} (u_t u_{xx} + u_x u_{xt}) dx \\ &= c^2 \int_{-\infty}^{\infty} (u_t u_x)_x dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} [u_t(t, x) u_x(t, x)]_{x=-k}^{x=k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $E(t)$ é constante, em particular,

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (u_t^2(x, 0) + c^2 u_x^2(x, 0)) dx,$$

logo se $u_1(x, t)$ e $u_2(x, t)$ forem soluções do problema de valor inicial (4.27) e (4.29), então

$$u = u_1 - u_2$$

também será solução da equação de calor com condições iniciais

$$u(x, 0) = 0 = u_t(x, 0),$$

portanto para a solução u temos

$$E(t) = E(0) = 0,$$

para todo t , devemos ter $u_t^2(x, t) + c^2 u_x^2(x, t) = 0$, portanto, $u_x(x, t) = 0 = u_t(x, t)$, para todo x, t , logo $u(x, t)$ tem que ser constante, como $u(x, 0) = 0$ e u é contínua, segue que

$$u(x, t) = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$. □

Note que a fórmula (4.28) representa uma solução de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ de (4.27) para quaisquer $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. Somos levados a considerar qualquer função u da forma (4.28) para f, g gerais, como uma solução fraca de (4.27), embora ela não tenha derivadas no sentido ordinário. Note que qualquer u da forma (4.28) satisfaz a equação funcional:

$$u(x, t) - u(x + c\zeta, t + \zeta) - u(x - c\eta, t + \eta) + u(x + c\zeta - c\eta, t + \zeta + \eta) = 0. \quad (4.34)$$

De fato,

$$\begin{aligned} u(x - c\eta, t + \eta) &= F(x - c\eta + c(t + \eta)) + G(x - c\eta + c(t + \eta)) \\ &= F(x + ct)G(x - ct) \\ &= u(x, t) \end{aligned}$$

portanto a primeira e a terceira parcelas de (4.34) se cancelam. Por outro lado,

$$\begin{aligned} u(x + c\zeta - c\eta, t + \zeta + \eta) &= F(x + c\zeta - c\eta + c(t + \zeta + \eta)) + G(x + c\zeta - c\eta - c(t + \zeta + \eta)) \\ &= F(x + c\zeta + c(t + \zeta)) + G(x + c\zeta - c(t + \zeta)) \\ &= u(x + c\zeta, t + \zeta), \end{aligned}$$

portanto a segunda e a quarta parcelas de (4.34) se cancelam. □

Geometricamente, para qualquer paralelogramo $ABCD$ no plano xt limitado por quatro curvas (retas) características a soma dos valores de u em vértices opostos é igual:

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D). \quad (4.35)$$

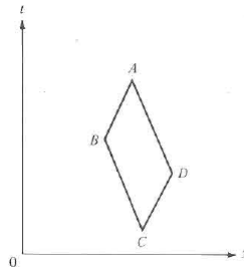


Figura 4.4: O paralelogramos característico com vértices A, B, C, D

4.5.1 O problema de valor inicial e de contorno

Em muitas aplicações temos que lidar com regiões limitadas, o que nos leva a um problema misto, ou seja, de valor inicial e de contorno. Um exemplo é o deslocamento vertical $u(x, t)$ de uma corda vibrante de comprimento $L = \pi$ e com as extremidades presas, o que corresponde às condições de fronteiras $u(0, t) = 0 = u(\pi, t)$ e as condições iniciais $u(x, 0) =$

$f(x)$ e $u_t(x, 0) = g(x)$, as quais correspondem à forma e velocidade iniciais da corda. O problema consiste em encontrar a solução de (4.27) para $0 < x < L$ e todo $t > 0$, que satisfaça as condições iniciais e de contorno dadas.

Podemos usar (4.35) para resolver a equação da onda (4.27) para $0 < x < L$ e todo $t > 0$. Temos que prescrever além do dado inicial

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L, \quad (4.36)$$

certas condições de fronteiras, por exemplo

$$u(0, t) = \alpha(t), \quad u(L, t) = \beta(t), \quad t > 0. \quad (4.37)$$

Estamos interessados na solução de (4.27) na faixa $0 < x < L, t > 0$. Dividimos esta faixa num número de regiões pelas características através dos cantos e através dos pontos de interseções das características com as fronteiras, etc.

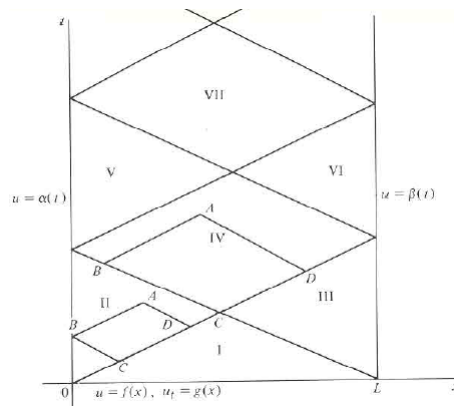


Figura 4.5: A divisão da faixa $0 < x < L, t > 0$ em regiões I, II, III, \dots

Na região I a solução u é determinada pela fórmula de D'Alembert (4.33) a partir dos dados iniciais apenas. No ponto $A = (x, t)$ da região II formamos o paralelogramo característico com vértices A, B, C, D e obtemos $u(A)$ a partir de (4.35) como

$$u(A) = -u(C) + u(B) + u(D),$$

com $u(B)$ obtido pela condição de fronteira e $u(C), u(D)$ conhecidos, visto que C, D estão na região I . De maneira análoga, obtemos u em todos os pontos das regiões III, IV, V, \dots

Se quisermos uma solução u de classe C^2 deste problema misto no fecho da faixa, os dados f, g, α, β devem se ajustar de modo que u , suas derivadas de primeira e segunda ordem sejam iguais quando calculadas a partir de f, g ou de α, β . Necessitamos das seguintes condições de compatibilidades:

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= f(0), & \alpha'(0) &= g(0), & \alpha''(0) &= c^2 f''(0) \\ \beta(0) &= f(L), & \beta'(0) &= g(L), & \beta''(0) &= c^2 f''(L). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Estas condições são suficientes para $u \in C^2$, quando $f, \alpha, \beta \in C^2$ e $g \in C^1$.

Outra alternativa para resolvermos o problema misto consiste em usarmos o método de separação de variáveis, o qual aplicado à corda com extremidades presas nos leva a uma solução $u(x, t)$, tal que para cada t , $u(x, t)$ tem a seguinte expansão de Fourier em senos

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \text{sen}(nx).$$

Substituindo esta expressão em (4.27), temos

$$\frac{da_n(t)}{dt} = -c^2 n^2 a_n(t),$$

cujas soluções gerais são

$$a_n(t) = c_n \cos(nct) + d_n \text{sen}(nct).$$

Portanto,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cos(nct) + d_n \text{sen}(nct)) \text{sen}(nx).$$

Das condições iniciais, temos

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{sen}(nx)$$

e

$$g(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} ncd_n \text{sen}(nx).$$

Tendo em vista as relações de ortogonalidade envolvendo as funções $\text{sen} nx$ e $\cos mx$, obtemos

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \text{sen} nx \, dx, \quad c_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^{\pi} g(x) \cos nx \, dx.$$

Observação 3. Dada uma série de funções $\sum_n u_n(x)$, se cada $u'_n(x)$ for contínua em $[a, b]$ e $\sum_n u'_n(x)$ convergir uniformemente em $[a, b]$, então

$$\frac{d}{dx} \sum_n u_n(x) = \sum_n u'_n(x).$$

4.5.2 A corda semi-infinita

Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) &= h(x), \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x > 0, \end{aligned}$$

onde h, f, g são dadas. Procedendo da mesma forma que na obtenção da Fórmula de D'Alembert, encontramos

$$F(x) = G(x) = f(x), \quad x > 0,$$

$$cF'(x) - cG(x) = g(x), \quad x > 0.$$

Integrando a última equação e resolvendo o sistema nas incógnitas F e G , encontramos

$$F(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds + k, \quad x > 0$$

$$G(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds - k, \quad x > 0.$$

Para escrevermos

$$u(x, t) = G(x + ct) - G(x - ct),$$

temos que conhecer G para argumentos negativos, pois $x - ct$ pode ser negativo. É neste momento que usamos a condição de fronteira

$$F(ct) + G(-ct) = h(t), \quad t > 0,$$

portanto

$$G(-y) = h\left(\frac{y}{c}\right) - F(y),$$

ou seja,

$$G(-y) = h\left(\frac{y}{c}\right) - \frac{1}{2} f(y) - \frac{1}{2c} \int_0^y g(y) ds - k, \quad y > 0.$$

A linha característica $x = ct$ separa o primeiro quadrante em duas regiões

$$I = \{(x, t) : 0 < x < ct\} \quad e \quad II = \{(x, t) : x > ct\}.$$

Na região II a presença da fronteira $x = 0$ não é sentida, visto que qualquer informação vinda da fronteira com velocidade fixa c ainda não alcançou esta região ainda. Por causa da condição de fronteira homogênea em $x = 0$, esta se comporta como uma fronteira de reflexão. A região escura na figura mostra o domínio de dependência de um ponto (x, t) da região II . A solução é a superposição dos dados iniciais que estão se propagando e de suas imagens se propagando em direções opostas.

Portanto, a solução desejada é

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds, & \text{se } x - ct \geq 0 \\ \frac{f(ct+x)-f(ct-x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} g(s) ds + h\left(\frac{ct-x}{c}\right), & \text{se } x - ct < 0. \end{cases}$$

Ou seja, se o ponto (x, t) estiver abaixo da característica $x - ct = 0$, o valor de $u(x, t)$ será como se a corda fosse infinita, o ponto não sentirá o fato de que a corda é limitada à esquerda, a não ser após o tempo $t = x/c$. Se o ponto (x, t) estiver na região I , a característica emanando de (x, t) encontra o eixo t no ponto $t = x/c$ ai se reflete e vai encontrar o eixo x no ponto $ct - x$. Devemos olhar esse percurso no sentido oposto: um sinal emanando de ponto $ct - x$, no instante $t = 0$ e se propagando para a esquerda, com velocidade c , encontra a extremidade da corda, onde ele reflete, e vai estar no ponto x no instante t . Nesta reflexão há uma troca de sinal $f(x - ct)$ passa a ser $-f(x - ct)$. Os valores iniciais de $u_t(x, 0)$ também são refletidos. Finalmente, existe uma produção de sinais na extremidade da corda que se propagam para a direita, ao longo desta corda, com velocidade c ; assim no instante $t - (x/c)$, ai se origina um sinal de intensidade $h(t - [x/c])$ que vai compor o valor de u no ponto x , no instante t .

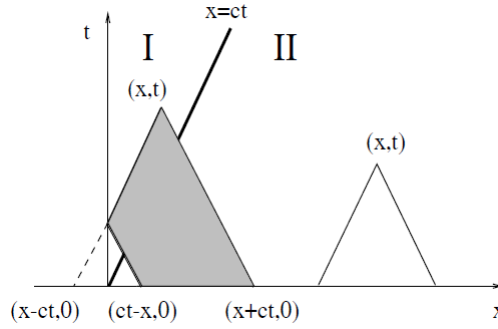


Figura 4.6: O domínio de dependência do ponto (x, t)

4.6 Sistemas de equações de primeira ordem

Uma equação linear de segunda ordem geral é da forma

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + 2du_x + 2eu_y + fu + g = 0,$$

onde os coeficientes são funções de x e y apenas. Podemos transformá-la num sistema de equações lineares de primeira ordem, introduzindo as seguintes variáveis: $u = u_1$, $u_x = u_2$ e $u_y = u_3$, nos levando as seguintes equações

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = u_2, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial u_3}{\partial x}$$

e

$$a \frac{\partial u_2}{\partial x} + b \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) + c \frac{\partial u_3}{\partial y} + 2du_2 + 2eu_3 + fu_1 = 0.$$

Estas equações podem ser escritas como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & c \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & a & b \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -f & -2d & -2e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

que é da forma

$$A(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} = C(x, y)u + D(x, y),$$

onde A , B e C são matrizes quadradas de ordem 3 e D um vetor com 3 componentes. Em muitas aplicações ao invés de y , usa-se a variável t , que pode ser vista como o tempo. Portanto, temos as variáveis independentes x e t . Além disso, ao invés da equação ser de segunda ordem, ela pode ser de ordem N , portanto equivalente a um sistema de N equações lineares de primeira ordem, o qual pode ser escrito como

$$A(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + B(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = C(x, t)u + D(x, t), \quad (4.39)$$

agora as matrizes A , B e C são de ordem N e o vetor D tem N componentes. O problema de Cauchy para a equação acima prescreve u sobre uma curva $t = \phi(x)$, no plano xt :

$$u = u(x, \phi(x)) = f(x). \quad (4.40)$$

A curva é característica se não pudermos encontrar as derivadas de u a partir dos dados na curva. Note que sobre a curva $t = \phi(x)$, temos

$$A(x, \phi(x))u_t(x, \phi(x)) + B(x, \phi(x))u_x(x, \phi(x)) = C(x, \phi(x))f(x) + D(x, \phi(x)), \quad (4.41)$$

e

$$u_x(x, \phi(x)) + u_t(x, \phi(x))\phi'(x) = f'(x), \quad (4.42)$$

aplicando B na última equação, temos

$$B(x, \phi(x))u_x(x, \phi(x)) + B(x, \phi(x))u_t(x, \phi(x))\phi'(x) = B(x, \phi(x))f'(x), \quad (4.43)$$

subtraindo (4.43) de (4.41), temos

$$(A(x, \phi(x)) - B(x, \phi(x))\phi'(x))u_t(x, \phi(x)) = C(x, \phi(x))f(x) + D(x, \phi(x)) - B(x, \phi(x))f'(x).$$

Portanto, a curva será característica se

$$\det(A(x, \phi(x)) - B(x, \phi(x))\phi'(x)) = 0.$$

ou seja, se

$$\det\left(A(x, \phi(x)) - B(x, \phi(x))\frac{dt}{dx}\right) = 0.$$

Em particular, o eixo dos x , ou seja, $t = \phi(x) = 0$, para todo x , é uma curva não característica se $A(x, 0)$ for não singular. Neste caso

$$u_t(x, 0) = A^{-1}(x, 0)(C(x, 0)f(x) + D(x, 0) - B(x, 0)f'(x)), \quad u_x(x, 0) = f'(x).$$

O nosso objetivo a seguir é resolver o problema de valor inicial (4.39) e (4.40). Assumindo que $A(x, 0)$ seja não singular que $A(x, t)$ seja contínua, então para t pequeno $A(x, t)$ será não singular para todo x , aplicando a inversa de $A(x, t)$ a equação (4.39), ela pode ser reescrita como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + B(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} = C(x, t)u + D(x, t), \quad (4.44)$$

com novas matrizes B, C e vetor D , mantivemos os mesmos nomes por simplicidade. A equação que nos dá as equações característica (equação diferencial característica) correspondente agora é

$$\det\left(\frac{dx}{dt}I - B(x, t)\right) = 0,$$

que é equivalente a

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i(x, t),$$

onde $\lambda_i(x, t)$ denota o i -ésimo autovalor da matriz $B(x, t)$. Resolveremos esta equação diferencial ordinária de modo que $x(T) = X$, ou seja, a equação da i -ésima característica é dada por $x = \alpha_i(t, X, T)$, podemos imaginar tomando T suficientemente pequeno para que

ela esteja definida para $t = 0$. Assumiremos que os autovalores são reais de modo que a equação acima seja satisfeita por uma família de curvas características C_i . Mais precisamente, assumiremos que o sistema seja hiperbólico no sentido que existe um conjunto completo de auto-vetores reais ξ^1, \dots, ξ^N de B , tal que

$$B\xi^k = \lambda_k \xi^k,$$

onde ξ^k são linearmente independentes e dependem "suavemente" de x e t (isto acontece quando os autovalores de B são reais e distintos). Defina a matriz

$$\Gamma(x, t) = (\xi^1 \dots \xi^N)$$

então

$$\Gamma^{-1}B\Gamma = \Lambda,$$

onde $\Lambda_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$. Com isso podemos colocar o sistema na forma canônica

$$v_t + \Lambda v_x = cv + d, \quad (4.45)$$

onde $u = \Lambda v$ ou seja, $v = \Gamma^{-1}u$, com condição inicial

$$v(x, 0) = \Gamma^{-1}(x, 0)f(x) = g(x). \quad (4.46)$$

De fato, o sistema pode ser reescrito como

$$\frac{\partial(\Gamma v)}{\partial t} + B \frac{\partial(\Gamma v)}{\partial x} = C\Gamma^{-1}v + D$$

ou seja,

$$\Gamma \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma}{\partial t} v + B(x, t) \left(\Gamma \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma}{\partial x} v \right) = C\Gamma^{-1}v + D,$$

aplicando Γ^{-1} a esta equação, temos

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \Gamma^{-1} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} v + \Gamma^{-1} B \left(\Gamma \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma}{\partial x} v \right) = \Gamma^{-1} C\Gamma^{-1}v + \Gamma^{-1} D,$$

portanto

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \Gamma^{-1} B \Gamma \frac{\partial v}{\partial x} = \left(-\Gamma^{-1} B \frac{\partial \Gamma}{\partial x} - \Gamma^{-1} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \Gamma^{-1} C \Gamma^{-1} \right) v + \Gamma^{-1} D,$$

logo

$$c = -\Gamma^{-1} B \frac{\partial \Gamma}{\partial x} - \Gamma^{-1} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \Gamma^{-1} C \Gamma^{-1}, \quad d = \Gamma^{-1} D.$$

A seguir resolveremos (4.45) e (4.46). Ao longo da característica C_i , dada por $x = \alpha_i(t, X, T)$, a i -ésima componente de v , v_i , satisfaz

$$\frac{dv_i(x, t)}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = \sum_k c_{ik} v_k + d_i \quad (\text{na última igualdade usamos (4.45)}).$$

Portanto, temos

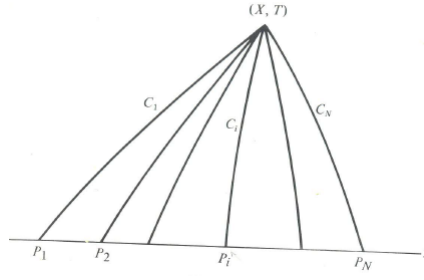


Figura 4.7: As curvas características retrógradadas em (X, T) .

$$\frac{d}{dt}v_i(\alpha_i(t, X, T), t) = \sum_k c_{ik}(\alpha_i(t, X, T), t)v_k(\alpha_i(t, X, T), t) + d_i(\alpha_i(t, X, T), t),$$

a qual integrada em relação a t de 0 a T , temos

$$v_i(\alpha_i(T, X, T), T) = v_i(\alpha_i(0, X, T), 0) + \int_0^T \left(\sum_k c_{ik}(\alpha_i(t, X, T), t)v_k(\alpha_i(t, X, T), t) + d_i(\alpha_i(t, X, T), t) \right) dt,$$

ou seja,

$$v_i(X, T) = g(\alpha_i(0, X, T)) + \int_0^T \left(\sum_k c_{ik}(\alpha_i(t, X, T), t)v_k(\alpha_i(t, X, T), t) + d_i(\alpha_i(t, X, T), t) \right) dt.$$

A equação acima pode ser escrita como

$$v = W + Sv. \quad (4.47)$$

onde onde a i -ésima componente do vetor W é

$$W_i = g(\alpha_i(0, X, T)) + \int_0^T d_i(\alpha_i(t, X, T), t)dt$$

e S é o operador linear que leva o vetor v em $w = Sv$, tal que

$$w_i = \int_0^T \sum_k c_{ik}(\alpha_i(t, X, T), t)v_k(\alpha_i(t, X, T), t)dt.$$

Se os nossos dados forem suficientemente regulares o mapeamento $S : C \rightarrow C$ é contínuo no espaço dos vetores contínuos limitados $v(x, t)$, com domínio na faixa $0 \leq t \leq \tau$, usando em C a “norma do máximo”:

$$\|v\| = \sum_{\substack{k=1, \dots, N \\ x, 0 \leq t \leq \tau}} |v_k(x, t)|.$$

A norma do operador S é definida como

$$\|S\| = \sup_{\|v\|=1} \|Sv\|,$$

assumiremos por conveniência que $c_{ik}(x, t)$ e suas derivadas parciais de primeira ordem sejam uniformemente limitadas, em $-\infty < x < \infty$ e $0 \leq t \leq \tau$. Então,

$$\|S\| \leq q = \tau \sup_{\substack{i, x \\ 0 \leq t \leq \tau}} \sum_k |c_{ik}(x, t)|.$$

Seja $T : C \rightarrow C$, definida por $Tv = K + Sv$, como S é linear, então dados $v_1, v_2 \in C$, temos

$$\|Tv_1 - Tv_2\| = \|Sv_1 - Sv_2\| = \|S(v_1 - v_2)\| \leq \|S\| \|v_1 - v_2\| \leq q \|v_1 - v_2\|,$$

portanto, para τ suficientemente pequeno, temos $q < 1$, T é uma contração. Consequentemente possui um e único ponto fixo v , o que é o limite da seguinte sequência

$$v^{n+1} = Tv^n = W + Sv^n, \quad v^0 = 0.$$

Portanto a solução de (4.47) é o ponto fixo obtido acima, pois ele satisfaz $v = Tv = K + Sv$.

Note que

$$v^{n+1} = (I + S + S^2 + \dots + S^n)W = (I - S^{n+1})(I - S)^{-1}W = (I - S)^{-1}W - S^{n+1}(I - S)^{-1}W$$

Como

$$\|S^{n+1}(I - S)^{-1}\| \leq \|S\|^{n+1} \|(I - S)^{-1}\| \|W\| \leq q^{n+1} \|(I - S)^{-1}\| \|W\|$$

vai para zero quando $n \rightarrow \infty$, segue que a sequência v^n converge para

$$v = (I - S)^{-1}W,$$

que é o ponto fixo.

Não é claro que o v obtido acima satisfará (4.45), teremos que mostrar que suas derivadas parciais de primeira ordem são contínuas. Para tal teremos que trabalhar num espaço de Banach menor, dos vetores $v(x, t)$, tais que v e v_x são contínuos e limitados para $0 \leq t \leq \tau$ e todo x , no qual temos a seguinte norma:

$$\|v\| = \max(\|v\|, \|v_x\|).$$

Note que T leva este espaço de Banach nele mesmo, se $W \in C^1$.

Note que

$$\|S\| = \sup_{\|v\|=1} \|Sv\|,$$

para calcularmos $\|Sv\|$, precisamos de $\|Sv\|$ e de $\|(Sv)_x\|$, portanto, precisamos obter cotas superiores para $|w_i(X, T)|$ e de $|w_{i,X}(X, T)|$, lembrando que na integrais que definem estas quantidades, temos

$$|v_k(\alpha_i(t, X, T), t)| \leq \|v\| = 1 \quad e \quad |v_{kX}(\alpha_i(t, X, T), t)| \leq \|v\| = 1.$$

Vimos que

$$|w_i(X, T)| \leq \tau \sup_{\substack{i, x \\ 0 \leq t \leq \tau}} \sum_k |c_{ik}(x, t)|,$$

portanto.

$$\|Sv\| \leq \tau \sup_{\substack{i, x \\ 0 \leq t \leq \tau}} \sum_k |c_{ik}(x, t)|.$$

Por outro lado, temos a seguinte expressão para $w_{i,X}(X, T)$:

$$\int_0^T \sum_k (c_{ik_X}(\alpha_i(t, X, T), t)v_k(\alpha_i(t, X, T), t) + c_{ik}(\alpha_i(t, X, T), t)v_{k,X}(\alpha_i(t, X, T), t)) \alpha_{iX}(t, X, T) dt,$$

logo

$$|w_{i,X}(X, T)| \leq \tau \left(\sup_{i,x,t} \sum_k |c_{ikx}(x, t)| \right) \sup_{i,X,T} |\alpha_i(t, X, T)| + \tau \left(\sup_{i,x,t} \sum_k |c_{ik}(x, t)| \right) \sup_{i,X,T} |\alpha_{iX}(t, X, T)|,$$

portanto.

$$\|(Sv)_x\| \leq \tau \left(\sup_{i,x,t} \sum_k |c_{ikx}(x, t)| \right) \sup_{i,X,T} |\alpha_i(t, X, T)| + \tau \left(\sup_{i,x,t} \sum_k |c_{ik}(x, t)| \right) \sup_{i,X,T} |\alpha_{iX}(t, X, T)|.$$

Logo

$$\begin{aligned} \|S\| &= \max(\|SV\|, \|(Sv)_x\|) \\ &\leq \|SV\| + \|(Sv)_x\| \\ &\leq \tau \left(\sup_{i,x,t} \sum_k |c_{ikx}(x, t)| \right) \sup_{i,X,T} |\alpha_i(t, X, T)| \\ &\quad + \tau \left(\sup_{i,x,t} \sum_k |c_{ik}(x, t)| \right) \sup_{i,X,T} |\alpha_{iX}(t, X, T)| \\ &\leq \tau \sup_{\substack{i, x \\ 0 \leq t \leq \tau}} \sum_k |c_{ik}(x, t)| \\ &\equiv q^*. \end{aligned}$$

O valor $q^* < 1$, para τ suficientemente pequeno. Com isso concluímos que o operador T definido neste novo espaço de Banach é uma contração, ele terá um e único ponto fixo v , o qual satisfaz (4.47). Note que Sv para $v \in C^1$ pode ser diferenciado em relação a T também. A convergência das sequências v^n e $(v^n)_x$ implica em convergência da sequência $(v^n)_t$. Então no limite obtemos obtemos uma solução de (4.45).

4.7 Apêndice - O Teorema do Ponto fixo de Banach

Definição 7. Dado um espaço métrico (X, d) , uma transformação $T : X \rightarrow X$ é uma contração se existir $q \in [0, 1)$, tal que

$$d(Tx, Ty) \leq qd(x, y),$$

para todo $x, y \in X$.

O teorema de Banach do ponto fixo diz que se (X, d) for completo e T for uma contração, existe um e único x^* , tal que $Tx^* = x^*$. O ponto x^* pode ser encontrado da seguinte maneira: tome um elemento qualquer $x_o \in X$ e defina a sequência $x_n = Tx_{n-1}$. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

A prova é bem simples, mostraremos por indução que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq q^n d(x_1, x_o), \quad (4.48)$$

para todo n . Note que

$$d(x_2, x_1) = d(Tx_1, Tx_o) \leq qd(x_1, x_o),$$

o que mostra (4.48) para $n = 1$. Supondo que

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq q^k d(x_1, x_o),$$

temos

$$d(x_{k+2}, x_{k+1}) = d(Tx_{k+1}, Tx_k) \leq qd(x_{k+1}, x_k) \leq q q^k d(x_1, x_o) = q^{k+1} d(x_1, x_o).$$

Com isso mostramos (4.48).

