Equações Diferenciais A

Prof. Paulo Cupertino de Lima
Departamento de Matemática - UFMG

Sumário

Introdução

Este texto tem como objetivo atender à disciplina de Equações Diferenciais A, na qual é introduzida o importante conceito de equações diferenciais ordinárias, de sistemas de equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações dos mesmos.

Na Seção 1 introduziremos o conceito de equações diferenciais, sistemas de equações diferenciais e daremos alguns exemplos de aplicações dos mesmos.

Na Seção 2 estudaremos as equações diferenciais de primeira ordem. Focalizaremos nossa atenção nas seguintes equações: lineares, de variáveis separáveis, homogêneas e exatas, para as quais serão apresentados procedimentos de como resolvê-las. Também será enunciado o Teorema de Existência e Unicidade no caso de uma equação diferencial de primeira ordem geral. Embora as equações de Bernoulli não sejam lineares, elas serão estudas como um caso importante de equações que podem ser transformadas em equações lineares através de uma simples mudança de variáveis. Introduziremos os métodos de Euler como uma opção para se calcular numericamente as soluções daquelas equações que não se enquadram nas categorias acima. Finalmente, veremos algumas aplicações das equações de primeira ordem a problemas de misturas, dinâmica de populações, decaimento de materiais radioativos, problemas de mecânica, dentre outros.

Na Seção 3 estudaremos as equações diferenciais lineares de segunda ordem. Veremos que o espaço solução de uma equação diferencial linear de segunda homogênea é um espaço vetorial de dimensão dois, portanto, a sua resolução se reduz ao problema de encontramos duas soluções linearmente independentes da mesma. Isto será feito para as equações com coeficientes constantes, para as equações de Euler, as quais se reduzem àquelas através de uma mudança de variáveis. Estudaremos os métodos da redução de ordem que nos permite encontrar uma segunda solução de uma equação homogênea, uma vez conhecida uma solução da mesma, digamos por inspeção, de forma que as duas sejam linearmente independentes. Estudaremos o método da variação de parâmetros que nos permite encontrar a solução geral de uma equação não-homogênea, conhecendo-se duas soluções linearmente independentes da solução homogênea associada. Finalmente, veremos aplicações das equações diferenciais de segunda ordem a problemas de vibrações mecânicas e elétricas.

Na Seção 4 usaremos o método de séries de potências na resolução de equações diferenciais lineares de segunda ordem. Começaremos esta seção com uma revisão de séries de potências e, em seguida, enunciaremos o Teorema de Existência e Unicidade para equações lineares de segunda ordem com coeficientes analíticos. Resolveremos, como exercício, várias equações diferenciais que aparecem em problemas de física, dentre elas, as equações de Hermite, de Legendre e de Chebyshev. Finalmente, veremos o método de série de potências em torno de um ponto singular.

Na Seção 5 introduziremos a transformada de Laplace e a sua inversa. Introduziremos a função degrau unitário que nos permite representar de uma maneira concisa funções descontínuas e a delta de Dirac que é uma generalização de uma força que embora atue apenas num dado instante, seja capaz de produzir um impulso unitário. A partir da definição, obteremos várias propriedades da transformada de Laplace e calcularemos as transformadas de várias funções, incluindo aquelas que envolvem a função degrau unitário e a delta de Dirac. Veremos como a transformada de Laplace pode ser usada para resolver problemas de valores iniciais, transformando-os em problemas puramente algébricos. No final desta seção apresentaremos uma tabela com transformadas de Laplace e suas inversas.

Na Seção 6 estudaremos os sistemas de equações lineares de primeira ordem. Iniciaremos com a teoria geral de sistemas de equações lineares de primeira ordem, incluindo o Teorema de Existência e Unicidade. Mostraremos que o conjunto solução de um sistema linear homogêneo com n equações diferenciais de primeira ordem é um espaço vetorial de dimensão n. Dedicaremos uma boa parte do tempo ao estudo de sistemas homogêneos quando a matriz A tem coeficientes constantes e veremos a relação entre resolução do mesmo e álgebra linear (autovalores, autovetores e diagonalização de matrizes). Introduziremos o conceito de exponencial de uma matriz constante e veremos a sua relação com a solução de sistemas lineares. Mostraremos que uma vez conhecidas n soluções linearmente independentes do sistema homogêneo, podemos a partir do método de variação de parâmetros resolver um sistema não-homogêneo. Veremos algumas aplicações de sistemas de equações lineares em problemas de misturas, circuitos elétricos e sistemas mecânicos. Finalizaremos esta seção fazendo uma análise qualitativa das soluções de sistemas lineares em duas dimensões.

Finalmente, nas Seção 7, apresentaremos a resolução detalhada dos exercícios propostos.

1 Equações Diferenciais Ordinárias

Definição 1.1 *Uma* **equação diferencial ordinária** *é uma equação que envolve uma função desconhecida, $y(x)$, suas derivadas até uma ordem n e a variável independente x; ou seja, é uma equação da forma*

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Definição 1.2 *A* **ordem** *de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais alta que aparece na mesma.*

Definição 1.3 *Dizemos que uma equação diferencial ordinária de ordem n é* **linear** *se ela é da seguinte forma*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_o(x)y = g(x), \tag{2}$$

onde os coeficientes $a_o(x), \ldots, a_n(x)$ são funções conhecidas da variável x e $a_n(x)$ não é identicamente nula. Quando $g(x)$ for identicamente nula, dizemos que a equação (2) é **homogênea**.

Se uma equação diferencial ordinária de ordem n não for do tipo (2), dizemos ela é **não-linear**.

As equações diferenciais ordinárias aparecem em várias aplicações e, a seguir, daremos alguns exemplos das mesmas.

Exemplo 1.1 *Na descrição de populações, por exemplo, bactérias, se chamarmos de $x(t)$ o número destas no instante t, é comum supor que a taxa de variação de x em cada instante seja proporcional à x, ou seja,*

$$\frac{dx}{dt} = kx, \tag{3}$$

onde a constante de proporcionalidade, k, é positiva, o que nos conduz a uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem homogênea.

No estudo do decaimento de massa de materiais radioativos, onde $x(t)$ é a massa do material no instante t, temos uma equação do tipo (3), onde substituimos k por $-k$.

Exemplo 1.2 *A equação diferencial*

$$Q' + p(t)\, Q = g(t), \tag{4}$$

onde $p(t)$ e $q(t)$ são funções contínuas num dado intervalo aberto I, é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem linear, ela aparece, por exemplo, em modelagem de misturas, onde $Q(t)$ descreve a quantidade de sal presente um recipiente num instante t.

Note que a equação (3) é um caso particular de (4) quando $p(t)$ é constante e $g(t)$ é identicamente nula.

Exemplo 1.3 *A equação diferencial*

$$y' = r\left(1 - \frac{y}{K}\right) y$$

onde r e K são constantes positivas, é chamada de equação de Verhulst, ou equação logística, ela aparece no contexto do crescimento ou declínio da população de uma espécie. Ela é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem não-linear.

Muitas equações diferenciais de segunda ordem aparecem em problemas de mecânica e resultam da Segunda Lei de Newton, a qual diz que a resultante de todas as forças, f, que atuam num corpo, é igual ao produto da massa do mesmo, m, pela sua aceleração. Como a aceleração é a derivada segunda da posição, x, em relação ao tempo e a força em geral depende da posição, da velocidade, x', e do instante, t, considerado, segue-se que esta lei nos leva a uma equação diferencial de segunda ordem da seguinte forma:

$$x'' = \frac{f(t, x, x')}{m}. \tag{5}$$

Se f não depender explicitamente de t; ou seja, $f = f(x, v)$, podemos assumir que $v = v(x)$, então da regra da cadeia, $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}\ v$ e (5) pode ser re-escrita como

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{f(x, v)}{m}, \tag{6}$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem.

Exemplo 1.4 *Suponha que um paraquedista ao cair esteja sujeito à uma força de atrito do ar que seja proporcional ao quadrado da sua velocidade, então, de (6)*

$$\frac{dv}{dx} + \frac{\gamma}{m} v = -gv^{-1},$$

onde x é a altura do paraquedista em relação à superfície da Terra. Esta equação é um caso particular das **equações de Bernoulli**.

Exemplo 1.5 *Outra equação diferencial que resulta da Segunda Lei de Newton é*

$$m\,y'' + \gamma\,y' + k\,y = f(t), \tag{7}$$

onde m, γ e k são constantes, com $m \neq 0$. Esta é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, ela modela um sistema massa-mola, onde a massa vale m, a constante elástica da mola é k, num meio que oferece atrito (se $\gamma \neq 0$) e sujeito a uma força externa $f(t)$.

Um caso particularmente interessante de (7) é a equação

$$\theta'' + \frac{g}{l}\,\theta = 0, \tag{8}$$

que descreve a amplitude de um pêndulo simples, que consiste num sistema formado de uma massa, m, amarrada numa corda de comprimento l, pendurados num teto, no limite em que consideramos pequenas amplitudes ($sen\,\theta \approx \theta$).

Em modelagem de circuitos elétricos RLC em série, temos uma equação similar a (7), onde x, m, γ, k e $f(t)$, são substituidos, respectivamente, por Q, L, R, $\frac{1}{C}$ e $e(t)$, com $Q(t)$, a carga no capacitor no instante t, R, L e C, são a resistência do resistor, a indutância do indutor e a carga do capacitor, respectivamente.

Definição 1.4 *Dizemos que uma função diferenciável $y = \phi(x)$ é* **solução** *da equação diferencial (1), num intervalo aberto I, se $f(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) = 0$, para todo x em I.*

Exemplo 1.6 *As funções $\cos x$ e $sen\,x$ são soluções da equação diferencial $y'' + y = 0$, para todo x real. Da mesma forma, $y = c\,e^x$, onde c é uma constante arbitrária é solução da equação diferencial $y' = y$, para todo x real.*

Dada a equação diferencial (1), muitas vezes estamos interessados em soluções da mesma que satisfaçam um conjunto de condições iniciais num dado instante x_o, ou seja, queremos encontrar $y = \phi(x)$, tal que

$$f(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad y(x_o) = y_o,\ y'(x_o) = y'_o,\ \ldots, y^{(n)}(x_o) = y_o^{(n)}. \tag{9}$$

Este é chamado de **problema de valor inicial**.

No caso do sistema massa-mola descrito no Exemplo 1.5, um problema de valor inicial corresponderia a especificarmos a posição $y(x_o)$ e a velocidade $y'(x_o)$ iniciais da massa. Por outro lado, no Exemplo 1.2, corresponderia a especificarmos a massa inicial de sal, $Q(t_o)$, presente no recipiente.

Definição 1.5 *Dizer que uma função diferenciável $y = \phi(x)$ é uma solução do problema de valor inicial (9) num intervalo aberto I, significa que a função $\phi(x)$ além de satisfazer a equação diferencial dada em (9), para todo x em I, ela também satisfaz às condições inciais prescritas em (9).*

Exemplo 1.7 *A função $x = \cos t - \operatorname{sen} t$ é solução do problema de valor inicial*

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1,$$

para todo t real.

Em muitas aplicações, em vez de apenas uma equação diferencial, teremos um **sistema de equações diferenciais** de primeira ordem,

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= g_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2'(t) &= g_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= g_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

onde $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ são funções desconhecidas da variável independente t e as funções $g_1, \ldots, g_n$ são dadas.

Definição 1.6 *Dizemos que um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem é* **linear**, *se tem a seguinte forma:*

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 \ldots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 \ldots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{aligned}$$

onde os coeficiente $a_{ij}(t)$ e $b_i(t)$ são funções contínuas de t.

Se o sistema não puder ser colocado na forma acima, dizemos que ele é **não-linear**.

Exemplo 1.8 *Um exemplo interessante de sistema de equações de diferenciais de primeira ordem não-lineares é o seguinte:*

$$\begin{aligned} x' &= ax - b\,xy \\ y' &= -c\,xy + d\,xy \end{aligned}$$

onde a, b, c e d são constantes positivas. Ele é chamado de sistema predador-presa.

As funções x e y descrevem as populações da presa e do predador no instante t, por exemplo, coelhos e raposas, respectivamente. A constante a pode ser vista como a taxa de nascimento da população x, o que contribui para o crescimento da mesma; por outro lado, a constante b, representa a interação da presa com o predador, contribuindo para a diminuição da mesma. A constante c é vista como a taxa de morte do predador e d a interação deste como a presa, a qual contribui para o crescimento da população y.

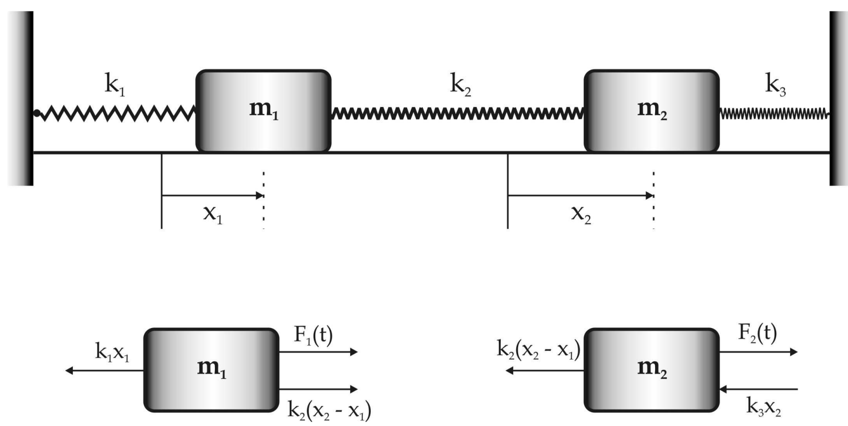

Figura 1: *Sistema de massas e molas acoplados.*

Exemplo 1.9 *Considere a Figura 1, onde temos duas massas acopladas através de uma mola. Sejam $x_1(t)$ e $x_2(t)$ os afastamentos das massas em relação às suas posições de equilíbrio num dado instante t. Se isolarmos cada uma das massas e considerarmos todas as forças que atuam nas mesmas (veja Figura 1), ao aplicarmos a Segunda Lei de Newton em cada uma teremos as seguintes equações diferenciais*

$$m_1 x_1'' = k_2(x_2 - x_1) - k_1(x_1 + F_1(t) = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 + F_1(t), \quad (10)$$

$$m_2 x_2'' = -k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1) + F_2(t) = k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + F_2(t), \quad (11)$$

este sistema de equações diferenciais de segunda ordem pode ser transformado num sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem da seguinte forma: introduziremos novas variáveis

y_1 e y_2 as quais são definidas como $x_1' = y_1$ e $x_2' = y_2$, assim, de (10) e de (11), teremos

$$\begin{aligned} x_1' &= y_1 \\ y_1' &= x_1'' = -\frac{k_1+k_2}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 + \frac{F_1(t)}{m_1} \\ x_2' &= y_2 \\ y_2' &= x_2'' = \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2+k_3}{m_2}x_2 + \frac{F_2(t)}{m_2}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.10 *Equações diferenciais de ordem n podem ser transformadas em sistemas de n equações. Por exemplo, o problema de valor inicial*

$$x'' + bx' + cx = f(t), \quad x(t_o) = x_o \quad e \quad x'(t_o) = x_o',$$

se introduzirmos a variável $y = x'$, ele pode ser transformado no seguinte sistema de duas equações lineares de primeira ordem:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

com condições iniciais $x(t_o) = x_o$, $y(t_o) = x_o'$.

2 Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Nesta Seção estudaremos problemas de valores iniciais do tipo

$$y' = f(x,y), \quad y'(x_o) = y_o. \tag{12}$$

Nos restringiremos aos seguintes tipos de equações diferenciais de primeira ordem: lineares, variáveis separáveis, homogêneas e exatas, para as equações descreveremos um procedimento de como resolvê-las.

2.1 Equações Diferenciais Lineares

Uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem mais geral é da seguinte forma

$$y' + p(x)\, y = g(x), \tag{13}$$

assumiremos que as funções $p(x)$ e $g(x)$ sejam contínuas num intervalo aberto I, contendo o ponto x_o, no qual estaremos considerando o problema de valor inicial.

Se $p(x) = 0$ em (13), temos

$$y' = g(x), \tag{14}$$

portanto,

$$y(x) = \int g(x)\, dx = G(x) + c,$$

onde c é uma constante arbitrária, $G(x)$ é tal que $G'(x) = g(x)$, ou seja, $G(x)$ é uma anti-derivada de $g(x)$. Se quisermos uma solução de (14) tal que $y(x_o) = y_o$, devemos escolher $c = y_o - G(x_o)$; ou seja,

$$y(x) = y_o + G(x) - G(x_o) = y_o + \int_{x_o}^{x} g(s)\, ds$$

é a solução desejada, para todo $x \in I$.

A unicidade da solução segue-se da construção acima, pois, se tivéssemos duas soluções y_1 e y_2 do problema de valor inicial $y' = g(x)$, $y(x_o) = y_o$, em I, então a função $y = y_1 - y_2$, seria solução do problema de valor inicial $y' = 0$, $y(x_o) = 0$, portanto, $y(x)$ seria constante em I, como $y(x_o) = 0$, então, $y(x) = 0$, para todo x em I, o que implicaria $y_1(x) = y_2(x)$ em I.

A seguir, mostraremos que podemos transformar o problema (13) em (14). Para tal tentaremos encontrar uma função $\mu(x)$ tal que ao multiplicarmos (13) pela mesma, o lado esquerdo de (13) se torne $(\mu(x)y(x))'$, ou seja, queremos que $\mu y' + p\mu y = \mu y' + \mu' y$, logo, μ deve satisfazer

$$\mu' = p(x)\mu,$$

a qual é equivalente a

$$\frac{\mu'}{\mu} = p(x)$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dx} \ln |\mu(x)| = p(x),$$

cuja solução é

$$\ln |\mu(x)| = \int p(x)\, dx = P(x) + k, \tag{15}$$

onde $P'(x) = p(x)$ e k uma constante arbitrária. Portanto, tomando-se a exponencial da equação (15), temos

$$\mu(x) = ce^{P(x)},$$

c uma constante não-nula.

A função $\mu(x)$ é chamada de **fator integrante** de (13). Logo, se multiplicarmos (13) por $\mu(x) = ce^{P(x)}$, teremos

$$(\mu(x)y(x))' = \mu(x)g(x), \tag{16}$$

portanto,

$$\mu(x)y(x) = \int \mu(x)g(x)dx,$$

ou ainda,

$$y(x) = \frac{\int \mu(x)g(x)dx}{\mu(x)}. \tag{17}$$

Em virtude da expressão acima, ao usarmos $\mu(x)$ podemos assumir que $c = 1$, o que corresponde a fazer $k = 0$ e teremos $\mu(x) = e^{P(x)}$. Em outras palavras, dado um fator integrante, qualquer múltiplo escalar não-nulo dele também será um fator integrante.

A expressão (17), contendo uma constante arbitrária, é chamada de **solução geral** de (13).

Observação 2.1 *Um erro muito comum do aluno é de esquecer que todo o procedimento acima foi baseado no fato de que o coeficiente de y' em (13) é 1. Assim se num dado problema isto não acontecer, primeiro divida a equação toda pelo coeficiente de y', só depois disso identificar $p(x)$ e $g(x)$.*

Exemplo 2.1 *Resolva o problema de valor inicial*

$$y' - y = 1, \quad y(0) = 1. \tag{18}$$

Solução. Neste caso, $p(x) = -1$, logo, $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-x+k}$, faremos $k = 0$ e tomaremos $\mu(x) = e^{-x}$.

Por construção, ao multiplicarmos a equação diferencial em (18) por $\mu(x) = e^{-x}$, teremos

$$(e^{-x}y)' = e^{-x},$$

portanto,

$$e^{-x}y = \int e^{-x}dx = -e^{-x} + c,$$

ou seja,

$$y = \frac{-e^{-x} + c}{e^{-x}} = -1 + ce^{x}.$$

O que nos dá todas as funções que satisfazem a equação diferencial em (18), ou seja, a solução geral da mesma.

Se quisermos satisfazer a condição inicial dada, devemos escolher a constante c convenientemente, ou seja, devemos impor $1 = y(0) = -1 + c$, portanto, $c = 2$. A solução desejada é $y = -1 + 2e^{x}$, cujo gráfico é mostrado na Figura 2. ■

Podemos encontrar explicitamente a solução do problema de valor inicial (13) em função da condição inicial. De fato, se tomarmos $k = -P(x_o)$, teremos

$$\mu(x) = e^{P(x)-P(x_o)} = e^{\int_{x_o}^{x} p(s)ds}, \tag{19}$$

em particular, $\mu(x_o) = 1$. Integrando-se a equação que aparece em (16) de x_o a x, com μ dado em (19), temos,

$$\mu(x)y(x) - \mu(x_o)y(x_o) = \int_{x_o}^{x} \mu(s)g(s)ds$$

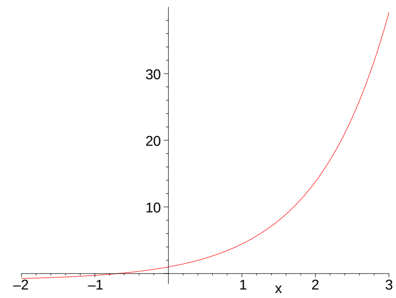

Figura 2: *O gráfico da função* $y = -1 + 2e^x$.

como $\mu(x_o) = 1$, temos

$$y(x) = \frac{\int_{x_o}^{x} \mu(s)g(s)ds + y_o}{\mu(x)}, \tag{20}$$

a solução do problema de valor inicial (13), a qual está definida para todo x em I.

Novamente, a unicidade segue da construção acima, pois, se tivéssemos duas soluções y_1 e y_2 do problema de valor inicial (13), então, a diferença delas, $y = y_1 - y_2$, seria solução do problema de valor inicial $y' + py = 0$ e $y(x_o) = 0$, ou seja, $e^{P(x)}y(x) = 0$ em I, como $p(x)$ é contínua em I, $P(x)$ é sempre finito neste intervalo, logo, teríamos $y(x)$ identicamente nulo, portanto, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ iguais em I. Assim, temos o seguinte Teorema de Existência e Unicidade no caso linear:

Teorema 2.1 *Sob a hipótese de p e g serem contínuas no intervalo aberto I contento o ponto x_o, o problema de valor inicial (13) tem uma e somente uma solução $y = \phi(x)$, a qual está definida para todo x em I e é dada por (20).*

Observação 2.2 *Embora tenhamos uma expressão para a solução do problema de valor inicial (13), a qual é dada por (20), nem sempre será possível calculá-la explicitamente, em virtude das integrais envolvidas e teremos que apelar para métodos numéricos.*

Exercício 2.1 *Resolva o seguinte problema de valor inicial*

$$y' + \frac{1}{x}y = sen\, x, \quad y(\pi) = 0.$$

Solução. Note que neste caso o fator integrante é

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{ln|x|+k} = cx.$$

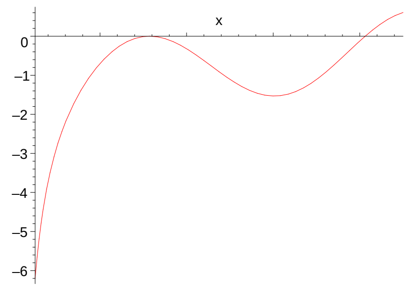

Figura 3: *O gráfico de* $y = \frac{-x cos(x)+sen(x)-\pi}{x}$.

Tomaremos $c = 1$, portanto, $\mu(x) = x$. Logo, ao multiplicarmos a equação diferencial por x, temos $(xy)' = x\,sen\,x$, ou seja, $xy = \int x sen\,x dx = -x\cos\,x + sen\,x + c$, ou seja,

$$y = \frac{-x\cos\,x + sen\,x + c}{x}$$

é a solução geral da equação diferencial acima.

Para satisfazermos a condição inicial, devemos ter $0 = y(\pi) = \frac{\pi+c}{\pi}$, ou seja, $c = -\pi$ e a solução do problema de valor inicial é

$$y = \frac{-x\cos\,x + sen\,x - \pi}{x},$$

cujo domínio é $(0, \infty)$, veja gráfico da mesma na Figura 3. ■

Exercício 2.2 Equações de Bernoulli. *Mostre se fizermos a mudança de variáveis* $u(x) = y^{1-n}$, *podemos transformar a equação não-linear*

$$y' + p(x)y = g(x)y^n, \quad n \neq 0, 1, \tag{21}$$

na seguinte equação linear

$$u' + (1-n)p(x)u = (1-n)g(x). \tag{22}$$

Solução. Se $u(x) = y(x)^{1-n}$, então, $u' = (1-n)y^{-n}y'$, logo, se multiplicarmos (21) por $(1-n)y^{-n}$, teremos (22). ■

Exemplo 2.2 *Resolva o seguinte problema de valor inicial*

$$y' - 2y = y^3, \quad y(0) = 1. \tag{23}$$

Solução. Se fizermos $u = y^{-2}$, teremos

$$u' + 4u = -2, \tag{24}$$

cujo fator integrante é $\mu(x) = e^{4x}$, portanto, ao multiplicarmos (24) por este fator ela se torna

$$(e^{4x}u)' = -2e^{4x},$$

ou seja,

$$e^{4x}u(x) = -2\int e^{4x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{4x} + c.$$

Portanto, a solução geral de (24) é

$$u(x) = \frac{-\frac{1}{2}e^{4x} + c}{e^{4x}} = \frac{1}{2} + ce^{-4x}.$$

Voltanto à variável inicial, temos $y = u^{-\frac{1}{2}} = \pm\left(\frac{1}{2} + ce^{-4x}\right)^{-\frac{1}{2}}$ é a solução geral de (23). Como $y(0) = 1 > 0$, tomaremos $y = \left(\frac{1}{2} + ce^{-4x}\right)^{-\frac{1}{2}}$; além disso, queremos, $1 = y(0) = \left(\frac{1}{2} + c\right)^{-\frac{1}{2}}$, o que nos leva a $c = \frac{1}{2}$. Logo, a solução do problema de valor inicial (23) é $y = \left(\frac{1}{2}(1 + e^{-4x})\right)^{-\frac{1}{2}}$, cujo gráfico é mostrado na Figura 4. ∎

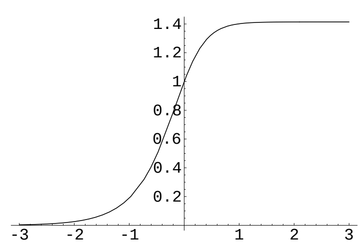

Figura 4: *O gráfico da solução* $y = \left(\frac{1}{2}(1 + e^{-4x})\right)^{-\frac{1}{2}}$.

2.2 Equações Diferenciais de Variáveis Separáveis

Dizemos que uma equação diferencial de primeira ordem é de **variáveis separáveis** se ela é da forma

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)},$$

ou equivalentemente,

$$M(x) + N(y)y' = 0. \tag{25}$$

Observação 2.3 *Em vista da notação de Leibniz, é comum escrevermos uma equação de variáveis separáveis da seguinte forma*

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \tag{26}$$

uma vez que y' é visto como a razão das diferenciais dy e dx.

Sejam $H_1(x)$ e $H_2(y)$, anti-derivadas de $M(x)$ e $N(y)$, respectivamente, ou seja,

$$\frac{d}{dx}H_1(x) = M(x) \tag{27}$$

e

$$\frac{d}{dy}H_2(y) = N(y). \tag{28}$$

Assumindo que y seja uma função de x, da regra da cadeia e de (28), temos

$$\frac{d}{dx}H_2(y(x)) = \frac{d}{dy}H_2(y)\,\frac{dy}{dx} = N(y)\,y'. \tag{29}$$

Logo, de (27) e (29), segue-se que (25) é equivalente a

$$\frac{d}{dx}(H_1(x) + H_2(y)) = 0, \tag{30}$$

ou seja,

$$H_1(x) + H_2(y) = c, \tag{31}$$

onde c é uma constante arbitrária.

A equação (31) define implicitamente, a solução geral de (26).

Note que se quisermos a solução que satisfaz a condição inicial $y(x_o) = y_o$, teremos $H_1(x_o) + H_2(y_o) = c$. Ou seja,

$$H_1(x) + H_2(y) = H_1(x_o) + H_2(y_o)$$

o que é equivalente a

$$\int_{x_o}^{x} M(s)ds + \int_{y_o}^{y} N(s)ds = 0. \tag{32}$$

Portanto, (32) nos dá uma curva que passa por (x_o, y_o), a qual define implicitamente a solução do problema de valor inicial dado.

Exemplo 2.3 *Encontre a solução do problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \quad y(0) = -1.$$

Solução. Note que a equação acima pode ser re-escrita como

$$(3x^2 + 4x + 2) - 2(y-1)\frac{dy}{dx} = 0,$$

que é da forma (25) com $M(x) = 3x^2 + 4x + 2$ e $N(y) = -2(y-1)$, portanto, a solução do problema de valor inicial é dada por

$$\int_0^x (3s^2 + 4s + 2)ds - 2\int_{-1}^y (s-1)ds = 0,$$

ou seja,

$$x^3 + 2x^2 + 2x - (y^2 - 2y) + 3 = 0,$$

ou ainda,

$$y^2 - 2y - (x^3 + 2x^2 + 2x + 3) = 0,$$

sendo que esta curva define implicitamente y como duas funções de x:

$$y(x) = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}.$$

Como queremos que $y(0) = -1$, tomaremos $y(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$. ■

Geometricamente, temos a seguinte situação: na curva $y^2 - 2y - (x^3 + 2x^2 + 2x + 3) = 0$ temos um ponto onde a tangente é vertical, ou seja, $\frac{dx}{dy} = \frac{2(y-1)}{3x^2+4x+2} = 0$, o que corresponde a $y = 1$, portanto, $x = -2$, veja a Figura 5. Assim, o ponto, $(-2, 1)$ divide a curva solução em dois pedaços, cada um dos quais define y como uma função de x, devemos tomar aquele que passa pela condição inicial $(0, -1)$.

Exemplo 2.4 *Resolva o seguinte problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 3x^2}{3y^2 - 6y}, \quad y(0) = 1.$$

Solução. Antes de resolvermos esta equação, faremos uma análise qualitativa da mesma. Seja

$$f(x, y) = \frac{1 + 3x^2}{3y^2 - 6y} = \frac{1 + 3x^2}{3y(y-2)},$$

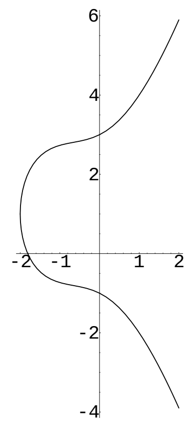

Figura 5: *O gráfico da curva* $y^2 - 2y - (x^3 + 2x^2 + 2x + 3) = 0$.

então, o sinal de $f(x, y)$ e, portanto, o o sinal de $y'(x)$, é dado pelo sinal do seu denominador, $3y(y - 2)$. No plano xy as retas horizontais $y = 0$ e $y = 2$ dividem o plano em três regiões, nas quais o sinal de $f(x, y)$ é o seguinte:

(i) nas regiões $y > 2$ ou $y < 0$, temos $f(x, y) > 0$, portanto, enquanto a solução estiver nestas ela deve ser crescente e

(ii) na região $0 < y < 2$, temos $f(x, y) < 0$, logo, enquanto a solução estiver na mesma ela é decrescente.

Sobre as retas $y = 0$ e $y = 2$, a função f fica ilimitada, o que significa que a tangente a uma curva solução fica vertical quando ela cruza estas duas retas. Como a condição inicial é $(0, 1)$, então a solução será decrescente e estará definida enquanto ela estiver na região do plano xy com $0 < y < 2$.

Note que a solução desejada é dada por

$$\int_0^x (1 + 3s^2)ds - \int_1^y (3s^2 - 6s)ds = 0,$$

ou seja,

$$-y^3 + 3y^2 + x^3 + x - 2 = 0. \tag{33}$$

A relação acima nos dá uma curva plana (veja Figura 6) que define y implicitamente como solução de x.

Quando $y = 0$, temos $x^3 + x - 2 = 0$, ou seja, $x = 1$. Por outro lado, quando $y = 1$, temos $x^3 + x + 2 = 0$, portanto, $x = -1$. A curva que nos dá a solução tem tangente vertical quando ela passa pelos pontos $(1,0)$ e $(-1,2)$, os quais a quebram em três pedaços: cada um dentro de uma das regiões descritas acima. O pedaço que nos interessa é aquele que passa por $(0,1)$. Logo, o domínio da solução desejada é o intervalo $(-1,1)$ e ela é sempre decrescente no mesmo. ∎

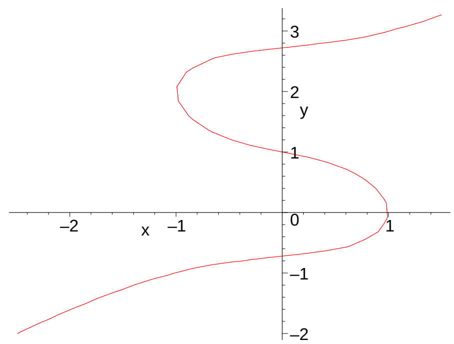

Figura 6: *O gráfico da curva* $y^3 - 3y^2 - x^3 - x = 2$.