Dados arbitrariamente inteiros positivos m, n , sem perda de generalidade, suponha que $m > n$, então da desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq q^{m-1} d(x_1, x_o) + q^{m-2} d(x_1, x_o) + \dots + q^n d(x_1, x_o) \\ &= q^n d(x_1, x_o) (1 + q + \dots + q^{m-n-1}) \\ &\leq d(x_1, x_o) \frac{q^n}{1 - q}. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, tome n_o tal que

$$q^{n_o} < \frac{\epsilon(1 - q)}{d(x_1, x_o)}.$$

então se $m, n > n_o$, temos

$$d(x_n, x_m) < \epsilon,$$

o que mostra que a sequência $\{x_n\}$ é de Cauchy, como (X, d) é completo, ela converge para algum $x^* \in X$. Mostraremos que

$$Tx^* = x^*.$$

De fato,

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_{n-1} = T \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1} \right) = Tx^*,$$

na terceira igualdade usamos que T é contínuo, pois é uma contração. De fato, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\epsilon}{q}$, então se $d(x, y) < \delta$, temos $d(Tx, Ty) \leq qd(x, y) \leq \epsilon$, o que mostra que T é contínua em x . Para mostrar a unicidade do ponto fixo, suponha que $Tx^* = x^*$ e $Ty = y$, então

$$0 \leq d(x^*, y) = d(Tx^*, Ty) \leq qd(x^*, y),$$

o que implica que $x^* = y$, pois $q < 1$. □

Capítulo 5

Os Teoremas de Cauchy-Kowalevski e Holmgren

5.1 Notação de multi-índices

O vetor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, cujas componentes α_k são inteiros não-negativos, é chamado de um multi-índice, usaremos as letras gregas $\alpha, \beta, \gamma, etc$ para denotar o multi-índice. Introduzimos o vetor 0 e o vetor 1 como $0 = (0, \dots, 0)$ e $1 = (1, \dots, 1)$. Usamos a seguinte notação de L Schwartz:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!,$$

se $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e α é um multi-índice, definimos o monômio

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Dizemos que $\alpha \geq \beta$, se

$$\alpha_i \leq \beta_i, \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

Por C_α , denotamos um coeficiente dependendo de n não inteiros não-negativos:

$$C_\alpha = C_{\alpha_1 \dots \alpha_n},$$

ele pode ser números reais ou vetores no espaço \mathbb{R}^m . Um polinômio de grau m em x_1, \dots, x_n é então da seguinte forma:

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha x^\alpha.$$

Usando o símbolo de Cauchy $D_k = \partial/\partial x_k$, introduzimos o “vetor gradiente” $D = (D_1, \dots, D_n)$ e definimos o gradiente de uma função $u(x_1, \dots, x_n)$, como o vetor

$$Du = (D_1 u, \dots, D_n u).$$

O operador diferencial parcial de ordem m mais geral é então

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^m}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

onde $|\alpha| = m$. Valem os resultados abaixo:

$$(x + y)^\alpha = \sum_{\substack{\beta, \gamma \\ \beta + \gamma = \alpha}} \frac{\alpha!}{\beta! \gamma!} x^\beta y^\gamma \quad - \quad \text{Teorema Binomial.} \quad (5.1)$$

Se $f(x)$ é um polinômio de grau m , então

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha f(0)) x^\alpha \quad - \quad \text{Expansão de Taylor.} \quad (5.2)$$

Para $m \geq 0$ e $x = (x_1, \dots, x_n)$, temos

$$(x_1 + \dots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha \quad - \quad \text{Teorema multinomial.} \quad (5.3)$$

Para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, temos

$$\alpha! \leq |\alpha|! \leq n^{|\alpha|} \alpha!. \quad (5.4)$$

Dadas duas funções f e g e o multi-índice α

$$D^\alpha (fg) = \sum_{\substack{\beta, \gamma \\ \beta + \gamma = \alpha}} \frac{\alpha!}{\beta! \gamma!} (D^\beta f)(D^\gamma g). \quad (5.5)$$

$$D^\beta x^\alpha = \begin{cases} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} x^{\alpha-\beta}, & \text{se } \alpha \geq \beta \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.6)$$

Se f é uma função de \mathbb{R}^m em \mathbb{R} , então para todos vetores x, y e escalar t , temos

$$\frac{d^m}{dt^m} f(x + ty) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} (D^\alpha f(x + ty)) y^\alpha, \quad (5.7)$$

(use indução em m ou (5.3) com x_i substituído por $y_i D_i$).

5.2 Séries infinitas múltiplas

Dizemos que a série

$$\sum_{\alpha} C_{\alpha},$$

é convergente se ela for absolutamente convergente. Portanto ela converge se, e somente se,

$$\sum_{\alpha} |C_{\alpha}| < \infty.$$

Vale a pena lembrar que se uma série é absolutamente convergente, então a ordem em que realizamos a soma é irrelevante. Se C_{α} forem vetores em \mathbb{R}^m , então convergência significará que cada componente converge absolutamente.

Exemplo 24. Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, então

$$\sum_{\alpha} x^{\alpha} = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{\alpha_i=0}^{\infty} x_i^{\alpha_i} \right) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1-x_i} = \frac{1}{(1-x)^1}, \quad (5.8)$$

desde que $|x_i| < 1$, para todo i .

Exemplo 25. Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, então de (5.3), temos

$$\sum_{\alpha} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^{\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=j} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^{\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} (x_1 + \dots + x_n)^j = \frac{1}{1 - (x_1 + \dots + x_n)}, \quad (5.9)$$

se $|x_1| + \dots + |x_n| < 1$ (basta que $|x_1 + \dots + x_n| < 1$).

Convergência de uma série de funções escalares $C_{\alpha}(x)$ definidas e contínuas num subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é normalmente estabelecida por comparação com uma série constante c_{α} . Se

$$|C_{\alpha}(x)| \leq c_{\alpha},$$

para todo α e $x \in S$ e se

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} < \infty,$$

então

$$\sum_{\alpha} C_{\alpha}(x) \quad (5.10)$$

converge uniformemente em S e define uma função contínua. Se S for um aberto e se todas as funções forem de classe $C^j(S)$ e se a série diferenciada formalmente

$$\sum_{\alpha} D^{\alpha} C_{\alpha}(x)$$

converge uniformemente para $x \in S$ e cada β com $|\beta| \leq j$, então a soma da série (5.10) pertence a $C^j(S)$ e

$$D^{\beta} \sum_{\alpha} C_{\alpha}(x) = \sum_{\alpha} D^{\beta} C_{\alpha}(x),$$

para todo $x \in S$ e $|\beta| \leq j$.

Exemplo 26. Suponha que $|x_i| < 1$, para todo i , então

$$\sum_{\substack{\alpha \\ \alpha \geq \beta}} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} x^{\alpha - \beta} = \frac{\beta!}{(1-x)^{1+\beta}}. \quad (5.11)$$

De fato, que se $|x_i| < 1$, então de (5.8)

$$\sum_{\alpha} x^{\alpha} = \frac{1}{(1-x)^1}, \quad (5.12)$$

logo derivando o lado esquerdo da equação acima, temos

$$D^\beta \sum_{\alpha} x^\alpha = \sum_{\alpha} D^\beta x^\alpha = \sum_{\substack{\alpha \\ \alpha \geq \beta}} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} x^{\alpha - \beta}$$

na segunda igualdade usamos (5.6). Derivando o lado direito de (5.12), temos

$$D^\beta \frac{1}{(1-x)^1} = \prod_{i=1}^n D_i^{\beta_i} (1-x_i)^{-1} = \prod_{i=1}^n D_i^{\beta_i} (1-x_i)^{-1} = \prod_{i=1}^n \beta_i! (1-x_i)^{-1-\beta_i} = \frac{\beta!}{(1-x)^{1+\beta}}.$$

Exemplo 27. Se $|x_1| + \dots + |x_n| < 1$, então

$$\sum_{\substack{\alpha \\ \alpha \geq \beta}} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} x^{\alpha - \beta} = \frac{\beta!}{(1-x)^{1+\beta}}. \quad (5.13)$$

De fato se $|x_1| + \dots + |x_n| < 1$, então de (5.9), temos

$$\sum_{\alpha} \frac{|\alpha!|}{\alpha!} x^\alpha = \frac{1}{1 - (x_1 + \dots + x_n)}, \quad (5.14)$$

logo derivando o lado esquerdo da equação acima, temos

$$D^\beta \sum_{\alpha} \frac{|\alpha!|}{\alpha!} x^\alpha = \sum_{\alpha} \frac{|\alpha!|}{\alpha!} D^\beta x^\alpha = \sum_{\substack{\alpha \\ \alpha \geq \beta}} \frac{|\alpha!|}{\alpha!} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} x^{\alpha - \beta} = \sum_{\substack{\alpha \\ \alpha \geq \beta}} \frac{|\alpha!|}{(\alpha - \beta)!} x^{\alpha - \beta}$$

na segunda igualdade usamos (5.6). Por outro lado, derivando o lado direito de (5.14), temos

$$\begin{aligned} D^\beta \frac{1}{1 - (x_1 + \dots + x_n)} &= \left(\prod_{i \neq 1} D_i^{\beta_i} \right) \left(D_1^{\beta_1} (1 - (x_1 + \dots + x_n))^{-1} \right) \\ &= \left(\prod_{i \neq 1} D_i^{\beta_i} \right) \beta_1! (1 - x_1)^{-1-\beta_1} \\ &= \beta_1! \left(\prod_{i \neq 1,2} D_i^{\beta_i} \right) \left(D_2^{\beta_2} (1 - x_1)^{-1-\beta_1} \right) \\ &= \beta_1! \left(\prod_{i \neq 1,2} D_i^{\beta_i} \right) ((1 + \beta_1)(1 + \beta_1 + 2) \\ &\quad \cdots (1 + \beta_1 + \beta_2)(1 - (x_1 + \dots + x_n))^{-1-\beta_1-\beta_2}) \\ &= (\beta_1 + \beta_2)! \left(\prod_{i \neq 1,2} D_i^{\beta_i} \right) (1 - (x_1 + \dots + x_n))^{-1-\beta_1-\beta_2} \\ &\quad \vdots \\ &= (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n)! (1 - (x_1 + \dots + x_n))^{-1-\beta_1-\beta_2-\dots-\beta_n} \\ &= \frac{|\beta!|}{(1 - x_1 - \dots - x_n)^{|\beta|+1}}. \end{aligned}$$

Um caso particular são as séries

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}, \quad (5.15)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e c_{α} é real. Suponha que a série acima convirja para algum z , então

$$\mu = \sum_{\alpha} |c_{\alpha}| |z^{\alpha}| < \infty.$$

Logo, se $|x_i| \leq z_i$, temos

$$\sum_{\alpha} |c_{\alpha}| |x^{\alpha}| \leq \sum_{\alpha} |c_{\alpha}| |z^{\alpha}| = \mu,$$

portanto a série (5.15) converge uniformemente para todo x com

$$|x_i| \leq |z_i|, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.16)$$

logo

$$f(x) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha} \quad (5.17)$$

define uma função contínua no conjunto (5.16). Mostraremos a seguir que todas as séries obtidas por derivação formal de (5.15) convergem no interior do conjunto (5.16). Esta convergência é uniforme em qualquer compacto no interior de (5.16). De fato, o interior de (5.16) é dado por

$$|x_i| < |z_i|, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.18)$$

o qual é não-vazio somente se $|z_i| \neq 0$, para todo i , o que assumiremos. Dado um compacto S contido no conjunto (5.16), existem q_1, \dots, q_n com $0 < q_i < 1$, tais que para todo $x \in S$ temos

$$|x_i| \leq q_i |z_i|,$$

para todo i , em particular,

$$|x_i| \leq q |z_i|,$$

onde

$$q = \max_i q_i,$$

portanto, $0 < q < 1$. Logo para qualquer x em S , temos

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} |D^{\beta} c_{\alpha} x^{\alpha}| &= \sum_{\alpha \geq \beta} |c_{\alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} x^{\alpha - \beta}| \quad (\text{usamos (5.6)}) \\ &\leq \sum_{\alpha \geq \beta} |c_{\alpha}| \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} |q^{\alpha - \beta}| |z|^{\alpha - \beta} \\ &\leq \frac{\mu}{|z^{\beta}|} \sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} q^{\alpha - \beta} \\ &\quad (\text{usamos que } \sum_{\alpha} |c_{\alpha} z^{\alpha}| = \mu, \text{ portanto, } |c_{\alpha} z^{\alpha}| \leq \mu, \text{ para todo } \alpha) \\ &= \frac{\mu}{|z^{\beta}|} \frac{\beta!}{(1 - q)^{1 + \beta}} \quad (\text{Usamos (5.13) com } x \text{ substituído por } q, \dots, q) = q1) \\ &= \frac{\mu}{|z^{\beta}|} \frac{\beta!}{(1 - q)^{n + |\beta|}}, \end{aligned}$$

logo a série $\sum_{\alpha} D^{\beta} c_{\alpha} x^{\alpha}$ é uniformemente em S e concluímos que $f(x)$ dada pela série (5.15) é C^{∞} no conjunto (5.18). Além disso, em S temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} |D^{\beta} f(x)| &\leq \frac{\mu}{|z^{\beta}|} \frac{\beta!}{(1-q)^{n+|\beta|}} \\ &= \frac{\mu}{(1-q)^n \prod_{i=1}^n ((1-q)|z_i|^{\beta_i})} \\ &\leq \frac{\mu}{(1-q)^n} |\beta|! r^{-|\beta|} \\ &= M |\beta|! r^{-|\beta|} \end{aligned}$$

onde $r = (1-q) \min |z_i|$. Portanto, $q, r > 0$ só dependem de S . Derivação termo a termo de (5.17) na origem nos dá

$$c_{\alpha} = \frac{D^{\alpha} f(0)}{\alpha!}.$$

5.3 O Problema de Cauchy

Se $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$, então a equação linear de ordem m mais geral é da forma

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} A_{\alpha}(x) D^{\alpha} u = B(x). \quad (5.19)$$

Teremos uma forma similar para um sistema geral de N equações diferenciais em N incógnitas, se interpretarmos u e B como vetores colunas com N componentes ($u(x) = (u_1(x), \dots, u_N(x))$) e $B(x) = (B_1(x), \dots, B_N(x))$ e A_{α} como matrizes $N \times N$.

O sistema de equações quasi-lineares de ordem m mais geral é da forma

$$Lu = \sum_{|\alpha|=m} A_{\alpha}(x) D^{\alpha} u + C = 0. \quad (5.20)$$

onde A e C são funções das variáveis independentes x_k e das derivadas $D^{\beta} u$ da incógnita u , de ordens $|\beta| \leq m - 1$. Equações não-lineares mais gerais ou sistemas

$$F(x, D^{\alpha} u) = 0, \quad (5.21)$$

podem ser formalmente reduzidos a sistemas quasi-lineares aplicando um operador diferencial de primeira ordem a (5.20). Por outro lado, sistemas quasi-lineares de ordem m da forma (5.20) podem ser transformados em sistemas quasi-lineares de primeira ordem (com mais equações), introduzindo todas as derivadas $D^{\beta} u$ com $|\beta| \leq m - 1$ como novas variáveis independentes e fazendo uso de condições de compatibilidades adequadas para os $D^{\beta} u$.

Definição 2. O problema de Cauchy consiste em encontrarmos uma solução u de (5.19) ou (5.20) tendo dados de Cauchy prescritos numa hipersuperfície $S \subset \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (5.22)$$

onde ϕ é de classe C^m e é regular no sentido que

$$D\phi = (\phi_{x_1}, \dots, \phi_{x_n}) \neq 0. \quad (5.23)$$

Os dados de Cauchy em S para uma equação de ordem m consiste das derivadas de u de ordens menores ou iguais a $m - 1$. Eles não podem ser dados arbitrariamente, mas devem satisfazer condições de compatibilidades válidas em S . Devemos encontrar uma solução u próximo de S que tem estes dados de Cauchy.

Definição 3. Dizemos que S é não-característica se pudermos determinar (em todos os seus pontos) todas as derivadas $D^\alpha u$ com $|\alpha| = m$, a partir do sistema de equações algébricas consistindo das condições de compatibilidades para os dados e a equação diferencial (5.20) tomados em S . Se em todo $x \in S$ a superfície S não for não-característica, dizemos que S é característica.

A seguir obteremos critérios algébricos para superfícies características. Consideraremos primeiro o caso particular em que a hiper-superfície S é o plano coordenado $x_n = 0$, depois consideraremos o caso geral em que ela é dada por $\phi(x_1, \dots, x_n) = 0$, o qual mostraremos que reduz-se ao caso anterior através de mudança de coordenadas.

No caso em que a hiper-superfície é o plano $x_n = 0$, os dados de Cauchy consiste em especificarmos $D^\beta u$ com $|\beta| \leq m - 1$ em $x_n = 0$, ou seja, para tais multi-índices fazemos $D^\beta u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = f^\alpha(x_1, \dots, x_{n-1})$. As derivadas normais são

$$D_n^k u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \psi_k(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad k = 0, \dots, m - 1 \quad (5.24)$$

temos em S

$$D^\beta u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = D_1^{\beta_1} D_2^{\beta_2} \dots D_{n-1}^{\beta_{n-1}} \psi_{\beta_n}, \quad (5.25)$$

desde que $\beta_n \leq m - 1$ (não há restrições nas outras componentes do multi-índice!). Note que para $|\beta| \leq m - 1$ temos condições de compatibilidades expressando todos os dados de Cauchy em termos das derivadas normais em S . Seja

$$\alpha^* = (0, \dots, 0, m). \quad (5.26)$$

Não temos como expressar $D^{\alpha^*} u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ em termos de $\psi_0, \dots, \psi_{m-1}$ e, portanto, em termos dos dados de Cauchy. Portanto, $D^{\alpha^*} u$ e, conseqüentemente, todas as derivadas $D^\alpha u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ para $|\alpha| \leq m$ serão determinados a partir dos dados de Cauchy, se pudermos resolver a equação diferencial em termos de $D^{\alpha^*} u$ (e neste caso o plano $x_n = 0$ será não-característico). Isto será sempre possível de uma maneira única se

$$\det(A_{\alpha^*}) \neq 0, \quad (5.27)$$

(ou $A_{\alpha^*} \neq 0$, no caso escalar). Note que caso linear, $A_{\alpha^*} = A_{\alpha^*}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$, portanto, não depende dos dados de Cauchy. No caso quasi-linear, onde $A_\alpha = A_\alpha(x, D^\beta)$, com $|\beta| \leq m - 1$, portanto devemos conhecer ψ_k a fim de decidir se S é não-característica.

A condição (5.27) envolve somente derivadas de ordem m , definimos a parte principal P_{pr} do operador L como consistindo dos termos de ordem maior em L :

$$L_{pr} = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha D^\alpha. \quad (5.28)$$

A matriz característica de L (símbolo de L_{pr}) é a seguinte matriz

$$\Lambda(\zeta) = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha \zeta^\alpha. \quad (5.29)$$

Em particular, o multiplicador de D_n^m em L_{pr} é $A_{\alpha^*} = \Lambda(\eta)$, onde

$$\eta = (0, \dots, 0, 1) = D\phi, \quad (5.30)$$

é o vetor normal à superfície $\phi = x_n = 0$.

Lema 1. *Logo a condição para o plano $x_n = 0$ ser não-característico é que*

$$Q(D\phi) \neq 0, \quad (5.31)$$

onde $Q = Q(\zeta)$ é a forma característica definida por

$$Q(\zeta) = \det(\Lambda(\zeta)). \quad (5.32)$$

Mostraremos que mesmo que S seja dada por (5.22), a condição (5.32) garante que S seja não-característica. Como por hipótese as derivadas primeiras de ϕ não se anulam simultaneamente, suponha que numa vizinhança de um dado ponto de S , a condição $\phi_{x_n} \neq 0$ aconteça. Introduziremos novas variáveis y_1, \dots, y_n , tais que nestas novas variáveis a superfície S seja mapeada no plano $y_n = 0$ e cairemos no caso anterior. Considere a seguinte transformação:

$$y_i = \begin{cases} x_i, & \text{para } i = 1, \dots, n-1 \\ \phi(x_1, \dots, x_n), & \text{para } i = n \end{cases} \quad (5.33)$$

então

$$\left| \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right| = \phi_{x_n} \neq 0$$

portanto a transformação é localmente inversível e também regular. Seja $v(x_1, \dots, x_n) = u(y_1, \dots, y_n)$, onde $y_i = y_i(x_1, \dots, x_n)$, dados acima, então da Regra da Cadeia, temos

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \sum_k C_{ik} \frac{\partial u}{\partial y_k} = (C(du))_i. \quad (5.34)$$

Sejam d e D os operadores gradientes, cujas i -ésimas componentes são $\frac{\partial}{\partial y_i}$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}$, respectivamente. Então a equação acima pode ser escrita simbolicamente

$$D = Cd. \quad (5.35)$$

Note que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i} = \sum_{k,l} C_{jl} C_{il} \frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial y_l} + \sum_{k,l} C_{jk} \frac{\partial C_{il}}{\partial y_k} \frac{\partial v}{\partial y_l},$$

portanto,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} = \sum_{k,l} C_{jl} C_{il} \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_l} + \sum_{k,l} C_{jk} \frac{\partial C_{il}}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_l},$$

em geral, para $|\alpha| = m$, temos

$$D^\alpha = (Cd)^\alpha + R_\alpha, \quad (5.36)$$

onde R_α é um operador diferencial linear envolvendo somente derivadas de ordens $\leq n - 1$ (surgindo da dependência de C em x) e $(Cd)^\alpha$ é formado como se C fosse uma matriz constante, ou seja, seus elementos não são diferenciados. Então a parte principal do operador L em (5.19) e (5.20) transformado nas variáveis y é dada por

$$l_{pr} = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha (Cd)^\alpha \quad (5.37)$$

o seu símbolo, matriz característica de l , é

$$\lambda(\eta) = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha (C\eta)^\alpha. \quad (5.38)$$

Para a transformação (5.33) derivadas em relação x de ordem $\leq r$ são combinações lineares de derivadas em relação à y de ordem $\leq r$, e reciprocamente. Logo a transformação preserva o caráter não-característico de S . Portanto S é característico para L , se o plano $y_n = 0$ for característico em relação ao operador L transformado pelas coordenadas y , se

$$\det(\lambda(\eta)) = \det \left(\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha (C\eta)^\alpha \right) \neq 0, \quad (5.39)$$

para o vetor coluna $\eta = (0, \dots, 0, 1)$ (vetor normal à superfície $y_n = 0$). Mas

$$\zeta_i = (C\eta)_i = \sum_k C_{ik} \eta_k = C_{in} = \frac{\partial y_n}{\partial x_i} = \phi_{x_i} = D_i \phi,$$

logo $C\eta = D\phi$, logo a condição para S ser não-característica é $\det \left(\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha (D\phi)^\alpha \right) \neq 0$, a mesma obtida em (5.31). \square

Se u em (5.31) for um vetor de N componentes, a condição para S ser característica é

$$Q(D\phi) = \det \left(\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha (D\phi)^\alpha \right) = 0, \quad (5.40)$$

Exemplo 28. Para o sistema linear

$$Lu = \sum_{i=1}^n A_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + B(x)u = w(x),$$

onde u e w são vetores com N componentes, B e A_i matrizes $N \times N$, a condição para superfície característica é

$$\det \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x_i} A_i \right) = 0.$$

Exemplo 29. Considere a equação da onda

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}).$$

Quando é que a superfície S dada por $t = \psi(x, y)$ será característica? Neste caso

$$Lu = u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}).$$

Se fizermos

$$\phi(x, y, t) = t - \psi(x, y),$$

então a superfície S será da forma $\phi(x, y, t) = 0$, portanto de (5.40) S será característica se

$$1 - c^2(\psi_x^2 + \psi_y^2) = 0 \iff 1 = c^2(\psi_x^2 + \psi_y^2).$$

Exemplo 30. Uma hipersuperfície é característica para um operador L (e para os dados de Cauchy $D^\beta u$, no caso não linear), se $Q(\zeta) = 0$ para o vetor ζ normal à superfície. Dizemos que L é elíptico se $Q(\zeta) \neq 0$, para todo $\zeta \neq 0$. Neste caso não existem hipersuperfícies características reais. Por exemplo, se

$$L = \Delta = D_1^2 + \dots + D_n^2,$$

então

$$Q(\zeta) = \sum_{i=1}^n \zeta_i^2,$$

que é positivo definido.

Exemplo 31. Seja $u = u(x_1, \dots, x_n)$ e considere a equação escalar de ordem m para u :

$$F(x, p_\alpha) = 0, \tag{5.41}$$

onde $p_\alpha = D^\alpha u$, com $|\alpha| \leq m$. Suponha que na hipersuperfície dada por (5.40) tenhamos $\phi_{x_n} \neq 0$. Derivando a equação acima em relação a x_n , temos

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_n} + \sum_{\alpha} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} D_n D^\alpha u = Lu. \tag{5.42}$$

A parte principal operador L é

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} D_n D^\alpha u,$$

a sua matriz característica é

$$\Lambda(\zeta) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \zeta_n \zeta^\alpha,$$

logo a hipersuperfície será característica se

$$Q(D\phi) = \det(\Lambda(D\phi)) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} (D_n \phi) (D\phi)^\alpha = 0.$$

Como $D_n \phi = \phi_{x_n} \neq 0$, temos a seguinte condição

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} (D\phi)^\alpha = 0. \tag{5.43}$$

Exemplo 32. Uma hipersuperfície é característica para um operador L (e para os dados de Cauchy $D^\beta u$, no caso não linear), se $Q(\zeta) = 0$ para o vetor ζ normal à superfície. Dizemos que L é elíptico se $Q(\zeta) \neq 0$, para todo $\zeta \neq 0$. Neste caso não existem hipersuperfícies características reais. Por exemplo, se

$$L = \Delta = D_1^2 + \dots + D_n^2,$$

então

$$Q(\zeta) = \sum_{i=1}^n \zeta_i^2,$$

que é positivo definido.

Exemplo 33. Seja $u = u(x_1, \dots, x_n)$ e considere a equação escalar de ordem m para u :

$$F(x, p_\alpha) = 0, \quad (5.44)$$

onde $p_\alpha = D^\alpha u$, com $|\alpha| \leq m$. Suponha que na hipersuperfície dada por (5.40) tenhamos $\phi_{x_n} \neq 0$. Derivando a equação acima em relação a x_n , temos

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_n} + \sum_{\alpha} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} D_n D^\alpha u = Lu. \quad (5.45)$$

A parte principal operador L é

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} D_n D^\alpha u,$$

a sua matrix característica é

$$\Lambda(\zeta) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \zeta_n \zeta^\alpha,$$

logo a hipersuperfície será característica se

$$Q(D\phi) = \det(\Lambda(D\phi)) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} (D_n \phi) (D\phi)^\alpha = 0.$$

Como $D_n \phi = \phi_{x_n} \neq 0$, temos a seguinte condição

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} (D\phi)^\alpha = 0. \quad (5.46)$$

5.4 Funções Analíticas reais

Definição 4. Seja f uma função cujo domínio é um conjunto aberto Ω do \mathbb{R}^n e cuja imagem está em \mathbb{R} . Dizemos que f é analítica real em $y \in \Omega$ se existirem coeficientes $c_\alpha \in \mathbb{R}$ e uma vizinhança N de y (tudo dependendo de y) tal que

$$f(x) = \sum_{\alpha} c_\alpha (x - y)^\alpha,$$

para todo $x \in N$. Dizemos que f é real analítica em Ω ($f \in C^\omega(\Omega)$), se f for analítica real em cada y de Ω . Uma função vetorial $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ é analítica real, se cada uma das suas componentes forem funções analíticas reais.

Teorema 6. Se $f = (f_1, \dots, f_n) \in C^\omega(\Omega)$, então $f \in C^\infty(\omega)$. Além disso, para todo $y \in \omega$ existe uma vizinhança N de y e números positivos M, r tais que

$$f(x) = \sum_{\alpha} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} (x - y)^\alpha$$

$$|D^\beta f_k(x)| \leq M |\beta|! r^{-|\beta|},$$

para todo β e todo k .

Teorema 7. Seja $f \in C^\omega(\Omega)$, onde Ω é um subconjunto aberto e conexo do \mathbb{R}^n . Seja $z \in \Omega$. Então f é unicamente determinada em Ω , se soubermos $D^\alpha f(z)$ para todo α . Em particular f é unicamente determinada em Ω pelos seus valores em qualquer subconjunto aberto e não vazio de Ω .

Prova. Suponha que $g, h \in C^\omega(\Omega)$ e seja $D^\alpha g(z) = D^\alpha h(z)$, para todo α . Defina $f = g - h$ e decomponha Ω nos seguintes subconjuntos disjuntos:

$$\Omega_1 = \{x | x \in \Omega, D^\alpha f(x) = 0, \text{ para todo } \alpha\}$$

$$\Omega_2 = \{x | x \in \Omega, D^\alpha f(x) \neq 0, \text{ para algum } \alpha\}.$$

Se $x_o \in \Omega_1$, então $D^\alpha f(x_o) = 0$, para todo α , como $f \in C^\omega(\Omega)$, segue que a série $\sum_{\alpha} \frac{D^\alpha f(x_o)}{\alpha!} (x - x_o)^\alpha = 0$ converge para $f(x)$ para todo x numa vizinhança N de x_o . Portanto, $f(x) = 0$ em N , logo, $D^\alpha f(x) = 0$ em N , o que mostra que $N \in \Omega_1$, portanto, Ω_1 é aberto. Por outro lado, se $x_o \in \Omega_2$, então existe algum α , tal que $D^\alpha f(x_o) \neq 0$, como $f \in C^\infty(\Omega)$ então $D^\alpha f(x)$ é contínua, segue que $D^\alpha f(x) \neq 0$ numa vizinhança N de x_o , logo, $N \in \Omega_2$, o que mostra que Ω_2 é aberto. Portanto, ambos Ω_1 e Ω_2 são abertos, além disso, como $z \in \Omega_1$, então Ω_1 é não vazio. Como Ω é um conjunto aberto e conexo, então Ω_2 tem que ser vazio. Portanto, $\Omega = \Omega_1$. \square

Observação 4. Um conjunto aberto é conexo, se não puder ser decomposto como a união disjunta de dois conjuntos abertos não-vazios.

Definição 5. Seja $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ definida num aberto $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Se $y \in \Omega$ e M, r são números reais positivos, dizemos que $f \in C_{M,r}(y)$ se $f \in C^\infty$ numa vizinhança de y e

$$|D^\beta f_k(y)| \leq M |\beta|! r^{-|\beta|}, \quad (5.47)$$

para todo β e todo k .

Teorema 8. Seja f definida num aberto Ω . Então a condição necessária e suficiente para que $f \in C^\omega(\Omega)$ é que $f \in C^\infty(\Omega)$ e que para todo compacto $S \subset \Omega$ possamos encontrar $M, r > 0$, tais que $f \in C_{M,r}(y)$, para todo $y \in S$.

Prova. Seja $f \in C^\omega(\Omega)$ e $S \subset \Omega$ compacto. Como $f \in C^\omega(\Omega)$, então pelo Teorema 6, $f \in C^\infty(\Omega)$ e para cada $z \in \Omega$ podemos encontrar números positivos $M = M(z)$ e $r = r(z)$ e uma vizinhança $N = N(z)$, tal que

$$|D^\beta f_k(x)| \leq M|\beta|!r^{-|\beta|},$$

para todo $x \in N(z)$, todo k e todo β . Como S é compacto, um número finito de $N(z)$, digamos $N(z^1), \dots, N(z^j)$ cobrem S . Portanto, se fizermos $M = \max M(z^i)$ e $r = \min r(z^i)$, segue que

$$|D^\beta f_k(x)| \leq M|\beta|!r^{-|\beta|},$$

para todo $x \in S$, todo k e todo β . Logo $f \in C_{M,r}(y)$, para todo $y \in S$.

Reciprocamente, suponha que $f \in C^\infty(\Omega)$ e que exista para cada compacto $S \subset \Omega$, existam constantes positivas r, M , tais que para todo $x \in S$, $f \in C_{M,r}(x)$. Tome qualquer $y \in \Omega$ e tome o compacto

$$S = \{x \mid |x - y| \leq s\},$$

onde $s > 0$ é pequeno o suficiente de modo que $S \subset \Omega$. Por hipótese existem $M, r > 0$, tais que para todo $x \in S$, temos $f \in C_{M,r}(x)$. Mostraremos que f é analítica real em y , ou seja,

$$f_k(x) = \sum_{\alpha} \frac{D^\alpha f(y)}{\alpha!} (x - y)^\alpha. \quad (5.48)$$

se x satisfizer

$$d = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| \leq \min(r, s).$$

Seja

$$\phi(t) = f_k(y + t(x - y)).$$

Como $|(y + t(x - y)) - y| = t|x - y| \leq |x - y| \leq s$, segue $y + t(x - y) \in S$, para todo $x, y \in S$ e $0 \leq t \leq 1$. Para todo $j \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dt^j} \phi(t) \right| &= \frac{1}{j!} \left| \sum_{|\alpha|=j} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} D^\alpha f(y + t(x - y)) (x - y)^\alpha \right|, \quad (\text{usamos de (5.7)}) \\ &\leq \sum_{|\alpha|=j} \frac{M|\alpha|!}{\alpha!} r^{-|\alpha|} |(x - y)^\alpha|, \quad (\text{usamos que } |D^\alpha f(y + t(x - y))| \leq M|\alpha|!r^{-|\alpha|}) \\ &= Mr^{-j} \sum_{|\alpha|=j} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |(x - y)^\alpha| \\ &= Mr^{-j} \sum_{|\alpha|=j} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \prod_i |x_i - y_i|^{\alpha_i} \\ &\leq Mr^{-j} \sum_{|\alpha|=j} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} y^\alpha, \quad (y = (|x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|)) \\ &= Mr^{-j} (y_1 + \dots + y_n)^j, \quad (\text{usamos (5.3)}) \\ &= Mr^{-j} d^j. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Taylor,

$$f_k(x) = \phi(1) = \sum_{l=0}^{j-1} \frac{1}{l!} \phi^{(l)}(0) + r_j = \sum_{|\alpha| \leq j-1} \frac{D^\alpha f(y)}{\alpha!} (x-y)^\alpha + r_j,$$

onde

$$|r_j| = \left| \frac{1}{(j-1)!} \int_0^1 (1-t)^{t-1} \phi^{(j)}(t) dt \right| \leq M r^{-j} d^j,$$

como $d < r$, tomando o limite quando j tende para infinito, segue (5.48). \square

Definição 6. *Sejam f e F funções com domínio em \mathbb{R}^n com imagem em \mathbb{R}^m , de classe C^∞ numa vizinhança da origem. Dizemos que f é majorada por F ($f \ll F$) se*

$$|D^\alpha f_k(0)| \leq D^\alpha F_k(0),$$

para todo k e α .

Teorema 9. *O vetor $f(x)$ pertence a $C_{M,r}(0)$ se, e somente se,*

$$f \ll (\phi, \dots, \phi) = \phi 1,$$

onde ϕ é a função escalar

$$\phi(x) = \frac{Mr}{r - x_1 - \dots - x_n}.$$

Além disso, $f \in C_{M,r}(0)$ e $f(0) = 0$ é equivalente a

$$f \ll (\phi - M, \dots, \phi - M) = (\phi - m)1,$$

onde

$$\phi - M = \frac{M(x_1 + \dots + x_n)}{r - x_1 - \dots - x_n}.$$

Prova. Note que de (5.9), temos

$$\phi(x) = \frac{M}{1 - (x_1 + \dots + x_n)/r} = \sum_{\alpha} \frac{M |\alpha|! r^{-|\alpha|}}{\alpha!} x^\alpha,$$

se $|x_1| + \dots + |x_n| < r$ (o que acontecerá numa vizinhança de 0). Portanto,

$$D^\alpha \phi(0) = |\alpha|! r^{-|\alpha|}.$$

Logo, se

$$f \ll \phi 1,$$

temos

$$|D^\alpha f_k(0)| \leq |\alpha|! r^{-|\alpha|} = D^\alpha \phi(0),$$

o que implica que $f \ll \phi 1$. Por outro lado, se $f \ll \phi 1$, temos

$$|D^\alpha f_k(0)| \leq D^\alpha \phi(0) = |\alpha|! r^{-|\alpha|},$$

para todo k e todo α , o que implica que $f_k \in C_{M,r}(0)$, portanto, $f \in C_{M,r}(0)$. **terminar a demonstração** \square

Certas operações preservam a majorização. Trivialmente, se $f \ll F$, então $D^\alpha f \ll D^\alpha F$. De fato, se $f \ll F$, então $D^\alpha f$ e $D^\alpha F$ são C^∞ numa vizinhança da origem para todo α . Além disso,

$$|D^\beta(D^\alpha f)(0)| = |D^{\beta+\alpha} f(0)| \leq D^{\beta+\alpha} F(0) = D^\beta(D^\alpha F(0)),$$

para todo β , logo $D^\alpha f \ll D^\alpha F$.

Teorema 10. *Sejam $f(x)$ e $F(x)$ funções C^∞ numa vizinhança da origem do \mathbb{R}^n no \mathbb{R}^m e sejam $g(u)$ e $G(u)$ funções C^∞ numa vizinhança da origem do \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^p . Sejam $f(0) = F(0) = 0$, $f \ll F$ e $g \ll G$, então*

$$g(f(x)) \ll G(F(x)).$$

Prova. Por serem compostas de funções C^∞ numa vizinhança de 0, então $h(x) = g(f(x))$ e $H(x) = G(F(x))$ são C^∞ próximo de $x = 0$. Para cada α e $k = 1, \dots, p$, por aplicação repetida da Regra da Cadeia, temos

$$D^\alpha h_k(0) = P_\alpha(\delta^\beta g_k(0), D^\gamma f_j(0)).$$

Onde P_α é um polinômio nos seus argumentos, cujos coeficientes são inteiros não-negativos, $\delta = (\partial/\partial u_1, \dots, \partial/\partial u_m)$, $j = 1, \dots, m$, $|\beta|, |\gamma| \leq |\alpha|$. Então,

$$|D^\alpha h_k(0)| = |P_\alpha(\delta^\beta g_k(0), D^\gamma f_j(0))| \leq P_\alpha(\delta^\beta G_k(0), D^\gamma F_j(0)) = D^\alpha H_k(0),$$

para todo k e todo α . \square

Podemos usar o teorema acima para obter estimativas de derivadas de funções compostas, como mostraremos a seguir.

Corolário 1. *Sejam f uma função que mapea uma vizinhança de $y \in \mathbb{R}^n$ no \mathbb{R}^m e g uma função que mapea uma vizinhança de $v = f(y)$ no \mathbb{R}^p . Se $f \in C_{M,r}(y)$ e $g \in C_{\mu,\rho}(v)$, então*

$$h(x) = g(f(x)) \in C_{\mu,\rho/(mM+\rho)}(y).$$

Prova. Defina

$$h(y+x) = g(v + f(y+x) - f(y)) := g^*(f^*(x)),$$

onde

$$g^*(u) = g(u+v) \in C_{\mu,\rho}(0) \implies g^* \ll (\psi, \dots, \psi), \text{ onde } \psi(x) = \frac{\mu\rho}{\rho - x_1 - \dots - x_n}$$

e

$$f^*(x) = f(y+x) - f(y) \in C_{M,r}(0), \quad f^*(0) = 0 \implies f^* \ll (\phi - M, \dots, \phi - M), \quad \phi - M = \frac{M(x_1 + \dots + x_n)}{r - x_1 - \dots - x_n},$$

estas conclusões seguem imediatamente do Teorema 9. Portanto do Teorema 10, temos

$$\begin{aligned} h(x+y) = g^*(f^*(x)) &\ll (\psi 1)((\phi 1)(x)) \\ &= (\psi(\phi(x) - M, \dots, \phi(x) - M), \dots, \psi(\phi(x) - M, \dots, \phi(x) - M)) \\ &:= (\chi(x), \dots, \chi(x)), \end{aligned}$$

onde

$$\chi(x) = \frac{\mu\rho}{\rho - m(\phi(x) - M)} = \frac{\mu\rho(r - x_1 - \dots - x_n)}{\rho r - (\rho + mM)(x_1 + \dots + x_n)}.$$

Podemos escrever

$$\chi = \chi_1 - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n x_i \chi_1,$$

onde

$$\chi_1 = \frac{\mu}{1 - \frac{(\rho+mM)(x_1+\dots+x_n)}{\rho r}} = \mu \sum_{\alpha} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \left(\frac{\rho r}{\rho + mM} \right)^{-|\alpha|} x^{\alpha},$$

portanto,

$$D^{\alpha} \chi_1(0) = \mu |\alpha|! \left(\frac{\rho r}{\rho + mM} \right)^{-|\alpha|},$$

logo

$$\chi_1 \in C_{\mu, \frac{\rho r}{\rho + mM}}(0).$$

Note que

$$D^{\alpha} \chi(0) = D^{\alpha} \chi_1(0) - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n D^{\alpha} (x_i \chi_1)(0).$$

Seja $\beta^{(i)}$ o multi-índice $\beta_j^{(i)} = \delta_{ij}$. Se $\alpha_i = 0$, então $D^{\alpha} (x_i \chi_1)(0) = 0$, caso contrário, pela Regra de Leibniz, temos

$$D^{\alpha} (x_i \chi_1)(0) = \alpha_i D^{\alpha - \beta^{(i)}} \chi_1(0) = \alpha_i \mu (|\alpha| - 1)! \left(\frac{\rho r}{\rho + mM} \right)^{-|\alpha|+1}.$$

Logo,

$$0 \leq \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n D^{\alpha} (x_i \chi_1)(0) \leq \mu |\alpha|! \left(\frac{\rho r}{\rho + mM} \right)^{-|\alpha|+1} = D^{\alpha} \chi_1(0)$$

e concluímos que

$$D^{\alpha} \chi(0) \leq D^{\alpha} \chi_1(0),$$

portanto,

$$\chi \ll \chi_1,$$

e que

$$\chi \in C_{\mu, \frac{\rho r}{\rho + mM}}(0),$$

portanto,

$$h \in C_{\mu, \frac{\rho r}{\rho + mM}}(0).$$

□

5.4.1 A prova do Teorema de Cauchy-Kovalevski

O teorema assegura a existência e unicidade de solução analítica real do problema de Cauchy quando os dados e as equações são analíticas. Como sistemas de equações não-lineares mais gerais podem ser transformados em sistemas quasi-lineares por diferenciação, nos restringiremos a sistemas quasi-lineares da forma

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha D^\alpha u + C = 0. \quad (5.49)$$

Assumiremos que a superfície inicial S seja analítica real numa vizinhança de um dos seus pontos x^0 e numa vizinhança deste S seja dada por uma equação $\phi(x) = 0$, onde ϕ é real e analítica em x^0 e que $D\phi \neq 0$ em x^0 , digamos $D_n\phi \neq 0$. Em S prescrevemos dados de Cauchy compatíveis para $D^\beta u$, com $|\beta| < m$, o qual deve ser analítico real em x^0 , ou seja, ele é localmente representado por uma série de potências de $x_1 - x_1^0, \dots, x_{n-1} - x_{n-1}^0$. Os coeficientes A_α, C devem ser funções analíticas reais dos seus argumentos $x, D^\beta u$ no ponto $x^0, D^\beta u^0$, ou seja, dados por uma série de potências em $x - x^0, D^\beta u - D^\beta u^0$, próximo de $x^0, D^\beta u^0$, onde $D^\beta u^0$ é o valor de $D^\beta u$ correspondente ao dado de Cauchy em x^0 . Assumimos que S seja não-característica em x^0 (e conseqüentemente, numa vizinhança deste ponto), no sentido que $Q(D\phi) \neq 0$. O teorema assegura que existe a uma única solução que é analítica real em x^0 .

A prova do teorema consiste em mostrar que todos os coeficientes da expansão em séris de potências de $x - x^0$ da solução esperada podem ser unicamente determinados por sucessiva derivação da equação diferencial e dos dados de Cauchy e que a série obtida realmente converge para uma solução.

Para facilitar a demonstração, faremos algumas transformações antes de construirmos a série de potências. Primeiramente transformaremos x^0 na origem e S numa vizinhança da origem no hiperplano $x_n = 0$ (aplainamos S) através de uma transformação analítica. Introduzindo derivadas de ordem menor do que m como novas variáveis dependentes, reduzimos o sistema a um sistema de primeira ordem. Aqui usamos que o conjunto ds funções analíticas reais são fechados a diferenciação e a composição. Com isso obtemos um sistema de primeira ordem no qual a matriz coeficiente do termo $\partial u / \partial x_n$ é não degenerado uma vez que S é não característica. Podemos resolver o sistema, obtendo um sistema na forma padrão

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} a^i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x, u), \quad (5.50)$$

onde $a^i(x, u)$ são matrizes quadradas (a_{jk}^i) e $b(x, u)$ é um vetor coluna com componentes b_i . Em $x_n = 0$, próximo de 0, prescrevemos os valores iniciais $u = f(x_1, \dots, x_{n-1})$. Assumiremos $f = 0$, introduzindo $u - f$ como nova função desconhecida. Podemos adicionar x_n como uma variável dependente adicional u^* , ou componente de u , satisfazendo a equação $\partial u^* / \partial x_n = 1$ e condição inicial $u^* = 0$. Com isso a^i e b não dependem de x_n . Escrevendo componente a componente, temos que provar a seguinte versão do teorema de Cauchy-Kovalevski:

Teorema 11. *Sejam a_{jk}^i e b_j funções analíticas reais de $z = (x_1, \dots, x_{n-1}, u_1, \dots, u_N)$ na origem \mathbb{R}^{N+n-1} . Então o sistema de equações diferenciais*

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^N a_{jk}^i(z) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + b_j(z), \quad j = 1, \dots, N \quad (5.51)$$

com condições iniciais

$$u_j = 0, \text{ para } x_n = 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (5.52)$$

tem um único sistema de equações $u_j(x_1, \dots, x_n)$ que é analítico na origem.

Prova. Para quaisquer soluções $u_j(x)$ de (5.51) que são analíticas na origem e todo α , aplicando D^α e fazendo $x = 0$, obtemos relações da forma

$$D_n D^\alpha u_j(0) = P_\alpha(d^\beta a_{jk}^i(0), d^\gamma b_j(0), D^\alpha u_k(0)).$$

Aqui d é o operador gradiente em relação a z :

$$d = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{N+n-1}} \right),$$

β, γ têm $N + n - 1$ componentes, $|\beta|, |\gamma| \leq |\alpha|$, δ tem n componentes, $|\delta| \leq |\alpha| + 1$, $i = 1, \dots, n - 1$, $j, k = 1, \dots, N$ e P_α é um polinômio nos seus argumentos, cujos coeficientes são inteiros não-negativos (nem a regra da cadeia para diferenciação, nem a regra para diferenciação de produtos pode nos levar a algo diferente). Além disso, das condições iniciais (5.52),

$$D^\alpha u_j(0) = 0, \text{ para } \alpha_n = 0.$$

Por indução em α_n , obtemos das relações acima todos os $D^\alpha u_j(0)$, em termos de apenas $d^\beta a_{jk}^i(0), b_j^\gamma(0)$. Então os $u_j(x)$ são determinados unicamente (desde que sejam representados por série de potências) através de (5.51) e (5.52). Reciprocamente, se calcularmos recursivamente quantidades c_j^α das relações acima, substituindo em toda parte $D^\alpha u_j(0)$ por c_j^α e se a séries de potências

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} x^\alpha$$

convergir e representa $u_j(x)$ próximo de 0, então os $u_j(x)$ formam uma solução de (5.51) e (5.52) analítica em 0. De fato, $c_j^\alpha = D^\alpha u_j(0)$ é satisfeito. Além disso, para $u_k(x)$ real analítica ambos os lados de (5.51) serão analíticos e 0 e (5.51) garante que os coeficientes na série de potências para ambos lados sejam iguais.

Portanto, tudo que falta provar é que a série formal de $u_j(x)$ com coeficientes $D^\alpha u_j(0)/\alpha!$ obtida pelas relações de recorrências acima converge perto de $x = 0$. Isto é facilmente obtido pelo método de majorantes. Seja

$$a_{jk}^i(z) \ll A_{jk}^i, \quad b_j(z) \ll B_j(z)$$

e $U_j(z)$ forma uma solução do “problema majorante”

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^N A_{jk}^i(z) \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + B_j(z), \quad j = 1, \dots, N \quad (5.53)$$

com condições iniciais

$$U_j = 0, \text{ para } x_n = 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (5.54)$$

que é analítica em 0. Então claramente

$$|D^\alpha u_j(0) \leq D^\alpha U_j(0),$$

acontece para $D^\alpha u_j(0)$ calculado recursivamente. Portanto, a série formal baseada nos $D^\alpha u_j(0)$ na verdade converge e representa uma solução do nosso problema de Cauchy numa vizinhança da origem. Falta-nos produzir um sistema majorante cuja solução é analítica em 0. Suponha que $a_{jk}^i(z)$ e $b_j(z)$ pertençam a $C_{M,r}(0)$ e portanto majorado pela função

$$\phi(z) = \frac{Mr}{r - z_1 - \dots - z_{N+n-1}}.$$

Então o problema de Cauchy majorante é (fazemos $A_{j,k}^i(z) = \phi(z)$ e $B_j(z) = \phi(z)$, para todo i, j, k)

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_n} = \frac{Mr}{r - x_1 - \dots - x_{N+n-1} - U_1 - \dots - U_N} \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^N \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right), \quad j = 1, \dots, N \quad (5.55)$$

com condições iniciais

$$U_j = 0, \quad \text{para } x_n = 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (5.56)$$

Este problema tem solução da forma

$$U_j(x_1, \dots, x_n) = V(x_1 + \dots + x_{n-1}, x_n), \quad j = 1, \dots, N,$$

onde $V(s, t)$, $s = x_1 + \dots + x_{n-1}$, $t = x_n$ é a solução do problema de Cauchy escalar de primeira ordem (todos os U_j são iguais a V , para todo j , $\frac{\partial U_k}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial s}$, para todo $i = 1, \dots, n-1$)

$$V_t = \frac{Mr}{r - s - NV} (1 + N(n-1)V_s), \quad V(s, 0) = 0.$$

Exercício 13. Considere o seguinte problema de Cauchy

$$(r - x - NV)V_y - MN(n-1)r V_x = Mr, \quad V(x, 0) = 0.$$

Mostre que

$$V(x, y) = \frac{1}{Nn} (r - x - \sqrt{(r-x)^2 - 2nMNry}).$$

De fato as equações características são

$$\frac{dy}{dt} = r - x - Nz, \quad \frac{dx}{dt} = -MN(n-1)r, \quad \frac{dz}{dt} = Mr, \quad x(s, 0) = s, \quad y(s, 0) = 0, \quad z(s, 0) = 0.$$

Logo

$$x(s, t) = -MN(n-1)rt + s, \quad z(s, t) = Mrt,$$

logo

$$\frac{dy}{dt} = r - s + MN(n-2)rt$$

portanto,

$$y(s, t) = (r - s)t + \frac{MN(n - 2)r}{2} t^2.$$

precisamos expressar t em função de x e y . Note que eliminando s das equações de x e y , encontramos

$$MNnrt^2 - 2(r - x)t + 2y = 0,$$

e encontramos

$$t = \frac{r - x \pm \sqrt{(r - x)^2 - 2MNnry}}{MNrn},$$

raiz compatível com $t \geq 0$ é

$$t = \frac{r - x + \sqrt{(r - x)^2 - 2MNnry}}{MNrn},$$

portanto temos

$$V(x, y) = \frac{r - x + \sqrt{(r - x)^2 - 2MNnry}}{Nn}.$$

Portanto do exercício 13, temos

$$V(s, t) = \frac{1}{Nn}(r - s - \sqrt{(r - s)^2 - 2nMNrt}),$$

que é analítica real em s, t na origem.

A função $V(s, t)$ depende dos parâmetros M, r e dos inteiros n, N . Portanto, pertence a $C_{\mu, \rho}$ onde μ, ρ dependem somente de M, r, N, n . Sua expansão tem termos de s e t converge para $|s| + |t| < \rho$, logo a solução em série de potências do problema de Cauchy (5.51) e (5.52) converge para

$$|x_1| + \dots + |x_n| < \rho$$

onde ρ depende apenas do número de variáveis dependentes e independentes e da classe $C_{M, r}(0)$ a qual os coeficientes a_{jk}^i e b_j pertencem. \square

5.5 A identidade de Lagrange-Green

O Teorema da Divergência diz que

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dx = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\zeta} dS$$

onde $\vec{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ é o vetor normal unitário exterior à superfície S . Vamos assumir que $\partial\Omega$ seja suficientemente regular e modo que o Teorema da Divergência aplique para todo $\vec{F} \in C^1(\bar{\Omega})$. Este teorema pode ser generalizado para $\vec{F} \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, aproximando Ω a partir do interior. Fazendo $\vec{F} = (0, \dots, 0, u_i, 0, \dots, 0)$, ou seja, a k -ésima componente de \vec{F} vale u_i e as demais valem 0, onde u_i é a i -ésima componente de u , temos

$$\int_{\Omega} D_k u_i dx = \int_{\Omega} u_i \zeta_k dS, \quad (5.57)$$

para todo $i = 1, \dots, N$ e $k = 1, \dots, n$. O integrando do lado esquerdo é $(D_k u)_i$ e o integrando do lado direito é $(u \zeta_k)_i$, portanto

$$\int_{\Omega} D_k u \, dx = \int_{\partial\Omega} u \zeta_k \, dS, \quad (5.58)$$

para todo $k = 1, \dots, n$ (lembre que integral de um vetor é obtida integrando componente a componente do vetor dado). Substituído u_i por $v^T u$ na equação (5.57), como $D_k(v^T u) = (D_k v^T)u + v^T(D_k u)$, temos a seguinte fórmula de integração por partes:

$$\int_{\Omega} v^T D_k u \, dx = \int_{\partial\Omega} v^T u \zeta_k \, dS - \int_{\Omega} (D_k v^T)u \, dx. \quad (5.59)$$

Em particular, se $\alpha_j = 1 = \alpha_k$ e $\alpha_i = 0$, para $i \neq j, k$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v^T D^\alpha u \, dx &= \int_{\Omega} v^T D_j(D_k u) \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} v^T (D_j u) \zeta_j \, dS - \int_{\Omega} (D_j v^T)(D_k u) \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} v^T (D_j u) \zeta_j \, dS - \left(\int_{\partial\Omega} (D_j v^T) \zeta_k u \, dx - \int_{\Omega} (D_k(D_j v^T)) u \, dx \right) \\ &= \int_{\partial\Omega} (v^T (D_j u) \zeta_j - (D_j v^T) \zeta_k u) \, dS + (-1)^2 \int_{\Omega} (D_k(D_j v^T)) u \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} M(u, v, \zeta) \, dS + (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (L^\alpha v^T) u \, dx. \end{aligned}$$

Substituindo v por $A_\alpha^T v$, temos

$$\int_{\Omega} v^T A_\alpha D^\alpha u \, dx = \int_{\partial\Omega} M(u, v, \zeta) \, dS + (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (D^\alpha (A_\alpha^T v)) u \, dx.$$

Em particular, para o operador linear de ordem m ,

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u \quad (5.60)$$

aplicando-se repetidamente (5.59), obtemos

$$\int_{\Omega} v^T \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u \, dx = \int_{\Omega} (\tilde{L}v)^T u \, dx + \int_{\partial\Omega} M(v, u, \zeta) \, dS_x$$

onde

$$\tilde{L}v = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha(x)^T v),$$

onde \tilde{L} é o operador (formalmente) adjunto de L .

Observação 5. Em $M(v, u, \zeta)$ só aparecem derivadas de ordem até $m - 1$ de v em relação a D_n , em particular se todas as derivadas $D_n^k v(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0$ para $0 \leq k < m - 1$, só sobreviverá em M a contribuição de L que vem de $v^T A_\alpha D^\alpha u$ com $\alpha = (0, \dots, 0, m)$, ou seja, $v^T A_\alpha D_n^m u$. O $M(v, u, \zeta)$ correspondente a $v^T A_\alpha D_n^m u$ possui vários termos, mas aquele que envolve $D_n^{m-1} v^T$ é

$$(-1)^{m-1} A_\alpha (D_{m-1} v^T) \zeta_k u = (-1)^{m-1} A_\alpha w^T \zeta_k u.$$

Exemplo 34. Considere o seguinte sistema linear de primeira ordem

$$Lu = \sum_{k=1}^n a^k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + b(x)u = 0.$$

Então

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v^T L u dx &= \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} v^T \left(a^k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) dx + \int_{\Omega} v^T b(x) u dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} (a^k(x)^T v)^T \frac{\partial u}{\partial x_k} dx + \int_{\Omega} (b(x)^T v)^T u dx \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\int_{\partial\Omega} (a^k(x)^T v)^T u \zeta_k dS - \int_{\Omega} (D_k(a^k(x)^T v))^T u dx \right) + \int_{\Omega} (b(x)^T v)^T u dx \\ &= \int_{\Omega} - \left(\sum_{k=1}^n (D_k(a^k(x)^T v))^T + (b(x)^T v)^T \right) u dx + \int_{\partial\Omega} \sum_{k=1}^n (a^k(x)^T v)^T u \zeta_k dS \\ &= \int_{\Omega} - \left(\sum_{k=1}^n D_k(a^k(x)^T v) + b(x)^T v \right)^T u dx + \int_{\partial\Omega} \sum_{k=1}^n (a^k(x)^T v)^T u \zeta_k dS \\ &= \int_{\Omega} (\tilde{L}v)^T u dx + \int_{\partial\Omega} M(v, u, \zeta) dS \end{aligned} \quad (5.61)$$

usamos (5.59) na terceira igualdade, substituímos v por $a^k(x)^T v$ onde

$$\tilde{L}v = - \sum_{k=1}^n D_k(a^k(x)^T v) + b^T v$$

é o operador (formalmente) adjunto de L e

$$M(u, v, \zeta) = \int_{\partial\Omega} \sum_{k=1}^n v^T a^k(x) u \zeta_k dS.$$

Exemplo 35. O operador laplaciano $L = \Delta = \sum_{k=1}^n D_k^2$. Aqui u e v são escalares. Aplicando-se (5.60) duas vezes, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v D_k^2 u dx &= \int_{\Omega} v D_k(D_k u) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} v (D_k u) \zeta_k dS - \int_{\Omega} (D_k v) (D_k u) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} v (D_k u) \zeta_k dS - \int_{\partial\Omega} (D_k v) u \zeta_k dx + \int_{\Omega} (D_k^2 v) u dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} (v \nabla u \cdot \zeta - u \nabla v \cdot \zeta) dS = \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \zeta} - u \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) dS.$$

5.6 O teorema de unicidade Holmgren

O teorema de Cauchy-Kowalevski diz que um problema de Cauchy analítico com dados prescritos numa superfície analítica não-característica S tem no máximo uma solução analítica u (pois os coeficientes da série de potências são determinados de maneira única). Ele não exclui a possibilidade de existir outra solução que não seja analítica do problema. Entretanto, podemos mostrar unicidade para o problema de Cauchy para equação linear com coeficientes analíticos e dado (não necessariamente analítico) numa superfície analítica não-característica S .