2.3 Equações Diferenciais Homogêneas

Dizemos que uma equação diferencial de primeira ordem é **homogênea** se ela for da forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{34}$$

ou seja, y' é constante ao longo de raios passando pela origem.

Exemplo 2.5 *As seguintes equações são homogêneas:*

(a) $y' = \frac{xy-x^2}{y^2}$.

(b) $y' = \ln x - \ln y$.

De fato, note que $\frac{xy-x^2}{y^2} = \frac{x}{y} - (\frac{x}{y})^2 = (\frac{y}{x})^{-1} - (\frac{y}{x})^{-2}$ e $\ln x - \ln y = -\ln(\frac{y}{x})$. ∎

Para resolvermos uma equação homogênea, fazemos a seguinte mudança de variáveis $u = \frac{y}{x}$ ou seja $y = xu$. Logo,

$$y' = xu' + u. \tag{35}$$

De (34) e (35), temos $xu' + u = f(u)$ e concluimos que u satisfaz a seguinte equação de variáveis separáveis:

$$\frac{1}{f(u) - u}\ u' = \frac{1}{x}, \tag{36}$$

cuja solução geral é

$$\int \frac{1}{f(u) - u}\, du = \int \frac{1}{x}\, dx. \tag{37}$$

Exemplo 2.6 *Encontre a solução geral da seguinte equação*

$$y' = \frac{2x - y}{y}.$$

Solução. Note que $\frac{2x-y}{y} = \frac{2}{\frac{y}{x}} - 1 = f(\frac{y}{x})$, onde $f(u) = \frac{2}{u} - 1$ e de (37), temos

$$\int \frac{u}{u^2 + u - 2}\, du = -\int \frac{1}{x}\, dx$$

como $u^2 + u - 2 = (u-1)(u+2)$, podemos escrever

$$\frac{u}{u^2 + u - 2} = \frac{u}{(u-1)(u+2)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+2}.$$

Note que $(u+2)A + (u-1)B = u$, ou seja, $(A+B)u + 2A - B = u$, portanto, temos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ 2A - B &= 0 \end{aligned}$$

cuja solução é $A = \frac{1}{3}$ e $B = \frac{2}{3}$. Logo,

$$\int \frac{u}{u^2 + u - 2}\, du = \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{u-1} + \frac{\frac{2}{3}}{u+2} \right) du = \frac{1}{3} \ln|u-1| + \frac{2}{3} \ln|u+2| + k_1$$

como

$$-\int \frac{1}{x}\, dx = -\ln|x| + k_2,$$

temos,

$$\frac{1}{3}\ln|u-1| + \frac{2}{3}\ln|u+2| + k_1 = -\ln|x| + k_2$$

$$\ln|u-1| + 2\ln|u+2| = -3\ln|x| + C$$

onde $C = 3(k_2 - k_1)$. Substituindo u por $\frac{y}{x}$ na expressão acima, temos

$$\ln\left|\frac{y-x}{x}\right| + 2\ln\left|\frac{y+2x}{x}\right| = -3\ln|x| + C$$

a qual pode ser re-escrita como $|y-x|(y+2x)^2 = e^C$ que é a solução geral desejada.

Em particular, se quiséssemos a solução do problema acima que satisfizesse à condição inicial $y(0) = 3$, teríamos a curva solução $(y-x)(y+2x)^2 = 27$, cujo gráfico é mostrado na Figura 7. Ela define y implicitamente como três funções de x. Note que a reta $y = -2x$ divide a curva solução em duas componentes conexas: uma delas a que está acima desta reta é o gráfico de uma função definida para todo x real e passa pela condição inicial $(0,3)$, portanto é a solução desejada; a outra componente conexa está abaixo da reta $y = -2x$, nela temos uma tangente vertical quando $y = 0$, ou seja, no ponto $(-4^{\frac{1}{3}}, 0)$, o que define duas funções com domínio em $(-\infty, -4^{\frac{1}{3}})$.

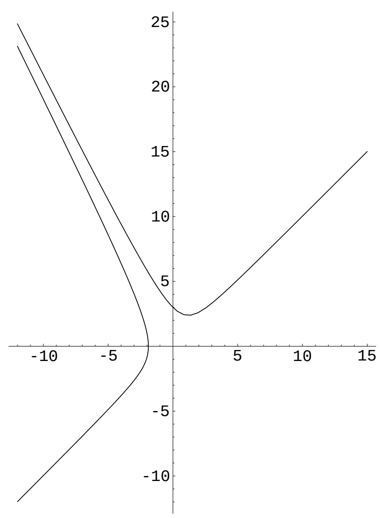

Figura 7: *O gráfico da curva* $(y-x)(y+2x)^2 = 27$.

Exercício 2.3 *Resolva o seguinte problema de valor inicial*

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - 3y^2}, \quad y(1) = 1.$$

Exercício 2.4 *Resolva a seguinte equação*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x + 5}{2x - y - 4}.$$

Sugestão: *Faça a seguinte mudança de variáveis* $x = X - h$ *e* $y = Y - k$*, onde as constantes* h *e* k *deverão ser escolhidas de modo que nas novas variáveis* X *e* Y*, a equação seja homogênea.*

Solução. Note que $\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dX}$, além disso,

$$\frac{2y - x + 5}{2x - y - 4} = \frac{2Y - X + 5 - 2k + h}{2X - Y + k - 2h - 4} = \frac{2Y - X}{2X - Y},$$

se escolhermos h e k tais que

$$\begin{aligned} h - 2k &= -5 \\ 2h - k &= -4, \end{aligned}$$

ou seja, $h = -1$ e $k = 2$ e teremos a seguinte equação homogênea

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2Y - X}{2X - Y}.$$

Deixamos como exercício para o leitor a resolução desta equação e a volta às variáveis antigas x e y. ∎

2.4 Equações Diferenciais Exatas

Dizemos que a equação

$$M(x, y) + N(x, y)\,\frac{dy}{dx} = 0 \tag{38}$$

é **exata** numa dada região aberta e simplesmente conexa ("sem buracos"), R, se existir uma função $\psi(x, y)$, tal que

$$\psi_x(x, y) = M(x, y) \tag{39}$$

e

$$\psi_y(x, y) = N(x, y) \tag{40}$$

para todo (x, y) em R e

$$\psi(x, y) = c \tag{41}$$

definir implicitamente $y = \phi(x)$ como uma função diferenciável de x.

De (41), (40)(39), temos,

$$0 = \frac{d\psi(x, y)}{dx} = \psi_x(x, y) + \psi_y(x, y)y' = M(x, y) + N(x, y)y',$$

logo, a solução geral de (38) é dada implicitamente por (41).

Assuma que M, N, M_y e N_x sejam contínuas no retângulo

$$R = \{(x,y) : \alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta\}.$$

Se (38) for exata em R, então, existe uma função $\psi(x,y)$ tal que (39) e (40) aconteçam, portanto,

$$\psi_{xy} = M_y \quad e \quad \psi_{yx} = N_x, \tag{42}$$

como por hipótese M_y e N_x são contínuas em R, segue-se de (42) que ψ_{xy} e ψ_{yx} também são contínuas em R, logo, $\psi_{xy} = \psi_{yx}$ em R e, de (42), concluimos que

$$M_y = N_x \tag{43}$$

em R.

Agora suponha que (43) aconteça, mostraremos que existe $\psi(x,y)$ tal que tenhamos (39) e (40) em R, ou seja, (38) é exata em R. De fato, se definirmos

$$\psi(x,y) = \int M(x,y)dx + h(y) \tag{44}$$

onde na integral acima y é tratado como se fosse constante, portanto, temos uma constante arbitrária na variável de integração x, ou seja, uma função na variável y, a qual chamaremos de $h(y)$. A seguir, calcularemos $h(y)$. Como queremos que ψ satisfaça (40), de (44), devemos ter

$$\psi_y = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + h'(y) = \int M_y(x,y)dx + h'(y) = N(x,y), \tag{45}$$

portanto,

$$h'(y) = N(x,y) - \int M_y(x,y)dx. \tag{46}$$

Resta-nos mostrar que, apesar da aparência, $N(x,y) - \int M_y(x,y)dx$ depende apenas de y, mas de (43), temos $\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y) - \int M_y(x,y)dx\right) = N_x - M_y = 0$. Com isso temos o seguinte

Teorema 2.2 *Sob a hipótese de M, N, M_y e N_x serem contínuas em R, a equação (38) é exata em R se, e somente se, (43) acontecer em R.*

Exemplo 2.7 *Resolva a equação*

$$2x + 3 + (2y - 2)y' = 0. \tag{47}$$

Solução. Note que $M(x,y) = 2x+3$ e $N(x,y) = 2y-2$, logo, $M_y = 0 = N_x$, para todo (x,y). Como M, N, M_y e N_x são contínuas no plano no qual também temos $M_y = N_x$, segue-se que a equação acima é exata em todo o plano. Fazendo

$$\psi(x,y) = \int (2x+3)dx + h(y) = x^2 + 3x + h(y)$$

e impondo que

$$2y - 2 = N(x,y) = \psi_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3x + h(y)) = h'(y)$$

segue-se que , $h'(y) = 2y-2$, logo, $h(y) = y^2 - 2y + k$. Podemos fazer $k = 0$. Assim, $\psi(x,y) = x^2 + y^2 + 3x - 2y$ e a solução geral de (47) é

$$x^2 + y^2 + 3x - 2y = C. \tag{48}$$

Se não tivéssemos feito a constante $k = 0$, ela poderia ser sido incorporado na constante C, o que nos daria uma nova constante. ■

Note que se completarmos quadrados na equação (48), ela pode ser re-escrita como $(x+3/2)^2 + (y-1)^2 = C + 13/4$ o que nos dará circunferências centradas em $(-\frac{3}{2}, 1)$ e com raios $\sqrt{C + 13/4}$, desde que $C > -\frac{13}{4}$. As tangentes a estas são verticais quando $\frac{dx}{dy} = -\frac{2(y-1)}{2x+3} = 0$, ou seja $y = 1$. Logo, a reta $y = 1$ divide cada circunferência em duas semi-circunferências e num problema de valor inicial devemos tomar aquela que passa pela condição inicial (x_o, y_o). Se fizermos $y = 1$ nas equações acima, encontramos $x = \frac{-3 \pm \sqrt{4C+13}}{2}$, como as coordenadas dos pontos onde as tangentes são verticais. Portanto, o domínio das soluções y como função de x será o intervalo $\left(\frac{-3-\sqrt{4C+13}}{2}, \frac{-3+\sqrt{4C+13}}{2}\right)$. Por exemplo, se $x_o = 0$ e $y_0 = 0$, segue-se de (48) que temos $C = 0$ e a circunferência que passa por (x_o, y_o) é $(x+3/2)^2 + (y-1)^2 = 13/4$, veja Figura 8. Esta circunferência define implicitamente y como duas funções de x, ou seja, $y = 1 \pm \sqrt{13/4 - (x+3/2)^2}$. Logo, a solução desejada é $y = 1 - \sqrt{13/4 - (x+3/2)^2}$, cujo domínio é o intervalo $(\frac{-3-\sqrt{13}}{2}, \frac{-3+\sqrt{13}}{2})$.

Observação 2.4 *Na construção de ψ descrita acima, poderíamos fazer*

$$\psi(x,y) = \int N(x,y)dy + g(x)$$

onde $g(x)$ é determinada a partir da condição $\psi_x = M$; ou seja,

$$g'(x) = M(x,y) - \int N_x(x,y)dy.$$

A condição $M_y = N_x$ nos garante que $M(x,y) - \int N_x(x,y)dy$ seja função apenas de x.

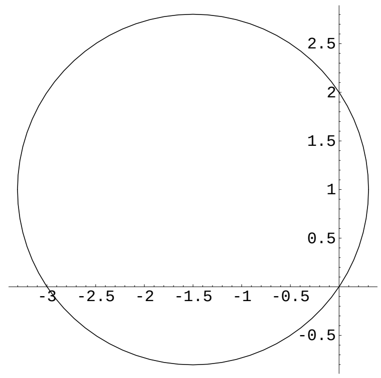

Figura 8: *O gráfico da curva* $x^2 + y^2 + 3x - 2y = 0$.

Exemplo 2.8 *Encontre a constante* b *tal que*

$$(xy^2 + bx^2y)dx + (x + y)x^2dy = 0$$

seja exata e resolva-a.

Solução. Neste caso, $M(x, y) = xy^2 + bx^2y$ e $N(x, y) = x^3 + x^2y$, logo, $M_y = 2xy + bx^2$ e $N_x = 2xy + 3x^2$, como queremos que $M_y = N_x$, devemos ter $b = 3$. Com esta escolha de b a equação será exata no plano todo.

$$\psi(x, y) = \int (xy^2 + 3x^2y)dx + h(y) = \frac{x^2y^2}{2} + x^3y + h(y),$$

logo,

$$x^3 + x^2y = N(x, y) = \psi_y(x, y) = x^2y + x^3 + h'(y),$$

portanto, $h'(y) = 0$, o que implica $h(y) = k$. Faremos $k = 0$. Logo, $\psi(x, y) = \frac{x^2y^2}{2} + x^3y$ e a solução geral será

$$\frac{x^2y^2}{2} + x^3y = C.$$

■

Dada uma equação diferencial da forma

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0, \tag{49}$$

mesmo ela não sendo exata, podemos tentar encontrar uma função $\mu(x, y)$ tal que ao multiplicá-la por μ a equação resultante se torne exata. Esta função μ, caso exista, é chamada de **fator**

integrante de (49). Em geral, o problema de achar um fator integrante é muito complicado, a não não ser naqueles casos em que exista um fator integrante que dependa de apenas uma as variáveis x ou y. A pergunta natural é a seguinte: quando podemos garantir que (49) admite um fator integrante que dependa apenas de x?

Se $\mu = \mu(x)$, então, ao multiplicarmos (49) por μ teremos,

$$\mu(x)M(x,y) + \mu(x)N(x,y)y' = 0, \tag{50}$$

e para que ela seja exata é necessário que

$$(\mu(x)M(x,y))_y = (\mu(x)N(x,y))_x\,,$$

ou seja, $\mu(x)M_y(x,y) = \mu'(x)N(x,y) + \mu(x)N_x(x,y)$, o que pode ser re-escrita como

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{M_y(x,y) - N_x(x,y)}{N(x,y)},$$

como o lado esquerdo da equação acima depende apenas de x, é necessário que $\frac{M_y(x,y)-N_x(x,y)}{N(x,y)}$ dependa apenas de x, digamos $\frac{M_y(x,y)-N_x(x,y)}{N(x,y)} = P(x)$, neste caso, teremos $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = P(x)$, que admite a solução

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}.$$

Exercício 2.5 *Mostre que se* $\frac{N_x(x,y)-M_y(x,y)}{M(x,y)} = Q(y)$, *então, a equação (49) admite um fator integrante que depende apenas de* y *que é dado por*

$$\mu(y) = e^{\int Q(y)dy}.$$

Exercício 2.6 *Mostre que a equação diferencial*

$$dx + \left(\frac{x}{y} - sen\,y\right)dy = 0 \tag{51}$$

tem um fator integrante que depende apenas de y *e resolva-a.*

Solução. Note que a equação acima é da forma (25) com $M(x,y) = 1$ e $N(x,y) = \frac{x}{y} - sen\,y$. Portanto, $\frac{N_x(x,y)-M_y(x,y)}{M(x,y)} = \frac{1}{y} = Q(y)$, logo, $\mu(y) = e^{\int \frac{1}{y}dy} = e^{\ln|y|+k} = Cy$, tomaremos $\mu(y) = y$. Multiplicando a equação diferencial por y, temos

$$y + (x - ysen\,y)y' = 0, \tag{52}$$

a qual é exata. Fazendo $\psi(x,y) = \int y dx + h(y) = xy + h(y)$, segue-se que $x - y sen\, y = N(x,y) = \psi_y(x,y) = x + h'(y)$, logo, $h'(y) = y sen\, y$, portanto, $h(y) = -y \cos y + sen\, y + k$, faremos $k = 0$. Disso, conncluimos que $\psi(x,y) = xy - y \cos y + sen\, y$ e a solução geral da equação (52) será $xy - y\cos y + sen\, y = C$. A solução geral do problema original será

$$xy - y\cos y + sen\, y = C.$$

■

2.5 Aplicações

2.5.1 Misturas

Figura 9: Mistura.

Em modelagens de misturas, de decaimento de materiais ratioativos e de crescimento de populações são modelados por uma equação da forma

$$y' + p(t)y = g(t). \tag{53}$$

No que se segue nos referiremos à Figura 9. Temos o seguinte problema: suponha que inicialmente haja Q_o gramas de sal num recipiente contendo V_o litros de solução. Sabendo-se que uma solução de concentração de $\rho_e(t)$ gramas por litro entra no recipiente a uma taxa de $v_e(t)$ litros por minuto e que esta uma vez misturada saia do recipiente a uma taxa de $\rho_s(t)$ litros por minuto, calcule a quantidade de sal, $Q(t)$, presente no recipiente no instante t.

A taxa de variação do sal com tempo, $Q'(t)$, é igual à taxa na qual o sal está entrando no recipiente, $\rho_e(t)\, v_e(t)$, menos a taxa na qual o sal está saindo, $\frac{Q(t)}{V(t)}\, v_s(t)$, onde

$$V(t) = V_o + \int_0^t (v_e(w) - v_s(w))dw.$$

Portanto, para encontrarmos $Q(t)$, temos que resolver o seguinte problema de valor inicial:

$$Q'(t) + \frac{v_s(t)}{V(t)}\, Q(t) = \rho_e(t) v_e(t), \quad Q(0) = Q_o.$$

2.5.2 Decaimento de Materiais Radioativos

Em problemas de decaimento de materiais radioativos, assume-se que a taxa de variação da massa de material em cada instante seja proporcional à massa presente naquele momento. Se adicionarmos material à uma taxa $g(t)$, então, a taxa de variação total da massa $m(t)$, será a soma de duas parcelas: uma devido ao decaimento, $-km$, outra devido ao material que estamos colocando, $g(t)$, portanto, temos a seguinte equação diferencial

$$m' + k\,m = g(t), \tag{54}$$

onde k é uma constante positiva.

No caso em que $g(t)$ é identicamente nula, a solução de (54) é

$$m(t) = m(0)e^{-kt}.$$

Note que após um certo tempo τ, a massa será a metade da massa inicial $m(0)$, portanto,

$$\frac{1}{2} = \frac{m(\tau)}{m(0)} = e^{-k\tau},$$

ou seja,

$$\tau = \frac{\ln 2}{k}.$$

A quantidade τ é chamada de **tempo de meia-vida** do material radioativo. Experimentalmente, podemos calcular o valor de τ e com isso teremos o valor da constante $k = \frac{\ln 2}{\tau}$.

2.5.3 Queda de um Corpo num Meio com Atrito

Suponha que um corpo esteja caindo no ar e que a força de atrito deste seja proporcional ao quadrado da velocidade com que o corpo se move no mesmo. Vimos no Exemplo 1.4 que a sua velocidade obedece a seguinte equação de primeira ordem

$$\frac{dv}{dx} + \frac{\gamma}{m}v = -gv^{-1},$$

que é uma equação de Bernoulli e também de variáveis separáveis.

Em geral, se a força de atrito for da forma $-\gamma v^n$, o procedimento acima nos leva a uma equação de variáveis separáveis.

2.5.4 Velocidade de Escape

Um dos problemas comuns em mecânica é aquele que consiste em determinar a velocidade inicial necessária para colocar um projétil fora da órbita da Terra.

Admitiremos que a única força que atua no corpo seja o seu peso, $w(x)$, dado por

$$w(x) = -\frac{k}{(R+x)^2},$$

onde k é uma constante, R o raio da Terra e x é a distância do corpo à superfície da mesma. Esta expressão para w segue da Lei de Atração Gravitacional, visto que o peso de um corpo é a força de atração entre este e a Terra, ela cai com o quadrado de suas distâncias.

Por definição da aceleração da gravidade, g, o peso de um corpo de massa m, sobre a superfície da terra é $w(0) = -mg$, logo,

$$-mg = w(0) = -\frac{k}{R^2}$$

e concluimos que $k = mgR^2$. Portanto,

$$w(x) = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}.$$

Da Segunda Lei de Newton, temos $ma = m\frac{dv}{dt} = w(x) = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}$, ou seja,

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{gR^2}{(R+x)^2}.$$

Podemos supor que $v = v(x)$, onde $x = x(t)$, portanto, da Regra da Cadeia, temos $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v$ e teremos o seguinte problema de valor inicial

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(R+x)^2}, \quad v(0) = v_o.$$

Estamos supondo que o projétil está sendo lançado verticalmente para cima, a partir da superfície da Terra, $x_o = 0$, com velocidade inicial v_o. A equação acima é de variáveis separáveis e a sua solução geral é $\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{R+x} + C$. Como $x_o = 0$, segue-se que $C = \frac{v_o^2}{2} - gR$. Portanto,

$$v = \pm\sqrt{v_o^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{R+x}},$$

onde escolheremos o sinal $+$, para indicar que o projétil está subindo, ou seja x está crescendo com tempo. Quando o projétil atingir a altura máxima, x_{max}, a sua velocidade será zero, ou seja,

$$0 = v_o^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{R+x_{max}},$$

o que nos dá $x_{max} = \frac{v_o^2 R}{2gR - v_o^2}$, portanto, a velocidade inicial necessária para elevar o corpo até a altura máxima, x_{max}, é

$$v_o = \sqrt{2gR \, \frac{x_{max}}{R + x_{max}}}.$$

velocidade de escape, v_e, é encontrada fazendo-se $x_{max} \to \infty$ na expressão acima, ou seja,

$$v_e = \sqrt{2gR} \approx 11,1\, Km/s.$$

Se considerássemos o atrito, a velocidade de escape seria maior do que o valor encontrado acima.

2.5.5 Dinâmica de Populações

Uma classe importante de equações de primeira ordem é aquela em que a variável independente não aparece explicitamente. Estas equações são chamadas de **equações autônomas** e têm a seguinte forma

$$\frac{dy}{dt} = f(y).$$

Note que os zeros da função $f(y)$ nos dão soluções constantes da equação acima, as quais são denominadas de **soluções de equilíbrio** ou **pontos críticos**. Um exemplo de equação que é da forma acima é a equação logística

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right) y, \tag{55}$$

onde r e K são constantes positivas.

A seguir, iremos descrever qualitativamente as soluções de (55). Note que os seus pontos críticos, ou seja, zeros de $f(y) = r\left(1 - \frac{y}{K}\right) y$, são $y = 0$ e $y = K$. Assim, as soluções constantes $y = \phi_1(t) = 0$ e $y = \phi_2(t) = K$ são as soluções de equilíbrio de (55). Note que $f(y)$ é uma parábola com concavidade voltada para baixo, isto significa que $f(y) > 0$ entre as raízes $y = 0$ e $y = K$ e $f(y) < 0$ se $y < 0$ e $y > K$. Se desenharmos as retas $y = 0$ e $y = K$ no plano ty, estas dividirão este plano em três regiões: $y < 0$, $0 < y < K$ e $y > K$.

Na região onde $y > K$, como $f(y) < 0$, então $y' > 0$, ou seja, nela a solução é decrescente. Em particular, se considerarmos uma solução tal que $y(0) = y_o > K$, ela decresce a partir deste valor sem tocar a reta $y = K$. O fato desta solução nunca tocar a reta $y = K$ segue do unicidade de soluções de (55). O mesmo acontece na região $y < 0$, ou seja, as soluções são decrescentes nesta região.

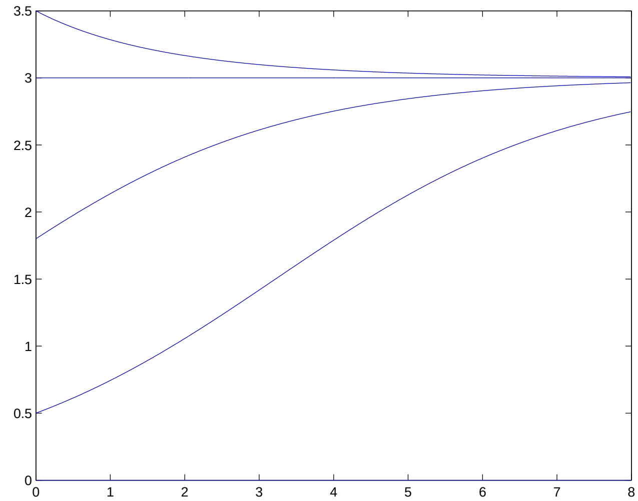

Figura 10: *Soluções de* $y' = r\,(1 - y/K)\,y$, *com* $r = 0.5$ *e* $K = 3$ *para as condições iniciais* $y_o = 3.5,\ 3,\ 1.8,\ 0.5,\ 0$.

Por outro lado, na região em que $0 < y < K$, como $f(y) > 0$, segue-se que $y' > 0$ e a solução é crescente. Em particular, se considerarmos uma solução tal que $y(0) = y_o$, com $0 < y_o < K$, ela cresce a partir deste valor sem tocar a reta $y = K$.

Se quisermos uma informação mais detalhada da solução, podemos considerar a concavidade da mesma, ou seja, o sinal de

$$y''(t) = \frac{d}{dt} f(y) = \frac{d}{dy} f(y)\,\frac{dy}{dy} = f(y) f'(y) = r^2 \left(1 - \frac{y}{K}\right) y \left(1 - \frac{2y}{K}\right).$$

Note que os pontos de inflexão de $y(t)$ são $y = 0$, $y = K$ e $y = \frac{K}{2}$ e o sinal de $y''(t)$ é positivo se $y > K$ ou $0 < y < \frac{K}{2}$ e será negativo se $y < 0$ ou $\frac{K}{2} < y < K$. Em particular, se $y(0) > K$, então, a concavidade do gráfico de $y(t)$ será para cima. Se $y(0) < 0$ ou $\frac{K}{2} < y < K$, a concavidade do gráfico de $y(t)$ será para baixo. Finalmente, se $0 < y(0) < \frac{K}{2}$, então, a concavidade do gráfico de $y(t)$ será para cima até o instante em que a solução corta a reta $y = \frac{K}{2}$, onde ele muda de concavidade e permanece com concavidade para baixo, veja a Figura 10.

Embora tenhamos feito uma análise puramente qualitativa das soluçoes de (55), podemos calcular explicitamente suas soluções, observando-se que esta equação é de variáveis separáveis. De fato,

$$\int \frac{dy}{(k-y)y} = \frac{r}{K} \int dt.$$

Como

$$\frac{1}{(K-y)y} = \frac{1}{K}\left(\frac{1}{K-y} + \frac{1}{y}\right),$$

temos

$$\frac{1}{K}\ln\left|\frac{y}{K-y}\right| = \frac{r}{K}\,t + \frac{C_1}{K}$$

ou seja,

$$\frac{y}{K-y} = Ce^{rt},$$

ou $y = \frac{KC}{C+e^{-rt}}$. Da condição inicial $y(0) = y_o$, temos $C = \frac{y_o}{K-y_o}$, portanto,

$$y = \frac{Ky_o}{y_o + (K-y_o)e^{-rt}}.$$

Note que independentemente da condição inicial $y(0) > 0$, as soluções tendem à solução de equilíbrio $y = \phi_2(t) = K$, quando $t \to \infty$ e dizemos que ela é **assintoticamente estável**.

Se trocarmos o sinal de f, ou seja, considerarmos $f(y) = -r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y$, ainda teremos as mesmas soluções de equilíbrio; contudo, o comportamento das soluções será completamente diferente. Em particular, mesmo que tomemos condições iniciais $y(0) \neq K$, arbitrariamente próximas de K, as soluções correspondentes se afastam de $y = \phi_2(t) = K$ e dizemos que esta solução de equilíbrio é **assintoticamente instável**. Já a solução $y = \phi_1(t) = 0$ será assintoticamente estável, neste caso.

Em muitas aplicações, por exemplo, na descrição de população de bactérias é comum assumir que a taxa de variação da população, y, em cada instante seja proporcional à y, o que nos conduz à seguinte equação diferencial linear

$$y' = ky, \tag{56}$$

onde k é uma constante positiva. A solução de (56) que satisfaz à condição inicial $y(0) = y_o$ é $y(t) = y_o e^{kt}$, o que nos dá um crescimento exponencial da população.

Na prática a equação (56) é uma aproximação que deve ser válida para pequenos valores de t, pois, à medida em que a população cresce há competição entre os seus indivíduos por espaço e por alimento; portanto, o que se espera é que haja uma estabilização da população e teremos que considerar uma equação que modele isto, por exemplo, uma equação tipo (55).

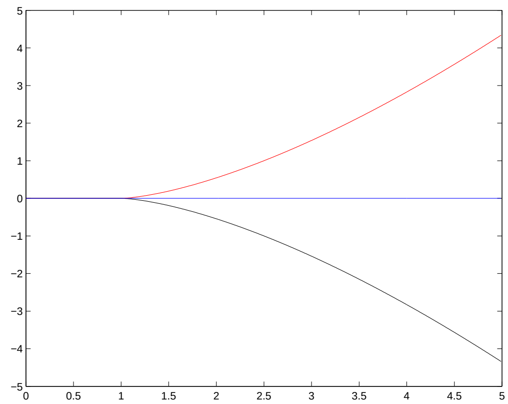

Figura 11: *Os Gráficos da solução nula e das soluções* $\phi_1^{\pm}(x)$.

2.6 Teorema de Existência e Unicidade Geral

Problemas de valores iniciais do tipo (12) nem sempre tem uma única solução. Por exemplo, o problema de valor inicial

$$y' = y^{\frac{1}{3}}, \quad y(0) = 0, \tag{57}$$

além da solução nula, admite soluções da forma

$$\phi_c^{\pm}(x) \equiv \begin{cases} \pm[\frac{2}{3}(x-c)]^{\frac{3}{2}}, \text{ se } x > c \\ 0, \text{ se } x \leq c, \end{cases} \tag{58}$$

para cada $c > 0$. Isto mostra que o problema (57) tem infinitas soluções, veja Figura 11.

Como nem sempre saberemos resolver equações do tipo (12), por isso é importante que tenhamos um teorema que nos diga a respeito de existência e unicidade de suas soluções e, se necessário, calculá-las numericamente.

A seguir iremos enunciar o Teorema de Existência e Unicidade para o problema de valor inicial (12), cuja demonstração foge do propósito deste curso e pode ser encontrada, por exemplo, na referência [1].

Teorema 2.3 *Suponha que* $f(x, y)$ *e sua derivada parcial* $f_y(x, y)$ *sejam contínuas no retângulo* $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}$, *contendo o ponto* (x_o, y_o). *Então existe um intervalo aberto,* I, *da forma* $I = (x_o - \delta, x_o + \delta) \subset (a, b)$, *no qual existe uma e somente uma solução* $y = \phi(t)$ *do problema de valor inicial* (12).

2.7 Métodos Numéricos

A seguir introduziremos os métodos numéricos de Euler e Euler melhorado para resolução numérica de equações diferenciais de primeira ordem.

Dada a equação diferencial

$$y' = f(x, y),$$

se a integrarmos de x_n a x_{n+1}, teremos

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(s, y(s))\, ds,$$

onde a integral acima pode ser interpretada como a área sob o gráfico de $g(s) = f(s, y(s))$, com s entre x_n e x_{n+1}. Podemos aproximar esta pela área do retângulo de altura $f(x_n, y(x_n))$ e base $x_{n+1} - x_n$ e teremos a seguinte aproximação:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) \approx f(x_n, y(x_n))(x_{n+1} - x_n),$$

ou seja,

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + f(x_n, y(x_n))(x_{n+1} - x_n),$$

se fizermos $y_k = y(x_k)$ e tomarmos $x_{n+1} - x_n = h$, teremos o seguinte método numérico que nos permite calcular o y_{n+1} a partir de y_n:

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)h. \tag{59}$$

Nas aplicações, conhecemos o valor inicial $y_o = y(x_o)$ e se considerarmos incrementos iguais a h de forma que tenhamos $x_k = x_o + kh$, teremos o seguinte algoritmo numérico

$$y_{n+1} \quad = \quad y_n + f(x_n, y_n)h,$$

onde $y_o = y(x_o)$, chamado de método de Euler.

Se fizermos a expansão de Taylor de $y(x_n + h)$ em torno de x_n, temos

$$\begin{aligned} y(x_n + h) &= y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2}\, h^2 + O(h^3) \\ &= y_n + f(x_n, y_n)h + \frac{f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)f(x_n, y_n)}{2}\, h^2 + O(h^3) \qquad (60) \end{aligned}$$

se compararmos esta expressão com a aproximação de Euler dada em (59), concluimos ela concordam até primeira ordem em h, portanto, em cada passo temos um erro da ordem de h^2.

Uma melhora no método consiste em aproximarmos a área área sob o gráfico de $g(s) = f(s, y(s))$, com s entre x_n e x_{n+1} pela área do trapézio com vértices em $(x_n, 0)$, $(x_{n+1}, 0)$, $(x_n, f(x_n, y_n))$ e $(x_{n+1}, f(x_{n+1}, y_{n+1}))$. Ou seja,

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &\approx y(x_n) + \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))}{2}\,(x_{n+1} - x_n) \\ &\approx y(x_n) + \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y(x_n) + f\left((x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n)\right)}{2}\,(x_{n+1} - x_n), \end{aligned}$$

na segunda aproximação usamos o método de Euler e aproximamos $y(x_{n+1})$ por $y_n + f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n)$. Isto nos dá o seguinte método numérico

$$y_{n+1} = y_n + \frac{f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + f(x_n, y_n)h)}{2}\, h, \tag{61}$$

onde $y_o = y(x_o)$ e $x_n = x_o + nh$.

Se fizermos a expansão de Taylor em torno de $h = 0$ da expressão dada no lado direito de (61) (veja Exercício 2.7) e a compararmos com (60), concluiremos que elas concordam até segunda ordem em h, ou seja, o método numérico (61) é da ordem de h^3, portanto, temos um erro da ordem de h^3 em cada passo.

Exercício 2.7 *Mostre que*

$$f(x_n + h, y_n + f(x_n, y_n)h) = f(x_n, y_n) + (f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)f(x_n, y_n))\, h + O(h^2).$$

Exercício 2.8 *Usando os dois métodos numéricos descritos acima, encontre a solução do seguinte problema de valor inicial*

$$y' = \ln(x^2 + y^2) + sen\, x, \quad y(1) = 1,$$

para x em $[1, 2]$, tomando-se o incremento na variável x, $h = 0.01$. Plotar o gráfico das duas soluções juntas.

2.8 Exercícios Adicionais

1. Determine (sem resolver o problema) o maior intervalo possível no qual a solução do problema de valor inicial

$$(t-3)\, y' + (\ln t)y = \frac{2t}{cos(t)}, \quad y(2) = 1,$$

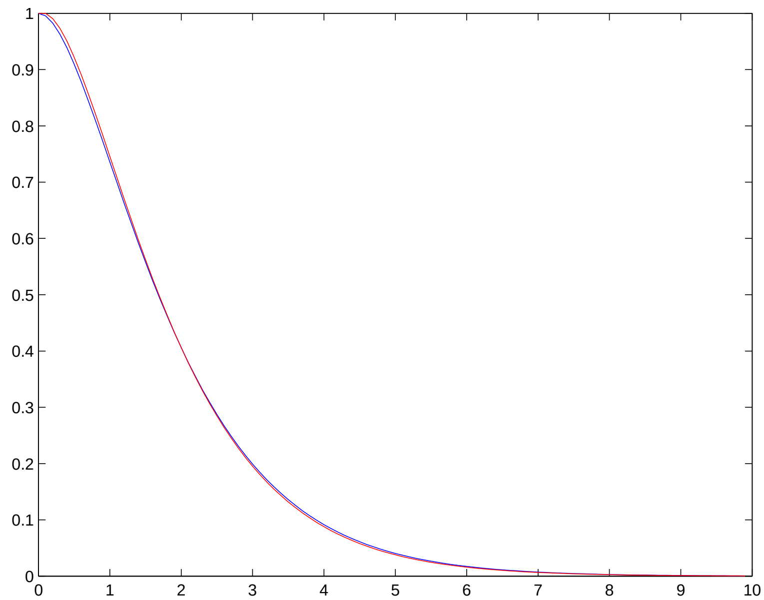

Figura 12: *Os gráficos das soluções exata e aproximada (método de Euler, $h = 0.1$, equação (59)) do problema de valor inicial $y' + y = e^{-t}$, $y(0) = 1$.*

exista.

Nos exercícios $2 - 8$, encontre as soluções gerais das equações dadas.

2. $(1 - t^2)y' - 2ty = 1$.

3. $ty' + 2y = \frac{sen(t)}{t}$.

4. $(1 - t^2)y' - 2ty = 1$.

5. $y' + (tg\, t)y = t\, sen(2t), \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

6. $y' = cos^2(x)\, cos^2(2y)$.

7. $y' = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}$.

8. $y' = \frac{y - 4x}{x - y}$.

Nos exercícios $9 - 14$, resolva os problemas de valores iniciais propostos e, na medida do possível, encontre os domínios das soluções obtidas.

9. $y' = \epsilon y - \sigma\, y^3, \quad y(0) = 1$, onde ϵ e σ são constantes positivas.

10. $y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, \quad y(0) = 1.$

11. $y' = \frac{3x^2}{3y^2-4}, \quad y(1) = 0.$

12. $2xye^y + x^2e^y(y+1)y' = 0, \quad y(1) = 1.$

13. $y\,(1+x^3)\,y' - x^2 = 0, \quad y(0) = 1.$

14. $y' + \left(1 + 2\,x^{-1}\right) y = x^3\,\mathrm{e}^{-x}, \quad y(1) = 2.$

15. Suponha que a população da Terra tem aumentado a uma taxa proporcional à população instantânea $P(t)$. A constante de proporcionalidade não é conhecida a princípio, mas sabe-se que no ano de 1650 a população era de 600 milhões e em 2000 era de 6 bilhões. Estima-se que a maior população que a Terra é capaz de sustentar seja de 30 bilhões de habitantes. Se a constante de proporcionalidade não se alterar, quando esse limite será atingido?

16. Uma substância se decompõe com uma taxa temporal proporcional à quantidade $Q(t)$ de substância. A princípio, não se conhece a constante de proporcionalidade, mas sabe-se que 100 gramas dessa substância se reduzem pela metade em 1 hora. Em quanto tempo 100 gramas se reduzem a 20 gramas?

17. Considere o problema de valor inicial $y' + \frac{2}{3}\,y = 1 - \frac{1}{2}\,t, \quad y(0) = y_0$. Determine o valor de y_0 para o qual a solução toca, mas não cruza, o eixo t.

18. Seja $y = y_1(t)$ uma solução de

$$y' + p(t)\,y = 0,$$

e seja $y = y_2(t)$ uma solução de

$$y' + p(t)\,y = g(t).$$

Mostre que $y = y_1(t) + y_2(t)$ também é solução da segunda equação.

3 Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem

Uma equação linear de segunda ordem mais geral é da seguinte forma

$$y'' + p(t)\ y' + q(t)\ y = g(t), \tag{62}$$

onde as funções $p(t)$, $q(t)$ e $g(t)$ serão assumidas contínuas num intervalo aberto I. Dizemos que uma equação linear de segunda ordem é homogênea se $g(t) = 0$, para todo $t \in I$, ou seja,

$$y'' + p(t)\ y' + q(t)\ y = 0. \tag{63}$$

Um exemplo de equação homogênea muito importante que aparece em problemas de mecânica e circuitos elétricos é aquela em que os seus **coeficientes são constantes**, ou seja, é da seguinte forma

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{64}$$

Exercício 3.1 *Sejam y_1 e y_2 duas soluções de (62), então mostre que para quaisquer constantes c_1 e c_2, $y = c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t)$ também será solução de (63).*

Solução. Note que em vista da linearidade da derivação podemos escrever

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= (c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(y_1'' + p\, y_1' + q\, y_1) + c_2(y_2'' + p\, y_2' + q\, y_2) \\ &= c_1\, 0 + c_2\, 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usamos o fato que y_1 e y_2 são soluções da equação (63). ■

O Exercício 3.1 nos leva a concluir que o conjunto solução de (63) é um **espaço vetorial** e, como veremos, a sua **dimensão é** 2. Para provarmos isto teremos que introduzir o conceito de **independência linear** de duas funções, bem como enunciar o **Teorema de Existência e Unicidade** de soluções de equações lineares de segunda ordem, o que feito a seguir.

Teorema 3.1 (*Existência e Unicidade*) *Sejam $p(t)$ e $g(t)$ contínuas num intervalo aberto I contendo o ponto t_o, então o problema de valor inicial*

$$y'' + p(t)\ y' + q(t)\ y = g(t), \qquad y(t_o) = y_o, \quad y'(t_o) = y_o', \tag{65}$$

possui uma e exatamente uma solução $y = \phi(t)$, a qual existe em todo o intervalo I.

Definição 3.1 *Dadas duas funções f e g, diferenciáveis num intervalo aberto I, A função $W(f,g)(t) \equiv f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$ é chamada de Wronskiano de f e g.*

Teorema 3.2 *(Abel) Se y_1 e y_2 são duas soluções de (63) em I, então,*

$$W(y_1, y_2)(t) = ce^{-\int p(t)dt}, \tag{66}$$

onde c é uma constante determinada a partir de y_1 e y_2. Logo, ou $W(y_1, y_2)(t) \equiv 0$ em I ou $W(y_1, y_2)(t)$ nunca se anula em I.

Prova. Como y_1 e y_2 são duas soluções de (63) em I, então,

$$y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t) = 0 \tag{67}$$

$$y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t) = 0. \tag{68}$$

Multiplicando (67) por $y_2(t)$ e subtraindo o resultado de (68) multiplicada por $y_1(t)$, temos a seguinte equação diferencial para $W(t)$

$$W' + p(t)W = 0,$$

cuja solução é dada por (66). ∎

Do Teorema de Abel, para saber se o Wronskiano de duas soluções é diferente de zero em algum ponto t_o em I, basta verificarmos se ele é diferente de zero em outro ponto qualquer de I.

Em geral, se f e g forem duas funções diferenciáveis quaisquer, pode acontecer que $W(f,g)(t)$ oscile, ou seja, o seu sinal mude, à medida em que variamos t. Por exemplo, se $f(t) = t^2$ e $g(t) = 1 + t$, então, $W(f,g)(t) = -t(t+2)$.

Definição 3.2 *Dizemos que um par de soluções y_1 e y_2 de* (63) *formam um conjunto fundamental de soluções em I, se $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ em I.*

Exercício 3.2 *Mostre que $y_1 = t^{1/2}$ e $y_2 = t^{-1}$ formam um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial*

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \quad t > 0.$$

Note que se y_1 e y_2 formarem um conjunto fundamental de soluções de (63), então, toda solução de (63) é uma combinação linear das mesmas; ou seja, a solução geral de (63) é

$$y = c_1\, y_1 + c_2\, y_2.$$

Para mostrarmos isso, suponha que y seja uma solução de (63). Pelo Teorema de Existência e Unicidade, o intervalo I faz parte do seu domínio e ela é completamente caracterizada pelo se valor e de sua derivada num ponto t_o qualquer em I. Dado t_o em I, sejam $y(t_o) = y_o$ e $y'(t_o) = y'_o$, como $W(y_1, y_2)(t_o) \neq 0$, podemos encontrar c_1 e c_2 tais que o sistema

$$\begin{aligned} c_1 y_1(t_o) + c_2 y_2(t_o) &= y_o \\ c_1 y'_1(t_o) + c_2 y'_2(t_o) &= y'_o \end{aligned}$$

tenha solução. Para esta escolha de c_1 e c_2, defina a função $w(t) = c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t)$, a qual é solução da equação (63), por ser uma combinação linear de soluções da mesma; além disso, pela escolha de c_1 e c_2, w satisfaz às seguintes condições: $w(t_o) = y_o$ e $w'(t_o) = y'_o$ e, por unicidade, segue-se que $w = y$. Portanto, duas soluções fundamentais quaisquer de (63) **geram** o espaço solução de (63).

A pergunta que podemos fazer é a seguinte: será que é sempre possível encontrarmos duas fundamentais de (63)? A resposta a esta pergunta também segue-se do Teorema de Existência e Unicidade. De fato, em vista deste teorema, dado qualquer $t_o \in I$, existem soluções de y_1 e y_2 de (63) em I, satisfazendo às seguintes condições iniciais:

$$y_1(t_o) = 1 \ e \ y'_1(t_o) = 0, \quad y_2(t_o) = 0 \ e \ y'_1(t_o) = 1. \tag{69}$$

Note que $W(y_1, y_2)(t_o) = 1 \neq 0$ e pelo Teorema de Abel, $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ em I, portanto, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções de (63) em I.

A seguir, iremos definir o conceito de independência linear e, do Teorema 3.3, segue-se que se y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções em I, então, elas são linearmente independentes em I e, com isso, concluiremos que a dimensão do espaço solução de (63) é 2 e que y_1 e y_2 formam um **base** para o mesmo.

Definição 3.3 *Dizemos que duas funções f e g são* **linearmente dependentes** *($l.d$) em I se a equação*

$$k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0, \quad t \in I, \tag{70}$$

admite solução não trivial, ou seja, pelo menos uma das constantes k_1 ou k_2 for diferente de zero. Se a única solução da equação acima for a trivial $k_1 = 0 = k_2$, dizemos que as duas funções são **linearmente independentes** *(l.i) em I.*

Note que duas funções são linearmente dependentes num intervalo I se uma for um múltiplo escalar da outra em I.

Teorema 3.3 *Se f e g forem diferenciáveis em I e $W(f,g)(t_o) \neq 0$ para algum t_o em I, então, f e g são linearmente independentes em I. Além disso, se f e g forem l.d em I, então, $W(f,g)(t) \equiv 0$ em I.*

Prova. Considere a equação

$$k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0, \quad t \in I. \tag{71}$$

Tomando a derivada de (71) em relação à t, temos

$$k_1 f'(t) + k_2 g'(t) = 0, \quad t \in I. \tag{72}$$

Como as equações (71) e (72) valem para todo $t \in I$, em particular elas valem em t_o e teremos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} k_1 f(t_o) + k_2 g(t_o) &= 0 \\ k_1 f'(t_o) + k_2 g'(t_o) &= 0 \end{aligned}$$

o qual só admite a solução trivial, pois, por hipótese, $W(f,g)(t_o) \neq 0$. ∎

Teorema 3.4 *y_1 e y_2 são duas soluções l.d de (63) em I se, e somente se, $W(y_1,y_2)(t) = 0$, $\forall t \in I$.*

Prova. Sejam y_1 e y_2 duas soluções de (63) em I. Como y_1 e y_2 são diferenciáveis em I, se y_1 e y_2 forem l.d em I, então, pelo Teorema 3.3, $W(y_1,y_2)(t) = 0$ em I.

Por outro lado, se $W(y_1,y_2)(t) = 0$ em I, tome $t_o \in I$, então $W(y_1,y_2)(t_o) = 0$, portanto, o sistema

$$\begin{aligned} c_1 y_1(t_o) + c_2 y_2(t_o) &= 0 \\ c_1 y_1'(t_o) + c_2 y_2'(t_o) &= 0 \end{aligned}$$

admite uma solução não-trivial (c_1, c_2). Com estes valores de c_1 e c_2, defina $\phi(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$. Então, ϕ é solução do problema de valor inicial $y'' + py' + qy = 0$, $\phi(t_o) = 0 = \phi'(t_o)$ e do Teorema de Existência e Unicidade, segue-se que $\phi(t) \equiv 0$ em I, ou seja, a equação $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0$, para todo $t \in I$ admite solução não trivial, logo, y_1 e y_2 são l.d. ∎

Observação 3.1 *Pelo Teorema 3.4 e do Teorema de Abel, duas soluções y_1 e y_2 de (63) são l.i em I se, e somente se, $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.*

De fato, do Teorema 3.4 se y_1 e y_2 são l.d em I, então, $W(y_1, y_2)(t) = 0$ em I, logo, se y_1 e y_2 são l.i em I, então, $W(y_1, y_2)(t_o) \neq 0$, para algum $t_o \in I$, portanto, pelo Teorema de Abel $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ em I. Por outro lado, se $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ em I, também pelo Teorema 3.4, y_1 e y_2 são l.i. ∎

Tendo vista os resultados acima, concluimos que um par de soluções y_1 e y_2 de (63) formam um conjunto fundamental de soluções de (63) em I se, e somente se, elas forem linearmente independentes em I. Portanto, é muito importante que aprendamos como encontrar duas soluções linearmente independentes de (63).

3.1 Redução de Ordem

Suponha que seja conhecida, digamos por inspeção, uma solução y_1, da equação homogênea (63). A pergunta é a seguinte: como encontrar uma segunda solução de (63), y_2, tal que y_1 e y_2 sejam l.i em I ?

O método descrito a seguir, chamado de **redução de ordem**, nos permite encontrar uma segunda solução de (63) a partir de uma solução conhecida da mesma, y_1, de modo que y_1 e y_2 sejam l.i. Ele transforma o problema de encontrar uma segunda solução y_2 de (63) à resolução de uma equação de segunda ordem a qual é redutível a uma equação linear de primeira ordem, daí o nome.

O método da redução de ordem consiste em encontrarmos y_2 da forma

$$y_2(t) = u(t) y_1(t), \tag{73}$$

onde a função será determinada.

De (73), temos

$$\begin{aligned} y_2' &= u'y_1 + uy_1' && (74) \\ y_2'' &= u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''. && (75) \end{aligned}$$

Substituindo (73), (74) e (75) em (63) e lembrando que y_1 é solução desta equação, temos

$$\begin{aligned} 0 &= y_2'' + p\,y_2' + q\,y_2 \\ &= (y_1u'' + 2u'y_1' + uy_1'') + p(u'y_1 + uy_1') + q\,uy_1 \\ &= u''y_1 + (2y_1' + py_1)u' + (y_1'' + py_1' + qy_1) \\ &= u''y_1 + (2y_1' + py_1)u', \end{aligned}$$

portanto, u satisfaz à seguinte equação diferencial

$$u''y_1 + (2y_1' + py_1)u' = 0,$$

que pode ser escrita como a seguinte equação linear de primeira ordem (que neste caso também é de variáveis separáveis)

$$v' + \frac{2y_1' + py_1}{y_1}\ v = 0 \qquad (76)$$

onde $v = u'$.

Observação 3.2 *Se mantivermos as duas constantes de integração que resultam na obtenção de u, então, $y = u\,y_1$ nos dará a solução geral de (63). Além disso, de (76),*

$$v(t) = \frac{K}{y_1^2}\ e^{-P(t)}, \quad K \neq 0,$$

onde $P'(t) = p(t)$. Portanto,

$$W(y_1, uy_1) = K\ e^{-P(t)} \neq 0,$$

logo, y_1 e $y_2 = uy_1$ são linearmente independentes.

Exemplo 3.1 *Use o método de redução de ordem para encontrar uma segunda solução da equação diferencial*

$$(x-1)y'' - xy' + y \;=\; 0, \quad x > 1, \qquad (77)$$

sabendo-se que $y_1(x) = e^x$ é uma solução da mesma.

Solução. Note que se fizermos $y_1(x) = e^x$, como $p(x) = -\frac{x}{x-1}$, de (76) teremos

$$v' + (2 - \frac{x}{x-1})\ v = 0,$$

ou seja, separando as variáveis,

$$\frac{dv}{v} = -\left(2 - \frac{x}{x-1}\right) dx = \left(-1 + \frac{1}{x-1}\right) dx$$

cuja solução geral é

$$v = K(x-1)e^{-x}.$$

Logo, fazendo integração por partes, temos $u = \int v dx = -Kxe^{-x} + C_1 = C_2xe^{-x} + C_1$, onde $C_2 = -K$. Portanto, $y = C_1e^x + C_2x$, que é a solução geral da equação diferencial (77). Disso, concluimos que uma possível escolha para y_2 é $y_2(x) = x$.

Exercício 3.3 *Usando o procedimento do Exemplo 3.1, encontre a solução geral de*

$$t^2y'' - 4ty' + 6y \quad = \quad 0, \quad t > 0, \tag{78}$$

sabendo-se que $y_1(t) = t^2$ *é uma solução da mesma.*

3.2 Equações com Coeficientes Constantes

Dada a equação

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{79}$$

tentaremos uma solução da mesama da forma

$$y = e^{\lambda t} \tag{80}$$

onde λ é uma constante a ser determinada.

Substituindo (80) em (79), conclui-se que λ deve satisfazer à seguinte equação do segundo grau

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \tag{81}$$

chamada de **equação característica** de (79). Temos que considerar três casos possíveis:

(I) $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac > 0}$, neste caso temos duas raízes reais distintas

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

o que nos dá duas soluções distintas $y_1 = e^{\lambda_1 t}$ e $y_2 = e^{\lambda_2 t}$.

Exercício 3.4 *Mostre que* $W(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}) = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} \neq 0.$

Segue-se do Exercício 3.4 que a solução geral de (63) é

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.2 *Resolva o seguinte problema de valor inicial*

$$y'' - y' - 2y \;=\; 0, \qquad y(0) = 1,\; y'(0) = 1. \tag{82}$$

Solução. Note que a equação característica de (82) é $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$. Assim, a solução geral será

$$y = c_1\, e^{-t} + c_2\, e^{2t}.$$

Queremos que $1 = y(0) = c_1 + c_2$ e $1 = y'(0) = -c_1 + 2c_2$, portanto, a solução do problema de valor inicial é $y = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t}$.

(II) $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac = 0}$, neste caso temos duas raízes reais iguais

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a},$$

e o método acima nos dá uma solução $y_1 = e^{-b/2a\; t}$.

Como encontrar uma segunda solução y_2 tal que y_1 e y_2 sejam l.i ?

Quando descrevemos o método da redução de ordem na Seção 3.1 tudo foi geral, agora votemos ao caso particular da equação (79). Neste caso,

$$p = \frac{b}{a} \quad e \quad y_1 = e^{-b/2a\; t},$$

o que nos leva à seguinte equação

$$v' = 0$$

logo, $v = k_1$, portanto, $u' = v = k_1$, ou seja, $u = k_1 t + k_2$. Podemos tomar $k_1 = 1$ e $k_2 = 0$ (ou outra escolha de k_1 e k_2, desde que $k_1 \neq 0$). Com isso obtemos uma segunda solução $y_2 = t y_1 = t e^{-b/2a\; t}$.

Exercício 3.5 *Mostre que* y_1 *e* y_2 *são l.i, ou seja,* $W(e^{-b/2a\; t}, te^{-b/2a\; t}) = e^{-\frac{b}{a}t} \neq 0.$

Portanto, do Exercício 3.5, a solução geral será portanto,

$$y = (c_1 + c_2\, t)\, e^{-b/2a\; t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.3 *Resolva o seguinte problema de valor inicial*

$$y'' + 2y' + y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -1. \tag{83}$$

Solução. Note que a equação característica de (83) é $\lambda^2+2\lambda+1 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Assim a solução geral será

$$y = e^{-t}\,(c_1 + c_2\, t)\,.$$

Queremos que $1 = y(0) = c_1$ e $-1 = y'(0) = c_1 + c_2$, portanto, a solução do problema de valor inicial é $y = e^{-t}\,(1 - 2\,t)$.

(III) $\mathbf{\Delta < 0}$, neste caso temos duas raízes complexas distintas $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_1 = \alpha - i\beta$ onde $\alpha = -\frac{b}{2a}$ e $\beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} \neq 0$.

Como $e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha t}\,(cos(\beta t) + i\, sen(\beta t))$ e $e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha t}\,(cos(\beta t) - i\, sen(\beta t))$ são soluções de (79), então

$$\frac{e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}}{2} = e^{\alpha t} cos(\beta t)$$

e

$$\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{2i} = e^{\alpha t} sen(\beta t),$$

também serão soluções de (79), com a vantagem delas serem funções reais.

Exercício 3.6 *Mostre* $W(e^{\alpha t}cos(\beta t), e^{\alpha t}sen(\beta t)) = \beta e^{2\alpha t} \neq 0.$

Do Exercício 3.6, a solução geral de (79) é

$$y = e^{\alpha t}\,(c_1\ \cos(\beta t) + c_2\ sen(\beta\ t))\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.4 *Resolva o seguinte problema de valor inicial*

$$y'' + 4y = 0, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \tag{84}$$

Solução. Note que a equação característica de (84) é $\lambda^2 + 4 = 0$, cujas raízes são $\lambda = \pm 2\,i$, logo, $\alpha = 0$ e $\beta = 2$. Assim a solução geral será

$$y = c_1\ \cos(2t) + c_2\, sen(2t).$$

Queremos que $0 = y(0) = c_1$ e $1 = y'(0) = 2c_2$, portanto, a solução do problema de valor inicial é $y = \frac{1}{2} sen\,(2t)$.

Exemplo 3.5 *Resolva o seguinte problema de valor inicial*

$$y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \tag{85}$$

Solução. Note que a equação característica de (85) é $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$, cujas raízes são $\lambda = -2 \pm i$, logo, $\alpha = -2$ e $\beta = 1$. Assim a solução geral será

$$y = e^{-2t} \left(c_1\, cos(t) + c_2\, sen(t) \right).$$

Queremos que $1 = y(0) = c_1$ e $0 = y'(0) = -2c_1 + c_2$, portanto, a solução do problema de valor inicial é $y = e^{-2t} \left(cos(t) + 2\, sen(t) \right)$.

3.3 As Equações de Euler

As equações de Euler são equações da seguinte forma

$$\alpha x^2 y'' + \beta x y' + \gamma y = 0, \tag{86}$$

onde α, β e γ são constantes ($\alpha \neq 0$).

Fazendo uma mudança na variável independente,

$$x = e^t \quad \text{ou } t = \ln x \tag{87}$$

temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{1}{x} = \frac{dy}{dt}\ e^{-t} \tag{88}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\ e^{-t}\right)\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dt^2}\ e^{-t} - \frac{dy}{dt}\ e^{-t}\right)\ e^{-t} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right), \tag{89}$$

substituindo (88) e (89) em (86), temos a seguinte equação com coeficientes constantes

$$\alpha\ \frac{d^2y}{dt^2} + (\beta - \alpha)\ \frac{dy}{dt} + \gamma\ y = 0, \tag{90}$$

que já vimos como resolver. Uma vez encontrada a solução $y = \phi(t)$ de (90), a solução desejada será $\phi(\ln x)$.

Exemplo 3.6 *Encontre a solução geral da equação*

$$x^2y'' + xy' + y = 0, \quad x > 0. \tag{91}$$

Solução. Neste caso, $\alpha = \beta = \gamma = 1$, portanto, após a mudança de variáves $t = e^x$, a equação acima é transformada em

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0,$$

cuja solução geral é $y = c_1 \cos(t) + c_2 \; sen(t)$, logo, a solução geral da equação (91) é

$$y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \; sen\,(\ln x).$$

■

3.4 Equações Não-Homogêneas

O exercício abaixo nos dá a estrutura da solução geral de uma equação linear não-homogênea de segunda ordem e sua demonstração ficará a cargo do leitor.

Exercício 3.7 *Mostre que se y e Y_p são duas soluções quaisquer da equação não-homogênea*

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = g(x), \tag{92}$$

então, a diferença $y - Y_p$ é solução da equação homogênea associada

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0. \tag{93}$$

Portanto, se y_1 e y_2 forem duas soluções l.i de (93), então, $y - Y_p = c_1y_1 + c_2y_2$, ou seja,

$$y = c_1\,y_1 + c_2\,y_2 + Y_p. \tag{94}$$

Do Exercício 3.7, segue-se que conhecendo-se uma solução particular, Y_p, de (92) e a solução geral da equação homogênea (93), então, toda solução de (92) é dada por (94), ou seja, a solução geral de (92) é dada por (94).

Exemplo 3.7 *Sabendo-se que $Y_p = 1$ é uma solução*

$$y'' + y = 1, \tag{95}$$

encontre a solução geral da mesma.

Solução. Vimos que solução geral da equação homogênea associada a (95) é $c_1 \cos t + c_2\, sen\, t$, logo, a solução geral de (95) é

$$y = c_1 \cos t + c_2\, sen\, t + 1.$$

3.5 O Método dos Coeficientes a Determinar

Uma classe importante de equações não-homogêneas é da forma

$$ay'' + by' + cy = g(t), \tag{96}$$

onde

$$g(t) = e^{\alpha t} P_n(t)\ cos(\beta t) \quad ou \quad g(t) = e^{\alpha t} P_n(t)\ sen(\beta t), \tag{97}$$

onde $P_n(t)$ é um polinômio de grau n.

Para equação desta forma, a equação homogênea associada tem coeficientes constantes, portanto, sabemos como resolvê-la. Resta-nos encontrarmos uma solução particular de (96), o que será descrito a seguir.

O **método dos coeficientes a determinar** nos permite encontrar uma solução particular, Y_p, de uma equação não-homogênea do tipo (96) com $g(t)$ dado por (97) e tem a vantagem de ser puramente algébrico.

Este método dá a seguinte forma para uma solução particular

$$Y_p = t^s\ e^{\alpha t} \left(\left(A_o t^n + A_1 t^{n-1} + \ldots + A_n \right) cos(\beta t) + \left(B_o t^n + B_1 t^{n-1} + \ldots + B_n \right) sen(\beta t) \right) \tag{98}$$

onde $s = 0, 1$ ou 2 é o número de vezes que $\alpha + i\beta$ é raiz da equação característica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, da equação homogênea associada a (96). As constantes α e β são aquelas que aparecem na definição de $g(t)$ dada por (97). Sempre que não aparecer o fator exponencial, α será 0 e sempre que não aparecer o fator envolvendo o seno ou o cosseno, β será 0. Note que se $\alpha + i\beta$ for uma raiz da equação característica e $\beta \neq 0$, então, s será 1, visto que se $\alpha + i\beta$ for raiz da equação característica $\alpha - i\beta$ também será; pois, estamos assumindo que as constantes a, b e c são reais.

Exemplo 3.8 *Encontre uma solução particular de*

$$y'' + y = 1. \tag{99}$$

Solução. A equação acima tem como equação característica, $\lambda^2+1=0$, cujas raízes são $\lambda = 0 \pm i$. Note que $g(t) = 1$, portanto, $\alpha = 0 = \beta$ e $n = 0$, logo, $\alpha + i\beta = 0$ não é raiz da equação característica, portanto, $s = 0$. Neste caso $Y_p = A$, logo, $Y_p'' = 0$, substituindo estes valores em (99), temos, $A = 1$, portanto, $Y_p = 1$. ■

Exemplo 3.9 *Encontre uma solução particular de*

$$y'' + y = sen\, t. \tag{100}$$

Solução. Note que neste caso $g(t) = sen\, t$, portanto, $n = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, logo, $\alpha + i\beta = i$, como as raízes da equação característica $\lambda^2 + 1 = 0$ são $\pm i$, disso concluimos que $s = 1$ e

$$Y_p \;=\; t\,(A\, sen\, t + B\, cos\, t)\,, \tag{101}$$

portanto,

$$Y_p'' \;=\; 2A\, cos\, t - 2B\, sen\, t - At\, sen\, t - Bt\, cos\, t \tag{102}$$

Substituindo (101) e (102) em (100), temos

$$2A\cos\, t - 2B\, sen\, t = sen\, t,$$

logo, $2A = 0$ e $-2B = 1$, portanto, $A = 0$ e $B = -\frac{1}{2}$. Disso concluimos que

$$Y_p = -\frac{t}{2}\cos\, t.$$

■

Exercício 3.8 (*Princípio da Superposição.*) *Mostre que se Y_i for uma solução particular de*

$$y'' + p\,y' + q\,y = g_i \quad i = 1, \ldots, n, \tag{103}$$

então, $Y = Y_1 + \ldots, Y_n$ é uma solução particular de

$$y'' + p\,y' + q\,y = g_1 + \ldots + g_n. \tag{104}$$

Exemplo 3.10 *Encontre a solução geral da seguinte equação*

$$y'' + y = 1 + sen\, t.$$

Solução. Vimos que 1 é uma solução particular de $y'' + y = 1$ e que $-\frac{t}{2}\cos t$ é uma solução particular de $y'' + y = sen\, t$, logo,

$$Y_p = 1 - \frac{t}{2}\, cos\, t$$

será uma solução particular de $y'' + y = 1 + sen\, t$; portanto, a solução geral desta será

$$y = c_1\, cos(t) + c_2\, sen\, t + 1 - \frac{t}{2}\cos t.$$

Exemplo 3.11 *Determine a forma adequada de uma solução particular de*

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-t} + 2e^{-t}\ cos(t) + 4e^{-t}t^2\ sen(t),$$

Solução. Pelo Princípio da Superposição, a solução particular será da forma $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$ onde Y_i são soluções particulares de

$$y'' + 2y' + 2y = g_i,$$

onde $g_1 = 3e^{-t}$, $g_2 = 2e^{-t}\cos t$ e $g_3 = 4e^{-t}t^2\ sent$. Portanto, elo método dos coeficientes a determinar, temos

$$\begin{aligned} Y_1 &= Ae^{-t}, \\ Y_2 &= t\, e^{-t}\, (B\, cos(t) + C\, sen(t))\ \ e \\ Y_3 &= t\, e^{-t}\left(\left(D + Et + Ft^2\right) cos(t) + \left(G + Ht + It^2\right)\ sen(t)\right). \end{aligned}$$

Exercício 3.9 *Encontre os coeficientes A, B, C, D, E, F, G, H e I, do exemplo anterior.*

3.6 Variação de Parâmetros

O método da variação de parâmetros nos permite calcular uma solução particular da equação não-homogênea

$$y'' + p\, y' + q\, y = g, \tag{105}$$

a partir de duas soluções l.i, y_1 e y_2, da equação homogênea associada

$$y'' + py' + qy = 0.$$

A idéia do método consiste em encontrarmos uma solução particular da equação não-homogênea (105) da seguinte forma

$$y = y_1 u_1 + y_2 u_2 \tag{106}$$

onde as funções u_1 e u_2 deverão ser determinadas.