Seja u uma solução do sistema de equações lineares de primeira ordem

$$Lu = \sum_{k=1}^n a^k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + b(x)u = 0,$$

numa região R na "forma de lente", limitada por duas hipersuperfícies S e Z , veja abaixo. Aqui $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^N$, a^k e b são matrizes $N \times N$. Asumiremos que o dado de Cauchy $u = 0$ em Z e que S seja não-característica, ou seja, a matriz

$$A = \sum_{k=1}^n a^k(x) \zeta_k$$

é não-degenerada para $x \in e$ e ζ for o vetor normal unitário em S no ponto x . Seja v a solução da equação adjunta

$$\tilde{L}v = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial((a^k)^T v)}{\partial x_k} + b(x)^T v = 0,$$

com dado de Cauchy

$$v = w(x), \quad x \in S,$$

também definida em todo R . Da identidade de Lagrange-Green, veja (5.61), como $Lu = 0 = \tilde{L}v$ em R , só sobra o termo de fronteira:

$$0 = \int_{S \cup T} \sum_{k=1}^n (a^k(x)^T w)^T u \zeta_k dS = \int_S w^T \left(\sum_{k=1}^n a^k(x)^T \zeta_k \right) u dS = \int_S w^T A u dS \quad (u = 0 \text{ em } T).$$

Agora suponha que o conjunto Γ das função w em S para o qual o problema de Cauchy da equação adjunta exista seja denso em $C^0(S)$ (ou seja, qualquer função contínua em S possa ser uniformemente aproximada por funções de Γ) (o que seria verdade, por exemplo, se Γ for o conjunto dos polinômios) e concluiríamos que

$$\int_S w^T A u dS = 0$$

para todo $w \in C^0(S)$. Afirmamos que isto implicaria que $Au = 0$ em S e como A é não-degenerada em S , concluímos que $u = 0$ em S . De fato, se $Au(z) \neq 0$ para algum z em S , então $Au \neq 0$ numa vizinhança ω de z . Podemos encontrar uma função escalar contínua em S , ϕ , com suporte em ω e $\phi(z) > 0$, portanto $\phi(x) > 0$ para x numa vizinhança de z , $\omega' \subset \omega$. Fazendo $w = \phi Au$, temos

$$\int_S w^T A u dS = \int_{\omega'} \phi \|Au\|^2 dS > 0,$$

o que nos levaria a uma contradição. Note que o máximo que podemos concluir é que $u = 0$ em $S \cup T$, mas o que realmente pretendemos é mostrar que $u = 0$ em R . Além disso, para obtermos o resultado acima, supusemos que a equação adjunta tinha solução definida em todo R , os resultados de existência são locais, por exemplo, se tivéssemos usado o Teorema de Cauchy-Kowalevski para o problema de Cauchy com dados (analíticos, digamos polinômios) em S , só nos seria assegurada a existência de uma solução numa vizinhança de S .

Para demonstrarmos o Teorema de Holmgren e preenchermos o "gap" entre as duas hipersuperfícies S e Z , vamos cobrir R por uma família de hipersuperfícies não-características S_λ (estaremos fazendo uma foliação analítica de R , de modo que as folhas cortem Z transversalmente e cubram uma vizinhança "abaixo" da hipersuperfície Z , as folhas serão parametrizadas por λ , onde $a \leq \lambda \leq b$, a folha indexada por b contém S , folha indexada por a está na região "abaixo" Z).

Definição 7. *Uma família de hipersuperfícies S_λ em \mathbb{R}^n com parâmetro λ variando num intervalo $\Lambda = (a, b)$ forma um campo analítico, se S_λ puder ser transformado bi-analiticamente em seções transversais de cilindros cujas bases estão na esfera unitária do \mathbb{R}^{n-1} . Ou seja, existe um mapeamento $F : \Omega \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ onde $x = F(y)$ é analítico e possui Jacobiano não-nulo e*

$$S_\lambda = \{x | x = F(y); (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \Omega; y_n = \lambda\}.$$

Denotaremos por G a inversa de F , a qual também é analítica, em particular, $\lambda(x) = G_n(x)$ é real analítica em Σ , onde $\Sigma = \cup_\lambda S_\lambda$, o suporte do campo, o qual é aberto.

Exemplo 36. *Fixado $r > 0$ sejam*

$$Z = \left\{ y \mid \sum_{k=1}^{n-1} y_k^2 < r^2, x_n = 0 \right\}$$

e

$$R = \left\{ y \mid 0 \leq y_n \leq \epsilon \left(r^2 - \sum_{k=1}^{n-1} y_k^2 \right) \right\}.$$

Podemos considerar o campo analítico formado pelas porções de paraboloides

$$S_\lambda = \left\{ y \mid y_n = \lambda + \epsilon \left(r^2 - \sum_{k=1}^{n-1} y_k^2 \right), \sum_{k=1}^{n-1} y_k^2 \leq r \right\},$$

onde $\lambda \in (-\epsilon r^2 - \epsilon, 0)$. Se Z for não-característico em relação a L , podemos tomar ϵ suficientemente pequeno de forma que o suporte do campo fique próximo a Z , portanto cada S_λ seja não-característica.

Teorema 12. *(Teorema de Unicidade de Holmgren) Seja S_λ para $\lambda \in \Lambda$ um campo analítico em \mathbb{R}^n , com suporte Σ . Considere o sistema linear de ordem m*

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) D^\alpha u = 0, \quad (5.62)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^N$, as matrizes A_α são reais analíticas em Σ . Sejam

$$R = \{x | x \in \Sigma; x_n \geq 0\}$$

e

$$Z = \{x | x \in \Sigma; x_n = 0\},$$

e para todo $\mu \in \Lambda$

$$\Sigma_\mu = \{x | x \in S_\lambda, \text{ para algum } \lambda \text{ com } a < \lambda \leq \mu\}.$$

Assuma que Z e todos S_λ são não-característicos em relação a L , que $\Sigma_\mu \cap R$ para todo μ é um subconjunto fechado de Σ . Seja u uma solução de (5.62) de classe $C^m(R)$ com dados de Cauchy nulo em Z . Então $u = 0$ em R .

Prova:

- Podemos sempre através de uma transformação analítica transformarmos a região R numa região para a qual hipersuperfície Z seja mapeada no hiperplano $x_n = 0$, o novo operador linear teria coeficientes analíticos. Por exemplo se T for dado por $x_n = \phi(x_1, \dots, x_{n-1})$, onde ϕ é analítica, então a transformação $y_i = x_i$, para $i = 1, \dots, n-1$ e $y_n = x_n - \phi(x_1, \dots, x_{n-1})$, leva a hipersuperfície $y_n = 0$. Portanto, sem perda de generalidade, assumiremos que hipersuperfície T esteja no hiperplano $x_n = 0$.
- Como todas as derivadas de ordem $\leq m-1$ de u são iguais a zero e Z é não característica, então $D^\alpha u = 0$, para $\alpha = (0, \dots, 0, m)$, com isso podemos estender a u para todo Σ , fazendo-a 0 abaixo da hipersuperfície Z , ou seja, na região $\Sigma \cap \{x_n < 0\}$ e ela será de classe $C^m(\Sigma)$. O nosso objetivo é mostrar que u é zero em R , para tal mostraremos que u se anula em cada S_λ ou equivalentemente $\tilde{u}(x) = u(F(x)) = 0$ em cada hipersuperfície $\tilde{S}_\lambda = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Omega, x_n = \lambda\}$. A inversa de F , G , leva Z numa hipersuperfície $G(Z)$ em $\Omega \times \Lambda$. A parte abaixo de Z é 0, se a correspondente parte estiver abaixo de $G(Z)$, \tilde{u} é 0 na mesma. Tome x abaixo de $G(Z)$, então $x = G(y)$ para algum y abaixo de Z , então $\tilde{u}(x) = \tilde{u}(G(y)) = u(F(G(y))) = u(y) = 0$.
- Ao fazermos a mudança de coordenadas $\tilde{u}(x) = u(F(x))$ mapeamos o nosso problema de Cauchy noutra em $\Omega \times \Lambda$, como a transformação F é analítica os novos operadores correspondentes a L e \tilde{L} continuarão tendo coeficientes analíticos. Note que

$$u(x) = \tilde{u}(G(x))$$

para $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^N$. Por exemplo,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \left(\sum_k \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \tilde{u}(y), \quad y = G(x).$$

Note que

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \frac{\partial G_k(x)}{\partial x_i} = G_{ki}(x) = G_{ki}(F(y)) = g_{ki}(y)$$

é analítico. As matrizes $a_\alpha(x)$ são substituídas por $a_\alpha(F(y))$ que são analíticas, por ser composta de funções analíticas. Em outras palavras, ao usarmos a regra da cadeia, encontraremos sempre coeficientes analíticos.

- Para simplificar a notação, continuaremos a denotar os novos operadores correspondentes a L e \tilde{L} pelas mesmas letras. A solução u estendida para Σ é mapeada na solução \tilde{u} em $\Omega \times \Lambda$, a qual se anula abaixo de $G(Z)$. Vamos resolver o problema de Cauchy para a equação adjunta em cada hiperplano $x_n = \lambda$, $(x_1, \dots, x_{n-1})\Omega$, $\lambda \in \Lambda$ e mostrar que $\tilde{u} = 0$ em cada um dos hiperplanos. Para manter a notação simples, denotaremos \tilde{u} por u . Além disso, usaremos a variável x ao invés de y quando considerarmos o problema em $\Omega \times \Lambda$.
- Olhemos para o problema adjunto num compacto K contendo os hiperplanos $x_n = 0$, sendo $a_\alpha(x)$ analíticos no mesmo, então existe $r, M > 0$ tais que $a_\alpha(x) \in C_{r,m}(K)$ (escolhemos o menor dos r_α e o maior dos M_α). Dado um polinômio p , existe alguma constante positiva k , tal que $kp \in C_{r,M}(R)$ e sendo a equação linear, então as soluções com dados iniciais p e kp terão mesmo domínio de existência.
- A seguir, vamos considerar o problema de Cauchy para a equação adjunta (transformada) na hipersuperfície $x_n = \lambda$. Como o vetor normal a esta é $\zeta = (0, \dots, 0, 1)$, os dados são completamente especificados à partir das derivadas normais $D_n^k v(x_1, \dots, x_{n-1}, \lambda, \lambda)$, $k = 0, \dots, m-1$ (as demais derivadas $D^\alpha v$ são obtidas a partir destas, a solução $v(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, \lambda)$ depende do parâmetro λ):

$$D_n^k v(x_1, \dots, x_{n-1}, \lambda, \lambda) = 0 \quad (k = 0, \dots, m-2), \quad D_n^{m-1} v(x_1, \dots, x_{n-1}, \lambda, \lambda) = w(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Podemos transformar este problema naquele em que o dado é prescrito em $x_n = 0$, substituindo x_n por $x_n + \lambda$: fazendo

$$V(x, \lambda) = v(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \lambda, \lambda), \quad a_\alpha(x, \lambda) = A_\alpha(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \lambda)$$

temos

$$\tilde{L}v = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha(x, \lambda)^T V) = 0,$$

$$D_n^k V(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, \lambda) = 0, \quad k = 0, \dots, m-2; \quad D_n^{m-1} V(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, \lambda) = w(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

- Dado um valor $\mu \in \Lambda$, podemos tomar $\epsilon > 0$, o qual assumiremos menor do que $\min\{1, (b-a)/2\}$, tal que

$$u(x) = 0, \quad a < x_n < a + 2\epsilon$$

$$u(x) = 0, \quad x \notin \Omega_{2\epsilon}, \quad a < x_n < \mu.$$

(isto é possível, visto que $u = 0$ abaixo de $G(Z)$ e $\mu < b$, veja figura, isto nos garantirá que contribuições das “fronteira laterais” serão nulas, no raciocínio que se segue).

- As matrizes $a_\alpha(x, \lambda)$ são analíticas em

$$x \in \Omega, \quad a < x_n + \lambda < b, \quad a < \lambda < b \tag{5.63}$$

e o plano $x_n = 0$ é não-característico em relação a \tilde{L} (uma vez que é não-característico em relação a L). Seja Λ_ϵ a bola unitária centrada (fechada) de raio $1 - \epsilon$ centrada

na origem em \mathbb{R}^{n-1} . Seja $\Lambda_\epsilon = [a + \epsilon, b - \epsilon]$. O conjunto (5.63) tem um subconjunto compacto, K , consistindo de (x, λ) com

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Omega_\epsilon; x_n = 0; \lambda \in \Lambda_\epsilon,$$

(a escolha de $\epsilon \leq (b - 1)/2$ serve para garantir que $\Lambda_\epsilon \subset \Lambda$, sendo $\epsilon \leq 1$, temos $\Omega_\epsilon \subset \Omega$). Como K é compacto e $a_\alpha(x, \lambda)$ é analítica em K , então existem $M, r > 0$, tais que $a_\alpha \in C_{M,r}(y, \lambda)$, para todo $(y, \lambda) \in K$. Além disso, dado um polinômio $w(x_1, \dots, x_{n-1})$, como Ω_ϵ é compacto, podemos sempre encontrar uma constante c , tal que $cw \in C_{M,r}(y)$, para todo $y \in \Omega$, como a equação adjunta é linear, o domínio de existência das soluções com dados w e cw são iguais (como só estaremos interessados em saber o domínio de existência da solução, podemos substituir w por cw). O Teorema de Cauchy-Kovalevski nos garante a existência de uma solução $V(x, \lambda)$ analítica em $x \in \Omega_\epsilon$, $|x_n| < \delta$ e $\lambda \in \Lambda_\epsilon$.

Portanto $v(x, \lambda)$, é analítica para

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Omega_\epsilon; |x_n - \lambda| < \delta(\epsilon); \lambda \in \Lambda_\epsilon.$$

Sejam λ, λ^* valores no intervalo $(a + \epsilon, \mu)$, com $|\lambda - \lambda^*| < \delta$, aplicando a identidade de Green-Lagrange à fatia de $\Omega_\epsilon \times \Lambda$ limitada pelos planos $x_n = \lambda$ e $x_n = \lambda^*$. O plano $x_n = \lambda^*$ está dentro do domínio de $v(x, \lambda)$, que a solução da equação adjunta com dado w em $x_n = \lambda$. Como $Lu = 0 = \tilde{L}v$ dentro da fatia, só fica o termo de fronteira. Nas “fronteiras laterais” $u = 0$, portanto, só ficam as contribuições dos hiperplanos $x_n = \lambda$ e $x_n = \lambda^*$, então

$$\int_{x_n=\lambda} M(v, u, \zeta) dS + \int_{x_n=\lambda^*} M(v, u, \zeta) dS = 0.$$

Seja

$$I(\lambda) \equiv \int_{x_n=\lambda^*} M(v, u, \zeta) dS = \int_{\Omega_\epsilon} M(v(x_1, \dots, x_{n-1}, \lambda^*), u(x_1, \dots, x_{n-1}, \lambda^*), \zeta) dx_1 \dots dx_{n-1}$$

Como v é analítica em λ , $I(\lambda)$ é uma função analítica em λ para $\lambda \in (a + \epsilon, \mu)$. Por outro lado, $u = (x_1, \dots, x_{n-1}, \lambda) = 0$ para $\lambda \in (a + \epsilon, a + 2\epsilon)$, portanto, $I(\lambda) = 0$, para $\lambda \in (a + \epsilon, \mu)$. Tendo em vista as arbitrariedade de ϵ e μ , concluímos que $I(\lambda) = 0$, para todo $\lambda \in \Lambda$, ou seja,

$$\int_{x_n=\lambda} M(v, u, \zeta) dS = 0.$$

Como em $x_n = \lambda$, temos $D_n^k v(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0$, para $0 \leq k < m-1$ e $D_n^{m-1} v(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = w(x_1, \dots, x_{n-1})$

$$\int_{x_n=\lambda} M(v, u, \zeta) dS = (-1)^{m-1} \int_{x_n=\lambda} w^T a_\alpha(x) u(x) dx_1 \dots dx_{n-1},$$

onde $\alpha = (0, \dots, 0, m)$. Logo

$$\int_{x_n=\lambda} w^T a_\alpha(x) u(x) dx_1 \dots dx_{n-1} = 0,$$

como w é um vetor polinômio arbitrário, segue que

$$a_\alpha(x)u(x) = 0,$$

como $\det a_\alpha \neq 0$, segue $u(x) = 0$ em $x_n = \lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Portanto $u(x) = 0$ em Σ . \square

Capítulo 6

Equação de Laplace

6.1 Identidade de Green, soluções fundamentais e equação de Poisson

Assumiremos que Ω é uma região aberta e limitada do \mathbb{R}^n , para a qual vale o Teorema da Divergência.

Sejam $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$, então $\nabla \cdot (v\nabla u) = v\Delta u + \nabla v \cdot \nabla u$, portanto

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (v\nabla u) dx = \int_{\Omega} v\Delta u dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx.$$

Usando o Teorema da Divergência a integral do lado esquerdo da equação acima, obtemos

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_{\Omega} v\Delta u dx + \int_{\Omega} \sum_i v_{x_i} u_{x_i} dx \quad (6.1)$$

onde $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \vec{n}$, com $\vec{n}(x)$ o vetor normal unitário à superfície $\partial\Omega$ no ponto x , apontando para fora. De maneira análoga, trocando os papéis de u e v , temos

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dS = \int_{\Omega} u\Delta v dx + \int_{\Omega} \sum_i u_{x_i} v_{x_i} dx \quad (6.2)$$

Subtraindo (6.1) de (6.2), obtemos

$$\int_{\Omega} v\Delta u dx = \int_{\Omega} u\Delta v dx + \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS \quad (6.3)$$

Caos particulares: se $v = 1$, temos

$$\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS. \quad (6.4)$$

se $v = u$, de (6.1) temos

$$\int_{\Omega} \sum_i (u_{x_i})^2 dx + \int_{\Omega} u\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (6.5)$$

Da equação acima, se $\Delta u = 0$ em Ω e u ou $\frac{\partial u}{\partial n}$ for zero em $\partial\Omega$, então

$$\int_{\Omega} \sum_i (u_{x_i})^2 dx = 0,$$

portanto $u_{x_i} = 0$ em Ω , logo u é constante em Ω . Em particular, se $u|_{\partial\Omega} = 0$, como $u \in C^2(\bar{\Omega})$, segue que $u = 0$ em Ω , portanto, $u = 0$ em $\bar{\Omega}$. Da mesma forma, se $u \in C^2(\bar{\Omega})$ e $\frac{\partial u}{\partial n}$ for zero em $\partial\Omega$, concluímos que u é constante em $\bar{\Omega}$.

O problema de Dirichlet consiste em encontrar uma função u em Ω , dado que $\Delta u = 0$ em Ω e $u|_{\Omega} = f$. Pelo que vimos acima, uma solução $u \in C^2(\bar{\Omega})$ do problema de Dirichlet é determinada de maneira única. De fato, se $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ forem duas soluções do mesmo problema, ou seja, $\Delta u = 0 = \Delta v$ em Ω e $u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega}$, então $U = u - v \in C^2(\bar{\Omega})$, satisfaz $\Delta U = \Delta u - \Delta v = 0 - 0 = 0$ em Ω e $U|_{\partial\Omega} = 0$, o que implica que $U = 0$ em $\bar{\Omega}$, portanto, $u = v$ em $\bar{\Omega}$.

O problema de Neumann consiste em encontrar u em Ω , dado que $\Delta u = 0$ em Ω e $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ em $\partial\Omega = 0$. Pelo que vimos acima, uma solução $u \in C^2(\bar{\Omega})$ do problema de Neumann é determinada de maneira única, a menos de uma constante aditiva.

Mostraremos que uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ é única e veremos como explicitamente construir soluções para o problema de Dirichlet para o disco.

A equação de Laplace é invariante por translação, dilatação e rotação. As duas primeiras simetrias são imediatas, mostraremos a invariância por rotação: se $\Delta u(x) = 0$, então $\Delta u(Ox) = 0$, onde O é uma matriz ortogonal ($OO^T = O^T O = I$). De fato, seja $v(x) = u(Ox)$, então fazendo $y = Ox$, temos

$$v_{x_i} = \sum_k u_{y_k}(y) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \sum_{k,l} u_{y_k}(y) O_{k,l} \frac{\partial x_l}{\partial x_i} = \sum_{k,l} u_{y_k}(y) O_{k,l} \delta_{il} = \sum_k u_{y_k}(y) O_{k,i} \quad (y_k = (Ox)_k)$$

logo

$$u_{x_i x_i} = \sum_k \frac{\partial u_{y_k}(y)}{\partial x_i} O_{k,i} = \sum_{k,l} u_{y_k y_l}(y) \frac{\partial y_l}{\partial x_i} O_{k,i} = \sum_{k,l,m} u_{y_k y_l}(y) \frac{\partial x_m}{\partial x_i} O_{l,m} O_{k,i} = \sum_{k,l} u_{y_k y_l}(y) O_{l,i} O_{k,i}$$

portanto,

$$\begin{aligned} \Delta v &= \sum_i v_{x_i x_i} \\ &= \sum_{k,l} u_{y_k y_l}(y) \sum_i O_{l,i} O_{k,i} \\ &= \sum_{k,l} u_{y_k y_l}(y) \sum_i O_{ki} (O^T)_{il} \\ &= \sum_{k,l} u_{y_k y_l}(y) (OO^T)_{k,l} \\ &= \sum_{k,l} u_{y_k y_l}(y) \delta_{kl} \\ &= \sum_k u_{y_k y_k}(y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por causa da simetria esférica, a equação de Laplace tem soluções $v(x)$ que são invariantes por rotação em torno de ξ , ou seja, tem o mesmo valor sobre todos os pontos x cuja distância a ξ é a mesma. Portanto, $v(x) = \psi(r)$, onde $r = |x - \xi| = \sqrt{\sum_i (x_i - \xi_i)^2}$. Então $v(x) = \psi(r)$, onde $r = r(x)$ e da Regra da Cadeia, temos

$$v_{x_i} = \psi'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = \psi'(r) \frac{x_i - \xi_i}{r},$$

em particular,

$$\nabla v = \psi'(r) \frac{x - \xi}{r},$$

e

$$\begin{aligned} v_{x_i x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\psi'(r) \frac{x_i - \xi_i}{r} \right) \\ &= \frac{\partial \psi'(r)}{\partial x_i} \left(\frac{x_i - \xi_i}{r} \right) + \psi'(r) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i - \xi_i}{r} \right) \\ &= \psi''(r) \left(\frac{x_i - \xi_i}{r} \right)^2 + \psi'(r) \left(\frac{r^2 - (x_i - \xi_i)^2}{r^3} \right). \end{aligned}$$

Logo

$$\Delta v(x) = \sum_i v_{x_i x_i} = \psi''(r) + \frac{n-1}{r} \psi'(r).$$

Portanto se $\Delta v(x) = 0$ se, e somente se,

$$\psi''(r) + \frac{n-1}{r} \psi'(r) = 0. \quad (6.6)$$

Embora esta equação seja de segunda ordem, ela é redutível a uma equação de primeira ordem na variável $u = \psi'$, ou seja,

$$u' + \frac{n-1}{r} u = 0,$$

a qual é de variáveis separáveis. A sua solução geral é

$$u(r) = \psi'(r) = \frac{C_1}{r^{n-1}}.$$

Portanto, a solução geral é

$$\psi(r) = \begin{cases} C_1 \ln r + C_2, & \text{para } n = 2 \\ \frac{C_1 r^{2-n}}{2-n} + C_2, & \text{para } n > 2 \end{cases}.$$

A solução $v(x) = \psi(r)$ satisfaz a equação (6.6), para $r \neq 0$, ou seja, para $x \neq \xi$. No que se segue, faremos $C_2 = 0$ e escolheremos C_1 de modo que $\psi(r)$ seja solução fundamental da equação de Laplace, satisfazendo

$$\Delta v = \delta_\xi.$$

Seja $u \in C^2(\bar{\Omega})$ e ξ um ponto em Ω , aplicaremos a identidade de Green (6.3) (caso em que a região é multiplamente conexa) com v dado $\psi(r)$, onde faremos $c_2 = 0$. Para evitar

a singularidade de v em $x = \xi$, consideraremos a região Ω_ρ obtida de Ω retirando-se a bola $B(\xi, \rho)$. Portanto sua fronteira, $\partial S(\xi, \rho) = \partial\Omega \cup S(\xi, \rho)$, o vetor normal aponta para fora de Ω_ρ , em particular, em $S(\xi, \rho)$ ele está apontando para dentro da bola. Como $\Delta v = 0$ em Ω_ρ , temos

$$\int_{\Omega_\rho} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS + \int_{S(\xi, \rho)} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS. \quad (6.7)$$

Na superfície $S(\xi, \rho)$:

$$\begin{aligned} v &= \psi(\rho), \\ \vec{n} &= -\frac{x - \xi}{\rho}, \\ \frac{\partial v}{\partial n} &= \nabla v \cdot \vec{n} = \psi'(\rho) \frac{x - \xi}{\rho} \cdot \frac{\xi - x}{\rho} = -\psi'(\rho). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{S(\xi, \rho)} v \frac{\partial u}{\partial n} dS &= \psi(\rho) \int_{S(\xi, \rho)} \frac{\partial u}{\partial n} dS \\ (6.4) \quad &= -\psi(\rho) \int_{B(\xi, \rho)} \Delta u dx \quad (\text{em } S \text{ normal aponta para dentro da esfera}) \\ &= -\psi(\rho) |B(\xi, \rho)| \Delta u(\zeta) \quad (\text{Teorema do Valor Médio, } u \in C^2(\Omega), \zeta \in B(\xi, \rho)) \\ &= -\psi(\rho) \omega_n \rho^n u(\zeta) \quad (\rightarrow 0 \text{ quando } \rho \rightarrow 0) \end{aligned}$$

onde

$$\omega_n = 2(\sqrt{\pi})^n / \Gamma(n/2)$$

a área de uma esfera raio 1 no \mathbb{R}^n . Note que a quantidade acima tende a 0 quando ρ tende zero.

$$\begin{aligned} \int_{S(\xi, \rho)} u \frac{\partial v}{\partial n} dS &= -\psi'(\rho) \int_{S(\xi, \rho)} u dS = -C_1 \rho^{n-1} \int_{S(\xi, \rho)} u dS \\ &= -C_1 \rho^{1-n} \rho^{n-1} \omega_n u(\zeta) \quad (\text{Teorema do Valor Médio, } \zeta \in S(\xi, \rho)) \\ &= -C_1 \omega_n u(\zeta) \quad (\rightarrow C_1 \omega_n u(\xi) \text{ quando } \rho \rightarrow 0) \end{aligned}$$

Substituindo os resultados acima em (6.7) e tomando o limite quando ρ tende a zero, temos

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS + C_1 \omega_n u(\xi). \quad (6.8)$$

Escolheremos C_1 de modo que $C_1 \omega_n = 1$, ou seja,

$$C_1 = 1/\omega_n$$

com isso definiremos

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{\ln r}{2\pi}, & \text{para } n = 2 \\ \frac{r^{2-n}}{(2-n)\omega_n}, & \text{para } n > 2 \end{cases}. \quad (6.9)$$

Fazendo

$$K(x, \xi) = \psi(r) = \psi(|x - \xi|),$$

temos o seguinte teorema

Teorema 13. *Seja $u \in C^2(\overline{\Omega})$, onde Ω é um conjunto aberto e limitado do \mathbb{R}^n para o qual vale o Teorema da Divergência. Então*

$$u(\xi) = \int_{\Omega} K(x, \xi) \Delta u(x) dx - \int_{\partial\Omega} \left(K(x, \xi) \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} - u(x) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial n_x} \right) dS_x \quad (6.10)$$

para todo $\xi \in \Omega$.