De (106), temos

$$y' = y_1' u_1 + y_2' u_2 + y_1 u_1' + y_2 u_2',$$

imporemos que

$$y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0, \tag{107}$$

logo,

$$y' = y_1' u_1 + y_2' u_2, \tag{108}$$

e de (108) teremos,

$$y'' = y_1'' u_1 + y_1' u_1' + y_2'' u_2 + y_2' u_2'. \tag{109}$$

Substituindo (106), (108) e (109) em (105) e lembrando que y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea associada a (105), temos

$$\begin{aligned} g &= y'' + py' + q \\ &= \left(y_1'' + py_1' + qy_1\right) u_1 + \left(y_2'' + py_2' + qy_2\right) u_2 + y_1 u_1' + y_2 u_2' \\ &= 0\, u_1 + 0\, u_2 + y_1 u_1' + y_2 u_2' \\ &= y_1 u_1' + y_2 u_2', \end{aligned}$$

logo,

$$y_1' u_1' + y_2' u_2' = g. \tag{110}$$

Portanto, em vista de (107) e (110), u_1 e u_2 são soluções do seguinte sistema

$$\begin{aligned} y_1 u_1' + y_2 u_2' &= 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' &= g \end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{-y_2\, g}{W(y_1, y_2)} \\ u_2' &= \frac{y_1\, g}{W(y_1, y_2)}. \end{aligned}$$

Assim, u_1 e u_2 são dados por

$$\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{-y_2\, g}{W(y_1, y_2)}\, dt \\ u_2 &= \int \frac{y_1\, g}{W(y_1, y_2)}\, dt. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$y = y_1 \int \frac{-y_2\, g}{W(y_1, y_2)}\, dt + y_2 \int \frac{y_1\, g}{W(y_1, y_2)}\, dt \tag{111}$$

nos dá uma solução particular (105), na verdade, se mantivermos cada uma das constantes que aparecem nas integrais acima, (111) nos dará a solução geral de (105).

Exemplo 3.12 *Encontre a solução geral de*

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^t. \tag{112}$$

Solução. A equação homogênea associada é

$$y'' - 5y' + 6y = 0,$$

tendo $y_1 = e^{2t}$ e $y_2 = e^{3t}$ como duas soluções linearmente independentes. Além disso, $W(y_1, y_2) = e^{5t}$, logo,

$$\begin{aligned} y &= e^{2t} \int \frac{-2e^t\, e^{3t}}{e^{5t}}\, dt + e^{3t} \int \frac{2e^{2t}\, e^t}{e^{5t}}\, dt \\ &= e^{2t}\left(2e^{-t} + c_1\right) + e^{3t}\left(-e^{-2t} + c_2\right) \\ &= c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + e^t, \end{aligned}$$

que é a solução geral de (112).

Se quiséssemos apenas uma solução particular de (112), poderíamos tomar, por exemplo, $Y = e^t$, mas poderíamos adicionar a esta qualquer solução da equação homogênea que o resultado também seria solução da equação não-homogênea, por exemplo, poderíamos ter tomado $Y = e^t - e^{2t} + 2e^{3t}$; neste caso, $-e^{2t} + 2e^{3t}$ será incorporado à solução geral da equação homogênea que aparece na solução geral da equação não-homogênea. ■

Exercício 3.10 *Encontre a solução geral de*

$$y'' + y = sen\, t. \tag{113}$$

Solução. vimos que $y_1 = \cos(t)$ e $y_2 = sen\, t$ são duas soluções linearmente independentes da equação homogênea associada a (113); além disso, $W(y_1, y_2) = 1$; portanto, pelo método da variação de parâmetros,

$$\begin{aligned} y &= \cos t \int -sen^2\, t\, dt + sen\, t \int sen\, t \cos t\; dt \\ &= -cos(t)\left(\frac{1}{2}\; t - \frac{1}{4}\; sen(2t) + K_1\right) + sen\, t\left(\frac{1}{2} sen^2 t + K_2\right) \\ &= -K_1 \cos t + K_2\; sen\, t - \frac{1}{2}\; t \cos\, t + \frac{1}{2}\; sen\, t \\ &= C_1 \cos\, t + C_2\; sen\, t - \frac{1}{2}\; t \cos\, t, \end{aligned}$$

fizemos $C_1 = -K_1$ e $C_2 = K_2 + \frac{1}{2}$, que é exatamente o que havíamos obtido antes pelo método dos coeficientes a determinar. Nas contas acima usamos duas vezes a identidade trigonométrica: $sen^2\, t = \frac{1}{2}\,(1 - \cos(2t))$.

Exercício 3.11 *Sabendo-se que* $y_1 = e^t$ *é solução da equação*

$$(t-1)y'' - ty' + y = 0, \quad t > 1, \tag{114}$$

encontre a solução geral de

$$(t-1)y'' - ty' + y = 1 + t, \quad t > 1. \tag{115}$$

Sugestão: Para resolver o problema acima, use o método da redução de ordem e encontre uma segunda solução, y_2, da equação homogênea (114), de modo que y_1 e y_2 sejam linearmente independentes. A seguir, use as funções obtidas y_1 e y_2 no método da variação de parâmetros para encontrar uma solução particular da equação (115), ou diretamente a solução geral da mesma, desde que sejam mantidas as duas constantes de integração, resultantes das duas integrais indefinidas que aparecem na fórmula (111).

Exercício 3.12 *Encontre a solução geral de*

$$t^2 y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 2t^3,$$

sabendo-se que $y_1 = t$ *é uma solução da equação homogênea.*

3.7 Aplicações

As equações lineares com coeficientes constantes modelam matematicamente importantes fenômenos físicos, nos restringiremos àquelas aplicações em vibrações mecânicas e elétricas.

3.7.1 Vibrações Mecânicas

A modelagem matemática das vibrações mecânicas resulta da Segunda Lei de Newton.

Imagine uma mola esteja com uma das suas extremidades presa verticalmente a um suporte e a outra acoplada a um corpo de massa m. Se liberarmos a mola lentamente até ela atingir o seu alongamento máximo, L, devido ao peso, mg, do corpo, ela ficará em repouso nesta posição: a força elástica da mola, F_e, e o peso se equilibram, ou seja,

$$F_e + mg = 0. \tag{116}$$

Dentro de um certo limite (pequenas deformações), segue-se da Lei de Hooke que a **força elástica** F_e **é proporcional à deformação da mola** e como esta é uma força que se opõe ao movimento, temos

$$F_e = -kL, \tag{117}$$

onde constante de proporcionalidade, $k > 0$, é chamada de constante elástica da mola. Portanto, de (116) e (117), temos

$$k = \frac{mg}{L}.$$

A nossa posição de referência será aquela em que a mola está equilibrada pelo seu peso, ou seja, está distendida de L e a tomaremos como $y = 0$. Imagine que afastemos o corpo de y_o desta posição e que o soltemos com uma velocidade inicial y_o'. Neste caso, em cada instante a mola estará alongada de $y(t) + L$, portanto a força elástica será

$$F_e = -k(y + L) = -ky - mg, \tag{118}$$

a velocidade será $(y + L)' = y'$ e a aceleração será $(y + L)'' = y''$.

Assumindo que a força de atrito, F_a, do meio no qual o corpo se mova seja proporcional à velocidade, $y'(t)$, do mesmo, como ela se opõe ao movimento, temos

$$F_a = -\gamma\, y', \tag{119}$$

onde a constante de proporcionalidade, γ, é chamada de coeficiente de atrito e é positiva. Podemos considerar um meio sem atrito como sendo aquele em que $\gamma = 0$.

Supondo que além das forças elástica e de atrito haja uma força externa, $g(t)$, da Segunda Lei de Newton, de (118) e (119), temos

$$my'' = mg + F_e + F_a + g(t) = -ky - \gamma\, y' + g(t), \tag{120}$$

o que nos leva ao seguinte problema de valor inicial

$$my'' + ky + \gamma\, y' = g(t), \quad y(0) = y_o\ ,\ y'(0) = y'_o. \tag{121}$$

Dizemos que **um movimento é livre** quando não há força externa atuando no corpo, ou seja, $g(t) \equiv 0$. Se $\gamma = 0$, dizemos que o **movimento é não-amortecido**.

I - Nas vibrações livres não-amortecidas, também chamado de movimento harmônico simples, temos

$$my'' + ky = 0 \quad ou \quad y'' + \omega_o^2\, y = 0, \tag{122}$$

onde

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

é chamada de **freqüência natural** do movimento.

Vimos que a solução geral de (122) é da forma

$$y = c_1\ cos(\omega_o t) + c_2\ sen(\omega_o t),$$

que também pode ser escrita como $y = R\ cos(\omega_o t - \delta)$, onde $c_1 = R\ sen\ \delta$, $c_2 = R\ cos\ \delta$, ou seja, $R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e $tg\ \delta = \frac{c_2}{c_1}$, as quantidades R e δ são denominadas de amplitude e ângulo de fase do movimento.

Define-se o **período** do movimento como

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

II - Nas Vibrações Livres Amortecidas, temos

$$my'' + \gamma y' + ky = 0, \tag{123}$$

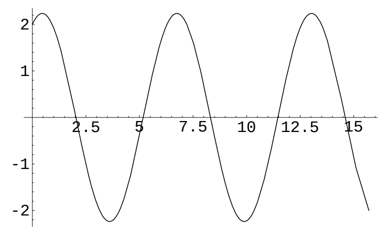

Figura 13: Vibração livre não-amortecida: $y'' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$; ou seja, $y(t) = 2\,\cos t + sen\, t$.

cujas raízes da equação característica são dadas por

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m} = \frac{\gamma}{2m}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4km}{\gamma^2}}\;\right).$$

Se $1 - \frac{4km}{\gamma^2} > 0$, temos duas **raízes reais distintas e negativas**, e a solução geral será da forma

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

e dizemos que o **amortecimento é super-crítico**.

Se $1 - \frac{4km}{\gamma^2} = 0$, temos duas **raízes reais iguais** e a solução geral será da forma

$$y = (c_1 + c_2\, t)\, e^{-\gamma t/2m},$$

e dizemos que o **amortecimento é crítico**.

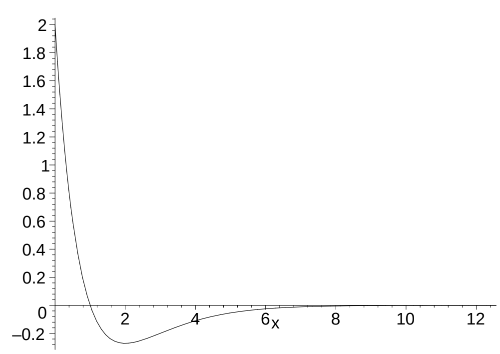

Figura 14: Amortecimento crítico: $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 2$ e $y'(0) = -4$; ou seja, $y = (2 - 2t)\, e^{-t}$.

Nos dois casos acima, independente das constantes c_1 e c_2, a solução tende a zero quando $t \to \infty$.

Se $1 - \frac{4km}{\gamma^2} < 0$, as raízes da equação característica serão complexas conjugadas e solução geral será da forma

$$y = e^{-\gamma t/2m}\,(c_1\ cos\,\mu t + c_2\,sen\ \mu t) = R\ e^{-\gamma t/2m}\,cos(\mu t - \delta),$$

onde $\mu = \frac{\sqrt{\frac{4km}{\gamma^2}-1}}{2m} > 0$ é chanda de **quase freqüência**. Neste caso a amplitude do sistema diminui quando t cresce e o movimento é chamado de **vibração amortecida**.

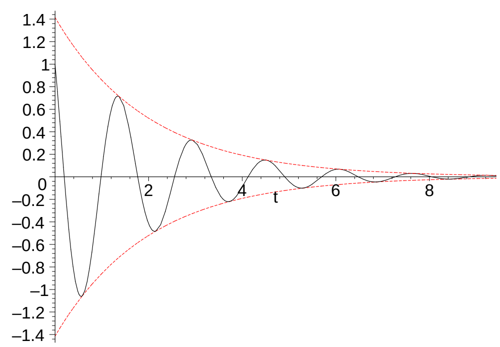

Figura 15: Vibração amortecida: $y'' + y' + \frac{65}{4}y = 0$, $y(0) = 1$ e $y'(0) = -4.5$; ou seja, $y = e^{-0.5t}\,(\cos(4t) - sen\,(4t))$.

A seguir vamos comparar este movimento com o movimento não-amortecido.

Note que para pequenos valores de γ, $\frac{\mu}{\omega_o} = \left(1 - \frac{\gamma^2}{4km}\right)^{1/2} \approx 1 - \frac{\gamma^2}{8km}$, o que mostra que o atrito tem o efeito de reduzir o valor da freqüência de oscilação.

III - Nas Vibrações Forçadas não amortecidas, vamos nos restringir ao caso em que a força externa é periódica e temos

$$my'' + ky = F_o\ cos\,\omega t,$$

cuja solução geral é a soma de uma solução particular da mesma (que pode ser obtida através do método dos coeficientes a determinar) com a solução geral da equação homogênea associada e será da forma $y = c_1\ \cos\,\omega_o t + c_2\ sen\,\omega_o t + \frac{F_o}{m(\omega_o^2-\omega^2)}\ \cos\ \omega t$, $\omega \neq \omega_o$. Em particular, se $y(0) = 0 = y'(0)$, temos $c_2 = 0$ e $c_1 = -\frac{F_o}{m(\omega_o^2-\omega^2)}$. Portanto,

$$y = \frac{F_o}{m(\omega_o^2 - \omega^2)}\,(cos\ \omega t - cos\ \omega_o t) = \frac{2F_o}{m(\omega_o^2 - \omega^2)}\ sen\left(\frac{(\omega_o - \omega)t}{2}\right) sen\left(\frac{(\omega_o + \omega)t}{2}\right).$$

Se $|\omega_o - \omega|$ for pequeno, então $\omega_o + \omega$ será muito maior que $|\omega_o - \omega|$; em conseqüência, $sen\left(\frac{(\omega_o+\omega)t}{2}\right)$ oscilará muito mais rapidamente $sen\left(\frac{(\omega_o-\omega)t}{2}\right)$. Assim, a oscilação será rápida com freqüência $\frac{(\omega_o+\omega)}{2}$, mas com uma amplitude senoidal variando lentamente, $\frac{2F_o}{m(\omega_o^2-\omega^2)}\ sen\left(\frac{(\omega_o-\omega)t}{2}\right)$. Tal fenômeno é chamado de **batimento**.

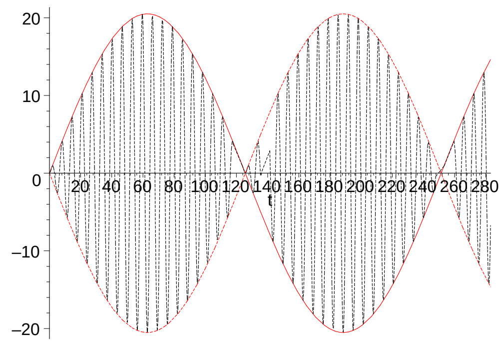

Figura 16: Batimento: $y'' + y = 0.5\ cos(0.95\,t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$; ou seja, $y = \frac{2}{0.0975}\,sen\,(0.025\,t)\,sen\,(0.975\,t)$.

Quanto $\omega = \omega_o$, o método dos coeficientes a determinar nos dá uma solução particular $\frac{F_o}{2m\omega_o}\,t\ sen(\omega_o t)$, portanto, a solução geral é da forma $y = c_1\cos(\omega_o t) + c_2\ sen(\omega_o t) + \frac{F_o}{2m\omega_o}\,t\ sen\,(\omega_o t)$. O movimento torna-se ilimitado quando $t \to \infty$ e dizemos que ocorre o fenômeno de **ressonância**.

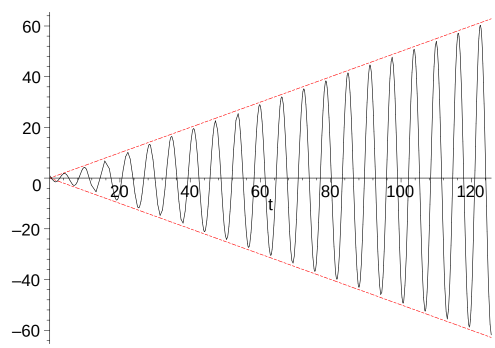

Figura 17: Ressonância: $y'' + y = sen\,t$, $y(0) = 1 = y'(0)$; ou seja, $y = \cos t - 1.5\,sen\,t - 0.5\,t\cos t$.

3.7.2 Vibrações Elétricas

Neste contexto de vibrações elétricas, a Segunda Lei de Kirchhoff é equivalente à Segunda Lei de Newton em problemas de mecânica. Ela diz que **Em um circuito fechado, a tensão aplicada é igual a soma das quedas de tensão no resto do circuito**. Em particular, no circuito RLC em série, mostrado na Figura 18, formado por um resistor, um indutor e um capacitor, nos quais as quedas de tensão são RI, $L\frac{dI}{dt}$ e $\frac{Q}{C}$, respectivamente, com R, L, Q e C, a resistência do resistor, a indutância do indutor e carga e capacitância do capacitor, respectivamente. A quantidade $I = \frac{dQ}{dt}$ é a corrente que circula no circuito. Portanto, no circuito RLC com uma tensão aplicada $e(t)$, temos

$$LI' + RI + \frac{Q}{C} = e(t)$$

ou ainda, em termos da carga Q,

$$L\,Q'' + R\,Q' + \frac{Q}{C} = e(t),$$

sujeito às condições iniciais $Q(t_o) = Q_o$ e $Q'(t_o) = I(t_o) = I_o$.

Note a semelhança desta equação com aquela que descreve um sistema massa-mola: a indutância, a resitência e o inverso da capacitância, são os correspondentes da massa, coeficiente de atrito e constante elástica da mola, respectivamente; a carga corresponde à posição.

Figura 18: Circuito RLC em série.

3.8 Exercícios Adicionais

1. Determine, sem resolver a equação, o maior intervalo dentro do qual o problema de valor inicial

$$(x^2-3)y'' + xy' + \frac{\ln x}{x-0.5}\,y = 0, \quad y(1) = \sqrt{2},\ y'(1) = \pi$$

tem, com certeza, uma solução única.

2. Considere a equação

$$y'' + 2b\,y' + y = 0,$$

b é uma constante real.

(a) Quais são as possíveis soluções gerais da equação acima em função do valor de b?

(b) Para quais valores de b temos $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ independente das condições iniciais?

3. Considere a equação

$$4y'' + a\,y' + (a-4)\,y = 0,$$

onde b é uma constante real.

(a) Para qual faixa de valores de λ teremos $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$?

(b) Usando λ igual ao número de letras de seu primeiro nome, obtenha a solução geral $y(t)$.

Nos exercícios $4-7$, resolva os probemas de valores iniciais propostos.

4. $y'' - y' - 6\,y = 3\,e^{-t}$, $y(0) = 1$, $\;y'(0) = 0$.

5. $y'' - 4\,y' + 5\,y = \text{sen}\,(2t)$, $y(0) = 0$, $\;y'(0) = 0$.

6. $y'' + 5\,y' + 6\,y = 3\,t$, $y(0) = 0$, $\;y'(0) = 2$.

7. $y'' + 4y = t^2 + 3e^t$, $y(0) = 0$, $\;y'(0) = 0$.

8. Usando o método dos coeficientes a determinar, encontre, sem achar explicitamente os coeficientes, a expressão da solução geral da equação

$$y'' + 3y' + 2y = e^t(t^2+1)sen\,(2t) + 3e^{-t}\cos(t) + 4t\,e^{-t} + t^2.$$

9. Encontre a solução geral da equação $t^2\,y'' - 4\,t\,y' - 6y = 0$.

10. Encontre a solução geral da equação

$$t^2y'' - 3ty' + 4y = t^2\ln t, \quad t > 0.$$

Sugestão: A equação homogênea associada é de Euler.

11. Sem resolver a equação, encontre o Wronskiano de duas soluções da seguinte equação

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

onde ν é uma constante.

12. Sejam y_1 e y_2 são duas soluções da equação $y'' + p\,y' + q\,y = 0$, onde p e q são contínuas num intervalo I. Mostre que se y_1 e y_2 tiverem máximos ou mínimos num mesmo ponto $t_o \in I$, então, estas soluções são linearmente dependentes neste intervalo.

13. Sabendo-se que $y_1 = \cos(x^2)$ é uma solução da equação

$$xy'' - y' + 4x^3 y = 0, \quad x > 0$$

encontre a solução geral da mesma.

14. Sabendo-se que $y_1 = e^t$ é uma solução da equação homogênea associada a

$$(1-t)y'' + ty' - y = 2(t-1)^2 e^{-t}, \quad 0 < t < 1,$$

encontre a solução geral desta equação.

15. Usando o método de variação de parâmetros, determine a solução do problema de valor inicial

$$y'' + 5\,y' + 6\,y = t^2, \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 0.$$

16. Uma massa de 1 kg estica uma mola de 15 cm. Se a massa é puxada para baixo 7.5 cm adicionais e depois é solta, e se não há amortecimento, determine a posição y da massa em qualquer instante t. Encontre a freqüência , o período e a amplitude do movimento.

17. Uma mola é esticada 10 cm por uma força de 3 Newtons. Uma massa de 2 kg é pendurada na mola e presa a um amortecedor viscoso que exerce uma força de 3 Newtons quando a velocidade da massa é 5 metros por segundo. Se a massa é puxada de 5 cm para baixo de sua posição de equilíbrio e dada uma velocidade inicial para baixo de 10 cm por segundo, determine a sua posição em qualquer instante t.

4 Resolução de Equações Diferenciais via Séries de Potências

Os métodos até então vistos na resolução de equações diferenciais de segunda ordem são restritos a uma classe muito pequena: essencialmente às equações lineares quando as equações homogêneas associadas têm coeficientes constantes e a entrada g tem uma forma muito especial e para aquelas equações para as quais se conhece a priori uma solução da equações homogêneas associada. O método que iremos descrever nesta seção tem a vantagem de ser geral, embora a solução seja dada numa representação em séries de potências.

4.1 Revisão de Séries de Potências

Definição 4.1 *Dizemos que a série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{124}$$

é convergente se a seqüência $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ for convergente.

Mostra-se que é necessário que $\lim_n a_n = 0$ para que a série (124) convirja.

Exercício 4.1 (*A Série Geométrica.*) *Mostre que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q},$$

se $|q| < 1$.

Definição 4.2 *Dizemos que a série numérica* (124) *é* **absolutamente convergente** *se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ for convergente.*

Se uma série for absolutamente convergente ela é convergente, mas a recíproca é falsa.

Se uma série for convergente mas não for absolutamente convergente, dizemos que ela é **condicionalmente convergente**.

Teorema 4.1 (*Teste da Comparação.*) *Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries de termos não-negativos. Então: (i) se $a_n \leq b_n$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for convergente, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também é convergente; (ii) se $a_n \geq b_n$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for divergente, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também é divergente.*

Teorema 4.2 (*Teste da Razão ou Teste de D'Alembert.*) *Dada uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *suponha que* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *exista. Seja* L *este limite. Então:* (i) *a série é absolutamente convergente se* $L < 1$; (ii) *a série divergente se* $L > 1$; *o teste é inconclusivo se* $L = 1$.

Exemplo 4.1 *Mostra-se, por exemplo, pelo teste da integral, que a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

converge se $p > 1$ *e diverge se* $p \leq 1$.

Teorema 4.3 (*Séries Alternadas - Critério de Leibniz.*) *Seja* $\{a_n\}$ *uma seqüência de números reais não-negativos , tais que* $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$ *e* $\lim_n a_n = 0$. *Então, a série* $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ *converge.*

Exemplo 4.2 *Segue-se do Critério de Leibniz que a série* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ *é convergente.*

Definição 4.3 *Uma série de potências é uma série da forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_o)^n.$$

Dizemos que ela converge num ponto x *se a seqüência numérica* $s_m(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n(x - x_o)^n$ *convergir.*

Definição 4.4 *Dizemos que uma série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_o)^n$ *converge absolutamente num ponto* x *se a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x - x_o)|^n$ *for convergente.*

Exemplo 4.3 *Mostre que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$ *converge absolutamente se* $|x + 1| < 2$, *diverge se* $|x + 1| > 2$ *e quando* $|x + 1| = 2$, *ou seja,* $x = 1$ *ou* $x = -3$, *as séries numéricas são divergentes e condicionalmente convergente, respectivamente.*

Solução. Para x fixo defina $b_n = \frac{(x+1)^n}{n2^n}$ e considere a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Então,

$$l \equiv \lim_n \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{|x+2|}{2} \lim_n \frac{n}{n+1} = \frac{|x+2|}{2}$$

e pelo Teste da Razão segue-se que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge absolutamente se $|x + 1| < 2$, diverge se $|x+1| > 2$. Por outro lado, se $x = 1$ ou $x = -3$, temos as séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$, respectivamente, sendo que a primeira série diverge (veja Exemplo 4.1) e a segunda converge pelo Critério de Leibniz. ∎

Definição 4.5 *Existe um número não-negativo, ρ, tal que que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_o)^n$ seja absolutamente convergente para $|x - x_o| < \rho$ e diverge para $|x - x_o| > \rho$, tal número é chamado de* **raio de convergência da série***. O intervalo $|x - x_o| < \rho$ é chamado de* **intervalo de convergência** *da série.*

No Exemplo 4.3 o raio de convergência da série é $\rho = 2$ e o intervalo de convergência é o intervalo $(-3, 1)$.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_o)^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_o)^n$ são duas séries convergentes em $|x - x_o| < \rho$, então, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_o)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_o)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(x - x_o)^n$. Podemos formalmente fazer o produto de das duas séries $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_o)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_o)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_o)^n$, onde $c_n = a_o b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots, a_n b_o$. As novas séries obtidas acima são absolutamente convergentes em $|x - x_o| < \rho$. Também podemos formalmente fazer a divisão de duas séries quando a série que aparece no denominador não se anula em x_o.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_o)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_o)^n$, para todo x numa vizinhança de x_o, então, $a_n = b_n$, para todo n. Em particular, se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_o)^n = 0$ numa vizinhança de x_o, então, $a_n = 0$, para todo n.

Seja

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_o)^n, \quad |x - x_o| < \rho,$$

então, S é infinitamente diferenciável e suas derivadas podem ser obtidas derivando-se termo a termo a série que representa S. Além disso, os raios de convergência as séries obtidas por derivação termo a termo são os mesmos de S. Por exemplo,

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_o)^{n-1}, \\ S''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n(x - x_o)^{n-2}, \end{aligned}$$

e assim por diante.

Exercício 4.2 *Mostre que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_o)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1) a_{n+1}(x - x_o)^n \tag{125}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n(x - x_o)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2) a_{n+2}(x - x_o)^n \tag{126}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n(x - x_o)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_{n+1}(x - x_o)^n. \tag{127}$$

Solução. Note que se na série do lado esquerdo de (125) fizermos a mudança de variáveis $k = n-1$, então, temos $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_o)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}(x-x_o)^k$, como o nome do índice de soma é irrelevante, podemos voltar à variável antiga fazendo $k = n$; com isso, obtemos (125). De maneira análoga, se fizermos $k = n-2$ na série que aparece no lado esquerdo de (126), teremos $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_o)^{n-2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)a_{k+2}(x-x_o)^k$ e fazendo a mudança de variável $k = n$, temos (126). ■

Definição 4.6 *Dada uma função f infinitamente diferenciável numa vizinhança do ponto x_o, definimos a série de Taylor de f em torno de x_o como*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n.$$

Se a série de Taylor de f convergir para f numa vizinhança de x_o, dizemos que f é **analítica** *em x_o.*

Exercício 4.3 *Mostre que as séries de Taylor de e^x, $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ em torno de $x_o = 0$ são dadas por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$, respectivamente, e que os seus raios de convergências são infinito. Dado arbitrariamente $x_o \in \mathbb{R}$, mostre que estas funções são analíticas em x_o.*

Se f e g forem analíticas em x_o, então fg e $\frac{f}{g}$ $(g(x_o) \neq 0)$ também serão. Como os polinônios são funções analíticas, se P e Q são polinômios, então, $\frac{P}{Q}$ será analitica em todos os pontos x_o onde $Q(x_o) \neq 0$. Para tais pontos, mostra-se que o raio de convergência da série de Taylor de $\frac{P}{Q}$ é a distância de x_o ao zero de Q mais próximo de x_o. Por exemplo se $Q(x) = x^2+1$, então, suas raízes serão $\pm i$, logo os raios das séries de Taylor de $\frac{P}{Q}$ em torno de $x_o = 0$ e $x_o = 1$ são $\rho = 1$ e $\rho = \sqrt{2}$, respectivamente.

4.2 Resolução de Equações Diferenciais

Definição 4.7 *Dada a equação diferencial*

$$y'' + p(x)\ y' + q(x)\ y = 0, \tag{128}$$

se os coeficientes p, q e g forem analíticos em x_o, dizemos que x_o é um **ponto ordinário***; caso contrário, é um* **ponto singular**.

4.2.1 O Caso em que x_o é um Ponto Ordinário

Teorema 4.4 *Se x_o é um ponto ordinário de* (128)*, então a solução desta equação é*

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ (x - x_o)^n = a_1 \ y_1(x) + a_2 \ y_2(x),$$

onde os coeficientes a_o e a_1 são arbitrários, y_1 e y_2 são soluções em séries linearmente independentes e analíticas de (128). Além disso, os seus raios de convergências são pelo menos tão grande quando o menor dos raios de convergência de p, e g.

A seguir, veremos como usar este teorema para resolver uma equação simples:

$$y'' + y = 0. \tag{129}$$

Note que $p = 0$ e $g = 0$, logo, toda solução da equação acima é analítica em todos os pontos e os raios de convergência das séries de potências em torno de qualquer ponto é $\rho = \infty$. Vamos considerar $x_o = 0$, a série correspondente é da forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{130}$$

como precisamos de y'', derivando termo a termo a expressão acima, temos

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \ a_n x^{n-2} \tag{131}$$

substituindo (130) e (131) em (129), temos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \ a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \tag{132}$$

Tendo em vista (126), temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) \ a_{n+2} \ x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1) \ a_{n+2} + a_n) \ \ x^n = 0$$

e devemos ter $(n+2)(n+1) \ a_{n+2} + a_n = 0$, para todo $n \geq 0$, ou ainda,

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}, \quad n \geq 0, \tag{133}$$

A relação (133) é chamada de **relação de recorrência**. Dela segue-se que todos os a_n's com n par para serão proporcionais a a_o e todos os a_n's com n ímpar serão prorcionais a a_1. Além disso, temos as seguintes expressões para os coeficientes:

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_o}{2!} \\
a_3 &= -\frac{a_1}{3!} \\
a_4 &= -\frac{a_2}{3\ 4} = \frac{(-1)^2}{4!}\ a_o \\
a_5 &= -\frac{a_3}{4\ 5} = \frac{(-1)^2}{5!}\ a_1 \\
a_6 &= -\frac{a_4}{5\ 6} = \frac{(-1)^3}{6!}\ a_o \\
a_7 &= -\frac{a_5}{6\ 7} = \frac{(-1)^3}{7!}\ a_1 \\
&\vdots \\
a_{2n} &= \frac{(-1)^n}{(2n)}\ a_o \\
a_{2n+1} &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)}\ a_1.
\end{aligned}$$

Substituindo estes valores em (130), temos

$$y = a_o\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + a_1\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \equiv a_1\ y_1(x) + a_2\ y_2(x),$$

que é a solução geral de (129). Note que neste caso, podemos identificar y_1 e y_2 como as séries de Taylor em torno de 0 das funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, respectivamente. Em geral, não será possível identificar as séries y_1 e y_2 como nenhuma conhecida.

Exemplo 4.4 *Mostre que a solução em série de potências em torno de* $x_o = 0$ *de*

$$y'' - xy' - y = 0 \tag{134}$$

é dada por

$$y = a_o\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!!} + a_1\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!},$$

onde $(2n)!! = 2.4.6\ldots(2n)$ *e* $(2n+1)!! = 1.3.5.7\ldots(2n+1)$*; adotaremos a convenção que* $0!! = 1$.

Solução. Pelo Teorema 4.4, a solução da equação (134) é analítica em todos os pontos e o raio de convergência de suas séries de potências é ∞. Seja

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ x^n, \tag{135}$$

então, $y' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n \ x^{n-1}$, portanto,

$$xy' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n \ x^n = \sum_{n=0}^{\infty} na_n \ x^n, \tag{136}$$

substituindo (135), (136) e (126) em (134) e somando-se as séries, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)(n+2)a_{n+2} - (n+1)a_n\right) \ x^n = 0,$$

o que nos dá a seguinte relação de recorrência

$$a_{n+2} = \frac{1}{n+2} \ a_n, \quad n \geq 0,$$

da qual segue-se o resultado proposto neste exercício e deixamos para o leitor a conclusão do mesmo. ■

Exemplo 4.5 *A equação de Hermite é dada por*

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

onde λ é uma constante.

(a) *Encontre a relação de recorrência para a solução em série de potências em torno de $x_o = 0$*

(b) *Mostre que quando $\lambda = 2n$, n inteiro não-negativo, a equação admite polinômio como solução, tais polinômios são denominados polinômios de Hermite. Encontre as soluções polinomiais para os valores de $\alpha = 0, 2, 4, 6, 8$.*

Solução. Note que a equação deste exercício é algebricamente muito parecida com aquela do Exemplo 4.4. Imediatamente, encontramos que a relação de recorrência para os coeficientes é dada por

$$a_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 0,$$

da qual segue-se o ítem (a).

Note que da relação de recorrência temos,

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{\lambda}{2!} \ a_o = \frac{(0-\lambda)}{2!} \ a_o \\
a_3 &= \frac{2-\lambda}{3!} \ a_1 \\
a_4 &= \frac{4-\lambda}{3 \ 4} \ a_2 = \frac{(4-\lambda)(0-\lambda)}{4!} \ a_o \\
a_5 &= \frac{6-\lambda}{4 \ 5} \ a_3 = \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!} \ a_1 \\
a_6 &= \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)(0-\lambda)}{6!} \ a_o.
\end{aligned}$$

Em geral, para $n \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{(0-\lambda)(4-\lambda)(8-\lambda)\dots(4n-4-\lambda)}{(2n)!}\ a_o, \\ a_{2n+1} &= \frac{(2-\lambda)(6-\lambda)(10-\lambda)\dots(4n-2-\lambda)}{(2n)!}\ a_1, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y(x) &= a_o\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(0-\lambda)(4-\lambda)(8-\lambda)\dots(4n-4-\lambda)}{(2n)!}\ x^{2n}\right)+ \\ &+ a_1\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-\lambda)(6-\lambda)(10-\lambda)\dots(4n-2-\lambda)}{(2n+1)!}\ x^{2n+1}\right). \end{aligned}$$

Note que se $\lambda = 0$, então, $y_1(x) = 1$, se $\lambda = 2$, então, $y_2(x) = x$, se $\lambda = 4$, então, $y_1(x) = 1-2x^2$, se $\lambda = 6$, então, $y_2(x) = x - \frac{2}{3}\ x^3$, finalmente, se $\lambda = 8$, temos $y_1(x) = 1 - 4x^2 + \frac{4}{3}\ x^4$. Em geral se $\lambda = 2(2n)$, y_1 será um polinômio de grau $2n$ e se se $\lambda = 2(2n+1)$, y_1 será um polinômio de grau $2n+1$. ■

Exemplo 4.6 *A equação diferencial de Chebyshev é*

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0, \tag{137}$$

onde α é constante.

(a) Determine duas soluções linearmente independentes em séries de potências de x, para $|x| < 1$.

(b) Mostre que se $\alpha = n$, um inteiro nâo-negativo, então existe uma solução polinomial de grau n. Esses polinômios quando propriadamente normalizados são chamados de polinômios de Chebyshev.

(c) Encontre a solução polinomial para $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

Solução. Note que $p(x) = -\frac{x}{1-x^2}$ e $q(x) = \frac{\alpha^2}{1-x^2}$, são analíticas em todo os pontos. Fazendo-se $x_o = 0$, a solução será da forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ x^n,$$

onde o raio de convergência desta série é pelo menos 1. Segue-se que

$$\begin{aligned}
xy' &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n\ x^n = \sum_{n=0}^{\infty} na_n\ x^n, \\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}\ x^n \\
x^2y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n\ x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)na_n\ x^n.
\end{aligned}$$

Substituindo estas expressões na equação diferencial (137) e somando-se as séries, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)(n+2)a_{n+2} - (n-1)na_n - na_n + \alpha^2 a_n\right)\ x^n = 0,$$

daí, temos a relação de recorrência

$$a_{n+2} = \frac{(n-\alpha)(n+\alpha)}{(n+1)(n+2)}\, a_n, \quad n \geq 0. \tag{138}$$

De (138) segue-se que os coeficientes com índices pares serão todos proporcionais a a_o, enquanto que o coeficientes com índices ímpares serão proporcionais a a_1. Conseqüentemente, $y_1(x)$ será uma série onde aparecem apenas potências pares de x, enquanto que y_2 será uma série com potências ímpares de x. Além disso, se $\alpha = 2k$ onde k é um inteiro não-negativo, teremos $a_{2k+2} = 0$ e como um coeficiente com índice par é proporcional ao coeficiente com índice par anterior, segue-se que todos os coeficientes pares com índices maiores do que $2k+2$, também serão nulos, logo, y_1 será um polinômio de grau $2k$. De maneira análoga, se $\alpha = 2k+1$, então, y_2 será um polinômio de grau $2k+1$.

Da relação de recorrência, temos

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{\alpha^2}{2!}\ a_o = \frac{(0+\alpha)(0-\alpha)}{2!}\ a_o \\
a_3 &= \frac{1-\alpha^2}{6}\ a_1 = \frac{(1-\alpha)(1+\alpha)}{3!}\ a_1 \\
a_4 &= \frac{(2+\alpha)(2-\alpha)}{3\ 4}\ a_2 = \frac{(2+\alpha)(2-\alpha)(0+\alpha)(0-\alpha)}{4!}\ a_o \\
a_5 &= \frac{(3+\alpha)(3-\alpha)(1-\alpha)(1+\alpha)}{4\ 5}\ a_3 = \frac{(3+\alpha)(3-\alpha)(1-\alpha)(1+\alpha)(1-\alpha)(1+\alpha)}{5!}\ a_1 \\
&\ \vdots \\
a_{2n} &= \frac{((2n-2)-\alpha)((2n-2)+\alpha)\ \ldots\ (2+\alpha)(2-\alpha)(0+\alpha)(0-\alpha)}{(2n)!}\ a_o \\
a_{2n+1} &= \frac{((2n-1)-\alpha)((2n-1)+\alpha)\ \ldots\ (3+\alpha)(3-\alpha)(1+\alpha)(1-\alpha)}{(2n+1)!}\ a_1.
\end{aligned}$$

Das relações acima, segue-se que se $\alpha = 0$, então, $y_1(x) = 1$, se $\alpha = 1$, então, $y_2(x) = x$, se $\alpha = 2$, então, $y_1(x) = 1 - 2x^2$ e se $\alpha = 3$, então, $y_2(x) = x - \frac{4}{3}x^3$. ■

Exemplo 4.7 *A equação de Legendre é dada por*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0. \tag{139}$$

Note que $x_o = 0$ é um ponto ordinário da equação diferencial e a distância do zero de $x^2 - 1$ mais próximo de 0 é 1, logo, o raio de convergência da solução em série em torno de $x_o = 0$ é pelo menos 1.

(a) Mostre que se $\alpha = 2n$, a série y_1 reduz a um polinômio de grau $2n$. Encontre estes polinômios para os valores de $\alpha = 0, 2, 4$.

(b) Mostre que se $\alpha = 2n + 1$, a série y_2 reduz a um polinômio de grau $2n + 1$. Encontre estes polinômios para os valores de $\alpha = 1, 3, 5$.

Solução. Procedendo-se como no Exemplo 4.6, encontramos a seguinte relação de recorrência

$$a_{n+2} = \frac{n^2 - \alpha^2 + n - \alpha}{(n+1)(n+2)}\ a_n = \frac{(n - \alpha)(n + \alpha + 1)}{(n+1)(n+2)}\ a_n = 0, \quad n \geq 0. \tag{140}$$

Da relação de recorrência (140), segue-se que a série de potências de $y_1(x)$ possui apenas potências pares, enquanto que série de potências de $y_2(x)$ possui apenas potências ímpares. Além disso, se α for um inteiro não-negativo, digamos $\alpha = 2N$, então, $y_1(x)$ será um polinômio de grau $2N$ e se $\alpha = 2N + 1$, então, $y_2(x)$ será um polinômio de grau $2N + 1$. Portanto, se α for um inteiro não-negativo, uma das séries $y_1(x)$ ou $y_2(x)$ será um polinômio e outra será uma série completa.

Ainda da relação de recorrência, temos

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \frac{(0-\alpha)(1+\alpha)}{2!}\ a_o \\
a_3 &= \frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{3!}\ a_1 \\
a_4 &= \frac{(0-\alpha)(2-\alpha)(1+\alpha)(3+\alpha)}{4!}\ a_o \\
a_5 &= \frac{(1-\alpha)(3-\alpha)(2+\alpha)(\alpha+4)}{5!}\ a_1 \\
a_6 &= \frac{(0-\alpha)(2-\alpha)(4-\alpha)(1+\alpha)(3+\alpha)(5+\alpha)}{6!}\ a_o \\
a_7 &= \frac{(1-\alpha)(3-\alpha)(5-\alpha)(2+\alpha)(\alpha+4)(6+\alpha)}{7!}\ a_1 \\
&\vdots \\
a_{2n} &= \frac{(0-\alpha)(2-\alpha)(4-\alpha)\dots(2n-2-\alpha)(1+\alpha)(3+\alpha)(5+\alpha)\dots(2n-1-\alpha)}{(2n)!}\ a_o \\
a_{2n+1} &= \frac{(1-\alpha)(3-\alpha)(5-\alpha)\dots(2n-1-\alpha)(2+\alpha)(\alpha+4)(6+\alpha)\dots(2n-\alpha)}{(2n+1)!}\ a_1.
\end{aligned}
$$

Das relações acima temos os polinômios desejados. Além disso, seguem delas que

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(0-\alpha)(2-\alpha)(4-\alpha)\dots(2n-2-\alpha)(1+\alpha)(3+\alpha)(5+\alpha)\dots(2n-1-\alpha)}{(2n)!}\ x^{2n} \\
e & \\
y_2(x) &= x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\alpha)(3-\alpha)(5-\alpha)\dots(2n-1-\alpha)(2+\alpha)(\alpha+4)(6+\alpha)\dots(2n-\alpha)}{(2n+1)!}\ x^{2n+1}.
\end{aligned}
$$

Sabemos a priori que os raios de convergência das séries acima são pelo menos 1. Use o teste da razão e os calcule. ■

Exemplo 4.8 *Encontre o raio de convergência da solução em série de potências em torno de* $x_o = 0$ *da seguinte equação diferencial*

$$(1+x^2)y'' - 4xy' + y = 0.$$

Solução. Note que a relação de recorrência dos coeficientes da solução em série de potências $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é

$$a_{n+2} = -\ \frac{n(n-1)-4n+1}{(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 0. \tag{141}$$

Portanto, todos os coeficientes da forma a_{2n} serão proporcionais a a_o, enquanto que os coeficientes da forma a_{2n+1} serão proporcionais a a_1, logo

$$y(x) = a_o \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n}}{a_o}\ x^{2n} \right) + a_1 \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_1}\ x^{2n+1} \right) \equiv a_o\, y_1(x) + a_1\, y_2(x).$$

A seguir, aplicaremos o teste da razão a série y_1: fazendo $b_n = \frac{a_{2n}}{a_o}\ x^{2n}$ e usando a relação de recorrência (141), teremos

$$\lim_n \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = |x|^2\ \lim_n \frac{|a_{2n+2}|}{|a_{2n}|} = |x|^2\ \lim_n \frac{2n(2n-1) - 8n + 1}{(2n+3)(2n+2)} = |x|^2.$$

Portanto, o raio de convergência de y_1 é $\rho_1 = 1$.

De maneira análoga, mostra-se que o raio de convergência de y_2 é $\rho_2 = 1$. Logo o raio de convergência de y é $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\} = 1$. ■

4.2.2 O Caso em que x_o é um Ponto Singular Regular (Opcional)

Dada a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

para a qual o ponto x_o é um ponto singular, por exemplo, quando $p = \frac{Q}{P}$ e $q = \frac{R}{P}$, onde P, Q e R são polinômios e $P(x_o) = 0$. Se

$$\lim_{x \to x_o} (x - x_o)p(x) \quad e \quad \lim_{x \to x_o} (x - x_o)^2 q(x)$$

forem finitos, dizemos que x_o é um **ponto singular regular**, caso contrário; será chamado de **ponto singular irregular**. No caso de x_o ser um ponto singular regular, as funções $(x - x_o)p(x)$ e $(x - x_o)^2 q(x)$ são analíticas em x_o, portanto, têm uma representação em séries de potências em torno de x_o, as quais são convergentes para $|x - x_o| < \rho$, para algum $\rho > 0$.

Exemplo 4.9

(a) Na equação $x^2(1-x)y'' + (x-2)y' - 3xy = 0$, os pontos $x = 0$ e $x = 1$ são singulares irregular e regular, respectivamente.

(b) Na equação de Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, o único ponto singular é $x = 0$ que é regular. Esta equação é muito importante em aplicações em física.

(c) Na equação de Legendre que aparece no Exercício 4.7, os únicos pontos singulares são $x = \pm 1$, os quais são regulares.

(d) O único ponto singular da equação de Euler $\alpha x^2 y'' + \beta x y' + \gamma y = 0$ é $x = 0$ o qual é regular.

Nos restringiremos ao caso em que o ponto x_o é um ponto singular é regular e, sem perda de generalidade, vamos supor que $x_o = 0$; neste caso, multiplicaremos a equação $y'' + py' + qy = 0$ por x^2 e consideraremos

$$x^2 y'' + x(xp(x))y' + x^2 q(x) y = 0, \tag{142}$$

onde xp e $x^2 q$ são analíticas em $x_o = 0$, portanto, possuem as seguintes representações

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

e

$$x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n,$$

que valem para $|x| < \rho$. O método que descreveremos consiste em supor que

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \tag{143}$$

para algum r e podemos sem perda de generalidade assumir que $a_o \neq 0$. Portanto,

$$xy' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r}, \tag{144}$$

$$x^2 y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r}. \tag{145}$$

Substituindo (143), (144) e (145) em (142) e lembrando-se que o produto de duas séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ é formalmente dado por

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n,$$

temos

$$a_o F(r) x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(F(n+r) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} \left((k+r) p_{n-k} + q_{n-k} \right) a_k \right) x^{n+r} = 0,$$

onde $F(r) = r(r-1) + p_o r + q_o$. Como $a_o \neq 0$, segue-se que

$$F(r) = r(r-1) + p_o r + q_o = 0,$$

que é a **equação indicial**, a qual nos dá os valores possíveis de r, digamos $r_1 \geq r_2$. Além disso, devemos ter

$$F(n+r)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} \left((k+r)p_{n-k} + q_{n-k}\right) a_k = 0, \quad n \geq 1, \tag{146}$$

o que nos dá a relação de recorrência.

Como $r_1 \geq r_2$ e $n \geq 1$, então, $r_1 + n \neq r_1, r_2$, segue-se que $F(r_1 + n) \neq 0$ para $n \geq 1$, o que nos permite encontrar os a_n's; portanto, temos uma solução da forma

$$x^{r_1}\left(a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right) = a_o \ x^{r_1}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(r_1)}{a_o}x^n\right) \ \equiv a_o y_1(x), \quad x > 0,$$

ou seja,

$$y_1(x) = x^{r_1}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(r_1)}{a_o}x^n\right).$$

Se $r_2 \neq r_1$ e se $r_1 - r_2$ não for um inteiro positivo, então, para qualquer $n \geq 1$, teremos $F(r_2 + n) \neq 0$, logo, podemos obter uma segunda solução, ou seja,

$$y_2(x) = x^{r_2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(r_2)}{a_o}x^n\right).$$

As séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(r_1)}{a_o}x^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(r_2)}{a_o}x^n$ definem duas funções analíticas em $x = 0$, assim, o comportamento singular de y_1 e y_2, se houver, será dado pelos fatores x^{r_1} e x^{r_2}.

Em geral, se quisermos soluções definidas para valores negativos, substituimos x^{r_1} e x^{r_2} por $|x|^{r_1}$ e $|x|^{r_2}$, respectivamente, nas expressões de y_1 e y_2, anteriormente obtidas. Se as raízes r_1 e r_2 forem complexas, elas serão pares conjugados e $r_2 \neq r_1 + N$, logo, o método nos dá duas soluções, as quais são funções complexas de x. As soluções reais podem ser obtidas tomando-se as partes real e imaginárias das soluções complexas.

O Caso de Raízes Iguais $r_1 = r_2$.

A seguir, veremos r como um parâmetro contínuo. Determinamos os valores de $a_n(r)$ a partir da relação de recorrência (146). Seja $\phi(r,x) \equiv \left(a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)x^n\right) x^r$. Portanto, temos

$$\begin{aligned} (L\phi)(x,r) \ &\equiv \ x^2\phi''(r,x) + x(xp(x)\phi(r,x)) + x^2 q(x)\phi(r,x) \\ &= \ a_o F(r,x)x^r = a_o(x - r_1)^2 x^r, \end{aligned} \tag{147}$$

onde usamos o fato que por hipótese r_1 é uma raiz dupla da equação indicial. Queremos $\phi(r,x)$ tal que $(L\phi)(r,x)=0$. Note que $L\phi(r_1,x)=0$, o que nos dá $y_1(x)=\phi(r_1,x)$. Se tomarmos a derivada de (147) em relação r em $r=r_1$, tendo em vista que podemos trocar as ordem de derivações em relação às variáveis x e r, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}(L\phi)(x,r)\big|_{r=r_1} &= (L\frac{\partial}{\partial r}\phi)(x,r)\big|_{r=r_1} = \frac{\partial}{\partial r}\left(a_o(x-r_1)^2x^r\right) && (148)\\
&= \left|2a_o(r-r_1)x^r + a_o(r-r_1)^2x^r\,\ln x\,\right|_{r=r_1} = 0, && (149)
\end{aligned}
$$

donde concluimos que $\phi_r(r_1,x)$ também é solução. Mas

$$
\begin{aligned}
\phi(r_1,x) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(x^r\left(a_o+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r)x^n\right)\right)|_{r=r_1}\\
&= x^{r_1}\ln x\left(a_o+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\right)+x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(r_1)x^n,\\
&= y_1(x)\ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(r_1)x^n, \quad x>0.
\end{aligned}
$$

Logo, a segunda solução será

$$y_2(x)=\ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(r_1)x^n, \quad x>0.$$

Para $x<0$, temos a seguinte solução,

$$y_2(x)=\ln|x| + |x|^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(r_1)x^n, \quad x>0.$$

O Caso em que $r_1-r_2=N$, N Inteiro Positivo. Por ser mais complicado não será discutido aqui. Mostra-se que a segunda solução é da forma

$$y_2(x)=ay_1(x)\ln|x| + |x|^{r_2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(r_2)x^n\right),$$

onde $c_n(r_2)=\frac{d}{dr}((r-r_2)a_n(r))|_{r=r_2}$, $a_n(r)$ é determinado à partir da relação de recorrência (147), com $a_o=1$. O coeficiente $a=\lim_{r\to r_2}(r-r_2)a_N(r)$.

Exemplo 4.10 *Usando o método de séries de potências, resolva a seguinte equação diferencial*

$$2x^2y''-xy'+(1+x)y=0.$$

Solução. Note que neste caso, $xp(x) = -\frac{1}{2}$, $x^2q(x) = \frac{1+x}{2}$. Portanto, $p_o = -\frac{1}{2}$, $q_o = \frac{1}{2}$ e $q_1 = \frac{1}{2}$, os demais coeficientes das séries de xp e x^2q são nulos. Logo, a equação indicial é $(r-1)r - \frac{1}{2}\ r + \frac{1}{2} = 0$, ou seja, $2r^2 - 3r + 12 = 0$, portanto, as raízes são $r_1 = 1$ e $r_2 = \frac{1}{2}$.

Temos a seguinte relação de recorrência

$$(2(r+n)(r+n-1) - (r+n) + 1)\, a_n + a_{n-1} = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{a_{n-1}}{2(r+n)^2 - 3(r+n) + 1} \\ &= -\frac{a_{n-1}}{((r+n)-1)\,(2(r+n)-1)}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Se fizermos $\mathbf{r = 1}$, teremos

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(2n+1)n}, \quad n \geq 1,$$

e teremos

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(3\,.\,5\,.\,7\ldots(2n+1))n!}\ a_o.$$

Logo,

$$y_1(x) = x\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!\ n!}\ x^n\right), \quad x > 0.$$

Mostre usando o teste da razão que o raio de convergência da série acima é infinito, ou seja, ela converge para todo valor de x.

Para $\mathbf{r = \frac{1}{2}}$, temos a seguinte relação de recorrência

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n(2n-1)}, \quad n \geq 1$$

e, em geral,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\ldots(2n-1))n!}\ a_o, \quad n \geq 1.$$

Portanto,

$$y_2(x) = x^{1/2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!!\ n!}\ x^n\right), \quad x > 0.$$

Também pode-se mostrar que a série acima converge para todo valor de x. Claramente, as duas soluções y_1 e y_2 são linearmente independentes, logo, a solução geral da equação diferencial será $y = c_1\ y_1(x) + c_2\ y_2(x)$. ∎

4.3 Exercícios Adicionais

1. Usando o método de séries de potências em torno de $x_o = 0$, encontre a solução geral da equação

$$y'' + xy' + 5y = 1 + x.$$

2. Considere a equação

$$(1 - x)y'' + xy' - 2y = 0.$$

(a) Encontre a relação de recorrência dos coeficientes da solução em série de potências da equação acima de $x_o = 0$.

(b) Encontre pelo os cinco primeiros termos não-nulos das séries de y_1 e y_2.

(c) Encontre a solução que satisfaz às condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

3. Encontre os quatro primeiros termos não-nulos das séries de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ da solução em séries de potência em torno de $x_o = 0$, da seguinte equação

$$y'' + (sen\, x)\, y = 0.$$

4. Obtenha os nove primeiros termos da solução geral da equação diferencial abaixo usando série de potências:

$$(1 + x^2)\, y'' - 4\, x\, y' + y = 0$$

5. A solução do átomo de hidrogênio em física quântica conduz à equação de Laguerre de ordem p:

$$y'' + \frac{1 - x}{x}\, y' + \frac{p}{x}\, y = 0$$

Só têm importância física as soluções regulares, expressas como série de Taylor: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$.

(a) Encontre a relação de recorrência para os coeficientes a_n e obtenha uma fórmula para os a_n em função de a_0

(b) Mostre que quando p é um inteiro não negativo apenas um número finito de termos são não nulos e a solução $y(x)$ se reduz a um polinômio, denotado por $L_p(x)$. Tome $a_0 = 1$ e obtenha assim os polinômios de Laguerre: $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ e $L_3(x)$.

Nos exercícios $6-8$ o ponto $x_o=0$ é um ponto singular. Encontre a solução geral em série de potências em torno deste ponto. Se as raízes diferirem por um inteiro e não forem iguais, encontre somente aquela que corresponde à raiz maior.

6. $xy''+y=0$..

7. $xy''+y'-y=0$.

8. $2x^2y''+3xy'+(2x^2-1)y=0$.

5 A Transformada de Laplace

Muitos problemas resultantes de oscilações mecânicas e elétricas estão sujeitos à forças resultantes que são descontínuas ou de impulsos. Para estes a teoria de equações diferenciais vista é muita complicada de se usar e, como veremos, o método que introduziremos a seguir é puramente algébrico e muito útil na resolução de equações diferenciais onde as equações homogêneas associadas têm coeficientes constantes.

A transformada de Laplace é definida a partir da seguinte integral imprópria

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Lembramos que uma integral imprópria $\int_a^\infty g(t)\, dt$ converge se para todo $A > a$, $\int_a^A g(t)\, dt$ estiver definida e $\lim_{A\to\infty} \int_a^A g(t)\, dt$ existir, neste caso, dizemos que

$$\int_a^\infty g(t)\, dt = \lim_{A\to\infty} \int_a^A g(t)\, dt.$$

Note que se f for uma função contínua e satisfizer $|f(t)| \leq Ke^{-at}$ para $t \geq M$, onde a, M, K são constantes reais com K, M positivas, então, a transformada de Laplace de f existirá para $s > a$. A hipótese de continuidade de f não é essencial, a Transformada de Laplace pode ser definida para funções muito mais gerais, como veremos.

Observação 5.1 *Note que em virtude da linearidade da integral, a transformada de Laplace é* **uma operação linear***, ou seja, se as transformadas de f e g existirem para $s > a$, então, para quaisquer escalares c_1 e c_2, a transformada de Laplace de $c_1 f(t) + c_2 g(t)$ existirá para $s > a$ e*

$$\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{g(t)\} \equiv c_1 F(s) + c_2 G(s).$$

O nosso objetivo será construir uma tabela de transformadas de Laplace e, uma vez tendo feito isso, iremos usá-la na resolução problemas de valores iniciais para equações diferenciais.

A seguir calcularemos as transformadas de Laplace de algumas funções.

Exemplo 5.1 *Seja $f(t) = e^{at}$, para todo $t \geq 0$. Então, se $s > a$,*

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt \\ &= \frac{1 - \lim_{A\to\infty} e^{-(s-a)A}}{s-a} = \frac{1}{s-a}. \end{aligned} \tag{150}$$

Exercício 5.1 *Calcule a transformada de Laplace de senh(bt).*

Solução. Da linearidade da transformada de Laplace e de (199), temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{senh(bt)\} &= \mathcal{L}\{\frac{e^{bt}-e^{-bt}}{2}\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\{e^{bt}\} - \mathcal{L}\{e^{-bt}\}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s+b}\right) \\
&= \frac{b}{s^2-b^2}. \qquad (151)
\end{aligned}$$

∎

De maneira análoga, mostra-se que para $s > 0$,

$$\mathcal{L}\{cosh(at)\} = \frac{s}{s^2-a^2}. \qquad (152)$$

Exemplo 5.2 *Mostre que*

$$\mathcal{L}\{sen(at)\} \;=\; \int_0^\infty e^{-st} sen(at)\,dt = \frac{a}{s^2+a^2}. \qquad (153)$$

Solução. Após duas integrações por partes temos

$$\int e^{-st} sen(at)\,dt = -\frac{a^2}{s^2+a^2}\left(\frac{sen(at)}{a^2} + \frac{cos(at)}{a}\right) e^{-st},$$

o que nos dá (153)

Exercício 5.2 *Mostre que para todo $s > 0$,*

$$\mathcal{L}\{cos(at)\} \;=\; \int_0^\infty e^{-st} cos(at)\,dt = \frac{s}{s^2+a^2}. \qquad (154)$$

Observação 5.2 *Poderíamos ter obtido as transformadas de Laplace de $sen\,(at)$ e de $\cos(at)$ a partir das transformadas de Laplace de $senh\,(at)$ e $cosh\,(at)$, respectivamente, tendo em vistas as relações*

$$sen\,(at) = \frac{senh\,(ia\ t)}{i} \quad e \quad \cos(at) = cosh\,(i\,at).$$

Exemplo 5.3 *A seguir mostraremos que*

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad (155)$$

onde n é um inteiro não-negativo. Note que no Exemplo 5.1, se fizermos $a = 0$, teremos

$$\mathcal{L}\{1\} = 1/s, \tag{156}$$

o que mostra (155) para $n = 0$. Em geral, para $n \geq 1$, após uma integração por partes,

$$\int e^{-st} t^n \, dt = -\frac{t^n e^{-st}}{s} + \frac{n}{s} \int e^{-st} t^{n-1} \, dt,$$

logo,

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s} \, \mathcal{L}\{t^{n-1}\}. \tag{157}$$

De (156) e (157), por indução em n, temos (155). ■

A seguir veremos qual é o efeito de multiplicarmos uma função $f(t)$ por uma exponencial.

Exemplo 5.4 *Dada uma função $f(t)$, definida para $t \geq 0$, então, para $s > a$,*

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t) \, dt = F(s-a), \tag{158}$$

ou seja, ao multiplicarmos uma função por uma exponencial, o efeito é um deslocamento na sua transformada de Laplace.

De (158), segue-se que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{at} sen(bt)\} &= \frac{b}{(s-a)^2 + b^2} & (159)\\
\mathcal{L}\{e^{at} cos(bt)\} &= \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} & (160)\\
\mathcal{L}\{e^{at} senh(bt)\} &= \frac{b}{(s-a)^2 - b^2} & (161)\\
\mathcal{L}\{e^{at} cosh(bt)\} &= \frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2} & (162)\\
\mathcal{L}\{e^{at} t^n\} &= \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}. & (163)
\end{aligned}$$

Exercício 5.3 *Mostre que*

$$\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\} = F^{(n)}(s).$$

Exercício 5.4 *Seja f definida para $t \geq 0$ e c uma constante positiva. Mostre que para $s > 0$,*

$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c}\, F\left(\frac{s}{c}\right). \tag{164}$$

As funções para as quais iremos considerar suas transformadas de Laplace não serão necessariamente contínuas, estaremos considerando funções mais gerais, as quais serão definidas a seguir.

Definição 5.1 *Dizemos que uma função é* **seccionalmente contínua** *em (α, β) se este intervalo puder ser subdividido em número finito subintervalos (t_{i-1}, t_i), com $t_{i-1} < t_i$, $i = 1, \ldots, n$, $t_o = \alpha$ e $t_n = \beta$, de modo que*

1. *f é contínua em (t_{i-1}, t_i) e*

2. *em cada um dos subintervalos (t_{i-1}, t_i), f tem um limite quando t se aproxima das extremidades do mesmo.*

Dizemos que f é seccionalmente contínua em (α, ∞) se for seccionalmente contínua em (α, β) para todo $\beta > \alpha$.

Teorema 5.1 *Suponha que f seja seccionalmente contínua no intervalo $0 \leq t \leq A$, para qualquer A positivo, que $|f(t)| \leq Ke^{at}$, quando $t \geq M$, onde K, α e M são constantes reais, com K e M necessariamente positivas. Então a transformada de Laplace de f existe para todo $s > a$.*

Teorema 5.2 *Suponha que f seja contínua e que e f' seja seccionalmente contínua no intervalo $0 \leq t \leq A$, para qualquer A positivo; além disso, que existam constantes K, a e M, tais que $|f(t)| \leq Ke^{at}$, para $t \geq M$, onde K, α e M são constantes reais, com K e M necessariamente positivas. Então a transformada de Laplace de f' existe para todo $s > a$ e*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0). \tag{165}$$

Uma conseqüência deste teorema é o seguinte

Corolário 5.1 *Suponha que $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ sejam contínuas e que e $f^{(n)}$ sejam seccionalmente contínua no intervalo $0 \leq t \leq A$, para qualquer A positivo; além disso, que existam constantes K, a e M, tais que $|f(t)|, \ldots, |f^{(n-1)}| \leq Ke^{at}$, para $t \geq M$, onde K, α e M são constantes reais, com K e M necessariamente positivas. Então a transformada de Laplace de $f^{(n)}$ existe para todo $s > a$ e*

$$C\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0). \tag{166}$$

A seguir, veremos como resolver equações diferenciais usando a transformada de Laplace. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$ay'' + by' + cy = g(t),\ y(0) = y_o,\ y'(0) = y_o'.$$

Tomando-se a transformada de Laplace da equação diferencial, usando a propriedade de linearidade da mesma e o Corolário 5.1, temos

$$a\mathcal{L}\{y''(t)\} + b\mathcal{L}\{y'(t)\} + c\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

ou seja,

$$a\left(s^2Y(s) - sf(0) - f'(0)\right) + b\left(sY(s) - f(0)\right) + cY(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} \equiv G(s),$$

portanto, a transformada da solução do problema de valor inicial é

$$Y(s) = \frac{G(s) + (a\,s\, + b)y_o + a\,y_o'}{as^2 + bs + c}.$$

Assim, caimos no problema inverso: dada a transformada de Laplace de uma função, $F(s)$, qual é a **função** $f(t)$ **cuja transformada é** $F(s)$? A operação inversa é chamada de transformada inversa de Laplace e é denotada por $\mathcal{L}^{-1}$. Pode-se mostrar que se f for uma função contínua, cuja transformada é $F(s)$, então, não existe outra função contínua tendo a mesma transformada de Laplace. A transformada inversa de Laplace **herda a linearidade** de $\mathcal{L}$, ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1\,F(s) + c_2\,G(s)\} = c_1\,\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + c_2\,\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

Exemplo 5.5 *Calcule* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{-3s}{s^2+2s+2}\right\}$.