Se no Teorema acima fizermos $u = \phi$, onde $\phi \in C_o^\infty(\Omega)$, então $\phi = 0 = \frac{\partial \phi}{\partial n_x}$ em $\partial\Omega$, logo

$$\phi(\xi) = \int_{\Omega} K(x, \xi) \Delta \phi(x) dx, \quad (6.11)$$

portanto $v = K(x, \xi)$ define uma distribuição para a qual

$$v[\Delta \phi] = \phi(\xi).$$

Ou seja, em sentido de distribuição, v satisfaz

$$\Delta v = \delta_\xi,$$

e v é uma solução fundamental com polo em ξ .

Definição 8. *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ aberto. Uma função $u \in C^2(\Omega)$ é harmônica em Ω , se $\Delta u = 0$ em Ω .*

Agora $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e que $\Delta u = 0$ em Ω , então do Teorema 13, temos

$$u(\xi) = - \int_{\partial\Omega} \left(K(x, \xi) \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} - u(x) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial n_x} \right) dS_x \quad (6.12)$$

para todo $\xi \in \Omega$. Esta fórmula expressa $u \in \Omega$ em termos dos seus dados de Cauchy u e $\frac{\partial u}{\partial n_x}$ na fronteira $\partial\Omega$, desde que ela exista. Vimos das identidades de Green que a solução $u \in C^2(\overline{\Omega})$ satisfazendo $\Delta u = 0$ em Ω é determinada de maneira única pelos valores de u em $\partial\Omega$. Portanto, não podemos prescrever ambos u e $\frac{\partial u}{\partial n_x}$ na fronteira $\partial\Omega$. Com isso problema de Cauchy para a equação de Laplace em Ω geralmente não tem solução. Entretanto, a fórmula (6.12) é útil para mostrarmos regularidade de funções harmônicas: como $K(x, \xi) \in C^\infty$ em x real e ξ , para $x \neq \xi$, podemos tomar derivadas de $u(\xi)$ em relação a ξ de todas as ordens dentro da integral para $\xi \in \Omega$ e mostrar que $u \in C^\infty(\Omega)$, podemos até mesmo concluir que $u(\xi)$ é analítica em Ω .

Seja $w \in C^2(\overline{\Omega})$ uma solução de $\Delta w = 0$. Como a equação de Laplace é linear, então

$$G(x, \xi) = K(x, \xi) + w(x)$$

também é uma solução fundamental da equação de Laplace com polo em ξ . De fato, dada uma função teste ϕ , então

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} G(x, \xi) \Delta \phi(x) dx &= \int_{\Omega} K(x, \xi) \Delta \phi(x) dx + \int_{\Omega} w(x) \Delta \phi dx \\
(6.3) \quad &= \int_{\Omega} K(x, \xi) \Delta \phi(x) dx + \int_{\Omega} \phi \Delta w dx + \int_{\partial \Omega} \left(w \frac{\partial \phi}{\partial n_x} - \phi \frac{\partial w}{\partial n_x} \right) dx \\
&= \phi(\xi) \quad (\phi = 0 = \frac{\partial \phi}{\partial n_x} \text{ em } \partial \Omega).
\end{aligned}$$

Substituindo K por G no Teorema 13, temos a seguinte relação que vale para todo $\xi \in \Omega$:

$$u(\xi) = \int_{\Omega} G(x, \xi) \Delta u(x) dx - \int_{\partial \Omega} \left(G(x, \xi) \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} - u(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_x} \right) dS_x. \quad (6.13)$$

Em particular, para ρ fixo, fazendo $\Omega = B(\xi, \rho)$ e $G(x, \xi) = K(x, \xi) - \psi(\rho)$ ($\Delta \psi(\rho) = 0$), então em $\partial \Omega$ temos

$$G(x, \xi) = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial n_x} = \psi'(\rho) = \frac{\rho^{1-n}}{\omega_n},$$

se $u \in C^2(\overline{B(\xi, \rho)})$, de (6.13), temos

$$u(\xi) = \int_{|x-\xi|<\rho} (\psi(|x-\xi|) - \psi(\rho)) \Delta u(x) dx + \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|x-\xi|=\rho} u(x) dS_x. \quad (6.14)$$

Propriedade 1. (*Propriedade do valor médio ou Lei de Gauss*) Em particular, se $u \in C^2(\overline{B(\xi, \rho)})$ e $\Delta u = 0$ em $B(\xi, \rho)$, temos

$$u(\xi) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|x-\xi|=\rho} u(x) dS_x. \quad (6.15)$$

Note que do Teorema de Fubini, ao integrarmos em cascas esféricas, temos

$$\begin{aligned}
\int_{|x-\xi|<\rho} u(x) dx &= \int_0^{\rho} \int_{|x-\xi|=r} u(x) dS(x) d\rho \\
(6.15) \quad &= \int_0^{\rho} (u(\xi) \omega_n r^{n-1}) d\rho \quad (u(x) \text{ é harmônica em } |x-\xi| < r) \\
&= u(\xi) (\omega_n \rho^n / n) \\
&= u(\xi) \text{Vol}(B(\xi, \rho))
\end{aligned} \quad (6.16)$$

logo temos

Propriedade 2. (*Propriedade do valor médio - versão integral*) Se $u \in C^2(\overline{B(\xi, \rho)})$ e $\Delta u = 0$ em $B(\xi, \rho)$, então

$$u(\xi) = \frac{\int_{B(\xi, \rho)} u(x) dx}{V(B(\xi, \rho))}. \quad (6.17)$$

Teorema 14. *Se $u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u = 0$ em Ω , então para todo $\xi \in \Omega$ e ρ suficientemente, então*

$$u(\xi) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|x-\xi|=\rho} u(x) dS_x.$$

e

$$u(\xi) = \frac{\int_{B(\xi, \rho)} u(x) dx}{V(B(\xi, \rho))}.$$

Prova. Dado $\xi \in \Omega$, tome ρ suficientemente pequeno tal que $\overline{B(\xi, \rho)} \subset \Omega$, logo a restrição de u a bola $\overline{B(\xi, \rho)}$ é de classe $C^2(\overline{B(\xi, \rho)})$ e das Propriedades 1 e 2 concluímos a demonstração. \square

Como a função $\psi(r)$ é monótona crescente em r , então $\psi(|x - \xi|) - \psi(\rho) \leq 0$ em $B(\xi, \rho)$, logo se $\Delta u \geq 0$ em $B(\xi, \rho)$, de (6.14) teremos

$$u(\xi) \leq \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|x-\xi|=\rho} u(x) dS_x, \quad (6.18)$$

válida para $u \in C^2(\overline{B(\xi, \rho)})$. Usando esta desigualdade e o Teorema de Fubini, mostra-se que também vale a seguinte desigualdade

$$u(\xi) \leq \frac{\int_{B(\xi, \rho)} u(x) dx}{V(B(\xi, \rho))}. \quad (6.19)$$

Definição 9. *Uma função $u \in C^0(\Omega)$ é chamada de sub-harmônica em Ω , se para todo $\xi \in \Omega$ a desigualdade (6.18) for válida para ρ suficientemente pequeno.*

Teorema 15. *Se $u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u \geq 0$ em Ω , então u sub-harmônica em Ω .*

Prova. Dado $\xi \in \Omega$, tome ρ suficientemente pequeno, tal que $\overline{B(\xi, \rho)} \in \Omega$, então a restrição de u a $\overline{B(\xi, \rho)}$ é de classe $C^2(\overline{B(\xi, \rho)})$ e vale (6.18). \square

Teorema 16. *Seja $u \in C^2(\overline{\Omega})$, então para todo $\xi \in \Omega$, temos*

$$u(\xi) = \Delta_\xi \int_{\Omega} K(x, \xi) u(x) dx. \quad (6.20)$$

Uma aplicação deste teorema é que $w(\xi) = \int_{\Omega} K(x, \xi) u(x) dx$ é solução da equação de Poisson

$$\Delta_\xi w(\xi) = u(\xi),$$

onde $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Prova do teorema. Primeiro mostraremos (6.20) vale para $u \in C_o^2(\Omega)$. Como tem suporte compacto em Ω , então $u = 0 = \frac{\partial u}{\partial n_x}$ próximo de $\partial\Omega$, logo de (6.10), para $\xi \in \Omega$ temos

$$u(\xi) = \int_{\Omega} K(x, \xi) \Delta_x u(x) dx = \int_{\Omega} K(x, \xi) \Delta_x u(x) dx.$$

Na verdade, a equação acima vale para todo ξ . De fato, se $\xi \notin \Omega$, tome $\tilde{\Omega} \supset \Omega$, tal que $\xi \in \tilde{\Omega}$, então $u \in C_o^2(\tilde{\Omega})$, logo de (6.10), temos

$$u(\xi) = \int_{\tilde{\Omega}} K(x, \xi) \Delta_x u(x) dx = \int K(x, \xi) \Delta_x u(x) dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \int_{\Omega} K(x, \xi) \Delta_x u(x) dx = \int \psi(|x - \xi|) \Delta_x u(x) dx \\ &= \int \psi(|y|) \Delta_y u(y + x) dy \quad (x - \xi = y) \\ &= \int \psi(|y|) \Delta_{\xi} u(y + \xi) dy \\ &= \Delta_{\xi} \int \psi(|y|) u(y + \xi) dy \quad (u \in C^2) \\ &= \Delta_{\xi} \int K(x, \xi) u(x) dx. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Agora mostraremos (6.20) vale para $u \in C^2(\Omega)$. Tome uma bola b , tal que $\bar{b} \in \Omega$. Tome uma bola B concêntrica com b , tal que $\bar{b} \subset B$, $\bar{B} \subset \Omega$ e uma função $\zeta(x) \in C_o^2(\omega)$ que tem valor 1 em B . Então

$$u = \zeta u + (1 - \zeta)u.$$

Portanto, para $\xi \in b$, temos

$$\Delta_{\xi} \int_{\Omega} K(x, \xi) \zeta(x) u(x) dx \stackrel{(6.21)}{=} \zeta(\xi) u(\xi) = u(\xi) \quad (\zeta u \in C_o^2(\Omega)) \tag{6.22}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi} \int_{\Omega} K(x, \xi) (1 - \zeta(x)) u(x) dx &\stackrel{(1 - \zeta)|_B = 0}{=} \Delta_{\xi} \int_{\Omega - B} K(x, \xi) (1 - \zeta(x)) u(x) dx \\ &\stackrel{K(x, \xi) \in C^{\infty}, \text{ se } x \neq \xi}{=} \int_{\Omega - B} \Delta_{\xi} K(x, \xi) (1 - \zeta(x)) u(x) dx \\ &\stackrel{\Delta_{\xi} K(x, \xi) = 0, \text{ se } x \neq \xi}{=} \int_{\Omega - B} 0 (1 - \zeta(x)) u(x) dx \\ &= 0. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Portanto, somando-se (6.22) e (6.23), temos

$$\Delta_{\xi} \int_{\Omega} K(x, \xi) u(x) dx = \Delta_{\xi} \int_{\Omega} K(x, \xi) \zeta(x) u(x) dx + \Delta_{\xi} \int_{\Omega} K(x, \xi) (1 - \zeta(x)) u(x) dx = u(\xi),$$

para todo $\xi \in b$, portanto, para todo $\xi \in \Omega$, uma vez que para cada $\xi \in \Omega$ podemos tomar b e B como na construção acima. \square

6.2 O Princípio de Máximo

Teorema 17. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado, aberto e conexo, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ e $\Delta u = 0$ em Ω . Então*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \quad (6.24)$$

e

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u. \quad (6.25)$$

Além disso, se u assumir valor máximo ou mínimo em Ω , então u tem que ser constante em $\overline{\Omega}$.

Prova. Seja $M = \max_{\overline{\Omega}} u(x)$, então existe $\xi_o \in \overline{\Omega}$. Sejam

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : \{x \in \Omega : u(x) = M\}\}$$

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega : \{x \in \Omega : u(x) < M\}\}.$$

Se $\xi \in \Omega_2$, então $u(\xi) < M$ e por continuidade de u existe uma vizinhança de x na qual $u(x) < M$, logo Ω_2 é aberto. Mostraremos que Ω_1 também é aberto. De fato se $\xi \in \Omega_1$, então tome $B(\xi, \rho)$ para algum ρ suficientemente pequeno, tal que $B(\xi, \rho) \subset \Omega$. Então $u \in C^2(B(\xi, \rho))$ e $\Delta u = 0$ em $B(\xi, \rho)$ e da propriedade do valor médio, temos

$$\frac{\int_{B(\xi, \rho)} u(x) dx}{V(B(\xi, \rho))} = u(\xi) = M. \quad (6.26)$$

Afirmamos que $u(\xi) = M$ em $B(\xi, \rho)$, caso contrário, se existisse algum $\zeta \in B(\xi, \rho)$, então ζ estaria em Ω_2 , como este conjunto é aberto existiria uma bola $B(\zeta, \tilde{\rho}) \subset B(\xi, \rho) \cap \Omega_2$, como $u(x) < M$ em $B(\zeta, \tilde{\rho})$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{\int_{B(\xi, \rho)} u(x) dx}{V(B(\xi, \rho))} &= \frac{\int_{B(\xi, \rho) - B(\zeta, \tilde{\rho})} u(x) dx + \int_{B(\zeta, \tilde{\rho})} u(x) dx}{V(B(\xi, \rho))} \\ &< \frac{V(B(\xi, \rho) - B(\zeta, \tilde{\rho}))M + \text{Vol}(B(\zeta, \tilde{\rho}))M}{V(B(\xi, \rho))} \\ &< M, \end{aligned}$$

contrariando (6.26). Portanto, a bola $B(\xi, \rho) \subset \Omega_1$, o que mostra que Ω_1 é aberto. Se existir algum ponto $\xi_o \in \Omega$, tal que $u(\xi_o) = M$, então $\Omega_1 \neq \emptyset$. Como Ω_1 e Ω_2 são disjuntos e abertos e a sua união é Ω que é aberto e conexo, então um dos dois conjuntos Ω_1 ou Ω_2 deve ser vazio. Como $\Omega_1 \neq \emptyset$, segue que $\Omega_2 = \emptyset$ e concluímos que $\Omega = \Omega_1$, portanto, $u(\xi) = M$ em Ω . Como $u \in C^0(\overline{\Omega})$, então $u = M$ em $\overline{\Omega}$. Por outro lado se não existir $\xi_o \in \Omega$, tal que $u(\xi_o) = M$, então $\Omega = \Omega_2$ e concluímos que o valor máximo de u tem que ocorrer em $\partial\Omega$. De maneira análoga, mostra-se o resultado correspondente de mínimo. \square

Embora tenhamos usado a propriedade do valor médio para provarmos o princípio de máximo, poderíamos termos dados uma demonstração que não dependesse dela.

Se voltarmos a demonstração que acabamos de dar, se tivéssemos usando (6.19) ao invés da propriedade do valor médio, teríamos chegado ao seguinte resultado:

Teorema 18. (*Princípio de Máximo para funções subharmônicas*) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado, aberto e conexo e u subharmônica em Ω e contínua em $\bar{\Omega}$. Então

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \quad (6.27)$$

e

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u. \quad (6.28)$$

Além disso, se u assumir valor máximo ou mínimo em Ω , então u tem que ser constante em $\bar{\Omega}$.

Em virtude do Teorema 15, o princípio de máximo acima é verdade se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

Teorema 19. (*Versão melhorada da unicidade do problema de Dirichlet*) Uma função u de classe $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ é unicamente determinada pelos valores de Δu em Ω e de u em $\partial\Omega$.

Prova. Suponha que $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ e $\Delta u = 0$ em Ω , então pelo princípio de máximo, para todo $x \in \bar{\Omega}$, temos

$$\min_{\partial\Omega} u = \min_{\bar{\Omega}} u \leq u(x) \leq \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u,$$

ou seja,

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u, \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (6.29)$$

Em particular, ϕ e ψ forem soluções de classe $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ problema de Dirichlet

$$\Delta u = w \text{ em } \Omega \quad e \quad u = f \text{ em } \partial\Omega,$$

onde $f, w \in C^0(\Omega)$, seja $U = \phi - \psi$. Então $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $\Delta u = 0$ em Ω e $u = 0$ em $\partial\Omega$. Portanto de (6.29), temos $0 \leq u(x) \leq 0$, para todo $x \in \bar{\Omega}$. Logo $u(x) = 0$, para todo $x \in \bar{\Omega}$. Portanto, $\phi = \psi$ em $\bar{\Omega}$. \square

Vale a pena ressaltar que em vista do princípio de máximo para funções subharmônicas, as desigualdades (6.29) também se aplicam ao caso em que u é sub-harmônica em Ω .

6.3 O problema de Dirichlet no Disco

Definição 8. (*Função de Green*) Uma solução fundamental $G(x, \xi)$ com polo ξ é uma função de Green (para o problema de Dirichlet para a equação de Laplace em Ω) se

$$G(x, \xi) = K(x, \xi) + v(x, \xi)$$

para $x \in \bar{\Omega}$, $\xi \in \Omega$, $x \neq \xi$, onde K é dado por (6.9) e $v(x, \xi)$ para $\xi \in \Omega$ é uma solução de $\Delta_x v = 0$, de classe $C^2(\bar{\Omega})$, tal que $G(x, \xi) = 0$, para $x \in \partial\Omega$ e $\xi \in \Omega$.

Note que se G for uma função de Green para a equação de Laplace em Ω , do Teorema 13, para toda $u \in C^2(\overline{\Omega})$, tal que $\Delta u = 0$ em Ω , teremos

$$u(\xi) = \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_x} dS_x, \quad \forall \xi \in \Omega,$$

portanto teremos resolvido o problema de Dirichlet em Ω .

A seguir o nosso objetivo é construir a função de Green G para o disco de raio a (no \mathbb{R}^n), ou seja,

$$\Omega = B(0, a) = \{x : |x| < a\},$$

com isso resolveremos o problema de Dirichlet no disco e em regiões que possam ser mapeadas conformalmente nele.

Provaremos o seguinte resultado:

Teorema 20. Para $n \geq 2$, se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e $\Delta u = 0$ em Ω , então para todo $\xi \in \Omega$, temos

$$u(\xi) = \int_{|x|=a} H(x, \xi) u(x) dS_x, \quad (6.30)$$

onde

$$H(x, \xi) = \frac{1}{a\omega_n} \frac{a^2 - |\xi|^2}{|x - \xi|^n}$$

é chamado de núcleo de Poisson.

Prova. Para $|\xi^*| > a$,

$$K(x, \xi^*) = \psi(|x - \xi^*|)$$

é de Classe $C^2(\overline{\Omega})$ e satisfaz $\Delta_x K(x, \xi^*) = 0$ em Ω . Podemos interpretar $K(x, \xi)$ como o potencial produzido no ponto x por uma carga pontual no ponto ξ . Se

$$G(x, \xi) = K(x, \xi) + v(x, \xi),$$

então a parcela $K(x, \xi)$ é o potencial em x devido a uma carga pontual no ponto ξ . Em particular, para $\xi \in \Omega$ fixo seria natural imaginarmos colocando uma carga com sinal contrário a que está em ξ , em algum local ξ^* fora do disco, de modo as suas contribuições para o potencial em cada ponto $x \in \partial\Omega$ se anulassem. Dado $\xi \in \Omega$ tomaremos como ξ^* como o ponto obtido de ξ através da sua reflexão através da superfície $\partial\Omega$, ou seja

$$\xi^* = \frac{a^2}{|\xi|^2} \xi.$$

Defina $r = |x - \xi|$ e $r^* = |x - \xi^*|$, então se $x \in \partial\Omega$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{r^*}{r}\right)^2 &= \left(\frac{|x - \xi^*|}{|x - \xi|}\right)^2 \\
&= \frac{|x|^2 - 2x \cdot \xi^* + |\xi^*|^2}{|x|^2 - 2x \cdot \xi + |\xi|^2} \\
&= \frac{|x|^2 - 2x \cdot \frac{a^2}{|\xi|^2} \xi + \frac{a^4}{|\xi|^2}}{|x|^2 - 2x \cdot \xi + |\xi|^2} \\
&= \frac{a^2}{|\xi|^2} \left(\frac{|x|^2 \frac{|\xi|^2}{a^2} - 2x \cdot \frac{a^2}{|\xi|^2} \xi + \frac{a^4}{|\xi|^2} \frac{|\xi|^2}{a^2}}{|x|^2 - 2x \cdot \xi + |\xi|^2} \right) \\
&= \frac{a^2}{|\xi|^2} \left(\frac{|\xi|^2 - 2x \cdot \xi + a^2}{a^2 - 2x \cdot \xi + |\xi|^2} \right) \\
&= \frac{a^2}{|\xi|^2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{r^*}{r} = \frac{a}{|\xi|}, \quad \text{para } x \in \partial\Omega.$$

Para $n > 2$, temos

$$K(x, \xi) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} r^{2-n}, \quad K(x, \xi^*) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} (r^*)^{2-n}.$$

Note que para $x \in \partial\Omega$, temos

$$K(x, \xi^*) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} \left(\frac{ar}{|\xi|}\right)^{2-n} = \left(\frac{a}{|\xi|}\right)^{2-n} K(x, \xi),$$

como queremos que $G(x, \xi)$ seja zero em $\partial\Omega$, tomaremos

$$v(x, \xi) = - \left(\frac{|\xi|}{a}\right)^{2-n} K(x, \xi^*).$$

Portanto, para $n > 2$, temos

$$G(x, \xi) = K(x, \xi) - \left(\frac{|\xi|}{a}\right)^{2-n} K(x, \xi^*), \quad x \in \bar{\Omega}, \xi \in \Omega.$$

Note que

$$n = \frac{x}{a},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} r^{2-n} = \frac{\partial r^{2-n}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = (2-n)r^{1-n} \frac{x_i - \xi}{r} = (2-n)r^{-n}(x_i - \xi),$$

logo

$$\nabla r^{2-n} = (2-n)r^{-n}(x - \xi).$$

Portanto, para $x \in \partial\Omega$, temos

$$\frac{\partial K(x, \xi)}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{r^{2-n}}{(2-n)\omega_n} \right) = \frac{r^{-n}}{\omega_n} \left(a - \frac{x \cdot \xi}{a} \right) = \frac{(a^2 - x \cdot \xi)r^{-n}}{a\omega_n} = \frac{(a^2 - x \cdot \xi)}{a\omega_n |x - \xi|^n},$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{|\xi|}{a} \right)^{2-n} \frac{\partial K(x, \xi^*)}{\partial n} &= \left(\frac{|\xi|}{a} \right)^{2-n} \frac{(r^*)^{-n}}{\omega_n} \left(a - \frac{x \cdot \xi^*}{a} \right) \\ &= \left(\frac{|\xi|}{ar^*} \right)^{-n} \left(\frac{|\xi|}{a} \right)^2 \frac{(a^2 - x \cdot \frac{a^2}{|\xi|^2} \xi)}{a\omega_n} \\ &= \frac{r^{-n} |\xi|^2 - x \cdot \xi}{a\omega_n} \\ &= \frac{|\xi|^2 - x \cdot \xi}{a\omega_n |x - \xi|^n} \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n} = \frac{(a^2 - x \cdot \xi)}{a\omega_n |x - \xi|^n} - \frac{(|\xi|^2 - x \cdot \xi)}{a\omega_n |x - \xi|^n} = \frac{a^2 - |\xi|^2}{a\omega_n |x - \xi|^n} \equiv H(x, \xi).$$

Para $n = 2$, temos

$$K(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln r,$$

portanto para $x \in \partial\Omega$, temos

$$K(x, \xi^*) = \frac{1}{2\pi} \ln r^* = \frac{1}{2\pi} \ln(ar/|\xi|) = K(x, \xi) + \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{a}{|\xi|} \right),$$

logo a função de Green para $n = 2$ será

$$G(x, \xi) = K(x, \xi) - K(x, \xi^*) + \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{a}{|\xi|} \right).$$

Note que

$$\nabla K(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{x - \xi}{r^2}, \quad \nabla K(x, \xi^*) = \frac{1}{2\pi} \frac{x - \xi^*}{(r^*)^2}.$$

Logo para $x \in \partial\Omega$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_x} &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{a^2 - x \cdot \xi}{ar^2} \right) - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{a^2 - x \cdot \xi^*}{a(r^*)^2} \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{a^2 - x \cdot \xi}{ar^2} \right) - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{a^2 - x \cdot \frac{a^2}{|\xi|^2} \xi}{a \left(\frac{ar}{|\xi|} \right)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{a^2 - |\xi|^2}{|x - \xi|^2} = H(x, \xi). \end{aligned}$$

□

Teorema 21. (*Propriedades do núcleo de Poisson H*)

(a) $H(x, \xi) \in C^\infty$ para $|x| \leq a$, $|\xi| < a$, $x \neq \xi$.

(b) $\Delta_\xi H(x, \xi) = 0$ para $|\xi| < a$, $|x| = a$.

(c) $\int_{|x|=a} H(x, \xi) dS_x = 1$, para $|\xi| < a$.

(d) $H(x, \xi) \geq 0$, para $|x| = a$, $|\xi| < a$.

(e) Se $|\zeta| = a$, então

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow \zeta \\ |\xi| < a}} H(x, \xi) = 0,$$

uniformemente em x para $|x - \zeta| > \delta > 0$.

Prova: As propriedades (a), (d), (e) seguem diretamente da definição de $H(x, \xi)$. Para mostrar (b), note que $\Delta_\xi G(x, \xi) = 0$, se $x \neq \xi$, então $\Delta_\xi G(x, \xi) = 0$, se $|x| = a$ e $|\xi| < a$, logo

$$\Delta_\xi H(x, \xi) = \Delta_\xi \left(\nabla_x G(x, \xi) \cdot \frac{x}{a} \right) = (\nabla_x (\Delta_\xi G(x, \xi))) \cdot \frac{x}{a} = 0.$$

Fazendo $u = 1$ em (6.30), concluiremos que

$$\int_{|x|=a} H(x, \xi) dS_x = 1,$$

para todo $|\xi| < a$ e temos (b).

Tome $\epsilon > 0$, seja $\bar{\delta}$ a distância de x a superfície esférica centrada em ζ e de raio δ , então $|x - \xi|^n > \bar{\delta}^{-n}$. Portanto

$$\frac{a^2 - |\xi|^2}{|x - \xi|^n} < \frac{a^2 - |\xi|^2}{\bar{\delta}^n} = \frac{\zeta^2 - |\xi|^2}{\bar{\delta}^n} = \frac{(\zeta - \xi) \cdot (\zeta + \xi)}{\bar{\delta}^n} < \frac{|\zeta - \xi|(2a + \delta)}{\bar{\delta}^n} < \epsilon,$$

se $|\zeta - \xi| < \frac{\epsilon \bar{\delta}^n}{2a + \delta}$, o que nos dá a uniformidade no limite de (e). \square

Para uma dada condição de fronteira $u = f$ em $\partial\Omega$ se o problema de Dirichlet tiver uma solução $u \in C^2(\bar{\Omega})$, então pelo Teorema 20 ela tem que ser dada por (6.30). Verificaremos diretamente que (6.30) é realmente a solução do problema para f contínua, este é o conteúdo do próximo teorema.

Teorema 22. *Seja f contínua em $|x| = a$. Então a função $u(\xi)$ dada por $f(\xi)$ para $|\xi| = a$ e*

$$u(\xi) = \int_{|x|=a} H(x, \xi) f(x) dS_x,$$

para $|\xi| < a$ é contínua para $|\xi| \leq a$ e C^∞ e harmônica para $|\xi| < a$.