Solução. Da linearidade da transformada inversa de Laplace, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{-3s}{s^2+2s+2}\right\} &= 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-3s}{s^2+2s+2}\right\} \\
&= 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-3(s+1)+3}{(s+1)^2+1}\right\} \\
&= 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)}{(s+1)^2+1}\right\} + \\
&\quad +3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\} \\
&= 2t + e^{-t} - 3e^{-t}cos\,t + 3e^{-t}sen\,t,
\end{aligned}$$

onde usamos que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\}$ e $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$, são $e^{-t}cost$, $e^{-t}sent$ e e^{-t}, respectivamente.

Exemplo 5.6 *Resolva o seguinte problema de valor inicial*

$$y'' + y = t, \quad y(0) = 1, \, y'(0) = 0.$$

Solução. Tomando-se a transformada de Laplace da equação e usando as condições iniciais dadas, temos

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2(s^2+1)}$$

logo,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}.$$

Vimos que a transformada de Laplace de $cos\, t$ é $\frac{s}{s^2+1}$, logo, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = cos\, t$. A seguir vamos re-escrever $\frac{1}{s^2(s^2+1)}$ de modo que possamos encontrar a sua transformada inversa de Laplace. Note que temos a seguinte decomposição em frações parciais

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = A\,\frac{1}{s} + B\,\frac{1}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1},$$

ou seja, $Cs^3 + (A+B+D)s^2 + As + B = 1$, portanto, $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$ e $D = -1$. Logo,

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1},$$

como as transformadas de t e $sen\, t$ são $\frac{1}{s^2}$ e $\frac{1}{s^2+1}$, respectivamente, temos $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = t - sen\, t$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é $y(t) = cos\, t - sen\, t + t$. ■

5.1 A Função Degrau

Na representação de funções que apresentam saltos é muito útil a utilização da seguinte função, denominada **função degrau unitário**:

$$u_c(t) = \begin{cases} 1, \text{ se } t \geq c \\ 0, \text{ se } t < c, \end{cases}$$

onde c é uma constante não-negativa.

Combinando-se funções degraus podemos, por exemplo, representar uma função $f(t)$ que é igual a um valor constante 1 no intervalo $[c_1, c_2)$ e zero fora deste intervalo, onde $c_1 < c_2$; tal função é dada por $u_{c_1}(t) - u_{c_2}(t)$.

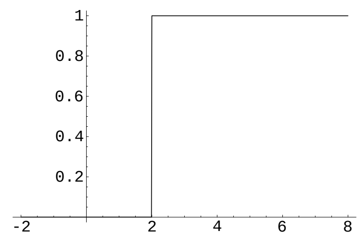

Figura 19: *Gráfico da função $u_2(t)$.*

Exemplo 5.7 *Seja*

$$f(t) = \begin{cases} 2, \text{ se } 1 \leq t < 2 \\ 1, \text{ se } 2 \leq t < 5 \\ 4, \text{ se } 5 \leq t < 8 \\ 0, \text{ caso contrário }, \end{cases}$$

veja Figura 21. Expresse f em termos da função degrau unitário e calcule a transformada de Laplace de $f(t)$.

Solução. Note que

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\,(u_1(t) - u_2(t)) + (u_2(t) - u_5(t)) + 4\,(u_5(t) - u_8(t)) \\ &= 2u_1(t) - u_2(t) + 3u_5(t) - 4u_8(t), \end{aligned}$$

portanto, $F(s) = 2\,\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} + 3\,\frac{e^{-5s}}{s} - 4\,\frac{e^{-8s}}{s}$. ■

Note que para todo $s > 0$,

$$\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \int_c^\infty e^{-st}\,dt = \frac{e^{-cs}}{s}. \tag{167}$$

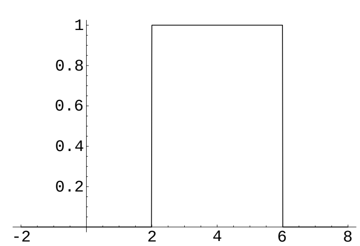

Figura 20: *Gráfico da função $u_2(t) - u_6(t)$.*

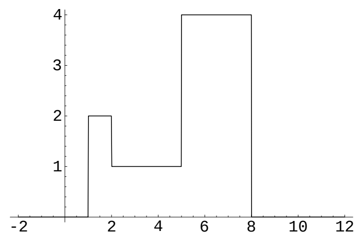

Figura 21: *Gráfico de $f(t)$.*

Dada uma função f cuja transformada de Laplace exista para $s > a \geq 0$, é muito comum considerarmos

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < c \\ f(t-c), & \text{se } t \geq c, \end{cases}$$

que pode ser representada da seguinte forma em termos da função degrau:

$$g(t) = u_c(t) f(t-c),$$

cuja transformada de Laplace é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} &= \int_c^\infty e^{-st} f(t-c)\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s(u+c)} f(u)\, du, \quad t - c \equiv u \\ &= e^{-cs} \int_0^\infty e^{-su} f(u)\, du \\ &= e^{-cs} F(s). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}F(s) \quad \textit{ou} \quad u_c(t)f(t-c) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}\, F(s)\}. \tag{168}$$

Em geral, dada uma função $g(t)$, se quisermos definir uma nova função, f, tal que f coincida com g no intervalo $[c_1, c_2)$ e valha 0 fora deste intervalo, então, f tem uma representação simples em termos da função degrau: $f = (u_{c_1}(t) - u_{c_2}(t))g(t)$. Por exemplo, na Figura 23, temos o gráfico da função $(u_2(t) - u_4(t))(sen\,(8t) - cos\,(6t))$.

Exemplo 5.8 *Calcule a transformada de Laplace de $t^2 u_1(t)$.*

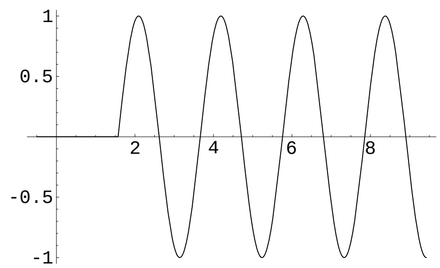

Figura 22: *Gráfico de* $u_{\frac{\pi}{2}}(t)f(t-\frac{\pi}{2})$, *onde* $f(t) = sen\,(3t)$.

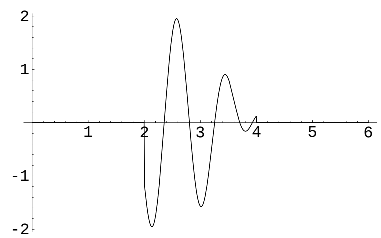

Figura 23: *Gráfico de* $(u_2(t) - u_4(t))(sen\,(8t) - cos\,(6t))$.

Solução. Se fizermos $t^2 = f(t-1)$, então, $\mathcal{L}\{u_1(t)t^2\} = \mathcal{L}\{u_1(t)f(t-1)\} = e^{-s}F(s)$. Resta-nos calcular $F(s)$. Note que se $f(t-1) = t^2$, então, $f(t) = (t+1)^2 = t^2+2t+1$, logo, $F(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}$, ou seja, $\mathcal{L}\{u_1(t)t^2\} = e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$. ■

Exemplo 5.9 *Resolva o seguinte problema de valor inicial*

$$y'' + 2y' + 2y = h(t), \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1,$$

onde

$$h(t) = \begin{cases} 1, \ se \ \pi \leq t < 2\pi \\ 0, \ caso \ contrário. \end{cases}$$

Solução. Note que $h(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$, logo, da linearidade da transformada de Laplace e de (167), temos $H(s) = \frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s}$. Tomando a transformada de Laplace da equação diferencial e usando as condições iniciais, temos

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2+2s+2} + \frac{1}{s^2+2s+2}\,H(s) \\ &= \frac{1}{s^2+2s+2} + \frac{1}{s(s^2+2s+2)}\,e^{-\pi s} + \frac{1}{s(s^2+2s+2)}\,e^{-2\pi s} \\ &= F(s) + e^{-\pi s}\,G(s) + e^{-2\pi s}\,G(s), \end{aligned}$$

onde $F(s) = \frac{1}{(s+1)^2+1}$ e $G(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+2)}$.

Então, da linearidade da transformada inversa de Laplace e de (168),

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{e^{-\pi s}\, G(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{e^{-2\pi s}\, G(s)\} \\ &= f(t) + u_\pi(t) g(t-\pi) - u_{2\pi}(t) g(t-2\pi). \end{aligned}$$

Resta-nos calcular $f(t)$ e $g(t)$. Note que não vimos nenhuma função $g(t)$ cuja transformada de Laplace seja $G(s)$, contudo, podemos usar decomposição em frações parciais e decompor $G(s)$ em parcelas cujas que poderão ser identificadas com transformadas de Laplace de funções conhecidas. De fato

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$

o que nos leva a $(A+B)s^2 + (2A+C)s + 2A = 1$, ou seja, $A = 1/2$, $B = -1/2$ e $C = -1$, portanto,

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s(s^2+2s+2)} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{-s/2-1}{s^2+2s+2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{-s/2-1}{(s+1)^2+1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{-\frac{s+1}{2} - \frac{1}{2}}{(s+1)^2+1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s+1)^2+1}\right), \end{aligned}$$

da linearidade de $\mathcal{L}^{-1}$ e da propriedade (158), temos

$$g(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, e^{-t} cos(t) - \frac{1}{2}\, e^{-t} sen(t) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-t} cos(t) - e^{-t} sen(t)\right).$$

Por outro lado, $f(t) = e^{-t} sen\, t$. Portanto, a solução do problema é

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-t}\, sen\, t + \frac{1}{2}(u_\pi(t)\left(1 - \, sen(t-\pi)\, e^{-(t-\pi)} - \, cos(t-\pi)\, e^{-(t-\pi)}\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}(u_{2\pi}\left(1 - \, sen(t-2\pi)\, e^{-(t-2\pi)} - cos(t-2\pi)\, e^{-(t-2\pi)}\right) \\ &= e^{-t}\, sen\, t + \frac{1}{2} u_\pi(t)\left(1 + \, sen(t)\, e^{-(t-\pi)} + \, cos(t)\, e^{-(t-\pi)}\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}(u_{2\pi}\left(1 - \, sen(t)\, e^{-(t-2\pi)} - cos(t)\, e^{-(t-2\pi)}\right), \end{aligned}$$

cujo gráfico é mostrado na Figura 24.

■

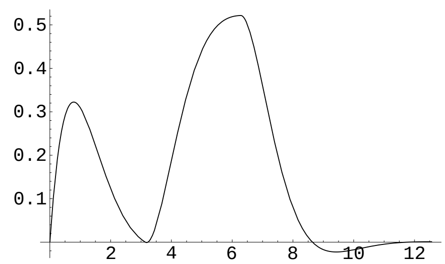

Figura 24: *Gráfico de* $e^{-t} sen\, t + u_\pi(t) g(t-\pi) - u_{2\pi}(t) g(t-2\pi)$.

Exemplo 5.10 *Resolva o seguinte problema de valor inicial*

$$y'' + y = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

onde

$$f(t) = \begin{cases} 1, \; se\; \pi \leq t < 2\pi \\ 0, \; caso\; contrário. \end{cases}$$

Solução. Note que $f(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$, portanto, $F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s}$. Logo,

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} e^{-\pi s} - \frac{1}{s(s^2+1)} e^{-2\pi s} = e^{-\pi s} G(s) + e^{-2\pi s} G(s),$$

onde $G(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$ e temos

$$y(t) = u_\pi(t) g(t-\pi) - u_{2\pi}(t) g(t-2\pi),$$

com $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$.

Usando decomposição em frações parciais encontramos $G(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$, portanto, $g(t) = 1 - cos\, t$. Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$\begin{aligned} y(t) &= u_\pi(t)(1 + cos\, t) - u_{2\pi}(t)(1 - cos\, t) \\ &= \begin{cases} 0, \text{ se } 0 \leq t < \pi \\ 1 + cos\, t, \text{ se } \pi \leq t < 2\pi \\ 2cos\, t, \text{ se } t \geq 2\pi, \end{cases} \end{aligned}$$

cujo gráfico é mostrado na Figura 25. ∎

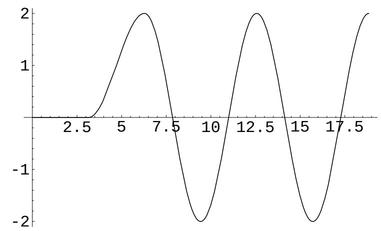

Figura 25: *Gráfico de* $u_\pi(t)(1+cos\, t) - u_{2\pi}(t)(1-cos\, t)$.

Exemplo 5.11 *Resolva o seguinte problema de valor inicial*

$$y'' + 2y' = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

onde

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t-2|, \; se\; 1 \le t < 3 \\ 0, \; caso\; contrário, \end{cases}$$

cujo gráfico é mostrado na Figura 26.

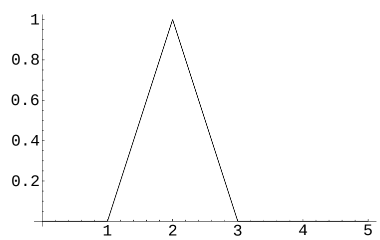

Figura 26: *Gráfico de* $f(t) = (u_1(t) - u_2(t))\,(1 - |t-2|)$.

Solução. Note que f pode ser vista como a soma de funções: uma vale $t-1$ no intervalo $[1,2)$ e zero fora deste intervalo e a outra vale $3-t$ no intervalo $[2,3)$ e zero fora deste. Estas duas funções podem ser representadas como $(u_1(t) - u_2(t))\,(t-1)$ e $(u_2(t) - u_3(t))\,(3-t)$, respectivamente. Portanto,

$$\begin{aligned} f(t) &= (u_1(t) - u_2(t))\,(t-1) + (u_2(t) - u_3(t))\,(3-t) \\ &= u_1(t)(t-1) - 2u_2(t)(t-2) - u_3(t-3), \end{aligned}$$

cuja transformada de Laplace é $F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2} - 2\,\frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} Y(s) &= e^{-s}\frac{1}{s^3(s+2)} - 2\,e^{-2s}\frac{1}{s^3(s+2)} - e^{-3s}\frac{1}{s^3(s+2)} \\ &= e^{-s}G(s) - 2\,e^{-2s}G(s) - e^{-3s}G(s), \end{aligned}$$

onde $G(s) = \frac{1}{s^3(s+2)}$; portanto,

$$y(t) = u_1(t)g(t-1) - 2u_2(t)g(t-2) - u_3(t)g(t-3).$$

Resta-nos calcular $g(t)$. Usando decomposição em frações parciais, temos

$$G(s) = \frac{1}{8}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^3} - \frac{1}{8}\frac{1}{s+2},$$

portanto, $g(t) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}e^{-2t}$, cujo gráfico é mostrado na Figura 27. ■

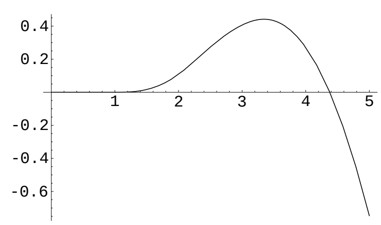

Figura 27: *Gráfico de* $u_1(t)g(t-1) - 2u_2(t)g(t-2) - u_3(t)g(t-3)$.

5.2 A Transformada de Laplace de Funções Periódicas

Suponha que exista um número positivo T, tal que $f(t+T) = f(t)$, para todo $t \geq 0$, neste caso, dizemos que f é periódica com período T em $[0, \infty)$.

Lembremos que se $s, T > 0$, a série geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-sT}\right)^k$ converge para $\frac{1}{1-e^{-sT}}$. Então, dado f periódica com período T,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^{nT} e^{-st} f(t)\, dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st} f(t)\, dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{T} e^{-s(u+kT)} f(u+kT)\, du, \quad u \equiv t - kT \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{-kTs} \int_0^{T} e^{-st} f(u)\, du \\
&= \left(\int_0^T e^{-su} f(u)\, du \right) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{-kTs} \\
&= \left(\int_0^T e^{-su} f(u)\, du \right) \frac{1}{1 - e^{-Ts}}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt}{1 - e^{-Ts}}, \quad s > 0, \tag{169}
$$

e o só temos que efetuar uma integração no intervalo $[0, T]$ para calcularmos a transformada de uma função periódica com período T.

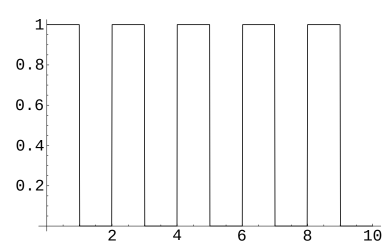

Figura 28: *Gráfico da função f definida no Exemplo 5.12.*

Exemplo 5.12 *Seja f uma função periódica com período 2, tal que*

$$
f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \le t < 1 \\ 0, & \text{se } 1 \le t < 2. \end{cases}
$$

Calcule a sua transformada de Laplace.

Solução. De (169), temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{\int_0^2 e^{-st} f(t)\, dt}{1-e^{-2s}} \\
&= \frac{\int_0^1 e^{-st}\, dt}{1-e^{-2s}} \\
&= \frac{1-e^{-s}}{s(1-e^{-2s})} \\
&= \frac{1-e^{-s}}{s(1-e^{-s})(1+e^{-s})} \\
&= \frac{1}{s(1+e^{-s})}\,,
\end{aligned}$$

onde na segunda igualdade quebramos a integral de 0 a 2 numa soma de duas integrais: uma sobre o intervalo $[0,1]$ e a outra sobre o intervalo $[1,2]$, como f se anula neste intervalo só temos a contribuição da primeira integral. ■

Exercício 5.5 *Seja f a função periódica de período 1, definida como $f(t) = t$, para $0 \leq t < 1$. Esta função é chamada* **onda dente de serra**. *Calcule a sua transformada de Laplace.*

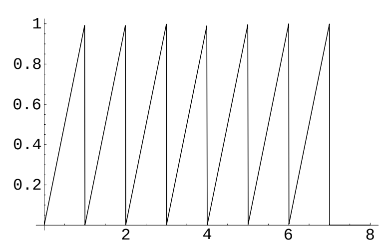

Figura 29: *Gráfico da onda dente de serra.*

5.3 Funções de Impulso

Em muitas aplicações temos que tratar de fenômenos de natureza impulsiva, ou seja, voltagens ou forças, $g(t)$, de módulo grande que agem durante um intervalo de tempo muito curto. Por exemplo, $g(t)$ pode ser da forma

$$g(t) = d_\tau(t-t_o) = \begin{cases} 1/2\tau & t_o - \tau < t < t_o + \tau, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde τ é uma constante positiva e pequena. Neste caso, independente do valor de $\tau \neq 0$, o **impulso total** proporcionado por $d_\tau(t-t_o)$, definido por

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t-t_o)dt = \frac{1}{2\tau}\int_{t_o-\tau}^{t_o+\tau} dt = 1.$$

Logo, temos o seguinte resultado

$$\lim_{\tau\to 0} d_\tau(t-t_o) = 0,\ \forall t \neq t_o \quad e \quad \lim_{\tau\to 0} I(\tau) = 1.$$

O que nos leva a definir uma **função impulso unitário em** t_o**,** $\delta(t-t_o)$, também chamada de **distribuição** δ **de Dirac** que é uma generalização de uma função que embora sendo zero em todos os pontos diferentes de $t = t_o$, seja capaz de produzir um impulso unitário. Ou seja, ela tem as seguintes propriedades

$$\delta(t-t_o) = 0,\ \forall t \neq t_o \quad e \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_o)\, dt = 1.$$

A seguir iremos definir formalmente $\mathcal{L}\{\delta(t-t_o)\}$. Suponha que $t_o > 0$, definiremos

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_o)\} = \lim_{\tau\to 0} \mathcal{L}\{d_\tau(t-t_o)\}$$

Note que

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t-t_o)\} \;=\; \frac{1}{2\tau}\int_{to-\tau}^{t_o+\tau} e^{-st}dt = \frac{1}{2s\tau}e^{-st_o}(e^{s\tau} - e^{-s\tau}) = \frac{senh(s\tau)}{s\tau}\ e^{-st_o}. \tag{170}$$

Como $\lim_{x\to 0} \frac{senh(x)}{x} = 1$, segue-se que

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_o)\} = e^{-st_o},\ t_o > 0. \tag{171}$$

Como o resultado acima vale para todo $t_o > 0$, definiremos

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1. \tag{172}$$

De maneira análoga, para uma função contínua $f(t)$, definiremos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_o)f(t)dt \;&\equiv\; \lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t-t_o)f(t)dt \\ &= \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\int_{t_o-\tau}^{t_o+\tau} f(t)dt \\ &= \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}\ 2\tau\ f(t^*), \quad t_o-\tau < t^* < t_o+\tau \\ &= f(t_o). \end{aligned} \tag{173}$$

Na passagem da segunda para a terceira linha usamos o Teorema do Valor Médio para integrais e na passagem da terceira para a quarta linha usamos a continuidade de f em t_o. Em particular, se f for uma função contínua, então,

$$\mathcal{L}\{f(t)\delta(t-t_o)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\delta(t-t_o)dt = e^{-st_o} f(t_o). \tag{174}$$

Exemplo 5.13 *Resolva o seguinte problema de valor inicial*

$$y'' + y = \delta(t-2\pi), \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0.$$

Solução. Se tomarmos a transformada de Laplace da equação acima e usarmos as condições iniciais, encontraremos

$$Y(s) = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1)} \equiv e^{-2\pi s} F(s),$$

onde $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$, portanto, de (168), temos $y(t) = u_{2\pi}(t) f(t-2\pi)$, onde $f(t) = sen(t)$, portanto, $y(t) = u_{2\pi}(t) sen\, t$.

Note que se não tivéssemos aplicado a força externa $\delta(t-2\pi)$ a solução seria identicamente nula; contudo, a presença desta força faz com que a partir do instante $t = 2\pi$ a solução seja diferente de zero, embora ela só atue neste momento. ∎

5.4 O Teorema da Convolução

Em muitos problemas de valores iniciais, na expressão de $Y(s)$ aparecem fatores do tipo $F(s)G(s)$, cuja transformada inversa de Laplace temos que calcular. A pergunta natural é a seguinte: qual a relação entre a transformada inversa de Laplace de $F(s)G(s)$ e as transformadas inversas de $F(s)$ e $G(s)$? Por exemplo transformada inversa de Laplace de $1/s$ é 1, enquanto que a transformada inversa de $1/s^2$ é t, o que ilustra que $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} \neq \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$. Veremos que existe uma operação que sob muitos aspectos é parecida com a multiplicação usual, que leva um par de funções f e g numa nova função $h(t)$, denotada **convolução de f e g** e representada por $f * g$, a qual é definida como

$$h(t) = (f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau,$$

que nos permitirá responder a pergunta acima.

Exercício 5.6 *Mostre que a convolução em as seguintes propriedades:*

1. $f * g = g * f$

2. $f * (g + h) = f * g + f * h$

3. $(f * g) * h = f * (g * h)$

4. $f * 0 = 0 * f = 0.$

Note que $f * 1 \neq f$, por exemplo, tomando $f(t) = t$, temos $(f * 1)(t) = \int_0^t (t - \tau)\, d\tau = \frac{t^2}{2}$.

Teorema 5.3 (*Teorema da Convolução) Se as transformadas de f e g, existirem para $s > a \geq 0$, então,*

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)\, G(s) \quad ou \quad \mathcal{F}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t). \tag{175}$$

Exercício 5.7 *Calcule a transformada inversa de Laplace de $H(s) = \frac{1}{(s^2+1)s}$.*

Solução. Note que se fizermos $F(s) = 1/s$ e $G(s) = 1/(s^2 + 1)$, então, $H(s) = F(s)G(s)$, $f(t) = 1$, $g(t) = sen\, t$ e, pelo Teorema da Convolução,

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t sen\tau\, d\tau = 1 - cos\, t.$$

Observação 5.3 *Nos problemas que estaremos considerando muitas vezes será preferível reescrevermos o produto $F(s)G(s)$ usando decomposição em frações parciais, visto que este é puramente algébrico, enquanto que a convolução envolve o cálculo de integrais que podem ser difíceis de ser calculadas. De qualquer forma, a convolução é muito importante sob o ponto de vista teórico.*

5.5 Tabela de Transformadas de Laplace e de Transformadas Inversas de Laplace

Coletando as transformadas calculadas temos a seguinte tabela que deverá ser usada nos problemas que consideraremos:

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$t^n, \quad n$ inteiro positivo	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$sen(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$
$cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$, $s > 0$
$senh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$, $s > \|a\|$
$cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$, $s > \|a\|$
$e^{at}sen(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$
$e^{at}cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$
$t^n e^{at}$, n inteiro positivo	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s > a$
$u_c(t)$,	$\frac{e^{-cs}}{s}$, $s > 0$
$u_c(t)f(t-c)$,	$e^{-cs}F(s)$
$e^{ct}\, f(t)$	$F(s-c)$
$f(ct)$	$\frac{1}{s}F(\frac{s}{c})$, $c > 0$
$(f * g)(t) = \int_o^t f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau$	$F(s)G(s)$
$\delta(t-c)$	e^{-cs}
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
$(-t)^n\, f(t)$	$F^{(n)}(s)$

5.6 Exercícios Adicionais

1. Encontre a transformada inversa de Laplace das seguintes funções:

   (a) $\frac{8s^2-4s+2}{s(s^2+4)}$

   (b) $\frac{2s+1}{4s^2+4s+5}$

   (c) $e^{-s}\frac{1}{s^2(s^2+2s+2)} + \frac{s^2+1}{(s+1)(s^2+4)}$

2. Seja

$$f(t) = \begin{cases} sen(\pi t), \quad 0 \le t < 1 \\ 0, \quad 1 \le t < 2 \\ t-2, \quad 2 \le t < 3 \\ 1, \quad t \ge 3. \end{cases}$$

(a) Expresse f em termos da função degrau.

(b) Calcule a transformada de f.

3. Calcule a transformada de Laplace das funções abaixo:

   (a) $t^3 e^{-3t} + u_\pi(t)t^2$

   (b) $-sen(2t) + e^t\delta(t-1)$

   (c) $t^2 e^{-t} cos\, t$

   (d) f onde

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ t^2 - t + 1, & t \ge 1 \end{cases}$$

4. Resolva os problemas de valores iniciais abaixo.

   (a) $y'' - 2y' + 2y = e^{-t} + \cos t$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

   (b) $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, onde

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \le t < 1 \\ 0, & \text{se } 1 \le t < \infty \end{cases}$$

   (c) $y'' - y = f(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, onde f é dada no segundo exercício.

   (d) $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, onde $f(t)$ é periódica com período 2π e

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \le t < \pi \\ -1, & \text{se } \pi \le t < 2\pi \end{cases}$$

   (e) $y^{(4)} - y = u_1(t) - u_2(t)$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

   (f) $y'' + y = u_{\frac{\pi}{2}}(t) + 3\delta(t - \frac{3\pi}{2}) - u_{2\pi}(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$.

5. Exprimir a solução do problema de valor inicial em termos de uma integral convolução: $y'' + 4y' + 4y = g(t)$, $y(0) = 2$ e $y'(0) - 3$.

6. Seja

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \le t < \pi \\ sen\, t, & \text{se } t \ge \pi. \end{cases}$$

   Resolva o problema de valor inicial $y'' - y = f(t)$, $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

7. Usando a propriedade da transformada de Laplace da convolução, obtenha $y(t)$, sabendo-se que esta função satisfaz à seguinte equação

$$y(t) = t + \int_0^t y(t-\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau.$$

8. Consideremos a seguinte **equação integral**:

$$\phi(t) + \int_0^t (t-\xi)\phi(\xi) d\xi = sen\,(2t).$$

(a) Mostrar que se u for uma função tal que $u''(t) = \phi(t)$, então,

$$u''(t) + u(t) - tu'(0) - u(0) = sen\,(2t).$$

(b) Mostrar que a equação integral dada é equivalente ao problema de valor inicial

$$u''(t) + u(t) = sen(2t), \qquad u(0) = 0,\, u'(0) = 0.$$

(c) Resolver a equação integral dada mediante as transformadas de Laplace.

(d) Resolver o problema de valor inicial (b) e verificar que é a mesma solução que foi obtida em (c).

6 Sistemas de Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

6.1 Resultados Gerais

Definição 6.1 *Seja A uma matriz $m \times n$, cujos os elementos são $a_{ij}(t)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Defininos a derivada e a integral de A como sendo respectivamente as matrizes cujos elementos são $[\frac{d}{dt}A]_{i,j} = \frac{d}{dt}a_{i,j}$ e $[\int A(t)dt]_{i,j} = \int a_{i,j}(t)dt$. O complexo conjugado de A, $\overline{A}$, é definido como $[\overline{A}]_{ij} = \overline{a_{i,j}}$. Em particular, se B for uma matriz $n \times p$, temos, $\overline{AB} = \overline{A}\ \overline{B}$. Dizemos que A é uma matriz constante se $a_{i,j}(t)$ é constante para todo i, j. Dizemos que $A(t)$ é contínua em (α, β) se $a_{i,j}(t)$ for contínua neste intervalo para todo i, j.*

Exercício 6.1 *Mostre que $\frac{d}{dt}(A(t)B(t)) = \frac{d}{dt}A(t)\ B(t)) + A(t)\frac{d}{dt}B(t)$. Em particular, se A for constante, temos $\frac{d}{dt}(AB(t)) = A\frac{d}{dt}B(t)$*

Exemplo 6.1 *Seja*

$$A(t) = \begin{pmatrix} e^t & cost \\ 2t & 1 \end{pmatrix}. \tag{176}$$

Calcule $\int A(t)dt$ e $A'(t)$.

Solução.

$$A'(t) = \begin{pmatrix} e^t & -sen\, t \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \int A(t)\, dt &= \begin{pmatrix} \int e^t\, dt & \int cos\, t\, dt \\ \int 2t\, dt & \int 1\, dt \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t + c_1 & sen\, t + c_2 \\ t^2 + c_3 & t + c_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & sen\, t \\ t^2 & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & sen\, t \\ t^2 & t \end{pmatrix} + C. \end{aligned}$$

A matriz $\begin{pmatrix} e^t & sen\, t \\ t^2 & t \end{pmatrix}$ é uma anti-derivada de $A(t)$, ou seja, sua derivada é $A(t)$. ■

Dado um vetor em $\mathbb{C}^n$, ele é da seguinte forma

$$V = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

os vetores do $\mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

são chamados de parte real e imaginária de V, respectivamente, denotados por $\Re(V)$ e $\Im(V)$. Por exemplo, se $V = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \\ 3i-1 \end{pmatrix}$, então, as suas parte real e imaginárias serão $\Re(V) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\Im(V) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, respectivamente.

Exercício 6.2 *Mostre que* $\frac{V+\overline{V}}{2} = \Re(V)$ *e que* $\frac{V-\overline{V}}{2i} = \Im(V)$.

Definição 6.2 *Um sistema de equações lineares de primeira ordem é uma equação da forma*

$$\frac{d}{dt}X(t) = A(t)X(t) + B(t). \tag{177}$$

Se $B(t) \equiv 0$ em (177), dizemos que o sistema é **homogêneo**, neste caso, temos

$$\frac{d}{dt}X(t) = A(t)X(t). \tag{178}$$

Teorema 6.1 (**Existência e Unicidade**). *Sejam $A(t)$ uma matriz $n \times n$, $B(t)$ e $X(t)$ matrizes $n \times 1$ (matrizes colunas). Se $A(t)$ e $B(t)$ forem contínuas em (α, β) e t_o pertence a este intervalo, então para todo X_o, existe uma e somente uma solução do problema de valor inicial:*

$$\frac{d}{dt}X(t) = A(t)X(t) + B(t), \quad X(t_o) = X_o, \tag{179}$$

a qual está definida em (α, β).

Uma solução, $X(t)$, de (179) é a **parametrização** de uma curva no espaço $\mathbb{R}^n$.

Observação 6.1 *Note que o Teorema 6.1 também se aplica ao sistema*

$$X' = A(t)X + B(t), \quad X(t_o) = X_o, \tag{180}$$

quando $X(t)$ e $B(t)$ são matrizes contínuas num intervalo aberto (α, β) contendo t_o. De fato se $B = [B_1 \dots B_n]$ e $X = [X_1 \dots X_n]$, onde X_i e B_i são as i-ésimas colunas de X e B, respectivamente, então, (180) é equivalente a

$$\frac{d}{dt}X_i(t) = A(t)X_i(t) + B_i(t), \quad X_i(t_o) = X_{io}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{181}$$

sendo que para cada sistema dado por (181) vale o Teorema 6.1. Portanto, o problema de valor inicial (180) tem uma e única solução, a qual está definida em (α, β).

Exercício 6.3 (**Princípio da Superposição.**) *Se $X_1(t), \dots, X_n(t)$ forem soluções de (178), então, $X(t) = c_1X_1(t) + \dots + c_nX_n(t)$ também será, onde $c_1, \dots, c_n$ são escalares quaisquer.*

Prova.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}X(t) &= c_1\frac{d}{dt}X_1(t) + \dots + c_n\frac{d}{dt}X_n(t) \\ &= c_1A(t)X_1(t) + \dots + c_nA(t)X_n(t) \\ &= A(t)(c_1X_1(t) + \dots + c_nX_n(t)) = AX(t). \end{aligned}$$

■

Em virtude do Exercício 6.3, o conjunto solução do sistema linear homogêneo (178) é um espaço vetorial.

Exercício 6.4 *Sejam $X_1(t), \dots, X_n(t)$ soluções de (178) num intervalo (α, β) e defina $W(X_1, \dots, X_n)(t) \equiv det\,[X_1(t) \dots X_n(t)]$.*

(a) Se t_o é um ponto de (α, β) tal que $W(X_1 \dots X_n)(t_o) \neq 0$, então toda solução de (178) é da forma

$$X(t) = c_1X_1(t) + \dots + c_nX_n(t) = [X_1(t) \dots X_n(t)]C, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

(b) Ou $W(X_1, \dots, X_n)(t) \equiv 0$ em (α, β) ou $W(X_1, \dots, X_n)(t)$ nunca se anula (α, β).

Prova. Sabemos que para qualquer escolha dos escalares $c_1, \ldots, c_n$, a combinação linear $c_1X_1(t) + \ldots + c_nX_n(t)$ é solução de (178). Dada uma solução $X(t)$ de (178), ela está definida em todo intervalo (α, β), em particular, no ponto t_o. Seja $X(t_o) = X_o$. Tomando $C = (c_1, \ldots, c_n) = [X_1(t_o), \ldots, X_n(t_o)]^{-1}X_o$, então, $X(t) = c_1X_1(t) + \ldots + c_nX_n(t) = [X_1(t) \ldots X_n(t)]C$, será a solução de (178) satisfazendo a condição desejada, o que prova (a).

Por outro lado, se $W(X_1, \ldots, X_n)(\tau) = 0$ para algum $\tau \in (\alpha, \beta)$, então, a equação $c_1X_1(\tau) + \ldots c_nX_n(\tau) = 0$ tem solução não nula, seja C tal solução. Vimos no Exercício 6.3 que $X(t) = [X_1(t) \ldots X_n(t)]C$ é solução de $X' = AX$, além disso, $X(\tau) = 0$, logo, pelo Teorema de Existência e Unicidade, temos $X(t) = 0$ para todo t em (α, β) e como $C \neq 0$, segue-se que $W(X_1, \ldots, X_n)(t) = 0$ em (α, β), o que mostra (b). ∎

Definição 6.3 *Sejam $f_i, \ldots, f_n$ funções definidas em (α, β) e assumindo valores em $\mathbb{R}^n$. Dizemos que estas funções são* **linearmente dependentes** *em (α, β) se*

$$c_1\, f_1(t) + \ldots c_n\, f_n(t) = 0, \quad \forall t \in (\alpha, \beta), \tag{182}$$

admite solução não-trivial, ou seja, pelo menos um dos coeficientes $c_1, \ldots, c_n$ for diferente de zero; caso contrário, dizemos que estas funções são **linearmente dependentes***em (α, β).*

Exercício 6.5 *Se $f_1, \ldots, f_n$ são tais que $det[f_1 \ldots f_n](t_o) \neq 0$, para algum $t_o \in (\alpha, \beta)$, então, $f_1, \ldots, f_n$ são linearmente independentes em (α, β).*

Solução. Suponha que (182) aconteça. Em particular para t_o, teremos

$$[f_1(t_o) \ldots f_n(t_o)]C = 0,$$

como $det\,[f_1 \ldots f_n](t_o) \neq 0$, segue-se que $C = 0$, ou seja, $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$. ∎

Observação 6.2 *Dos Exercícios 6.4 e 6.5, se $X_1, \ldots, X_n$ forem n soluções quaisquer de (178) tais que*

$$W(X_1, \ldots, X_n)(t_o) \neq 0, \ \textit{para qual algum } t_o \in (\alpha, \beta),$$

então, elas formam uma **base** *para o espaço solução de* (178).

Do Teorema de Existência e Unicidade, o problema de valor inicial

$$X' = AX, \quad X(t_o) = e_i,$$

onde e_i é o vetor do $\mathbb{R}^n$ que todas as componentes iguais a zero, exceto a i-ésima que vale 1, tem uma e somente uma solução, X_i, a qual está definida (α, β). Note que $\det[X_1(t_o) \dots X_n(t_o)] = 1 \neq 0$, logo, da Observação 6.2, a **dimensão do espaço solução de (178) é** n.

Dadas n soluções linearmente independentes, $X_1, \dots, X_n$, de (178) é comum defirmos a matriz

$$\Phi(t) = [X_1(t) \dots X_n(t)]. \tag{183}$$

Portanto, a solução geral de (178) é $X(t) = \Phi(t)C$, em particular, se quisermos a solução tal que $X(t_o) = X_o$, basta tomarmos $C = \Phi^{-1}(t_o)X_o$.

Até então, nos restringimos ao sistema homogêneo. A seguir veremos como resolver o sistema

$$X' = A(t)X + B(t). \tag{184}$$

O método da variação dos parâmetros consiste em assumir que a solução de (184) é da seguinte forma:

$$X(t) = \Phi(t)C(t), \tag{185}$$

onde Φ é dada por (183).

Substituindo (185) em (184) e lembrando-se que $\Phi'(t) = A\Phi(t)$, temos $\Phi\, C' = B$, ou seja,

$$C' = \Phi^{-1}(t)B(t)$$

e concluimos que

$$C(t) = \int \phi^{-1}(t)B(t)\, dt.$$

Portanto, a solução geral de (184) é

$$X(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)B(t)\, dt.$$

Se $F(t)$ é uma anti-derivada de $\Phi^{-1}(t)B(t)$, ou seja, se $F'(t) = \Phi^{-1}(t)B(t)$, então, podemos escrever $\int \Phi^{-1}(t)B(t)\, dt = F(t) + C$, onde C é um vetor constante. Portanto, $X(t) = \Phi(t)\, F(t) + \Phi(t)\, C$. Se quisermos a solução tal que $X(t_o) = X_o$, então, devemos ter $X_o = \Phi(t_o)F(t_o) + \Phi(t_o)C$, portanto, $C = \Phi^{-1}(t_o)X_o - F(t_o)$. Logo,

$$\begin{aligned} X(t) &= \Phi(t)\, (F(t) - F(t_o)) + \Phi(t)\Phi^{-1}(t_o)X_o \\ &= \Phi(t) \int_{t_o}^{t} \phi^{-1}(s)B(s)\, ds + \Phi(t)\Phi^{-1}(t_o)X_o \end{aligned}$$

Logo a solução do problema de valor inicial $X' = A(t)X + B(t), \quad X(t_o) = X_o$ é

$$X(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_o)X_o + \Phi(t)\int_{t_o}^{t} \phi^{-1}(s)B(s)\ ds. \tag{186}$$

6.2 Quando a Matrix A for Constante

A seguir, assumiremos que A seja constante e consideraremos o seguinte sistema

$$\frac{d}{dt}X(t) = AX(t). \tag{187}$$

Neste caso, pelo Teorema de Existência e Unicidade, como A é contínua para todo t, as soluções de (187) estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Vamos procurar solução de (187) da seguinte forma:

$$X(t) = e^{\lambda t}V \tag{188}$$

onde V é um vetor constante e não-nulo. Substituindo-se (188) em (187), temos

$$(A - \lambda I)V = 0,$$

portanto, V é um autovetor de A e λ é o autovalor associado.

6.2.1 A Possui n Auto-vetores Linearmente independentes

Exercício 6.6 *Se A possuir n autovetores linearmente independentes, então,*

$$X_1(t) = e^{\lambda_1 t}V_1, \ldots, X_n(t) = e^{\lambda_n t}V_n$$

formam uma base para o espaço solução de (187)*.*

Prova. Note que sendo A constante, do Teorema de Existência e Unicidade, toda solução de (187) está definida para todo t real, em particular, ela está definida em $t_o = 0$; além disso, com $V_1, \ldots, V_n$ são linearmente independentes, $\det[X_1(0) \ldots, X_n(0) = \det[V_1 \ldots, V_n] \neq 0$ e do Exercício 6.4, concluimos a nossa demonstração. ■

Observação 6.3 *Se A é uma matriz simétrica real, então, pelo Teorema Espectral, A possui n autovetores linearmente independentes e a solução geral de* (187) *será da forma*

$$X = c_1\, e^{\lambda_1 t} V_1 + \ldots + c_n\, e^{\lambda_n t} V_n.$$

Exemplo 6.2 *Resolva o problema de valor inicial*

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solução. O polinômio característico de A é $(1-\lambda)^2 - 4$, cujas raízes são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$. Os auto-espaços associados a estes autovalores são $V_{-1} = \{\alpha(1,-2), \alpha \in \mathbb{R}\}$ e $V_3 = \{\alpha(1,2), \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Tomando-se como $V_1 = (1,-2)$ e $V_2 = (1,2)$, temos as seguintes soluções (linearmente independentes) do sistema acima:

$$X_1 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Logo, a solução geral do sistema será

$$\begin{aligned} X(t) &= c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) \\ &= [X_1(t)\ X_2(t)] \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -2e^{-t} & 2e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como queremos que $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, encontramos que $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$. ■

Exemplo 6.3 *Encontre a solução geral do seguinte sistema*

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X.$$

Solução. Note que A é uma matriz real simétrica, logo, ela tem três autovetores linearmente independentes. O polinômio característico de A é $(1+\lambda)^2(\lambda - 2)$, cujas as raízes são $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 2$.

Para o autovalor repetido $\lambda = -1$, o seu auto-espaço é

$$V_{-1} = \{(\alpha, \beta, -\alpha - \beta),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

em particular, $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, formam uma base para V_{-1}. As soluções correspondentes são

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{-t}V_1 = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ X_2(t) &= e^{-t}V_2 = e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para o autovalor $\lambda = 2$, temos o seguinte auto-espaço

$$V_3 = \{\alpha(1, 1, 1),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

e tomaremos como base para este o vetor $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. A solução associada a este é

$$X_3(t) = e^{2t}V_3 = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a solução geral do sistema será

$$X(t) = c_1X_1(t) + c_2X_2(t) + c_3X_3(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{-t} & e^{2t} \\ -e^{-t} & -e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

6.2.2 Autovalores Complexos

Associados a autovetores complexos, teremos soluções complexas e veremos como evitá-las, ou seja, veremos que será sempre possível trabalharmos com soluções reais. De fato, se a matriz A

é real, seus autovalores complexos aparecem aos pares conjugados, ou seja, se $\lambda = \alpha + i\beta$ é um autovalor de A, então $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ também será. Além disso, se V for um autovetor associado a λ, então, $\overline{V}$ será um autovetor associado a $\overline{\lambda}$. De fato, se V é um autovetor associado a λ, então,

$$(A - \lambda I)\, V = 0, \tag{189}$$

tomando-se o complexo conjugado de (189) e lembrando que A é real, temos

$$\left(A - \overline{\lambda} I\right) \overline{V} = 0. \tag{190}$$

As soluções correspondentes aos autovetores V e $\overline{V}$, associados aos autovalores λ e $\overline{\lambda}$, respectivamente, serão $X_1(t) = e^{\lambda t} V$ e $X_2(t) = e^{\overline{\lambda} t}\overline{V}$. Pelo princípio da superposição, $u = (X_1 + X_2)/2$ e $v = (X_1 - X_2)/2i$ também serão soluções de (187). Por outro lado, sendo $X_2 = \overline{X_1}$, então, u e v serão as partes real e imaginárias de X_1. Mas

$$\begin{aligned} X_1 &= e^{(\alpha + i\beta)t} V \\ &= e^{\alpha t}(cos(\beta t) + i\, sen(\beta t))(\Re(V) + i\Im(V)) \\ &= (\Re(V)\cos(\beta t) - \Im(V)\, sen(\beta t))e^{\alpha t} + i(\Re(V)\, sen(\beta t) + \Im(V)\, cos(\beta t))e^{\alpha t}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$u(t) = (\Re(V)\cos(\beta t) - \Im(V)\, sen(\beta t))\, e^{\alpha t} \quad e \quad v(t) = (\Re(V)\, sen(\beta t) + \Im(V)\, cos(\beta t))\, e^{\alpha t}.$$

Exercício 6.7 *Mostre que os vetores u e v são linearmente independentes.*

Exemplo 6.4 *Encontre a solução geral do sistema*

$$X' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} X.$$

Solução. Os autovalores são $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i$. Logo, $\alpha = -\frac{1}{2}$ e $\beta = 1$. Um autovetor associado a $-\frac{1}{2} + i$ é $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Portanto, $\Re(V) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\Im(V) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e concluimos que $u(t) = \begin{pmatrix} e^{-t/2}cost \\ -e^{-t/2}sent \end{pmatrix}$ e $v(t) = \begin{pmatrix} e^{-t/2}sent \\ e^{-t/2}cost \end{pmatrix}$.

Portanto, a solução geral do sistema será $X(t) = c_1 u(t) + c_2 v(t)$. ∎

Exemplo 6.5 *Considere o seguinte sistema*

$$X' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} X. \tag{191}$$

(a) *Encontre a solução geral de* (191).

(b) *Encontre a solução de* (191) *tal que* $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6.2.3 Autovalores Repetidos

Suponha que $\lambda = \rho$ seja um autovalor de A com multiplicidade k. Se a dimensão do auto-espaço de ρ for k, existirão k autovetores linearmente independentes, $V_1, \ldots, V_n$, associados a ρ e $e^{\rho t}V_1, \ldots, e^{\rho t}V_k$ serão soluções linearmente independentes de (178). Se a dimensão do auto-espaço associado a ρ for $l < k$, então, existem l autovetores linearmente independentes neste subespaço, digamos, $V_1, \ldots, V_l$ e $e^{\rho t}V_1, \ldots, e^{\rho t}V_l$, serão linearmente independentes. Fazemos a seguinte pergunta, como encontrar mais $k - l$ soluções linearmente independentes a partir das l soluções acima?

Nos restringiremos ao caso em que um autovalor λ tem multiplicide 2 e a dimensão do autoespaço associado é 1. O caso geral será considerado na seção seguinte quando introduziremos o conceito de exponencial de uma matriz.

Suponha que ρ seja um autovalor de A com multiplicidade 2 e a dimensão do auto-espaço associado seja 1. Seja $\vec{\xi}$ um autovetor associado ao autovalor ρ, então, $X_1 = e^{\rho t}\vec{\xi}$ é uma solução de $X' = AX$. Como encontrar uma segunda solução X_2, tal que X_1 e X_2 seja linearmente independentes? Tentaremos uma solução da forma

$$X_2 = (\vec{\xi}t + \vec{\eta})e^{\rho t}. \tag{192}$$

Substituindo-se (192) em (187), temos

$$t(A - I\rho)\vec{\xi} + (A - I\rho)\vec{\eta} = \vec{\xi},$$

ou, equivalentemente,

$$(A - \rho I)\vec{\xi} = 0 \tag{193}$$

$$(A - \rho I)\vec{\eta} = \vec{\xi}. \tag{194}$$

Exemplo 6.6 *Resolva o problema de valor inicial*

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Solução. Note que o polinômio característico de A é $p(\lambda) = (\lambda+2)^2$. Portanto, os autovalores de A são $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Por outro lado, o auto-espaço associado a este auto-valor é $\{(\alpha(3,-1),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$, cujo dimensão é 1 e $V = (3,-1)$ é uma base para o mesmo. Com isto temos uma solução do sistema dada por

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

Como a multiplicidade do autovalor 2 é maior do que a dimensão do auto-espaço a ele associado, iremos encontrar uma segunda solução, usando a equação (194) que no presente caso é equivalente a

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

A solução deste sistema é $\eta = (1-3\alpha, \alpha) = (1,0) - \alpha(3,-1)$. Podemos fazer $\alpha = 0$ e tomarmos $\eta = (1,0)$. Logo, a segunda solução é

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} te^{-2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t}. \tag{195}$$

Portanto, a solução geral do sistema é

$$X_2(t) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} te^{-2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} \right). \tag{196}$$

Como queremos que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = X(0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

obtemos $c_1 = 1$ e $c_2 = -2$. ■

Observação 6.4 *Se não tivéssemos feito $\alpha = 0$, no exercício 6.6, teríamos uma parcela em X_2 que seria proporcional à solução X_1 e, portanto, poderia ser incorporada a contribuição desta na solução geral do sistema, bastando para isso redefinirmos a constante c_1.*

Exemplo 6.7 *Considere o seguinte sistema*

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X. \tag{197}$$

(a) *Encontre a solução geral de* (197).

(b) *Encontre a solução de* (197) *tal que* $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

solução . ■

6.3 Sistemas de Equações Diferenciais e Diagonalização de Matrizes

Dada uma matriz quadrada constante, A, de ordem n, se A for diagonalizável, ou seja, se existirem uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D, tais tal que

$$P^{-1}AP = D,$$

então, podemos resolver o sistema $X' = AX + B(t)$ de uma maneira simples: fazendo-se a mudança de variáveis $Y = P^{-1}X$, teremos,

$$Y' = DY + K, \quad Y(0) = P^{-1}X(0) \tag{198}$$

onde $K = P^{-1}B = \begin{pmatrix} k_1(t) \\ \vdots \\ k_n(t) \end{pmatrix}$, o qual é equivalente a um sistema de n equações diferenciais desacopladas:

$$\begin{aligned} y_1' &= d_{11}\, y_1 + k_1(t) \\ &\vdots \\ y_n' &= d_{nn}\, y_n + k_n(t), \end{aligned}$$

cujas as soluções são $y_i(t) = y_i(0)e^{d_{ii}t} + \int_0^t e^{d_{ii}(t-s)}k_i(s)ds$.

Se A possuir n autovetores linearmente independentes, uma possível escolha para P é $P = [V_1 \ldots V_n]$. Neste caso, temos $P^{-1}AP = D$, onde D é a matriz diagonal cujo elemento $d_{ii} = \lambda_i$, o autovalor associado a V_i.

No caso particular da matriz A ser **simétrica e real**, ela possui n autovetores ortonormais, $V_1, \ldots, V_n$ e $P = [V_1 \ldots V_n]$ é ortogonal, ou seja, $PP^t = P^tP = I$ ($\Longrightarrow P^{-1} = P^t$) e a passagem de um sistema de coordenada para outro, implementada pela matriz P, corresponde a uma rotação dos eixos coordenados. Ainda neste caso, podemos calcular facilmente potências A^k onde k é um inteiro não-negativo. De fato, $A^k = AA \ldots A = P(P^tAP)(P^tAP) \ldots (P^tAP)P^t = PD^kP^t$, onde

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Exemplo 6.8 *Encontre a solução geral de seguinte sistema*

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vimos no Exercício 6.3 que os auvalores de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ são $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 2$ e os autovalores associados são $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivamente.

Se fizermos $P = [V_1 \, V_2 \, V_3]$, então, $P^tAP = D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Na nova variável $Y = P^tX$, o sistema se transformará em

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 \\ y_2' &= -y_2 \\ y_3' &= 2y_2, \end{aligned}$$

onde a condição inicial é $Y(0) = P^t X(0) = (-1, -1, 1)$, logo, $Y = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ -e^{-t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$.

Voltando ao sistema original, temos

$$X = PY = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ -e^{-t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} + e^{2t} \\ -e^{-t} + e^{2t} \\ 2e^{-t} + e^{2t} \end{pmatrix}.$$

6.4 A Matriz e^{At}

Dada uma matriz constante $n \times n$, A, definimos

$$e^{At} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

Note que se derivarmos termo-termo a expressão acima, obtemos $\frac{d}{dt}\Phi(t) = A\phi(t)$, além disso, $\Phi(0) = I$, logo, e^{At} é a solução do problema de valor inicial

$$X' = AX, \quad X(0) = I, \tag{199}$$

onde I é a matriz identidade de ordem n.

Por outro lado, se $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ forem n soluções linearmente do sistema (199), então, a matriz

$$\Phi(t) = [X_1(t) \ldots X_n(t)][X_1(0) \ldots X_n(0)]^{-1}$$

também é solução de (199) e, pelo Teorema de Existência e Unicidade, devemos ter $\Phi(t) = e^{At}$.

Note que a solução do problema de valor inicial $X' = AX$, $X(0) = X_o$ é $X(t) = \Phi(t)X_o = e^{At}X_o$, para todo t. A seguir veremos uma forma alternativa de calcularmos e^{At}.

Mostraremos que a série que define e^{At} reduz-se a um polinônio igual a $n-1$ em A, veja referência [3] e para isso precisaremos de resultado de Álgebra Linear, o Teorema de Cayley-Hamilton, enunciado a abaixo.

Teorema 6.2 (*Cayley-Hamilton*) *Seja A uma matriz quadrada de ordem n e $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_o$ o seu polinômio característico, então,*

$$P(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_o I = 0, \tag{200}$$

onde I e 0 é são as matrizes identidade e nula de ordem n, respectivamente.

Exemplo 6.9 *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}. \tag{201}$$

O polinômio característico de A é $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$, *note que*

$$\begin{aligned} p(A) &= A^2 - 2A - 3I \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Fixado $t \in \mathbb{R}$, seja, $f(\lambda) = e^{\lambda t}$. Se efetuarmos uma divisão euclidiana de f pelo polinômio característico A, $p(\lambda)$, podemos escrever

$$f(\lambda) = q(\lambda)p(\lambda) + r(\lambda) \tag{202}$$

onde $r(\lambda)$ é um polinômio de grau igual a $n-1$, veja [3]. Pelo Teorema 6.2, como $p(A) = 0$, segue-se de (202) que $e^{At} = f(A) = r(A)$, em particular, e^{At} é um polinômio de grau a $n-1$ em A. Com isso o nosso problema se reduziu ao cálculo de $r(\lambda)$.

Dado um autovalor de $p(\lambda)$, ρ, se a sua multiplicidade for k, a partir de (202) obtemos k equações

$$r(\rho) = f(\rho) = e^{\rho t}, \quad r'(\rho) = f'(\rho) = te^{\rho t}, \ldots, \quad r^{(k-1)}(\rho) = f(\rho) = t^{k-1}e^{\rho t},$$

como $p(\lambda)$ tem exatamente n raízes, contando as suas multiplicidades, obteremos n equações do tipo acima o que nos permite calcular o polinômio $r(\lambda)$, visto que ele sendo um polinômio de grau $n-1$, é completamente, caracterizado por n coeficientes.

Exemplo 6.10 *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcule e^{At}.

Solução. Vimos que os autovalores de A são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$. Como a matriz A é de ordem 2, $r(\lambda, t)$ é um polinômio de primeiro grau um em λ, ou seja, é da forma $r(\lambda, t) = a_o(t) + a_1(t)\lambda$. Temos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} e^{-t} &= r(-1, t) = a_o(t) - a_1(t) \\ e^{3t} &= r(3, t) = a_o(t) - 3a_1(t) \end{aligned}$$

que ao ser resolvido nos dá $a_o = \frac{e^{3t}+3e^{-t}}{4}$ e $a_1 = \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4}$, portanto,

$$e^{At} = r(A, t) = \frac{e^{3t} + 3e^{-t}}{4} I + \frac{e^{3t} - e^{-t}}{4} A = \begin{pmatrix} \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4} \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} \end{pmatrix}.$$

■

Neste exemplo, poderíamos ter calculado e^{At} lembrando-se no Exemplo 6.2 havíamos calculado duas soluções linearmente independentes, X_1 e X_2, do sistema homogêneo associado, portanto, $e^{At} = [X_1(t)\ X_2(t)]\,[X_1(0)\ X_2(0)]^{-1}$.

Exemplo 6.11 *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 21 & -32 & -7 \end{pmatrix}.$$

Calcule e^{At}.

Solução. O polinômio característico de A é $p(\lambda) = (\lambda - 1)\lambda^2$, cujas raízes são $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$.

Para $\lambda = 1$, temos a equação $e^t = f(1) = r(1)$, para o autovalor $\lambda = 0$ com multiplicidade 2, temos duas equações: $1 = f(0) = r(0)$ e $t = f'(0) = r'(0)$. Por outro lado, sendo $r(\lambda)$ de grau 2, podemos escrever $r(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$. Usando os valores encontrados acima, temos

$$\begin{aligned} e^t &= r(1) = a + b + c \\ 1 &= r(0) = c \\ t &= r'(0) = b \end{aligned}$$

Portanto, $c = 1$, $b = t$ e $a = e^t - t - 1$, portanto, $r(\lambda) = \big(e^t - t - 1\big)\,\lambda^2 + t\lambda + 1$. Logo,

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= r(A) \\
&= (e^t - t - 1)A^2 + tA + 1I \\
&= = (e^t - t - 1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 12 & -20 & -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 21 & -32 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3t+1 & -4t & -t \\ 3(1-e^t) & 5e^t - 4 & e^t - 1 \\ 12(e^t-1)+9t & 20(1-e^t) - 12t & 4(1-e^t) - 3t + 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Observação 6.5 *Seja $\Theta(t) = e^{At}e^{-At}$, então, $\Theta(0) = I$ e $\Theta'(t) = 0$, como a matriz identidade I é a única solução de $X' = 0$, $X(0) = I$, segue-se que $\Theta(t) = I$, portanto, a inversa de e^{At} é e^{-At}. Em geral, mostra-se que $e^{At}e^{As} = e^{A(t+s)}$.*

6.5 Sistemas Lineares de Primeira Ordem Não-Homogêneos, A Constante

Considere o seguinte problema de valor inicial

$$X' = AX + B(t), \quad X(0) = X_o, \tag{203}$$

onde A é uma matriz constante.

Tomando-se $\Phi(t) = e^{At}$, então, $\Phi(0) = I$ e $\Phi(t)\phi^{-1}(s) = \Phi(t-s) = e^{A(t-s)}$ e de (186), segue-se que

$$
\begin{aligned}
X(t) &= e^{At}X_o + e^{At}\int_0^t e^{-As}B(s)ds \\
&= e^{At}X_o + \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)ds.
\end{aligned}
$$

Exemplo 6.12 *Encontre a solução geral do sistema*

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solução. Vimos no Exemplo 6.2 que os autovalores de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$. A seguir, calcularemos e^{At}. Seja $r(\lambda) = a\lambda + b$, então,

$$\begin{aligned} -a + b &= r(-1) = e^{-t} \\ 3a + b &= r(3) = e^{3t}, \end{aligned}$$

portanto, $a = \frac{1}{4}\left(e^{3t} - e^{-t}\right)$ e $b = \frac{1}{4}\left(e^{3t} + 3e^{-t}\right)$ e temos $r(\lambda) = \frac{1}{4}(e^{3t} - e^{-t})\ \lambda + \frac{1}{4}(e^{3t} + 3e^{-t})$, logo,

$$\begin{aligned} e^{At} &= r(A) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{3t} - e^{-t}\right)\ A + \frac{1}{4}\left(e^{3t} + 3e^{-t}\right)\ I \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4} \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-As} B(s) ds &= \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{e^{-3s}+e^{s}}{2} & \frac{e^{-3s}-e^{s}}{4} \\ e^{-3s} - e^{-s} & \frac{e^{-3s}+e^{-s}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{s} \\ 0 \end{pmatrix} ds \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{e^{2s}+e^{-2s}}{2} \\ e^{-2s} - 1 \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} \int_0^t \frac{e^{2s}+e^{-2s}}{2}\, ds \\ \int_0^t (e^{-2s} - 1)\, ds \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{2t}+e^{-2t}-1}{2} \\ \frac{(1-e^{-2t})}{2} - t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Logo, a solução geral do sistema será

$$X(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4} \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} \end{pmatrix} \left[X(0) + \begin{pmatrix} \frac{e^{2t}+e^{-2t}-1}{2} \\ \frac{(1-e^{-2t})}{2} - t \end{pmatrix} \right].$$

∎

Neste exemplo, poderíamos ter calculado e^{At} lembrando-se no Exemplo 6.2 havíamos calculado duas soluções linearmente independentes, X_1 e X_2, do sistema homogêneo associado, portanto, $e^{At} = [X_1(t)\ X_2(t)]\,[X_1(0)\ X_2(0)]^{-1}$, o que nos pouparia algum tempo.

6.6 Aplicações

6.6.1 Misturas

Exercício 6.8 *Considere a Figura 30.*

(a) Monte o sistema de equções diferenciais de primeira ordem que descreve as quantidades de sal $Q_1(t)$ *e* $Q_2(t)$*, nos tanques* 1 *e* 2*, respectivamente, sabendo-se que as quantidades iniciais de sal nestes tanques são* $25oz$ *e* $15oz$*, respectivamente.*

(b) Resolva o sistema obtido no ítem (a) e encontre $Q_1(t)$ *e* $Q_2(t)$*.*

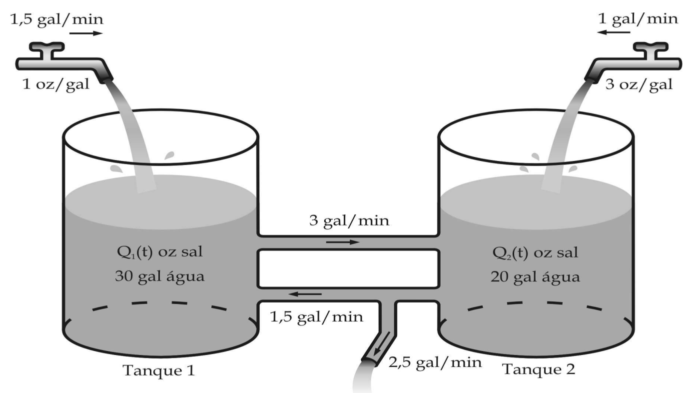

Figura 30: Soluções em dois tanques comunicantes.

Solução. Note os volumes dos dois tanques não mudam com o tempo, visto que a quantidade de solução que entra é igual à quantidade que sai nos mesmos. Portanto, a concentração de solução nos tanques 1 e 2 em cada instante são $\frac{Q_1(t)}{30}$ e $\frac{Q_2(t)}{20}$, respectivamente. A taxa de variação da quantidade de sal no tanque 1, $\frac{dQ_1(t)}{dt}$, é a taxa na qual o sal entra neste tanque, menos a taxa na qual ele sai do mesmo, ou seja,

$$\frac{dQ_1(t)}{dt} = 1,5 + 1,5\ \frac{Q_2(t)}{20} - 3\ \frac{Q_1(t)}{30}.$$

De maneira análoga, temos

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = 3 + 3\ \frac{Q_1(t)}{30} - 4\ \frac{Q_2(t)}{20}.$$

Assim, temos o seguinte sistema linear não-homogêneo

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix}, \quad Q_1(0) = 25,\, Q_2(0) = 15.$$

Deixaremos para o leitor a resolução do ítem (b). ■

6.6.2 Sistemas de Massas e Molas Acoplados

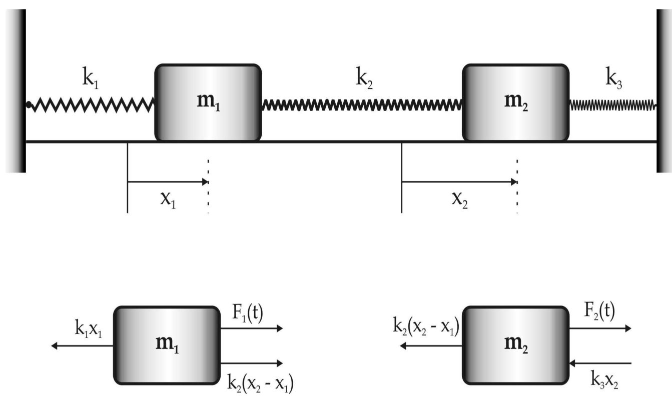

Figura 31: Os deslocamentos x_1 e x_2 são ambos positivos. Na segunda parte desta figura mostra-se o diagrama de forças que atuam em cada uma das massas.