Prova. De (a) do Teorema (21), podemos passar a derivada para dentro da integral e de (b) $\Delta_\xi H(x, \xi) = 0$, com isso mostramos que u é harmônica para todo $|\xi| < a$ e C^∞ para $|\xi| < a$. Resta mostrarmos que u é contínua para $|\xi| \leq a$. Para $|\xi| < a$, u é C^∞ , portanto é contínua,

logo temos que mostrar continuidade para pontos da fronteira. Seja $|\zeta| = a$ e $|\xi| < a$. Da propriedade (c) de H , temos

$$\begin{aligned} u(\xi) - f(\zeta) &= \int_{|x|=a} K(x, \xi)(f(x) - f(\zeta))dS_x \\ &= \int_{\substack{|x|=a \\ |x-\zeta| < \delta}} K(x, \xi)(f(x) - f(\zeta))dS_x + \int_{\substack{|x|=a \\ |x-\zeta| > \delta}} K(x, \xi)(f(x) - f(\zeta))dS_x \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

Como f é contínua, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon)$, tal que se $|x - \zeta| < \delta$ e $|x| = a$, temos

$$|f(x) - f(\zeta)| < \frac{\epsilon}{2},$$

portanto de (c) e (d), temos $|I_1| < \frac{\epsilon}{2}$. Seja $M = \max_{|x|=a} |f(x)|$, de (e) existe δ' dependendo de ϵ e $\delta(\epsilon)$, portanto dependendo apenas de ϵ , tal que

$$H(x, \xi) < \frac{\epsilon}{4M\omega_n a^{n-1}}, \quad |\xi - \zeta| < \delta', \quad |x - \zeta| > \delta,$$

portanto desta estimativa e de (c), concluímos que $|I_2| < \frac{\epsilon}{2}$. Portanto,

$$|u(\xi) - f(\xi)| < \epsilon, \quad |\xi - \zeta| < \delta', \quad |\xi| < a.$$

O que mostra a continuidade de u num ponto da fronteira ζ . □

6.4 Funções harmônicas em duas dimensões

Seja

$$w = f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y),$$

analítica e $f'(z) \neq 0$ e defina

$$u(x, y) = v(\phi(x_1, x_2), \psi(x_1, x_2)).$$

Afirmamos que $\Delta_x u(x) = 0$ se, e somente se, $\Delta_w v(w) = 0$. De fato, da regra da cadeia, fazendo $w_1 = \phi(x_1, x_2)$ e $w_2 = \psi(x_1, x_2)$, temos

$$\begin{aligned} \Delta_x u(x) &= u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} \\ &= v_{w_1} \Delta_x \phi + v_{w_2} \Delta_x \psi + 2(\phi_{x_1} \psi_{x_1} + \phi_{x_2} \psi_{x_2}) v_{w_1 w_2} + (\phi_{x_1}^2 + \phi_{x_2}^2) v_{w_1 w_1} + (\psi_{x_1}^2 + \psi_{x_2}^2) v_{w_2 w_2}. \end{aligned}$$

Como f é analítica, então ϕ e ψ satisfazem as condições de Cauchy-Riemann,

$$\phi_x = \psi_y, \quad \phi_y = -\psi_x$$

o que implica que $\Delta_x \phi = 0 = \Delta_x \psi$, $\phi_{x_1} \psi_{x_1} + \phi_{x_2} \psi_{x_2} = 0$, $\phi_{x_1}^2 + \psi_{x_1}^2 = |f'(z)|^2$, $\psi_{x_2}^2 = \phi_{x_1}^2$, portanto $\psi_{x_1}^2 + \psi_{x_2}^2 = \phi_{x_1}^2 + \psi_{x_1}^2$. Portanto,

$$\Delta_x u = (\phi_{x_1}^2 + \psi_{x_1}^2) \Delta_w v.$$

Como $f'(z) \neq 0$, segue que $\Delta_x u = 0$ se, e somente se, $\Delta_w v = 0$. \square

Se uma região complicada $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ puder ser mapeada conformalmente (uma transformação conforme é aquela que preserva ângulos, toda função analítica é conforme nos pontos z onde $f'(z) \neq 0$) sobre o disco D , como sabemos sabemos como resolver problema de Dirichlet em D , seremos capazes de resolver o problema de Dirichlet em Ω . De fato, suponha que queremos resolver o problema de Dirichlet numa região Ω do plano, ou seja, $\Delta_x u = g$ em Ω e $u = g_\Omega$ em $\partial\Omega$, onde g é contínua. Seja f uma função analítica tal que $f'(z) \neq 0$ em Ω . Dado (w_1, w_2) na fronteira do disco, tome $(x_1, x_2) \in \partial\Omega$, tal que $w_1 = \phi(x_1, x_2)$ e $w_2 = \psi(x_1, x_2)$ ou seja, se

$$z = f^{-1}(w) = \tilde{\phi}(w_1, w_2) + i\tilde{\psi}(w_1, w_2),$$

então $x_1 = \tilde{\phi}(w_1, w_2)$ e $x_2 = \tilde{\psi}(w_1, w_2)$. Defina

$$g_D(w_1, w_2) = g_{\partial\Omega}(\tilde{\phi}(w_1, w_2), \tilde{\psi}(w_1, w_2)),$$

como g_Ω e ϕ e ψ são contínuas, o mesmo acontece com f_D . Vimos que

$$v(w) = \int_{|w| < a} H(y, w) g_D(y) dy$$

é a solução do problema de Dirichlet $\Delta_w v(w) = 0$ em $|w| < a$ e $v|_D = g_D$. Afirmamos que

$$u(x_1, x_2) = v(\phi(x_1, x_2), \psi(x_1, x_2))$$

é a solução de $\Delta_x u = 0$ em Ω e $u|_{\partial\Omega} = g_\Omega$. Como $\Delta_w v = 0$ em D , então $\Delta_x u = 0$ em Ω , por outro lado, se $(x_1, x_2) \in \partial\Omega$, então

$$u(x_1, x_2) = v(\phi(x_1, x_2), \psi(x_1, x_2)) = v(w_1, w_2) = g_D(w_1, w_2) = g_{\partial\Omega}(\tilde{\phi}(w_1, w_2), \tilde{\psi}(w_1, w_2)) = g_{\partial\Omega}(x_1, x_2).$$

\square

O Teorema de mapeamento de Riemann diz que todo domínio simplesmente conexo G no plano complexo estendido cuja fronteira contém mais de um ponto pode ser mapeado conformalmente sobre um disco com centro na origem. As transformações de Schwarz-Christoffel, mapeam o semi-plano superior conformalmente sobre polígonos.

6.5 Métodos de espaço de Hilbert

6.5.1 Preliminares

Dado um espaço vetorial V , um produto interno em V é uma função $(,) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

- (i) $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y)$, para todos escalares α_1, α_2 e $x_1, x_2, y \in V$.
- (ii) $(x, y) = (y, x)$.
- (iii) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$, onde “0” denota o elemento 0 de V e o número real 0.

A partir do produto escalar, definimos a norma $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Dados $x, y \in V$, temos as seguintes desigualdades,

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|,$$

e

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

chamadas de desigualdades de Cauchy-Schwarz e triangular, respectivamente. Na desigualdade de Cauchy-Schwarz só temos a igualdade se $x = \lambda y$, para algum $\lambda \geq 0$.

Dizemos que uma sequência x^1, x^2, \dots em V converge para limite (não necessariamente único) $x \in V$, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x^n\| = 0.$$

Um espaço com produto interno é completo e chamado de espaço de Hilbert se toda sequência de Cauchy em V converge para um elemento de V .

Todo espaço vetorial com produto interno pode ser completado, ou seja, imerso num espaço de Hilbert H , no qual V é denso. Podemos definir H como o conjunto de seqüências de Cauchy $\{x^1, x^2, \dots\}$ em S , identificamos duas seqüências de Cauchy $\{x^1, x^2, \dots\}$ e $\{y^1, y^2, \dots\}$, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n - y^n\| = 0$$

e identificamos um elemento $x \in S$ com a seqüência $\{x, x, \dots\}$ em H . Definimos multiplicação por escalar, adição e produto escalar de elementos de H realizando-as em cada elemento da seqüência correspondente (um elemento de H dado pela seqüência de Cauchy $\{x^1, x^2, \dots\}$ em S é exatamente o limite de x^n).

Um funcional linear em V é uma função $l : V \rightarrow \mathbb{R}$, tal que todos escalares λ, μ e $x, y \in V$, temos

$$l(\lambda x + \mu y) = \lambda l(x) + \mu l(y).$$

Dizemos que l é limitado se existir uma constante M , tal que

$$|l(x)| \leq M \|x\|,$$

para todo $x \in V$.

Para cada y fixo, o produto escalar (x, y) define um funcional linear em V , o qual pela desigualdade de Cauchy-Schwarz é limitado. Num espaço de Hilbert H a recíproca também é verdadeira: o Teorema de Representação de Riesz diz que todo funcional linear limitado l num espaço de Hilbert pode ser representado de maneira única como

$$l(x) = (x, y)$$

para algum elemento de $y \in H$.

Exemplo 37. *Exemplos familiares de espaços de Hilbert são os espaços euclidianos \mathbb{R}^n , onde $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Portanto, se l for um funcional linear limitado em \mathbb{R}^n , então pelo Teorema de Representação de Riesz, existe um elemento $a = (a_1, \dots, a_n)$, tal que*

$$l(x) = (x, a) = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

Em particular se l não for nulo, ou seja, se $a \neq 0$, a equação $l(x) = 1$ é equivalente a

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = 1,$$

o que define um hiperplano no espaço euclidiano H . Note que a pode ser interpretado como normal ao hiperplano.

6.5.2 Reformulando o problema de Dirichlet como um funcional linear limitado num espaço de Hilbert

Queremos resolver o seguinte problema:

$$\Delta U = 0, \quad U|_{\partial\Omega} = f.$$

Fazendo $v = U - f$, então

$$v|_{\partial\Omega} = 0 \quad e \quad \Delta v = -w \quad em \quad \Omega \quad (6.31)$$

onde $w = \Delta f$ é dado e Ω é aberto, limitado e conexo, para o qual o vale o Teorema da Divergência. Seja $\widetilde{C}_o^1(\overline{\Omega})$ o subconjunto de $C^1(\overline{\Omega})$ formado pelas funções que se anulam na fronteira $\partial\Omega$. O forma bilinear

$$(u, v) = \int_{\Omega} \sum_k u_{x_k} v_{x_k} dx$$

define um produto escalar em $\widetilde{C}_o^1(\overline{\Omega})$. A norma de Dirichlet correspondente é

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} \sum_k u_{x_k}^2 dx.$$

Se $v \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução de (6.31) e $u \in \widetilde{C}_o^1(\overline{\Omega})$ então

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (u \nabla v) dx = \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

e do Teorema da Divergência, temos

$$\int_{\partial\Omega} u \nabla v \cdot \vec{n} dx = \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

como $u = 0$ em $\partial\Omega$, então o termo de fronteira se anula, logo

$$(u, v) = \int_{\Omega} u w dx.$$

Seja l é o funcional linear em $\widetilde{C}_o^1(\overline{\Omega})$ definido como

$$l(u) = \int_{\Omega} u w dx,$$

a nossa solução v deve ser tal que

$$l(u) = (u, v).$$

Se $\widetilde{C}_o^1(\overline{\Omega})$ fosse um espaço de Hilbert e l fosse um linear limitado em $\widetilde{C}_o^1(\overline{\Omega})$ a existência de tal v seria assegurada pelo Teorema de Representação de Riesz. Embora l seja um funcional linear limitado em $\widetilde{C}_o^1(\overline{\Omega})$ (isto seguirá da desigualdade de Poincaré), este espaço não é completo, por isso consideraremos o seu completamento em relação à norma de Dirichlet $\| \cdot \|$, denotado por $H_o^1(\Omega)$.

Portanto o nosso problema modificado é o seguinte: encontre $v \in H_o^1(\Omega)$, tal que

$$\phi(u) = (u, v),$$

para todo $u \in H_o^1(\Omega)$, onde ϕ é a extensão para $H_o^1(\Omega)$ do funcional l em $\widetilde{C}_o^1(\overline{\Omega})$. Mostraremos que o funcional linear ϕ é limitado e pelo Teorema de Representação de Riesz existirá $v \in H_o^1(\Omega)$, tal que $\phi(u) = (u, v)$, para todo $u \in H_o^1(\Omega)$. Com isso, só nos faltará mostrar que tal v realmente é a solução do problema (6.31).

A seguir provaremos a desigualdade de Poincaré que nos permitirá obter uma cota superior para a norma L^2 em termos da norma de Dirichlet, ou seja,

$$\|u\|_2 \leq N\|u\|, \quad (6.32)$$

para todo $u \in \widetilde{C}_o^1(\overline{\Omega})$. Da desigualdade de Cauchy-Schwarz e da desigualdade de Poincaré, seguirá

$$|l(u)| = |(u, w)| \leq \|u\|_2 \|v\|_2 \leq N\|w\|_2 \|u\| = M\|u\|,$$

o que mostra que l é um funcional linear limitado em $\widetilde{C}_o^1(\overline{\Omega})$.

Prova de (6.32): Suponha que $u \in \widetilde{C}_o^1(\overline{\Omega})$ e para simplificar que $\partial\Omega$ seja intersectada por qualquer reta paralela ao eixo x_1 num número finito de pontos. Como Ω é limitado, ele está dentro de um hipercubo Γ , definido por $|x_i| \leq q$, para todo $i = 1, \dots, n$. Note que pelo Teorema Fundamental do Cálculo, como $u(-a, x_2, \dots, x_n) = 0$, temos

$$\begin{aligned} u^2(x) &= (u(x_1, \dots, x_n) - u(-a, x_2, \dots, x_n))^2 \\ &= [u(\xi_1, x_2, \dots, x_n)]_{\xi_1=-a}^{\xi_1=x_1} \\ &= \left(\int_{-a}^{x_1} u_{\xi_1}(\xi_1, x_2, \dots, x_n) d\xi_1 \right)^2 \\ &\leq \left(\int_{-a}^{x_1} 1^2 d\xi_1 \right) \left(\int_{-a}^{x_1} u_{\xi_1}^2(\xi_1, x_2, \dots, x_n) d\xi_1 \right) \\ &\leq 2a \left(\int_{-a}^a u_{\xi_1}^2(\xi_1, x_2, \dots, x_n) d\xi_1 \right) \\ &= 2a \int_{-a}^a u_{\xi_1}^2(\xi_1, x_2, \dots, x_n) d\xi_1 \end{aligned}$$

na última desigualdade usamos Cauchy-Schwarz. Portanto,

$$u^2(x) \leq 2a \int_{-a}^a u_{\xi_1}^2(\xi_1, x_2, \dots, x_n) d\xi_1.$$

Integrando esta desigualdade em relação a x_1 de $-a$ a a , temos

$$\int_{-a}^a u^2(x_1, \dots, x_n) dx_1 \leq 2a \int_{-a}^a \int_{-a}^a u_{\xi_1}^2(\xi_1, x_2, \dots, x_n) d\xi_1 dx_1 = (2a)^2 \int_{-a}^a u_{\xi_1}^2(\xi_1, x_2, \dots, x_n) d\xi_1.$$

Ou seja,

$$\int_{-a}^a u^2(x_1, \dots, x_n) dx_1 \leq (2a)^2 \int_{-a}^a u_{x_1}^2(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|u\|_2^2 &= \int_{\Gamma} u^2(x) dx \\ &= \int_{-a}^a \dots \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a u^2(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n \\ &\leq (2a)^2 \int_{-a}^a \dots \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a u_{x_1}^2(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n \\ &= (2a)^2 \int_{\Gamma} u_{x_1}^2(x) dx \\ &\leq (2a)^2 \int_{\Gamma} \sum_k u_{x_k}^2(x) dx \\ &= 4a^2 \|u\|^2, \end{aligned}$$

o que mostra a desigualdade de Poincaré, onde $N = 2a$. □

A seguir que ϕ é um funcional linear limitado. Vimos que um elemento $u \in H_0^1(\Omega)$ é representado por uma sequência de Cauchy $u^1, u^2, \dots \in \widetilde{C_0^1(\overline{\Omega})}$. Portanto,

$$(l(u^k) - l(u^j))^2 = \left(\int_{\Omega} (u^k - u^j) w dx \right)^2 \leq N \|u^k - u^j\|,$$

logo a sequência $\{l(u^k)\}$ é uma sequência de Cauchy de números reais, portanto é convergente. Definimos

$$\phi(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} l(u^k),$$

logo da desigualdade

$$|l(u^k)| \leq M \|u^k\|,$$

temos

$$|\phi(u)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |l(u^k)| \leq M \lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k\| = M \|u\|.$$

o que mostra que ϕ é um funcional linear limitado em $H_0^1(\Omega)$. Portanto, pelo Teorema de Representação de Riesz existe $v \in H_0^1(\Omega)$, tal que $\phi(u) = (u, v)$, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, com isso resolvemos o nosso problema modificado.

Mostraremos que a solução v do problema modificado é uma solução do problema (6.31), ou seja, $\Delta v = -w$ em Ω e $v|_{\partial\Omega} = 0$.

A solução v pode ser identificada com uma sequência de Cauchy $v^1, v^2, \dots \in \widetilde{C^1_0(\Omega)}$. Por causa da desigualdade de Poincaré, v pode ser identificada como um elemento de $L^2(\Omega)$. De fato,

$$0 \leq \int_{\Omega} (v^k - v)^2 dx \leq N \|v^k - v\|^2,$$

como $\lim_{k \rightarrow \infty} \|v^k - v\|^2 = 0$, segue que

$$\|v^k - v\|_2^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (v^k - v)^2 dx = 0.$$

Seja u uma função teste de classe $C^\infty(\Omega)$ e de suporte compacto. Então

$$\begin{aligned} (v, u) &= \lim_{j \rightarrow \infty} (v^j, u) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sum_k v^j_{x_k} u_{x_k} dx \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla v^j \cdot \nabla u dx \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\int_{\partial\Omega} v^j \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_{\Omega} v^j \Delta u dx \right) \\ &= - \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v^j \Delta u dx \quad (u \text{ tem suporte compacto, logo } \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ em } \partial\Omega) \\ &= - \int_{\Omega} v \Delta u dx \end{aligned}$$

a última igualdade segue das seguintes contas:

$$\int_{\Omega} v^j \Delta u dx = \int_{\Omega} (v^j - v) \Delta u dx + \int_{\Omega} v \Delta u dx,$$

portanto da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos mas

$$\left| \int_{\Omega} (v^j - v) \Delta u dx \right| \leq \|v^j - v\|_2 \|\Delta u\|_2 \leq |\Omega| \max_{\Omega} |\Delta u|^2 \|v^j - v\|_2^2,$$

logo

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (v^j - v) \Delta u dx = 0.$$

Mostramos que para toda função teste u , temos

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = -(v, u) = \int_{\Omega} u(-w) dx, \quad (6.33)$$

portanto v satisfaz a equação

$$\Delta v = -w,$$

no sentido de distribuições. Mostraremos que $v \in C^2(\Omega)$ e que $\Delta v = -w$. Tome arbitrariamente $z \in \Omega$ e ρ suficientemente pequeno de modo que a bola $B(z, 3\rho)$ esteja em Ω . Tome

uma função teste $\phi \in C^\infty$ com suporte em $B(z, \rho)$ e uma função teste fixa $\zeta \in C^\infty$ que possui valor 1 em $B(z, 2\rho)$. Faça

$$u(x) = \int K(x, \xi)\phi(\xi)d\xi, \quad (6.34)$$

onde K é a solução fundamental da equação de Laplace dada por (??). Desta definição segue que $u \in C^2_\circ(B(z, \rho))$ e da fórmula de Poisson (??), temos

$$u(x) = \int K(x, \xi)\Delta_\xi u(\xi)d\xi,$$

para todo $x \in B(z, \rho)$, portanto

$$\phi(x) = \Delta_x u(x) = \Delta_x(\zeta(x)u(x)) + \Delta_x((1 - \zeta(x))u(x)) \equiv \phi_1(x) + \phi_2(x).$$

Logo,

$$\int v\phi(x)dx = \int v(x)\phi_1(x)dx + \int v(x)\phi_2(x)dx.$$

Como $\zeta(x)u(x)$ é novamente uma função teste, temos

$$\begin{aligned} \int v(x)\phi_1(x)dx &= \int v(x)\Delta_x(\zeta(x)u(x))dx \\ (6.33) \quad &= \int w(x)\zeta(x)u(x)dx \\ (6.34) \quad &= \int \phi(\xi) \left(\int -w(x)\zeta(x)K(x, \xi)dx \right) d\xi \end{aligned} \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &= \Delta_x((1 - \zeta(x))u(x)) \\ (6.34) \quad &= \Delta_x \left((1 - \zeta(x)) \int K(x, \xi)\phi(\xi)d\xi \right) \\ &= \Delta_x \int (1 - \zeta(x))K(x, \xi)\phi(\xi)d\xi \\ &= \int \Delta_x((1 - \zeta(x))K(x, \xi))\phi(\xi)d\xi \\ &\equiv \int_{B(z, \rho)} F(x, \xi)\phi(\xi)d\xi \quad (\phi \text{ tem suporte em } B(z, \rho)), \end{aligned}$$

onde

$$F(x, \xi) = \Delta_x((1 - \zeta(x))K(x, \xi))$$

pertence a C^∞ em x e ξ , para $\xi \in B(z, \rho)$ e qualquer x , pois $K(x, \xi)$ é singular somente em $x = \xi$, mas $1 - \zeta(x) = 0$ em $B(z, 2\rho)$ (em particular $F(x, \xi) = 0$ para $x \in B(z, 2\rho)$). Note que

$$\Delta_\xi F(x, \xi) = \Delta_x((1 - \zeta(x)))\Delta_\xi K(x, \xi) = 0,$$

visto que $\Delta_\xi K(x, \xi) = 0$, para $x \neq \xi$. Portanto,

$$\int v(\xi)\phi_2(\xi)d\xi = \int \phi(\xi) \left(\int F(x, \xi)v(x)dx \right) d\xi. \quad (6.36)$$

De (6.35) e (6.36), temos

$$\int v(\xi)\phi(\xi)d\xi = \int \phi(\xi) \left(\int (-w(x)\zeta(x)K(x, \xi) + F(x, \xi)v(x)dx) \right) d\xi \equiv \int \phi(\xi)V(\xi)d\xi,$$

portanto para toda função teste $\phi \in C_o^\infty(B(z, \rho))$ temos

$$\int \phi(\xi)(v(\xi) - V(\xi))d\xi = 0$$

e por aproximação para todo $\phi \in C_o^1(B(z, \rho))$, em particular, ela vale substituímos ϕ por $\phi(v^j - V)$, ou seja,

$$\int \phi(\xi)(v^j(\xi) - V(\xi))^2 d\xi = 0$$

vale para todo $\phi \in C_o^1(B(z, \rho))$ e todo j . Tomando o limite quando $j \rightarrow \infty$, concluímos que

$$\int \phi(\xi)(v(\xi) - V(\xi))^2 d\xi = 0,$$

para todo $\phi \in C_o^1(B(z, \rho))$, portanto, $v = V$ em quase todos os pontos em $B(z, \rho)$. Por outro lado, V é de classe C^2 e

$$\Delta_\xi V(\xi) = -\Delta_\xi \int K(x, \xi)\zeta(x)w(x)dx + \int \Delta_\xi F(x, \xi)dx = -\zeta(\xi)w(\xi) = -w(\xi),$$

na última igualdade usamos que $\zeta(\xi) = 1$ para $\xi \in B(z, 2\rho)$ e estamos tomando ξ na bola $B(z, \rho)$. Na penúltima igualdade usamos que $\Delta_\xi F(x, \xi) = 0$ e a fórmula de Poisson que diz que

$$u(\xi) = \Delta_\xi \int_\Omega K(x, \xi)u(x)dx$$

vale para toda função $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e $\xi \in \Omega$ (estamos assumindo que w é dada em $\overline{\Omega}$ e vamos assumi-la de classe $C^2(\Omega)$). Podemos identificar v com V . Como z é arbitrário, temos $\Delta v = -w$ em todo Ω . \square

Falta mostrar que

$$v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Isto será mostrado para $n = 2$. Dado $v \in H_o^1(\Omega)$, tome uma sequência de Cauchy $v^1, v^2, \dots \in \widetilde{C_o^1(\overline{\Omega})}$. Dado $\epsilon > 0$, então existe um N , tal que se $m, n > N$ temos

$$\|v^m - v^n\| < \epsilon.$$

Seja $j > N$ fixo e $k > j$. Dado $\xi \in \Omega$, seja $d(\xi)$ a distância de ξ ao elemento ξ^* de $\partial\Omega$ mais próximo de ξ , assumiremos $\partial\Omega$ e $d(\xi) = |\xi^* - \xi|$ suficientemente pequeno. Então cada elemento $x \in B(\xi, d(\xi))$ pode ser unido por um ponto de $\partial\Omega$ por um segmento paralelo a

$\xi^*\xi$ e com comprimento $\leq 4d(\xi)$. A união U de tais segmentos cobre a bola $B(\xi, d(\xi))$, a desigualdade de Poincaré se aplica, substituindo u por $v^j - v^k$ em U e nos dá

$$\int \int_U (v^j - v^k)^2 dx_1 dx_2 \leq 16d^2(\xi) \|v^j - v^k\|^2 \leq 16d^2(\xi)\epsilon^2,$$

para $k > j$. Tomando-se o limite quando k tende para infinito, temos

$$\int \int_U (v^j - v)^2 dx_1 dx_2 \leq 16d^2(\xi)\epsilon^2.$$

Para uma solução v de $\Delta v = -w$, de (??), fazendo $\rho < d(\xi)$, temos

$$v(\xi) = - \int \int_{B(\xi, \rho)} (\psi(|x - \xi|) - \psi(\rho)) w(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial B(\xi, \rho)} v(x) dS, \quad (6.37)$$

onde $\psi(\rho) = \frac{\ln \rho}{2\pi}$. Seja $M = \max_{\bar{\Omega}} |w|$. Multiplicando a equação (6.37) por $2\pi\rho$ e integrando de 0 até $d(\xi)$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{d(\xi)} 2\pi\rho v(\xi) d\rho &= \int_0^{d(\xi)} 2\pi\rho \left(\int \int_{B(\xi, \rho)} (\psi(|x - \xi|) - \psi(\rho)) w(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right) d\rho \\ &\quad + \int_0^{d(\xi)} \left(\int_{\partial B(\xi, \rho)} v dS \right) d\rho \\ &= \int_0^{d(\xi)} 2\pi\rho \left(\int \int_{B(\xi, \rho)} (\psi(|x - \xi|) - \psi(\rho)) w(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right) d\rho \\ &\quad + \int_{B(\xi, \rho)} v dx \quad (\text{usamos o Teorema de Fubini}). \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_0^{d(\xi)} 2\pi\rho v(\xi) d\rho &= \pi d^2(\xi) v(\xi) \\ &\quad - \int_0^{d(\xi)} 2\pi\rho \left(\int \int_{B(\xi, \rho)} (\psi(\rho) - \psi(|x - \xi|)) |w(x_1, x_2)| dx_1 dx_2 \right) d\rho \\ &\leq M \int_0^{d(\xi)} 2\pi\rho \left(\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\rho \frac{1}{2\pi} \ln(\rho/r) r dr \right) d\rho = \frac{\pi M}{2} \int_0^{d(\xi)} \rho^3 d\rho = \frac{\pi M}{8} d^4(\xi) \\ \int_{B(\xi, \rho)} |v| dx &\leq \int \int_{B(\xi, \rho)} |v - v^j| dx_1 dx_2 + \int \int_{B(\xi, \rho)} |v^j| dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\left(\int \int_{B(\xi, \rho)} |v - v^j| dx_1 dx_2 \right)^2 \leq \pi d^2(\xi) \int \int_{B(\xi, \rho)} |v - v^j|^2 dx_1 dx_2 \leq 16d\pi d^4(\xi)\epsilon^2$$

$$\int \int_{B(\xi, \rho)} |v^j| dx_1 dx_2 \leq \frac{\max_{B(\xi, \rho)} |v^j| \pi d^2(\xi)}{1}$$

como v^j se anula em $\partial\Omega$,

$$\max_{\overline{B(\xi, \rho)}} |v^j| < \epsilon$$

se $d(\xi)$ for suficientemente pequeno. Portanto,

$$v(x) = O(\epsilon + Md^2(\xi)),$$

o que implica que $v(\xi)$ tende para 0 quando ξ se aproxima de $\partial\Omega$. □

Capítulo 7

Equação da onda

A equação da onda é

$$\square u = u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, \quad (7.1)$$

onde $u(x_1, \dots, x_n, t) = u(x, t)$, o operador \square é chamado de D'Alembertiano. Para $n = 3$ ela descreve uma onda acústica ou ótica, para $n = 2$ ela descreve ondas na superfície da água e para $n = 1$ ela descreve o som num tubo ou cordas vibrantes. O problema de valor inicial da equação da onda consiste em encontrarmos uma solução de (7.2) satisfazendo as condições

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x). \quad (7.2)$$

Nas próximas subseções descreveremos algumas soluções da equação da onda.

7.1 O Método das médias esféricas

Dada uma função real contínua $h(x) = h(x_1, \dots, x_n)$, definimos a sua média na esfera com centro em x e raio r como

$$M_h(x, r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} h(y) dS_y \quad (7.3)$$

a integral acima é uma integral sobre a superfície esféricas $|y-x|=r$, $\int_{|y-x|=r} dS_y = \omega_n r^{n-1}$. Fazendo $y = x + r\xi$, com $|\xi| = 1$, obtemos

$$M_h(x, r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} h(x + r\xi) dS_\xi. \quad (7.4)$$

Inicialmente $M_h(x, r)$ definido em (7.3) vale apenas apenas para $r > 0$, mas a equação (7.4) nos permite estender $M_h(x, r)$ para qualquer valor real. Como a medida dS_ξ é invariant a troca de ξ por $-\xi$, a função $M_h(x, -r) = M_h(x, r)$, ou seja, M_h é uma função par. Passando a derivada para dentro da integral em (7.4), vemos que se $h \in C^s(\mathbb{R}^n)$, então $M_h \in C^{s+1}(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_h(x, r)}{\partial r} &= \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \frac{\partial}{\partial r} h(x + r\xi) dS_\xi \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \nabla_x h(x + r\xi) \cdot \xi dS_\xi \\
&\quad (y \equiv x + r\xi, \frac{\partial h(x + r\xi)}{\partial r} = \sum_i \frac{\partial h(y)}{\partial y_i} \Big|_{y=x+r\xi} \xi_i = \nabla_y h(y) \Big|_{y=x+r\xi} \cdot \xi = \nabla_x h(x + r\xi)) \cdot \xi \\
&= \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|<1} \nabla_\xi \cdot (\nabla_x h(x + r\xi)) d\xi \\
&\quad (\xi \text{ é vetor normal unitário, usamos o Teorema da Divergência}) \\
&= \frac{r}{\omega_n} \int_{|\xi|<1} \nabla_x \cdot \nabla_x h(x + r\xi) d\xi \\
&\quad (w(x + r\xi) \equiv \nabla_x h(x + r\xi), \nabla_\xi \cdot w(x + r\xi) = \sum_i \frac{\partial w(x + r\xi)}{\partial \xi_i} = \sum_i \frac{\partial w(y)}{\partial y_i} \Big|_{y=x+r\xi} \frac{\partial y_i}{\partial \xi_i} \\
&\quad \quad = r \sum_i \frac{\partial w(y)}{\partial y_i} \Big|_{y=x+r\xi} = r \nabla_y \cdot w(y) \Big|_{x+r\xi} = r \nabla_x \cdot w(x + r\xi)) \\
&= \frac{r}{\omega_n} \int_{|\xi|<1} \Delta_x h(x + r\xi) d\xi \\
&= \Delta_x \left(\frac{r}{\omega_n} \int_{|\xi|<1} h(x + r\xi) d\xi \right) \\
&= \Delta_x \left(\frac{r^{1-n}}{\omega_n} \int_{|y-x|<r} h(y) dy \right) \\
&\quad x + r\xi = y, \left| \frac{\partial \xi}{\partial y} \right| = |r^{-1} I_n| = r^{-n}, d\xi = \left| \frac{\partial \xi}{\partial y} \right| dy = r^{-n} dy \\
&= \Delta_x \left(\frac{r^{1-n}}{\omega_n} \int_0^r d\rho \int_{|y-x|=\rho} h(y) dS_y \right) \quad (\text{integrando em cascas de raio } \rho \text{ centrada em } x) \\
&= r^{1-n} \Delta_x \left(\int_0^r \rho^{n-1} d\rho \left(\frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|y-x|=\rho} h(y) dS_y \right) \right) \\
&= r^{1-n} \Delta_x \left(\int_0^r d\rho M_h(x, \rho) \right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial M_h(x, r)}{\partial r} = r^{1-n} \Delta_x \left(\int_0^r d\rho M_h(x, \rho) \right).$$

Multiplicando esta equação por r^{n-1} e derivando em relação à r , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial M_h(x, r)}{\partial r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \Delta_x \left(\int_0^r \rho^{n-1} d\rho M_h(x, \rho) \right) \\ &= \Delta_x \frac{\partial}{\partial r} \left(\int_0^r \rho^{n-1} d\rho M_h(x, \rho) \right) \\ &= \Delta_x r^{n-1} M_h(x, r). \end{aligned}$$

(usamos o Teorema Fundamental do Cálculo na última igualdade)

A equação

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial M_h(x, r)}{\partial r} \right) = \Delta_x r^{n-1} M_h(x, r) \quad (7.5)$$

é chamada de equação de Darboux. Quanto aos seus valores iniciais, note que

$$M_h(x, 0) = h(x) \quad (7.6)$$

e como $M_h(x, \xi)$ é ímpar, então $\frac{\partial}{\partial r} M_h(x, r)$ é ímpar, logo,

$$\frac{\partial}{\partial r} M_h(x, r)|_{r=0} = 0. \quad (7.7)$$

Conforme veremos a seguir, usando médias esféricas, podemos transformar o problema de valor inicial da equação de onda, numa equação hiperbólica em apenas duas variáveis independentes. Seja $u(x, t)$ uma solução de classe C^2 do problema de valor inicial da equação da onda no hiperplano $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$. Formamos a média esférica de u como função de x :

$$M_u(x, r, t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} u(x + r\xi, t) dS_\xi.$$

Fazendo $r = 0$, recobrimos u :

$$M_u(x, 0, t) = u(x, t).$$

Mostraremos que se $M_u(x, r, t)$ satisfaz a equação

$$\square M_u(x, r, t) = 0.$$

De fato, já vimos que

$$\Delta_x M_u = \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 r} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u,$$

agora mostraremos que o lado direito da equação acima é

$$c^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u.$$

De fato, temos

$$\begin{aligned} \Delta_x M_h &= \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \Delta_x u(x + r\xi, t) dS_\xi \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{|\xi|=1} u(x + r\xi, t) dS_\xi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u. \end{aligned}$$

Portanto, $M_u(x, r, t)$ como função das duas variáveis escalares r, t para x fixo satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u,$$

chamada equação de Euler-Poisson-Darboux, com condição inicial

$$M_u(x, r, 0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} u(x + r\xi, 0) dS_\xi = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} f(x + r\xi) dS_\xi = M_f(x, t)$$

e

$$\frac{\partial M_u(x, r, 0)}{\partial t} = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} u_t(x + r\xi, 0) dS_\xi = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} g(x + r\xi) dS_\xi = M_g(x, r).$$

Resumindo, se resolvermos o problema de valor inicial

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u, \quad M_u(x, r, 0) = M_f(x, r), \quad \frac{\partial M_u(x, r, 0)}{\partial t} = M_g(x, r),$$

Obteremos a solução do nosso problema original, a partir de $M_u(x, r, t)$, tomando-se o limite da mesma quando r tende a zero. A seguir resolveremos o problema de valor inicial acima para $n = 3$. Fazendo $n = 3$ na equação acima e a multiplicando por r , temos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (rM_u) = c^2 \left(r \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} M_u$$

que a equação da onda em uma dimensão espacial r a sua condição inicial é

$$rM_u = rM_f(x, r), \quad \frac{\partial}{\partial t} rM_u = rM_g(x, r).$$

Vimos que a solução do problema de valor inicial acima (r faz o papel do espaço, lembre que x está fixo) é

$$\begin{aligned} rM_u(x, r, t) &= \frac{1}{2} [(r + ct)M_f(x, r + ct) + (r - ct)M_f(x, r - ct)] \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} \xi M_g(x, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Usando que M_f e M_g são pares, temos

$$\begin{aligned} M_u(x, r, t) &= \frac{1}{2r} [(ct + r)M_f(x, r + ct) - (ct - r)M_f(x, ct - r)] \\ &\quad + \frac{1}{2rc} \int_{r-ct}^{r+ct} \xi M_g(x, \xi) d\xi, \quad \left(\int_{ct-r}^0 \xi M_u(x, \xi) d\xi \stackrel{\xi \rightarrow -\xi}{=} \int_{ct-r}^0 \xi M_g(x, \xi) dS_\xi \right) \end{aligned}$$

Ao tomarmos o limite quando r tende a zero na expressão acima, obtemos $u(x, t)$. Do Teorema do Valor Médio, temos

$$\frac{1}{2rc} \int_{r-ct}^{r+ct} \xi M_g(x, \xi) d\xi = \frac{1}{c} \xi^* M_g(x, \xi^*),$$

onde ξ^* está entre $ct - r$ e $ct + r$, como $M_g(x, \xi^*)$ é contínua em ct e ξ^* tende a ct quando r tende a zero, a integral acima tende a

$$tM_g(x, ct)$$

quando r tende a zero. A expressão

$$\frac{1}{2r} [(ct + r)M_f(x, r + ct) - (ct - r)M_f(x, ct - r)]$$

pode ser re-escrita como

$$\frac{1}{2}(M_f(x, r + ct) + M_f(x, ct - r)) + \frac{ct}{2} \left(\frac{M_f(x, r + ct) - M_f(x, ct)}{r} + \frac{M_f(x, ct - r) - M_f(x, ct)}{-r} \right)$$

a qual converge para

$$M_f(x, ct) + ct \frac{\partial}{\partial r} M_f(x, r) \Big|_{r=ct} = M_f(x, ct) + t \frac{\partial}{\partial t} M_f(x, ct) = \frac{\partial}{\partial t} (tM_f(x, ct)).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= tM_g(x, ct) + \frac{\partial}{\partial t} (tM_f(x, ct)) \\ &= \frac{t}{4\pi(ct)^2} \int_{|y-x|=ct} g(y) dS_y + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{4\pi(ct)^2} \int_{|y-x|=ct} f(y) dS_y \right) \quad ((7.3), \omega_3 = 4\pi) \\ &= \frac{t}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} g(y) dS_y + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} f(y) dS_y \right). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Note que o valor de $u(x, t)$ depende dos valores de g e f na esfera $S(x, ct)$ de centro em x e raio ct , ou seja, o domínio de dependência para $u(x, t)$ é $S(x, ct)$ (não uma região sólida, ou seja, vale o “Princípio de Huygen na forma forte”). Se ficarmos num ponto $x \in \mathbb{R}^3$ e esperarmos, o sinal chegará até nós, ficará por algum tempo e passará. Esta é a razão pela qual podemos comunicar (luz, som) em três dimensões.

Existe uma perda de regularidade na solução da equação da onda, pois a solução “vê” derivadas de f . Mesmo que f seja contínua, se ela não for derivável, a solução pode explodir em algum ponto x para algum valor finito de t . Para ver isto, faça

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - |x|^2}, & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

e $g(x) = 0$. Embora f seja contínua, ela não é derivável para $|x| = 1$. A solução em $x = 0$ em $t = 1/c$ depende dos valores de y na superfície $|y| = 1$, portanto será influenciada por

pontos onde f não é derivável (sua derivada explode nestes pontos) e, como veremos, $u(0, t)$ tende a infinito quando t tende a $1/c$. De fato, como $g = 0$, de (7.8), temos

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y|=ct} f(y) dS_y \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \begin{cases} t\sqrt{1-c^2t^2}, & \text{se } |y| \leq 1, \\ 0, & \text{se } |y| > 1 \end{cases} \quad (M_f(0, ct) = f(ct), \text{ pois } f(y) = f(|y|)) \\ &= \begin{cases} \frac{1-2c^2t^2}{\sqrt{1-c^2t^2}} & \text{se } |y| < 1 \\ 0, & \text{se } |y| > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

portanto, $u(0, t)$ tende a infinito quando t tende a $1/c$ pela esquerda. Dizemos que há focalização linear em L^∞ , pois enquanto

$$\|u(x, 0)\|_\infty = \|f\|_\infty = 1 < \infty,$$

temos

$$\|u(x, 1/c)\|_\infty = \infty.$$

Já em L^2 temos conservação. De fato a seguinte quantidade, chamada de energia,

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (u_t^2(x, t) + c^2 |\nabla_x u(x, t)|^2) dx$$

é conservada. Note que

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_{\mathbb{R}^3} \left(u_t u_{tt} + c^2 \nabla u \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla u(x, t) \right) dx$$

como $\square u = 0$, então $u_{tt} = c^2 \Delta u$, logo

$$u_t u_{tt} + c^2 \nabla u \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla u(x, t) = c^2 (u_t \Delta_x u + \nabla u \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla u(x, t)) = c^2 \nabla_x \cdot (u_t \nabla_x u)$$

portanto,

$$\frac{dE(t)}{dt} = c^2 \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_x \cdot (u_t \nabla_x u) dx$$

do Teorema da Divergência esta integral será nula se $u(x, t) = 0$ para todo $|x|$ suficientemente grande, ou seja $E(t)$ é conservada, $E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (g(x)^2 + c^2 |\nabla_x f(x)|^2) dx$.

Propriedade 3. (Decaimento de soluções) Se $f \in C_o^1(B(0, R))$ e $g \in C_o(B(0, R))$, $R > 0$, então

$$|u(x, t)| \leq Ct^{-(n-1)/2},$$

para t grande, uniformemente em $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

7.2 Método de Hadamard

Neste método soluções da equação diferencial parcial são obtidas considerando-as como caso especiais de soluções de outras equações que envolvem mais variáveis independentes. A seguir veremos como encontrar a solução da equação de onda em duas dimensões a partir a solução da equação da onda em três dimensões.

Suponha que $u(x_1, x_2, x_3, t)$ seja uma solução da equação da onda que não dependa de x_3 , ou seja, $u(x_1, x_2, x_3, t) = v(x_1, x_2, t)$. Como $\square u = 0$, então v é solução da equação

$$v_{tt} = c^2(v_{x_1x_1} + v_{x_2x_2}). \quad (7.9)$$

A solução de (7.9) com condições iniciais

$$v(x_1, x_2, 0) = \phi(x_1, x_2), \quad v_t(x_1, x_2, 0) = \psi(x_1, x_2)$$

é obtida da fórmula (7.8) para $x_3 = 0$, tomando condições de fronteiras

$$f(x_1, x_2, x_3) = \phi(x_1, x_2), \quad g(x_1, x_2, x_3) = \psi(x_1, x_2).$$

Portanto,

$$v(x_1, x_2, t) = u(x_1, x_2, 0, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} g(y_1, y_2, y_3) dS_y + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} f(y_1, y_2, y_3) dS_y \right),$$

onde

$$ct = |y - x| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + y_3^2}$$

que re-escrevemos como

$$y_3^2 = c^2 t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2 \equiv c^2 t^2 - r^2.$$

Esta equação define implicitamente

$$y_3 = y_3(y_1, y_2)$$

como duas funções de y_1, y_2 . Como $f(y_1, y_2, y_3) = \phi(y_1, y_2)$ e $g(y_1, y_2, y_3) = \psi(y_1, y_2)$ não dependem de y_3 , as contribuições de $-y_3$ e y_3 para as integrais de superfícies são iguais, por isso podemos considerar apenas a superfície $y_3 > 0$ e multiplicar cada integral por dois. Como a nossa superfície é o gráfico da função $y_3 = y_3(y_1, y_2)$, temos

$$\begin{aligned} dS_y &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_2}\right)^2} dy_1 dy_2 \\ &= \frac{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + y_3^2}}{y_3} dy_1 dy_2 \quad \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_i} = -\frac{y_i - x_i}{y_3}, i = 1, 2\right) \\ &= \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} dy_1 dy_2, \end{aligned}$$

onde (y_1, y_2) está no disco sólido $(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < ct$ (projeção da superfície no plano $y_3 = 0$).

Finalmente,

$$v(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2 < ct} \frac{\psi(y_1, y_2)}{\sqrt{c^2t^2 - r^2}} dy_1 dy_2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{2\pi c} \int_{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2 < ct} \frac{\phi(y_1, y_2)}{\sqrt{c^2t^2 - r^2}} dy_1 dy_2 \right).$$

Note que o domínio de dependência do ponto (x_1, y_1, t) no dado inicial consiste do disco sólido $(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 \leq ct$ no plano y_1, y_2 . Portanto o princípio de Huygen na sua forma forte não se aplica para a equação de onda em duas dimensões. Uma vez recebido, o sinal nunca morre, por isso não é possível comunicação (luz, som) em duas dimensões.

7.3 O princípio de Duhamel

A seguir veremos como resolver a equação da onda não-homogênea

$$\square u(x, t) = w(x, t), \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x).$$

Como a equação acima é linear, então a solução do problema a cima é

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

onde u_1 e u_2 são soluções dos seguintes problemas

$$\square u_1(x, t) = 0, \quad u_1(x, 0) = f(x), \quad (u_1)_t(x, 0) = g(x)$$

e

$$\square u_2(x, t) = w(x, t), \quad u_2(x, 0) = 0, \quad (u_2)_t(x, 0) = 0,$$

respectivamente. Vimos como encontrar u_1 , a seguir veremos como encontrar u_2 . Portanto, vamos resolver o seguinte problema

$$\square u(x, t) = w(x, t), \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

Afirmamos que a solução deste problema é dada por

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t, s) ds,$$

onde $U(x, t, s)$ para cada $s \geq 0$ (apenas um parâmetro) é a solução de

$$\square U(x, t, s) = 0, \quad t \geq s, \quad U(x, s, s) = 0, \quad U_t(x, s, s) = w(x, s),$$

ou seja, U é a solução da equação de onda com dado inicial em $t = s$. De fato, se $U(x, t, s)$ é a solução do problema acima de classe C^2 nos argumentos $x \in \mathbb{R}^n$ e $0 \leq s \leq t$, temos

$$u_t(x, t) = U(x, t, t) + \int_0^t U_t(x, t, s) ds = \int_0^t U_t(x, t, s) ds$$

e

$$u_{tt}(x, t) = U_t(x, t, t) + \int_0^t U_{tt}(x, t, s) ds = w(x, t) + \int_0^t c^2 \Delta_x U(x, t, s) ds = w(x, t) + c^2 \Delta_x u(x, t),$$

o que mostra que $\square u = w$. Resta-nos encontrar $U(x, t, s)$, como isto envolve resolver a equação da onda com condição inicial em $t = s$ e vimos como resolvê-la com condições iniciais em $t = 0$, vamos considerar a seguinte função

$$V(x, t, s) = U(x, t + s, s).$$

Como a equação da onda é invariante a translações e $\square U = 0$, segue que

$$\square V(x, t, s) = 0, \quad t \geq 0$$

e condições iniciais

$$V(x, 0, s) = U(x, s, s) = 0, \quad V_t(x, 0, s) = U_t(x, s, s) = w(x, s),$$

portanto para $n = 3$

$$V(x, t, s) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} w(y, s) dS_y,$$

que é de classe C^2 se $w(x, t) \in C^2$, para $t \geq 0$ e todo x . Logo,

$$U(x, t, s) = V(x, t - s, s) = \frac{1}{4\pi c^2 (t - s)} \int_{|y-x|=c(t-s)} w(y, s) dS_y.$$

Finalmente,

$$u(x, t) = \int_0^t V(x, t - s, s) ds = \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^t \frac{1}{t - s} ds \int_{|y-x|=c(t-s)} w(y, s) dS_y.$$

Note que o valor da solução no ponto (x, t) depende dos valores de w em pontos (y, s) no semi-espaco superior ($t \geq 0$) que estão no cone voltado para baixo com vértice em (x, t) , ou seja, na superfície

$$|y - x| = c(t - s), \quad 0 < s < t.$$

□

7.4 Problemas mistos (valor inicial e de contorno)

Considere solução do seguinte problema:

$$\square u = w(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \Omega$$

$$u(x, t) \left(ou \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} \right) = h(x, t), \quad x \in \partial\Omega, t > 0$$

onde Ω é uma região limitada do \mathbb{R}^n . Então a energia

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_{\Omega} \left(u_t u_{tt} + c^2 \nabla u \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla u(x, t) \right) dx$$

como $\square u = w(x, t)$, então $u_{tt} = c^2 \Delta u + w(x, t)$, logo

$$u_t u_{tt} + c^2 \nabla u \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla u(x, t) = c^2 (u_t \Delta_x u + \nabla u \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla u(x, t)) + w(x, t) = c^2 \nabla_x \cdot (u_t \nabla_x u) + w(x, t)$$

portanto,

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_{\Omega} (c^2 \nabla_x \cdot (u_t \nabla_x u) + w(x, t)) dx$$

do Teorema da Divergência temos

$$\frac{dE(t)}{dt} = c^2 \int_{\partial\Omega} u_t(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial n_x} dS_x + \int_{\Omega} w(x, t) dx.$$

Em particular a expressão acima nos dá unicidade para o problema misto, pois se $u_1(x, t)$ e $u_2(x, t)$ forem duas soluções, então $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ seria a solução do problema misto associado à equação homogênea (correspondente a $w = 0$) e com condições iniciais e de fronteira nulas, portanto

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0,$$

ou seja, $E(t) = E(0) = 0$ para todo t , ou seja,

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2(x, t) + c^2 |\nabla_x u(x, t)|^2) dx = 0.$$

Portanto, $u_t = u_{x_i} = 0$ para todo $x \in \Omega$ e $t > 0$, portanto u é constante, logo $u = 0$, pois $u(x, 0)$, logo $u_1 = u_2$. \square

No caso particular do problema misto em que a equação é homogênea ($w = 0$) e a condição de fronteira é 0 ($h = 0$), podemos encontrar solução através de expansão em auto-funções do Laplaciano para a região Ω . Uma auto-função $v(x)$ associada ao autovalor λ é a solução de

$$\Delta v + \lambda v = 0, \quad x \in \Omega, \quad v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

onde v não se anula identicamente. Sob hipóteses adequadas de regularidade de Ω , existe uma sequência de autovalores λ_k e uma correspondente sequência de autofunções $v_k(x)$ que forma um conjunto ortonormal completo para $L^2(\Omega)$. Isto nos leva à expansão

$$u(x, t) = \sum_k a_k(t) v_k(x) \tag{7.10}$$

para a solução do problema de valor inicial. Substituindo a expressão acima na equação $\square u = 0$, temos

$$0 = \sum_k \frac{d^2 a_k(t)}{dt^2} v_k(x) - c^2 a_k(t) \Delta v_k(x) = \sum_k \left(\frac{d^2 a_k(t)}{dt^2} + c^2 \lambda_k a_k(t) \right) v_k(x),$$

o que nos leva as seguintes equações diferenciais ordinárias para os a_k 's:

$$\frac{d^2 a_k(t)}{dt^2} + c^2 \lambda_k a_k(t) = 0,$$

cuja solução geral é

$$a_k(t) = a_k(0) \cos(c\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{a'_k(0)}{c\sqrt{\lambda_k}} \text{sen } c\sqrt{\lambda_k} t$$

Multiplicando (7.10) por $v_n(x)$ e integrando sobre Ω , levando em conta que o conjunto de autofunções v_k são ortonormais, temos

$$\int_{\Omega} u(x, t) v_n(x) dx = \sum_k a_k(t) \int_{\Omega} v_k(x) v_n(x) dx = \sum_k a_k(t) \delta_{nk} = a_n(t).$$

Portanto,

$$a_k(t) = \int_{\Omega} u(x, t) v_k(x) dx,$$

em particular.

$$a_k(0) = \int_{\Omega} u(x, 0) v_k(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v_k(x) dx$$

e

$$a'_k(0) = \int_{\Omega} u_t(x, 0) v_k(x) dx = \int_{\Omega} g(x) v_k(x) dx.$$

Portanto, temos as seguintes expressões para os a_k 's:

$$a_k(t) = \int_{\Omega} \left(f(x) \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{g(x) \text{sen}(c\sqrt{\lambda_k} t)}{c\sqrt{\lambda_k}} \right) v_k(x) dx.$$

No caso uni-dimensional em que $\Omega = (0, L)$, temos o seguinte problema:

$$u_{tt} = c^2 u''(x), \quad x \in (0, L), \quad u(0) = 0 = u(L), \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in (0, L).$$

A solução $u(x, t)$ representa o deslocamento vertical no ponto x e no instante t de uma corda (por exemplo de violão) de comprimento L , cujas extremidades estão presas. Os autovalores são $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$ e as correspondentes auto-funções são $\text{sen}((k\pi x)/L)$, onde $k = 1, 2, \dots$

Capítulo 8

Equação de Calor

8.1 Transformada de Fourier

Definição 9. As funções de decaimento rápido $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto das funções infinitamente deriváveis ϕ em \mathbb{R}^n , para as quais

$$\|\phi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \phi(x)| < \infty.$$

Definição 10. Dada uma função $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, definimos a sua transformada de Fourier como

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \omega} f(x) dx.$$

A transformada inversa de Fourier de f é definida como

$$\check{f}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \omega} f(x) dx.$$

As transformadas de Fourier e a transformada inversa de Fourier são operador lineares limitados de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, além disso, $\check{\check{f}} = f = \hat{\hat{f}}$. Além disso, para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\omega)|^2 d\omega = \|\hat{f}\|_2^2$$

e da identidade da polarização segue que a transformada de Fourier preserva o produto interno, ou seja,

$$(\phi, \psi) = (\hat{\phi}, \hat{\psi}).$$

Note que

$$-i\omega_k \hat{g}(\omega) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} D_k(e^{-i\omega \cdot x} g(x)) dx = -(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega \cdot x} D_k g(x) dx = -\widehat{D_k g}(\omega).$$

Portanto,

$$\widehat{D_k g}(\omega) = i\omega_k \hat{g}(\omega).$$

Em geral,

$$\widehat{D^\alpha g}(\omega) = (i)^{|\alpha|} \hat{g}(\omega).$$

De maneira análoga,

$$\frac{\partial}{\partial \omega_k} \hat{f}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \omega_k} e^{-ix \cdot \omega} f(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \omega} (-i)x_k f(x) dx = -i \widehat{x_k f}(\omega),$$

portanto,

$$\frac{\partial}{\partial \omega_k} \hat{f}(\omega) = -i \widehat{x_k f}(\omega).$$

Exemplo 38. Calcularemos a transformada de Fourier de $f(x) = e^{-\alpha x^2/2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\alpha > 0$.
Então

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2/2} e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(t^2 + i\omega t \sqrt{\frac{2}{\alpha}})} dt \\ &= \frac{e^{-\omega^2/2\alpha}}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(t + i\frac{\omega}{\sqrt{2\alpha}})^2} dt \\ &= \frac{e^{-\omega^2/2\alpha}}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{e^{-\omega^2/2\alpha}}{\sqrt{\alpha}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}, \text{ use Fubini} \right) \end{aligned}$$

na penúltima igualdade, fizemos uma integração no plano complexo sobre o retângulo Γ_R com vértices nos pontos $(\pm R + 0i)$, $(\pm R + i\frac{\omega}{\sqrt{2\alpha}})$, percorrido no sentido anti-horário, usamos que sobre os segmentos verticais $|e^{-z^2}| \leq e^{-R^2 - |\omega|/\sqrt{2\alpha}}$, portanto as integrais correspondentes são limitadas em módulos por $e^{-R^2 - |\omega|/\sqrt{2\alpha}} \frac{|\omega|}{\sqrt{2\alpha}}$, portanto tendem a 0 quando R tende a infinito. Como e^{z^2} é analítica para todo z , pelo Teorema de Cauchy, $0 = \int_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz = \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_{R_i}} e^{-z^2} dz$, onde Γ_{R_i} são os lados do retângulo. Portanto,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-(t + i\frac{\omega}{\sqrt{2\alpha}})^2} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-t^2} dt.$$

□

A transformada de Fourier de $f(x) = e^{-\alpha|x|^2/2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$, é

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= (2\pi)^{-n/2} \prod_{k=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x_k^2/2} e^{-i\omega_k x_k} dx_k \right) \\ &= \frac{e^{-|\omega|^2/2\alpha}}{(\alpha)^{n/2}} \end{aligned}$$

Em particular, para $\alpha = 1/2t$, fazendo $g(x, t) = (2t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}$, concluímos que

$$\widehat{g(\cdot, t)}(\omega) = e^{-t|\omega|^2}.$$

Definição 11. Dadas $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então a convolução de f e g , denotada por $f * g$, é definida como

$$(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)g(x)dx.$$

Propriedade 4. Sejam $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então

- (a) $f * g = g * f$, $f * (g * h) = (f * g) * h$
(b) $\widehat{f \widehat{g}} = (2\pi)^{-n/2} \widehat{f} * \widehat{g}$ e $\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2} \widehat{f} \widehat{g}$

Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, portanto, a transformada de Fourier é um mapeamento linear e limitado ($\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$) de um subespaço denso de $L^2(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e pelo Teorema da Transformação Limitada, ela se estende a um mapeamento unitário de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ (Teorema de Plancherel).

Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e pelo Teorema de Riemann-Lebesgue a sua transformada de Fourier é contínua e se anula no infinito, portanto pertence ao espaço $C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Além disso, é fácil ver que $\|\widehat{f}\|_\infty \leq (2\pi)^{-n/2} \|f\|_1$. Portanto, a transformada de Fourier é um operador linear limitado de um conjunto denso de $L^1(\mathbb{R}^n)$ em $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ e pelo Teorema da Transformação Limitada a transformada de Fourier se estende a um operador linear limitado de $L^1(\mathbb{R}^n)$ a $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ (não é sobrejetiva).

8.2 A solução da equação do calor

Dada a equação

$$u_t = k\Delta u,$$

uma superfície $\phi(x, t) = t - \psi(x) = 0$ é característica da mesma se $\sum_{k=1}^n \psi_{x_k}^2 = 0$. Portanto as únicas superfícies características são os planos $t = \text{const}$. Esta equação invariante a troca de t por $= t$, o que indica que ela descreve um processo irreversível (a distribuição de calor num meio condutor) e faz a distinção entre passado e futuro. No entanto, ela é invariante às substituições $x' = ax$ e $t' = a^2t$, que são as mesmas que deixam $|x|^2/t$ invariante. Ela é chamada de equação do calor. A constante $k > 0$ é o coeficiente de condutividade do meio. Para $n = 3$ esta equação descreve a distribuição de temperatura de um meio condutor de calor. Para $n = 1$ ela descreve a distribuição de temperatura num fio condutor de calor revestido por um isolante térmico. Se fizermos $\tau = \alpha t$ e $v(x, \tau) = u(x, \tau/k)$, então $v_\tau(x, \tau) = \Delta v(x, \tau)$. Por isso, no que se segue faremos $k = 1$.

Considere o seguinte problema

$$u_t = \Delta u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u(x, 0) = f(x).$$

Defina

$$\widehat{u}(\omega, t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega \cdot x} u(x, t) dx.$$

Tomando a transformada de Fourier da equação diferencial, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(\omega, t) = -|\omega|^2 \widehat{u}(\omega, t), \quad \widehat{u}(\omega, 0) = \widehat{f}(\omega).$$

Portanto, pelo Teorema da Convolução,

$$\widehat{u}(t, \omega) = e^{-t|\omega|^2} \widehat{f}(\omega) \equiv \widehat{g}(t, \omega) \widehat{f}(\omega) = \frac{\widehat{g(\cdot, t) * f(\cdot)}(\omega)}{(2\pi)^{n/2}},$$

onde

$$g(\omega, t) = \frac{e^{-|\omega|^2/4t}}{(2t)^{n/2}}.$$

Portanto, para $t > 0$, temos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} (f(\cdot) * g(\cdot, t))(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y, t) f(y) dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t} f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y, t) f(y) dy \end{aligned}$$

onde

$$K(x, y, t) = \frac{e^{-|x-y|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}}.$$

Note que a expressão integral para $u(x, t)$ faz sentido para qualquer f contínua, resta-nos mostrar que ela é realmente solução do nosso problema.

Teorema 23. *Seja f contínua e limitada em \mathbb{R}^n . Então*

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y, t) f(y) dy \quad (8.1)$$

pertence a C^∞ para $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ e satisfaz $u_t = \Delta u$, para $t > 0$. Além disso, u tem valor inicial f , no sentido que se estendermos u por $u(x, 0) = f(x)$ para $t = 0$, então u é contínua para $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.

Prova. A prova segue das propriedades básicas do núcleo K :

- (i) $K(x, y, t) \in C^\infty$ para $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$
- (b) $K_t(x, y, t) = \Delta_x K(x, y, t)$, para $t > 0$
- (c) $K(x, y, t) > 0$, para $t > 0$
- (d) $\int K(x, y, t) dy = 1$, para $x \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$
- (e) Para todo $\delta > 0$, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{|y-x|>\delta} K(x, y, t) dy = 0$$

$t > 0$

uniformemente para $x \in \mathbb{R}^n$.

Os itens (a) e (c) são triviais. Por outro lado, para $t > 0$, temos

$$K_t = \left(\frac{|x - y|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t} \right) K,$$

$$K_{x_k} = -\frac{(x_k - y_k)}{2t},$$

portanto,

$$K_{x_k x_k} = \left(\frac{(x_k - y_k)^2}{4t^2} - \frac{1}{2t} \right) K,$$

logo,

$$\Delta_x K = \left(\frac{|x - y|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t} \right) K,$$

o que mostra (c). Fazendo a mudança de variáveis $y = x + (4t)^{1/2}\eta$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x, y, t) dy = (\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} d\eta = (\pi)^{-n/2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \right)^n = (\pi)^{-n/2} (\pi)^{n/2} = 1,$$

o que prova (d). Por outro lado,

$$\int_{|y-x|>\delta} K(x, y, t) dy = (\pi)^{-n/2} \int_{|\eta|>\delta/\sqrt{4t}} e^{-|\eta|^2} d\eta, \quad (\text{lado direito não depende de } x)$$

o que implica (e), visto que $\int_{\mathbb{R}} e^{-|\eta|^2} d\eta < \infty$.

Seja $M = \sup_z |f(z)|$. Tome $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixo. Dado $\epsilon > 0$, como f é contínua em ξ , existe $\delta > 0$, tal que se $|y - \xi| < 2\delta$, temos $|f(y) - f(\xi)| < \epsilon/2$. Tome $\tau > 0$, tal que

$$\int_{|y-x|>\delta} K(x, y, \tau) dy = (\pi)^{-n/2} \int_{|\eta|>\delta/\sqrt{4\tau}} e^{-|\eta|^2} d\eta < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Então para $t < \tau$ e x tal que $|x - \xi| < \delta$, temos

$$\begin{aligned} |u(x, t) - f(\xi)| &= \left| \int K(x, y, t) (f(y) - f(\xi)) dy \right| \\ &\leq (4\pi t)^{-n/2} \int_{|y-x|<\delta} e^{-|x-y|^2/4t} |f(y) - f(\xi)| dy + \int_{|y-x|>\delta} K(x, y, t) |f(y) - f(\xi)| dy \\ &\leq (\pi)^{-n/2} \int_{|\eta|<\delta/\sqrt{4t}} e^{-|\eta|^2} |f(x + \sqrt{4t}\eta) - f(\xi)| d\eta + 2M(\pi)^{-n/2} \int_{|\eta|>\delta/\sqrt{4t}} e^{-|\eta|^2} d\eta \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} (\pi)^{-n/2} \int_{|\eta|<\delta/\sqrt{4t}} e^{-|\eta|^2} d\eta + \frac{\epsilon}{2} \\ &\quad \left(|(x + \sqrt{4t}\eta) - \xi| \leq |x - \xi| + \sqrt{4t}|\eta| < 2\delta \Rightarrow |f(x + \sqrt{4t}\eta) - f(\xi)| < \frac{\epsilon}{2} \right) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_{|y-x|<\delta} K(x, y, t) dy + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y, t) dy + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Suponha que f seja limitada superior e inferiormente e sejam m e M o seu ínfimo e supremo, respectivamente. Então

$$m \leq f(x) \leq M, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Multiplicando estas desigualdades por $K(x, y, t)$, integrando em y sobre \mathbb{R}^n , temos

$$m \leq u(x, t) \leq M, \quad \forall t > 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto, temos uma espécie de princípio de máximo:

$$\inf_z f(z) \leq u(x, t) \leq \sup_z f(z), \quad \forall t > 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

8.3 A fórmula de Talyor

Dada uma função de uma variável $f(t)$ definida num intervalo aberto (a, b) , se f for de classe $C^2(I)$, então para todo $t_o, h \in I$, tal que $t_o + h \in I$, temos

$$f(t_o + h) = f(t_o) + f'(t_o)h + \frac{1}{2!}f''(c)h^2,$$

onde c está entre t_o e $t_o + h$.

Suponha que $f : \omega \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, seja de classe $C^2(\omega)$. Para $x_o \in \omega$ fixo, da fórmula de Taylor (vamos supor que x seja pequeno de modo que $x_o + tx \in \omega$), temos

$$f(x_o + tx) = f(x_o) + f'(x_o)t + \frac{1}{2!}f''(x_o + cx)t^2$$

onde c está entre 0 e t . Em particular, fazendo $t = 1$, temos

$$f(x_o + x) = f(x_o) + f'(x_o) + \frac{1}{2!}f''(x_o + cx)$$

onde c está entre 0 e 1. Note que da Regra da Cadeia, temos

$$f'(x_o) = \sum_k f_{x_k}(x_o)x_k, \quad f''(x_o + cx) = \sum_{j,k} f_{x_k x_j}(x_o + cx)x_k x_j.$$

Portanto, temos

$$f(x_o + x) = f(x_o) + \nabla f(x_o) \cdot x + \frac{1}{2!} \sum_{j,k} f_{x_k x_j}(x_o + cx)x_k x_j.$$

Para k fixo, seja $x = x_k e_k$ onde $(e_k)_i = \delta_{ij}$, vamos tomar x_k pequeno de modo que $x_o + x_k e_k \in \omega$. Então

$$f(x_o + x_k e_k) = f(x_o) + f_{x_k}(x_o)x_k + \frac{1}{2!}f_{x_k x_k}(x_o + cx_k).$$

Em particular, se tivermos um máximo local em x_o , então $f_{x_k}(x_o) = 0$ (para todo k) e

$$\frac{1}{2!} f_{x_k x_k}(x_o + cx_k) = f(x_o + x_k e_k) - f(x_o) \leq 0.$$

Portanto,

$$f_{x_k x_k}(x_o + cx_k) \leq 0,$$

para todo x_k suficientemente pequeno. Como por hipótese $f_{x_k x_k}$ é contínua em x_o , tomando-se o limite quando x_k tende a zero, temos

$$f_{x_k x_k}(x_o) \leq 0,$$

para todo k , em particular, devemos ter

$$\Delta f(x_o) \leq 0.$$

8.4 O princípio de máximo

Seja ω um aberto limitado do \mathbb{R}^n . Para $T > 0$ fixo considere o cilindro $\Omega \in \mathbb{R}^{n+2}$, cuja base é ω e altura T :

$$\Omega = \{(x, t) | x \in \omega, 0 < t < T\}.$$

A fronteira de Ω , $\partial\Omega = \partial'\Omega \cup \partial''\Omega$, onde $\partial'\Omega$ é formada pelas fronteiras lateral e a base do cilindro e $\partial''\Omega$ é formada pela parte superior (tampa superior do cilindro).

Teorema 24. *Seja u contínua em $\bar{\Omega}$ e $u_t, u_{x_i x_j}$ contínuas em ω e satisfaça $u_t - \Delta u \leq 0$ em Ω . Então*

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial''\Omega} u.$$

Prova. Note que trivialmente temos a desigualdade

$$\max_{\partial'\Omega} u \leq \max_{\bar{\Omega}} u,$$

pois $\partial'\Omega \subset \bar{\Omega}$. Portanto, só temos que provar que

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial''\Omega} u.$$

Primeiro mostraremos o teorema para o caso particular em que temos a desigualdade estrita $u_t - \Delta u < 0$. Dado $0 < \epsilon < T$, defina

$$\Omega_t = \{(x, t) | x \in \omega, 0 < t < T - \epsilon\}.$$

Como u é contínua em $\bar{\Omega}_\epsilon$, existe $(x_o, t_o) \in \bar{\Omega}_t$, tal que

$$\max_{\bar{\Omega}_t} u = u(x_o, t_o).$$

Se $(x_o, t_o) \in \Omega_t$, por ser um ponto interior, ele tem que ser um máximo local, portanto, $u_t(x_o, t_o) = 0 = u_{x_1}(x_o, t_o) = \dots = u_{x_n, x_n}(x_o, t_o)$. Seja $f(x) = u(x, t_o)$, então x_o é um

máximo local de $f(x)$, portanto pelo que vimos na discussão da fórmula de Taylor, devemos ter $\Delta f(x_o) \leq 0$, ou seja,

$$\Delta u(x_o, t_o) = \Delta f(x_o) \leq 0.$$

Como

$$u_t(x_o, t_o) = 0,$$

teríamos

$$u_t(x_o, t_o) - \Delta u(x_o, t_o) \geq 0,$$

contrariando a hipótese de $u_t - \Delta u < 0$ em Ω . Mostraremos que (x_o, t_o) não pode pertencer a $\partial''\Omega_\epsilon$. De fato, se $(x_o, t_o) = (x_o, T - \epsilon)$, então considere a função $u(x_o, T - \epsilon + h)$, onde $h < 0$ e suficientemente pequeno deve ser não-crescente, portanto

$$u(x_o, T - \epsilon + h) - u(x_o, T - \epsilon) \leq 0,$$

portanto,

$$\frac{u(x_o, T - \epsilon + h) - u(x_o, T - \epsilon)}{h} \geq 0,$$

como $u_t(x_o, T - \epsilon)$ existe, devemos ter

$$u_t(x_o, T - \epsilon) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_o, T - \epsilon + h) - u(x_o, T - \epsilon)}{h} \geq 0.$$

Mas a função $f(x) = u(x, T - \epsilon)$ tendo um máximo local em $(x_o, t - \epsilon)$, deve satisfazer $\Delta f(x_o) \leq 0$, ou seja,

$$\Delta u(x_o, T - \epsilon) \leq 0,$$

com isso concluiríamos que

$$u_t(x_o, T - \epsilon) - \Delta u(x_o, T - \epsilon) \geq 0,$$

contrariando a hipótese de $u_t - \Delta u < 0$ em Ω . Portanto, $(x_o, t_o) \in \partial'\Omega_\epsilon$. Disso concluímos que

$$\max_{\overline{\Omega_\epsilon}} u = \max_{\partial'\Omega_\epsilon} u \leq \max_{\partial'\Omega} u,$$

a desigualdade acima segue do fato que $\partial'\Omega_\epsilon \subset \partial'\Omega$. Em particular, para todo $(x, t) \in \overline{\Omega_\epsilon}$, temos

$$u(x, t) \leq \max_{\partial'\Omega} u.$$

Dado $(x, t) \in \overline{\Omega}$, tome uma sequência (x_n, t_n) convergindo para (x, t) tal que $t_n < T$, portanto, $(x_n, t_n) \in \Omega_{\epsilon_n}$, para algum $0 < \epsilon_n < T$. Logo,

$$u(x_n, t_n) \leq \max_{\partial'\Omega} u$$

e por continuidade de u em $\overline{\Omega}$, segue que

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n, t_n) \leq \max_{\partial'\Omega} u.$$

Poranto, para todo $(x, t) \in \bar{\Omega}$ temos

$$u(x, t) \leq \max_{\partial' \Omega} u,$$

ou seja,

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial' \Omega} u$$

e concluímos que

$$\max_{\partial' \Omega} u = \max_{\bar{\Omega}} u,$$

sob a hipótese de $u_t - \Delta u < 0$ em Ω .

Se $u_t - \Delta u \leq 0$ em Ω , considere a função

$$v(x, t) = u(x, t) - kt,$$

onde $k > 0$. Então

$$v_t - \Delta v = u_t - k - \Delta u = (u_t - \Delta u) - k < 0.$$

Logo

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\bar{\Omega}} (v + kt) \leq \max_{\bar{\Omega}} v + kT = \max_{\partial' \Omega} v + kT,$$

tomando o limite quando k tende a zero, temos

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial' \Omega} u,$$

o que implica que

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial' \Omega} u,$$

□

Observação 6. Se u for solução da equação de calor, ou seja,

$$u_t - \Delta u = 0,$$

então $-u$ também será solução da mesma, portanto do princípio de máximo temos

$$\max_{\bar{\Omega}} -u = \max_{\partial' \Omega} -u,$$

e concluímos que

$$\min_{\bar{\Omega}} u = -\max_{\bar{\Omega}} -u = -\max_{\partial' \Omega} -u = \min_{\partial' \Omega} u,$$

ou seja,

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial' \Omega} u.$$

Em particular, se u_1, u_2 forem soluções de

$$u_t - \Delta u = g(x, t),$$

em Ω e forem iguais em $\partial' \Omega$, então $u_1 = u_2$ em Ω . De fato, $U = u_1 - u_2$ satisfaz a equação $U_t - \Delta U = 0$ em Ω e $U = 0$ em $\partial' \Omega$. Portanto,

$$\min_{\bar{\Omega}} U = \min_{\partial' \Omega} U = 0 \quad e \quad \max_{\bar{\Omega}} U = \max_{\partial' \Omega} U = 0,$$

o que implica $U = 0$ em Ω .

A observação acima nos conduz ao seguinte teorema de unicidade:

Teorema 25. *Seja u contínua em $\bar{\Omega}$ e $u_t, u_{x_i x_j}$ contínuas em Ω . Então u é determinada unicamente em $\bar{\Omega}$ pelo valor $u_t - \Delta u$ em Ω e de u em $\partial\Omega$.*

A seguir provaremos estenderemos o princípio de máximo e o teorema de unicidade para o caso em que

$$\Omega = \{(x, t) | x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < T\},$$

para isto teremos que assumir uma certa condição de crescimento no infinito.

Teorema 26. *Suponha que u é contínua em $\bar{\Omega}$ e $u_t, u_{x_i x_k}$ contínuas em Ω e satisfaz*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &\leq 0, \quad \text{em } \Omega, \\ u(x, t) &\leq M e^{a|x|^2}, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Então

$$u(x, t) \leq \sup_z f(z), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Corolário 2. *Do teorema acima o problema de valor inicial*

$$u_t - \Delta u = 0, \quad 0 < t < T, \quad u(x, 0) = f(x)$$

tem solução única se restringirmos a soluções satisfazendo

$$|u(x, t)| \leq A e^{a|x|^2}, \quad 0 < t < T.$$

Prova do Corolário: Suponha que u_1 e u_2 sejam soluções de problema de valor inicial e defina $w = u_1 - u_2$ e $\tilde{w} = u_2 - u_1$. Então w e \tilde{w} são soluções do problema de valor inicial com $f = 0$, além disso, $|w(x, t)| \leq 2A e^{a|x|^2}$ e $|\tilde{w}(x, t)| \leq 2A e^{a|x|^2}$. Portanto, pelo princípio de máximo acima, temos $w(x, t) \leq \sup_z f(z) = 0$ e $\tilde{w}(x, t) \leq \sup_z f(z) = 0$, ou seja, $u_2 - u_1 \leq 0$ e $u_1 - u_2 \leq 0$. Logo,

$$u_2(x, t) \leq u_1(x, t) \leq u_2(x, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

e concluímos que

$$u_1(x, t) = u_2(x, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

□

Note que se $|u(x, t)| \leq A$, pelo corolário u tem que ser única (neste caso temos $a = 0$), ou seja, o problema de valor inicial tem uma única solução limitada.

Em particular para f contínua e limitada, segue que $u(x, t)$ dada pela fórmula (8.1) é a única solução limitada de problema do valor inicial

$$u_t - \Delta u = 0, \quad 0 < t < T, \quad u(x, 0) = f(x).$$

De fato, da fórmula (8.1) como $\int_{\mathbb{R}^n} K(x, y, t) dy = 1$ para todo $t > 0$, então multiplicando as desigualdades

$$\inf_z f(z) \leq f(y) \leq \sup_z f(z),$$

por $K(x, y, t)$ (que é positivo) e integrando em relação a y em \mathbb{R}^n , temos

$$\inf_z f(z) \leq u(x, t) \leq \sup_z f(z),$$

portanto, $u(x, t)$ é limitada, portanto tem que ser única. \square

Prova do Teorema. Suponha primeiro que

$$4aT < 1,$$

então existe $\epsilon > 0$ (por exemplo, $\epsilon = (1 - 4aT)/8a$), tal que

$$4a(T + \epsilon) < 1.$$

Dado $y \in \mathbb{R}^n$ fixo e para constantes $\mu > 0$, considere as funções

$$v_\mu(x, t) = u(x, t) - \mu(4\pi(T + \epsilon - t))^{-n/2} e^{|x-y|^2/4(T+\epsilon-t)} = u(x, t) - \mu K(ix, iy, T + \epsilon - t),$$

definidas para $0 \leq t \leq T$, onde na expressão vista para $K(x, y, t)$ substituímos $|x - y|^2$ por $(x - y, x - y)$ (produto escalar no \mathbb{R}^n), em particular,

$$(ix - iy, ix - iy) = -(x - y, x - y) = -|x - y|^2.$$

Vimos que $K(x, y, t)$ satisfaz $K_t - \Delta K = 0$, para todo x, y, t complexos com $t \neq 0$ (poderíamos ter provado isto diretamente, sem esta observação). Portanto, v_μ satisfaz

$$\frac{\partial v_\mu}{\partial t} - \Delta v_\mu = (u_t - \Delta u) - (K_t - \Delta K) = u_t - \Delta u \leq 0.$$

Considere o cilindro circular de raio ρ

$$\Omega = \{(x, t) \mid |x - y| < \rho, 0 < t < T\}.$$

Pelo Teorema 24,

$$v_\mu(y, t) \leq \max_{\partial'\Omega} v_\mu.$$

Vamos obter uma conta superior para o máximo acima. Note que na parte plana de $\partial'\Omega$, como $\mu K > 0$, temos

$$v_\mu(x, 0) \leq u(x, 0) \leq \sup_z f(z).$$

Mostraremos que temos cota similar na parte curva $|x - y| = \rho$, $0 \leq t \leq T$ de $\partial'\Omega$. De fato,

$$\begin{aligned}
v_\mu(x, t) &\leq M e^{a|x|^2} - \mu(4\pi(T + \epsilon - t))^{-n/2} e^{\rho^2/(4(T+\epsilon-t))} \\
&\leq M e^{a(|y|+\rho)^2} - \mu(4\pi(T + \epsilon))^{-n/2} e^{\rho^2/(4(T+\epsilon))} \\
&\quad (\text{usamos que } (4\pi(T + \epsilon - t))^{-n/2} e^{\rho^2/(4(T+\epsilon-t))} \text{ é crescente em } t, \\
&\quad \text{e } |x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y| \leq \rho + |y|) \\
&= M e^{a(|y|+\rho)^2} - \mu((a + \gamma)/\pi)^{n/2} e^{(a+\gamma)\rho^2} \\
&\quad (\text{pois } 4a(T + \epsilon) < 1, \text{ então } 1/4(T + \epsilon) = a + \gamma, \text{ onde } \gamma > 0) \\
&= M e^{(a + \frac{2a|y|}{\rho} + \frac{a|y|^2}{\rho^2})\rho^2} - \mu((a + \gamma)/\pi)^{n/2} e^{(a+\gamma)\rho^2} \\
&\leq M e^{(a+\gamma/2)\rho^2} - \mu((a + \gamma)/\pi)^{n/2} e^{(a+\gamma)\rho^2} \\
&\quad (\text{para } \rho > \rho_1, \text{ onde } \rho \text{ é tal que } \frac{2a|y|}{\rho} + \frac{a|y|^2}{\rho^2} < \gamma/2) \\
&\leq \sup_z f(z), \text{ para } \rho \text{ suficientemente grande} \\
&\quad (M e^{(a+\gamma/2)\rho^2} - \mu((a + \gamma)/\pi)^{n/2} e^{(a+\gamma)\rho^2} \text{ tende a } -\infty \text{ quando } \rho \text{ tende a } \infty)
\end{aligned}$$

Com isso concluímos que

$$\max_{\partial'\Omega} v_\mu \leq \sup_z f(z).$$

Portanto,

$$v_\mu(y, t) = u(y, t) - \mu(4\pi(T + \epsilon - t))^{-n/2} \leq \sup_z f(z),$$

ou seja, para todo $\mu > 0$ temos a seguinte desigualdade

$$u(y, t) - \mu(4\pi(T + \epsilon - t))^{-n/2} \leq \sup_z f(z).$$

Tomando o limite quando μ tende a zero, concluímos que

$$u(y, t) \leq \sup_z f(z),$$

sob a hipótese de $4aT < 1$.

Se $4a \geq 1$, podemos decompor o intervalo $[0, T]$ em n subintervalos de comprimentos τ , onde $4a\tau < 1$ e aplicarmos os argumentos acima, a cada um dos subintervalos $[k\tau, (k+1)\tau]$, $k = 1, \dots, n-1$. Por exemplo, tendo mostrado que $u(x, t) \leq \sup_z f(z)$, para $0 \leq t \leq \tau$, considere as funções

$$v_\mu(x, t) = u(x, t + \tau) - \mu K(ix, iy, \tau + \epsilon - t),$$

definida para $0 \leq t \leq \tau$. Lembre que $v_\mu(x, 0) = u(x, \tau) \leq \sup_z f(z)$. Das contas feitas anteriormente, concluiremos que

$$v_\mu(y, t) = u(y, t + \tau) - \mu(4\pi(T + \epsilon - t))^{-n/2} \leq \sup_z f(z).$$

Portanto, tomando-se o limite quando μ tende a zero, concluiremos que

$$u(y, \tau + t) \leq \sup_z f(z)$$

para todo $0 \leq t \leq \tau$, ou seja,

$$u(y, t) \leq \sup_z f(z),$$

para $\tau \leq t \leq 2\tau$.

Em geral, tendo-se provado que $u(x, t) \leq \sup_z f(z)$, para $0 \leq t \leq k\tau$, considere as funções

$$v_\mu(x, t) = u(x, t + \tau) - \mu K(ix, iy, \tau + \epsilon - t)$$

e os argumentos anteriores para concluir que $u(x, t) \leq \sup_z f(z)$, para $0 \leq t \leq (k + 1)\tau$. \square

8.5 Método de energia para provar unicidade

A seguir daremos o método de energia para provar unicidade de soluções da equação de calor numa região limitada.

Teorema 27. *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado do \mathbb{R}^n . Seja $T > 0$. Sejam Ω_T e $\partial'\Omega$ definidos como antes. Então o problema de valor inicial*

$$u_t - \Delta u = f, \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad u(x, t) = g, \quad (x, t) \in \partial'\Omega,$$

tem no máximo uma solução suave.

Prova. Suponha que temos duas soluções u e v . Seja $w = u - v$. Então $w = u - v$ é solução de

$$w_t - \Delta w = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad w = 0, \quad (x, t) \in \partial'\Omega.$$

Seja

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} w^2(x, t) dx, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Então, $E(t) \geq 0$, e

$$E(0) = \int_{\Omega} w^2(x, 0) dx = 0.$$

Afirmamos que

$$E'(t) \leq 0 \tag{8.2}$$

e, portanto, $E(t) = 0$, para $0 \leq t \leq T$, portanto, $w(x, t) = 0$ em quase todos os pontos de $\overline{\Omega}$, portanto $w(x, t) = 0$ em todos pontos de $\overline{\Omega}$, uma vez que w é contínua.

A seguir mostraremos (8.2). Como w é suave, podemos passar a derivada em relação a t

para dentro da integral:

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{\Omega} w w_t dx \\ &= \int_{\Omega} w \Delta w dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (w \nabla w) dx - \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \\ &= \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial n} dx - \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx, \quad (\text{Teorema de Green}) \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx, \quad (w|_{\partial\Omega} = 0) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

□

8.6 O Método de Perron

8.6.1 Regularidade de soluções

8.6.2 Soluções não-negativas

Referências Bibliográficas

- [1] F. John, *Partial differential equations*, 4th edition, New York, Springer, 1982;
- [2] J. David Logan, *An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations*, Wiley-Intersciences series in pure and applied mathematics, 1994
- [3] E. DiBenedetto, *Partial differential equations*, Birkhauser, Boston, 1995
- [4] Joel Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlac, New York, 1983.
L. C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies of Mathematics, volume 19, AMS, 1998
- [5] R. Courant e D. Hilbert, *Methods of mathematical physics* vol. I e II, Wiley-Interscience, New York, 1953 e 1962.
- [6] R. Iório Jr. e V. Iório, *Equações diferenciais parciais: uma introdução*, Projeto Euclides; Rio de Janeiro, 1988