Referido-se ao sistema massa-mola da Figura 31, se fizermos a mudança de variáveis

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

o sistema de equações de primeira ordem obtidas no Exemplo 1.9, pode ser escrito como

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{F_1(t)}{m_1} \\ \frac{F_2(t)}{m_2} \end{pmatrix}, \quad X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_1'(0) \\ x_2(0) \\ x_2'(0) \end{pmatrix}. \tag{204}$$

No presente caso não consideramos atrito, entre as massas e a superfície sobre a qual elas deslizam. Se houvesse **atrito** e admitirmos que ele fosse proporcional às velocidades das massas, teríamos que acrescentar um termo da forma $\gamma_1 \, x_1'$ em (10) e outro da forma $\gamma_2 \, x_2'$ em (11) e fazer a correspondente mudança no sistema (204), ou seja,

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{\gamma_1}{\gamma_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & -\frac{\gamma_2}{\gamma_2} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{F_1(t)}{m_1} \\ \frac{F_2(t)}{m_2} \end{pmatrix}, \quad X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_1'(0) \\ x_2(0) \\ x_2'(0) \end{pmatrix}. \tag{205}$$

Se tivéssemos n massas acopladas, ao aplicarmos a Segunda Lei de Newton teríamos um sistema de n equações diferenciais de segunda ordem, o qual poderia ser transformado num sistema de $2n$ equações lineares de primeira ordem.

Exercício 6.9 *Resolva o sistema (204) assumindo que $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, que não haja nenhuma força externa e que as duas massas estejam inicialmente nas suas posições de equilíbrios com velocidades $x_1'(0) = 1$ e $x_2'(0) = -1$.*

6.6.3 Circuitos Elétricos

A descrição de circuitos elétricos envolvendo indutores, resistências e capacitores, baseia nas leis de Kirchhoff que dizem:

- (**Lei dos nós**) o fluxo total de corrente através de cada nó (ou junção) é zero;
- (**Lei das malhas**) a diferença de tensão total em cada laço (ou malha) fechado é zero.

Além disso, temos as seguintes relações entre a corrente I em ampères passando por cada elemento do circuito e a diferença de potencial V naquele elemento:

$$\begin{aligned} V &= RI, \\ C\frac{dV}{dt} &= I, \\ L\frac{dI}{dt} &= V, \end{aligned}$$

onde a resistência R, a capacitância C e a indutância C, são dados em ohms, farads e henrys.

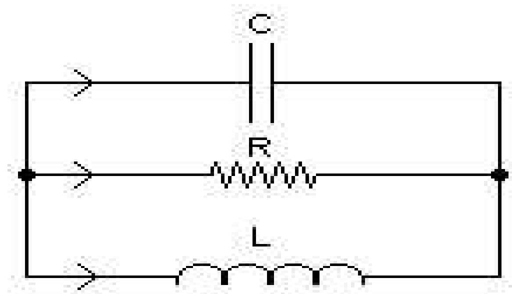

Figura 32: Um exemplo de circuito RLC em paralelo

Considere o circuito da Figura 32. Sejam I_c, I_r e I_l as correntes que passam no capacitor, resistor e indutor, respectivamente. Onde arbitrariamente tomamos os sentidos destas correntes como sendo aquele indicado pelas três setas . Pela lei dos nós,

$$I_c + I_r + I_l = 0,$$

das leis das malhas,

$$\begin{aligned} V_c - V_r &= 0 \\ V_r - V_l &= 0, \end{aligned}$$

ainda temos as seguintes relações

$$\begin{aligned} C\frac{dV_c}{dt} &= I_c \\ V_r &= RI_r \\ L\frac{dI_l}{dt} &= V_l. \end{aligned}$$

Eliminando V_r, V_l, I_c e I_r, temos o seguinte

$$\begin{aligned} CV_c' &= I_c = -(I_r + I_l) = -I_l - \frac{V_r}{R} = -I_l - \frac{V_c}{R} \\ LI_l' &= V_l = V_c \end{aligned}$$

assim, a relação entre a corrente no indutor e queda de tensão no capacitor é dada por

$$\begin{aligned} \frac{dI_l}{dt} &= \frac{V_c}{L} \\ \frac{dV_c}{dt} &= -\frac{I_l}{C} - \frac{V_c}{RC}. \end{aligned}$$

Note que ao resolvermos o sistema acima, encontramos V_c e, conseqüentemente, $V_r = V_c$, $I_r = \frac{V_r}{R}$ e $I_c = -I_l - I_r$; ou seja, obtemos todas as informações desejadas.

6.7 Sistemas de Equações Lineares no Plano - Análise Qualitativa

A seguir classificaremos os diferentes comportamentos das soluções de

$$X' = AX, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det A = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0, \tag{206}$$

onde os elementos de A são reais. Se λ_1 e λ_2 são os autovalores de A, existem vários casos a serem considerados.

1. Os autovalores λ_1, λ_2 **são reais.**

Sejam v_1 e v_2 os autovetores unitários de A, associados a λ_1 e λ_2, respectivamente. A solução geral do sistema (206) é

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2, \tag{207}$$

onde c_1, c_2 são constantes reais arbitrárias, $c_1^2 + c_2^2 > 0$.

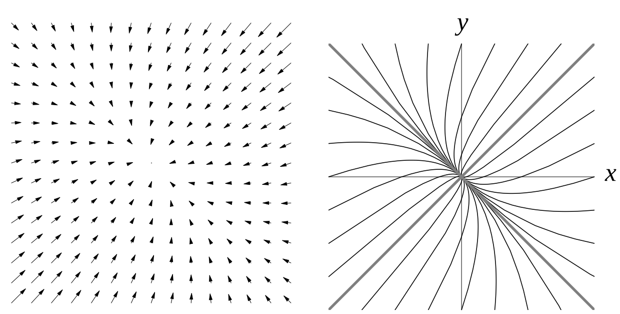

Figura 33: **Caso 1a** - um exemplo típico quando as raízes são negativas.

Caso 1a - as raízes são **negativas** ($\lambda_2 < \lambda_1 < 0$). Todas as soluções aproximam de zero quando $t \to \infty$; neste caso, a origem é estável e chamada de **nó estável ou atrator**. Um exemplo típico onde os autovalores são negativos é dado pelo sistema

$$X' = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} X,$$

cuja solução geral é (o seu campo de vetores e algumas de suas trajetórias são mostrados na Figura 33)

$$X = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Caso 1b - as raízes são **positivas** $(0 < \lambda_2 < \lambda_1)$. Todas as soluções se afastam da origem quando $t \to \infty$; neste caso, origem é **instável** e chamada de **nó instável** ou **repulsor**. Um exemplo típico onde um dos autovalores é positivo e o outro é negativo é dado pelo sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X,$$

cuja solução geral é

$$X = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

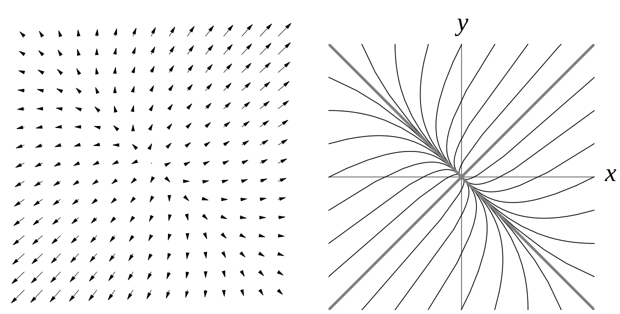

Figura 34: **Caso 1b** - as raízes são positivas, $0 < \lambda_2 < \lambda_1$.

Caso 1c - uma raiz é **negativa** e a outra é **positiva** $(\lambda_2 < 0 < \lambda_1)$. A origem é instável e é chamada de **ponto de sela**. Se denotarmos por L_1 e L_2 as retas passando pela origem e paralelas a v_1 e v_2, respectivamente. As órbitas que estão sobre L_2 tenden a zero quando $t \to \infty$ e as órbitas que estão sobre L_1 tenden a zero quando $t \to -\infty$. Todas as outras órbitas são ilimitadas.

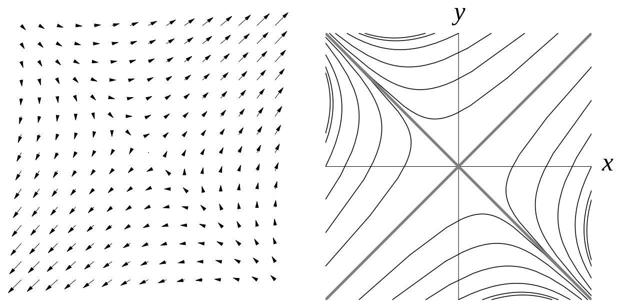

Figura 35: **Caso 1c.** Uma raiz positiva e uma raiz negativa, $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.

2. Os autovalores λ_1 e λ_2 **são complexos.**

Como A é real, temos $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, α, β real, $\beta > 0$, neste caso, $v_2 = \overline{v_1}$. Pelo princípio da superposição,

$$X(t) = c_1 e^{(\alpha+i\beta)t} v_1 + \overline{c_1} e^{(\alpha-i\beta)t} \overline{v_1} = 2Re(c_1 e^{(\alpha+i\beta)t} v_1), \tag{208}$$

é solução (real) do sistema, onde c_1 é um número complexo arbitrário.

Se $v_1 = u + iv$, onde u e v são vetores reais unitários e linearmente independentes e se $c_1 = ae^{i\delta}$, onde a e δ são reais, (208) pode ser escrita como

$$X(t) = 2ae^{\alpha t}(ucos(\beta t + \delta) - vsen(\beta t + \delta)). \tag{209}$$

É fácil mostrar que (210) é a solução geral (real) do sistema, ou seja, para toda condição inicial X_0 podemos escolher as constantes a e δ tais que $X(0) = X_0$.

A expressão (210) nos dá todas as propriedades essenciais das soluções. Se $\beta t + \delta = k\pi$, k um inteiro, então, a órbita da solução corta a reta U gerada por u e se $\beta t + \delta = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, k inteiro, ela corta a linha V gerada por v. As componentes da curva solução na direção u e v oscilam e estão fora de fase de $\frac{\pi}{2}$ radianos. Portanto, a órbita deve parecer com uma **espiral**.

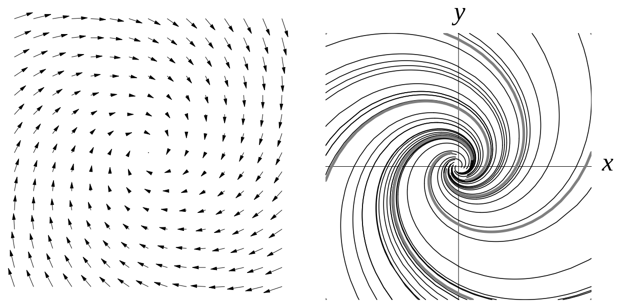

Figura 36: **Caso 2a.** *Raízes complexas com partes reais negativas.*

Caso 2a - Raízes complexas com **partes reais negativas**(a origem é **estável** e é chamada de **foco estável**). Todas as soluções tendem a zero quando $t \to \infty$.

Caso 2b - Raízes complexas com **partes reais positivas**(a origem é **instável** e é chamada de **foco instável**). Todas as soluções tendem a zero quando $t \to -\infty$.

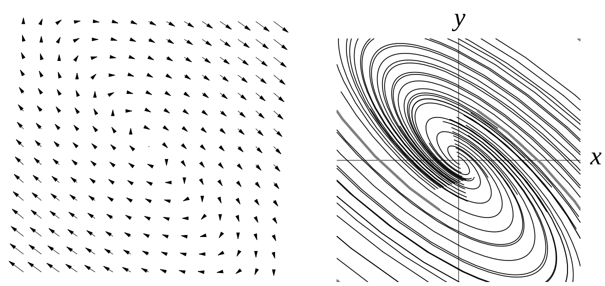

Figura 37: **Caso 2b.** *Raízes complexas com partes reais positivas.*

Caso 2c - Raízes **imaginárias puras** (a origem é **estável** e é chamada de **centro**). A solução real geral é

$$X(t) = a(u\,cos(\beta t + \delta) - v\,sen(\beta t + \delta)) = a\,[u\,v] \begin{pmatrix} cos(\beta t + \delta) \\ -sen(\beta t + \delta) \end{pmatrix}. \tag{210}$$

De (210), temos

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} cos(\beta t+\delta) \\ -sen(\beta t+\delta) \end{pmatrix} &= a^{-1}[u\,v]^{-1}X \\
&= \frac{a^{-1}}{\det[u\,v]}\begin{pmatrix} v_2 & -v_1 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \frac{a^{-1}}{\det[u\,v]}\begin{pmatrix} v_2\,x - v_1\,y \\ -u_2\,x + u_1\,y \end{pmatrix}. \qquad (211)
\end{aligned}$$

Tomando-se o quadrado da norma de (211), temos

$$\begin{aligned}
(a\ \det[u\,v])^2 &= (v_2x - v_1y)^2 + (-u_2x + u_1y)^2 \\
&= \left(u_2^2 + v_2^2\right)x^2 + \left(u_1^2 + v_1^2\right)y^2 - 2(u_1u_2 + v_1v_2)\,xy \qquad (212)
\end{aligned}$$

logo, a órbita é descrita pela seguinte cônica:

$$\left(u_2^2 + v_2^2\right)x^2 - 2(u_1u_2 + v_1v_2)\,xy + \left(u_1^2 + v_1^2\right)y^2 - (a\ \det[u\,v])^2 = 0, \qquad (213)$$

ou seja,

$$X^tBX - (a\ \det[u\,v])^2 = 0, \qquad (214)$$

onde

$$B = \begin{pmatrix} u_2^2 + v_2^2 & -u_1u_2 - v_1v_2 \\ -u_1u_2 - v_1v_2 & u_1^2 + v_1^2 \end{pmatrix}.$$

Mostraremos que os autovalores de B são positivos, portanto, a cônica é uma elipse. De fato, se λ_1 e λ_2 são os autovalores de B, então,

$$\lambda_1\lambda_2 = \det B = (u_1v_2 - u_2v_1)^2 = (\det A)^2 > 0$$

e

$$\lambda_1 + \lambda_2 = b_{11} + b_{22} = u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 = ||u||^2 + ||v||^2 = 2,$$

o que implica que os autovalores de B são positivos.

Logo, toda solução é periódica (elipses com centro na origem, visto que na expressão da cônica, dada por (214) não aparecem termos proporcionais a x e a y) com período $\frac{2\pi}{\beta}$.

Um exemplo onde as raízes são imaginárias puras é o seguinte sistema $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X$, cuja solução geral é

$$X(t) = \begin{pmatrix} cost & sent \\ sent & -cost \end{pmatrix} C.$$

Portanto, $||X(t)|| = ||C||$, para todo t e as órbitas são circulares, círculos de raios $||C||$, com centro na origem (veja Figura 38).

3. **Autovalores iguais** (Nó impróprio)

Caso 3a. Se tivermos **dois autovetores linearmente indepedentes**, v_1 e v_2 associados a λ, a solução geral será

$$X(t) = (c_1 v_1 + c_2 v_2)e^{\lambda t}, \tag{215}$$

onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias. As órbitas são linhas retas passando pela origem.

Caso 3b. Se houver **somente um autovetor linearmente independente**, v_1, associado a λ, então, a solução real geral do sistema será

$$X(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\lambda t} v_2, \tag{216}$$

onde v_2 é qualquer vetor independente de v_1. A tangente à órbita torna-se paralela a v_1 quando $t \to \pm\infty$.

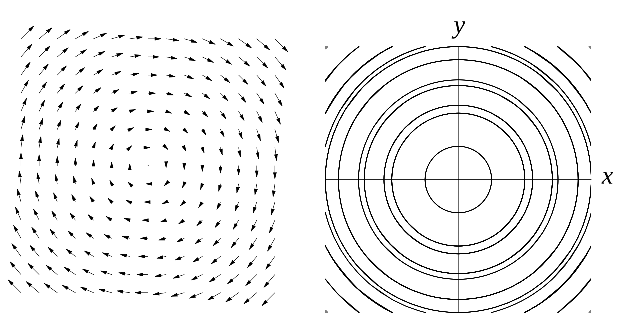

Figura 38: *Caso 3c - Raízes imaginárias puras.*

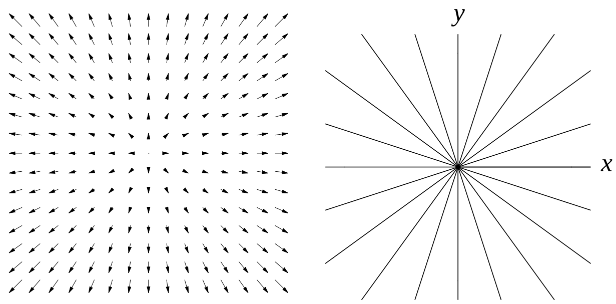

Figura 39: **Caso 3a.** *Raízes repetidas e dois autovetores linearmente independentes.*

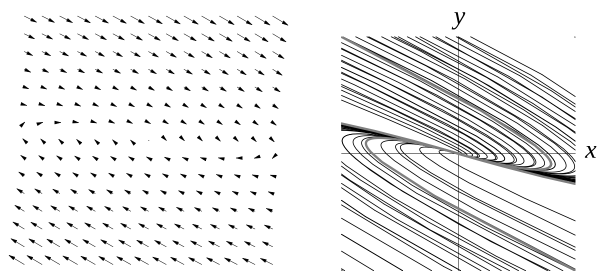

Figura 40: **Caso 3b.** *Raízes repetidas e apenas um autovetor linearmente independente.*

6.8 Exercícios Adicionais

1. Encontre os autovalores e autovetores das matrizes abaixo, bem como uma base para o auto-espaço associado a cada autovalor.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Verifique que o vetor

$$X = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-t} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

é solução do sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} X.$$

Nos exercícios $3-9$, resolva os seguintes problemas de valores iniciais dados.

3.

$$X' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4.

$$X' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

5.

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6.

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7.

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8.

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

9.

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} X, \qquad X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -30 \end{pmatrix}.$$

Nos exercícios 10 e 11, encontre as soluções gerais dos sistemas dados.

10.

$$X' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X.$$

11.

$$t\,X' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X, \quad t > 0.$$

Assuma que a solução seja da forma $X = Vt^{\lambda}$, onde V é um vetor constante e λ uma constante, ambos a serem determinados.

Nos exercícios 12 e 13, resolva os sistemas de equações diferenciais não-homogêneos dados

12.

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}.$$

13.

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -cos\,t \\ sen\,t \end{pmatrix}.$$

14. No sistema de equações diferenciais abaixo determine os autovalores em função de α e determine o valor crítico de α para o qual o comportamento das soluções muda bruscamente. Esboce os retratos de fase para os valores de α ligeiramente maiores e ligeiramente menores que o valor crítico.

$$X' = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} X.$$

7 Respostas dos Exercícios

Seção 2

1. Neste exercício usaremos o **Teorema de Existência e Unicidade** para problema de valor inicial de equação linear de primeira ordem, ou seja, o Teorema 2.1.

Ao dividirmos a equação por $t-3$, temos

$$y' + \frac{\ln t}{t-3}\, y = \frac{2t}{(t-3)cos(t)}, \tag{217}$$

portanto, $p(t) = \frac{\ln t}{t-3}$ e $g(t) = \frac{2t}{(t-3)cos(t)}$.

Note que o maior intervalo aberto contendo o ponto $x_o = 2$ no qual as funções p e g são contínuas é $\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$, logo, baseado no teorema acima, concluimos que toda solução da equação diferencial (217) com condição inicial em $x_o = 2$ está definida pelo menos neste intervalo.

2. Se dividirmos a equação por $1-t^2$, ela se tornará

$$y' - \frac{2t}{1-t^2}\, y = \frac{1}{1-t^2}, \tag{218}$$

logo, $p(t) = -\frac{2t}{1-t^2}$, portanto, o fator integrante será

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2t}{1-t^2}dt} = e^{\ln(1-t^2)+k} = (1-t^2)e^k.$$

Fazendo $k=0$, teremos $\mu(t) = 1-t^2$. Ao multiplicarmos (218) por $1-t^2$, teremos

$$\left((1-t^2)\right)' = 1$$

portanto, $(1-t^2)y = \int 1\, dt = t + c$, logo, a solução geral é

$$y = \frac{t+c}{1-t^2}.$$

3. Se multiplicarmos a equação por t, teremos

$$y' + \frac{2}{t}\, y = t\, sen(t),$$

portanto, $p(t) = \frac{2}{t}$ e fator integrante é $\mu(t) = t^2$. Ao multiplicarmos a equação pelo fator integrante teremos

$$\left(t^2 y\right)' = t\, sen(t),$$

ou seja,

$$t^2y = \int tsen(t)dt = -tcos(t) + sen(t) + c,$$

portanto, a solução geral é

$$y = \frac{-t\,cos(t) + sen(t) + c}{t^2}.$$

4. O fator integrante é $\mu(t) = 1-t^2$, logo, a equação é equivalente a $\left((1-t^2)y\right)' = 1-t^2$. Portanto, a solução geral é $y = \frac{t-\frac{t^3}{3}+c}{1-t^2}$.

5. Note que $p(t) = tg(t) = \frac{sen(t)}{cos(t)}$, logo, $\mu(t) = e^{\int \frac{sen(t)}{cos(t)}dt} = e^{-cos(t)+k} = -cos(t)$, fizemos $k=0$. Como qualquer múltiplo escalar não-nulo do fator integrante também é um fator integrante, tomaremos $\mu(t) = cos(t)$. Portanto, ao multiplicarmos a equação por $cos(t)$, teremos

$$(y\,cos(t))' = tsen(2t)cos(t) = \frac{t}{2}\left(sent(3t) + sen(t)\right),$$

portanto,

$$y\,cos(t) = \frac{1}{2}\int tsen(3t)dt + \frac{1}{2}\int tsen(t)dt = -\frac{t}{6}\,cos(3t) + \frac{1}{18}sen(3t) - t\,cos(t) + sen(t) + c.$$

Logo, a solução geral é

$$y = \frac{-\frac{t}{6}\,cos(3t) + \frac{1}{18}sen(3t) - t\,cos(t) + sen(t) + c}{cos(t)}.$$

6. A equação é de variáveis separáveis e é equivalente a

$$\frac{dy}{cos^2(2y)} = cos^2x\,dy = (1 - cos(2x))dx$$

logo, após integração, temos $\frac{1}{2}\,tg(2y) = x - \frac{1}{2}sen(2x) + \frac{c}{2}$, portanto, a solução geral é

$$y = \frac{tg^{-1}\left(2x - sen(2x) + c\right)}{2}.$$

7. A equação é de variáveis separáveis e é equivalente a $(y+e^y)dy = (x - e^{-x})dx$, que após integração nos dá $y + e^y = \frac{x^2}{2} + e^{-x} + c$, que é a solução geral da equação dada implicitamente.

8. Esta equação é homogênea, pois ela pode ser escrita como

$$y' = \frac{y/x - 4}{1 - y/x} = f(y/x),$$

onde $f(u) = \frac{u-4}{1-u}$; portanto, temos

$$\int \frac{du}{\frac{u-4}{1-u} - u} = \int \frac{dx}{x},$$

ou seja,

$$\int \frac{du}{(u-2)(u+2)} = \int \frac{dx}{x},$$

ou ainda,

$$\frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2} \right) du = \int \frac{dx}{x},$$

portanto, $\frac{1}{4} \ln |\frac{u-2}{u+2}| = \ln |x| + c$. Tendo em vista que $u = \frac{y}{x}$, temos a seguinte solução geral

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{\frac{y}{x} - 2}{\frac{y}{x} + 2} \right| = \ln |x| + c.$$

9. Note que esta equação é de Bernoulli, com $n = 3$, portanto, se fizermos a mudança de variáveis $u = y^{1-n} = y^{-2}$, ela será transformada na seguinte equação linear de primeira ordem

$$u' + 2\epsilon u = 2\sigma,$$

cuja solução geral é $u = \frac{\sigma}{\epsilon} + ce^{2\epsilon t}$. Como $y = \pm u^{-\frac{1}{2}}$, temos $y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon} + ce^{2\epsilon t}}}$, visto que $y(0) = 1 > 0$, tomaremos o sinal $+$ e a escolha de c é $c = 1 - \frac{\sigma}{\epsilon}$, portanto, a solução desejada é $y = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon} + (1 - \frac{\sigma}{\epsilon})e^{2\epsilon t}}}$.

10. A equação é de variáveis separáveis e é equivalente a $y^{-3}dy = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$, a qual integrada nos conduz a $-\frac{y^{-2}}{2} = \sqrt{1+x^2} + k$, como queremos que $y(0) = 1$, temos $k = -\frac{3}{2}$. Portanto, $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1+x^2}}}$. Devemos tomar o sinal $+$, pois, $y(0) = 1$.

11. A equação é de variáveis separáveis e é equivalente a $(3y^2 - 4)dy = 3x^2 dx$, que uma vez integrada nos dá $y^3 - 4y = x^3 + c$. Como queremos que $y(1) = 0$, temos $c = -1$, portanto, a solução desejada é dada implicitamente pela equação $y^3 - 4y - x^3 + 1 = 0$, cujo gráfico é mostrado na Figura 41.

Note que quando $3y^2 - 4 = 0$, ou seja, $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1.16$, as tangentes à curva são verticais, logo, o domínio da solução que passa por $(1, 0)$, ou seja, o intervalo

$$\left(\left(1 - \frac{16\sqrt{3}}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(1 + \frac{16\sqrt{3}}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \right).$$

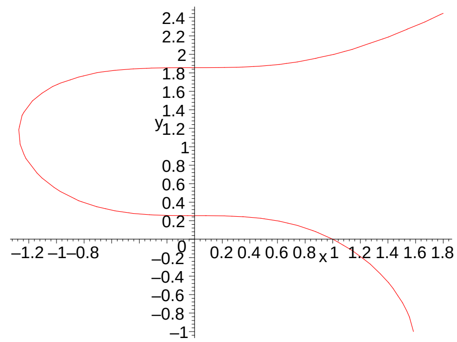

Figura 41: *Gráfico da curva* $y^3 - 4y - x^3 + 1 = 0$.

12. Sejam $M(x,y) = 2xye^y$ e $N(x,y) = x^2(y+1)e^y$, então, $M_y = 2x(y+1)e^y = N_x$, para todo x, y. Logo, a equação é exata no plano todo. A solução geral será da forma $\psi(x,y) = c$ onde ψ é determinada a partir das seguintes equações:

$$\psi_x = \int 2xye^y dx + h(y) \tag{219}$$

$$\psi_y = x^2(y+1)e^y. \tag{220}$$

De (219), segue-se que

$$\psi(x,y) = x^2ye^y + h(y) \tag{221}$$

e de (220) e (221), temos

$$x^2(y+1)e^y + h'(y) = x^2(y+1)e^y,$$

logo, $h'(y) = 0$, portanto, $h(y) = k$. Faremos $k = 0$. Portanto, $\psi(x,y) = x^2ye^y$ e a solução geral é $x^2ye^y = c$. Como queremos que $y(1) = 1$, devemos ter $c = e$; portanto, a solução desejada é $x^2ye^y = e$.

Note que a curva $x^2ye^y = e$ é invariante à operação $x \longrightarrow -x$, logo, o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo dos y; além disso, como o lado direito da mesma é sempre positivo, isto significa que y tem ser sempre positivo. Logo, a equação $x^2ye^y = e$ define duas curvas, um no primeiro quadrante e o outro no segundo quadrante e cada um define y como função de x, devemos tomar aquele pedaço que passa pelo ponto $(1,1)$, o qual define uma função decrescente de x, pois, quando x cresce, y deve decrescer para manter a quantidade x^2ye^y constante e igual a e; veja a Figura 42.

13. Note que esta equação é de variáveis separáveis e é equivalente a

$$\frac{dy}{y} = \frac{x^2dx}{1+x^3},$$

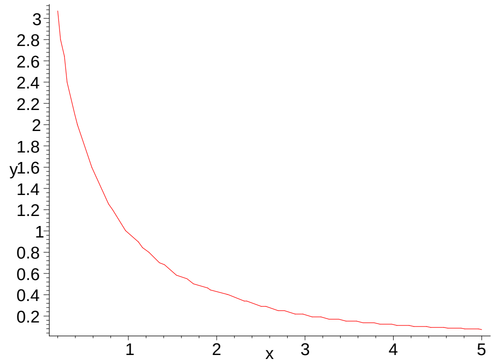

Figura 42: O gráfico de $x^2ye^y = e$, $x > 0$.

que é facilmente integrável e nos leva a $\ln|y| = \frac{1}{3}\ln|1+x^3|+c$. Como queremos $y(0) = 1$, devemos tomar $c = 0$. Logo, a solução é $y = \left(1+x^3\right)^{\frac{1}{3}}$, definida para todo x real.

14. Esta equação é linear e seu fator integrante é $e^{x+2\ln|x|+k}$, fazendo-se $k = 0$, teremos $\mu(x) = x^2e^x$. Logo, o multiplicarmos a equação por este fator integrante e se torna $(x^2e^xy)' = x^5$, logo, a solução geral é $y = (\frac{x^3}{5} + cx^{-2})e^{-x}$. Como queremos que $y(1) = 2$, devemos tomar $c = 2e - \frac{1}{5}$. Portanto a solução é $y = \left(\frac{x^3}{5} + (2e - \frac{1}{5})x^{-2}\right) e^{-x}$, a qual está definida para todo x positivo.

15. A população satisfaz à seguinte equação diferencial $P' = kP$, cuja solução geral é da forma $P(t) = Ce^{kt}$. São dados $P(1650) = 6 \times 10^8$ e $P(2000) = 6 \times 10^9$, portanto, temos

$$10 = \frac{P(2000)}{P(1650)} = e^{(2000-1650)k} = e^{350k},$$

portanto, $k = \frac{\ln 10}{350}$. Temos que $P(2000) = 6 \times 10^9 = Ce^{2000k}$, logo, $C = 6 \times 10^9e^{-2000k}$, então,

$$P(t) = 6 \times 10^9e^{-2000k}e^{kt} = 6 \times 10^9e^{(t-2000)k}.$$

Queremos encontrar t tal que $P(t) = 30 \times 10^9$, portanto, $e^{(t-2000)k} = 5$, ou seja, $t = \frac{\ln 5}{k} + 2000 = \frac{350\ln 5}{\ln 10} + 2000 \approx 2244, 64$.

16. A equação que descreve o processo de decaimento é $Q'(t) = -kQ$, portanto, $Q(t) = Ce^{-kt}$, como $Q(0) = 100$ gramas, segue-se que $Q(t) = 100e^{-kt}$, com t dado em horas. Por outro lado, $Q(1) = Q(0)/2$; portanto, $e^{-k} = \frac{Q(1)}{Q(0)} = \frac{1}{2}$, donde se conclui que $k = \ln 2$. Assim, $Q(t) = 100e^{-(\ln 2)t}$. Queremos encontrar t tal que $Q(t) = 20$ gramas, ou seja, $20 = 100e^{-(ln2)t}$, donde se conclui que $t = \frac{\ln 5}{\ln 2}$ horas que é aproximadamente 2 horas e 20 minutos.

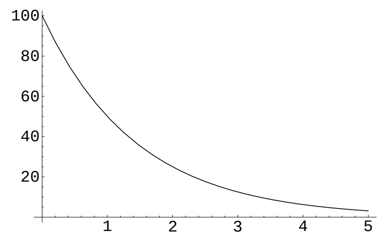

Figura 43: *Gráfico de* $Q(t) = 100e^{-(\ln 2)t}$.

17. A equação $y' + \frac{2}{3}\,y = 1 - \frac{1}{2}\,t, \quad y(0) = y_0$. é linear de primeira ordem. O seu fator integrante é $\mu(t) = e^{\frac{2}{3}t}$. Portanto, a solução geral da mesma é

$$y(t) = \frac{\int (1 - \frac{1}{2}t)e^{\frac{2}{3}t}dt}{e^{\frac{2}{3}t}} = \frac{\left(\frac{21}{8} - \frac{3}{4}t\right)e^{\frac{2}{3}t} + C}{e^{\frac{2}{3}t}}.$$

Em vista da condição inicial, devemos tomar $C = y_o - \frac{21}{8}$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é $y(t) = \frac{21}{8} - \frac{3}{4}t + (y_o - \frac{21}{8})e^{-\frac{2}{3}t}$. A fim de que o gráfico de y toque o eixo dos t's sem atravessá-lo, é necessário que haja um instante t_o, tal que $y(t_o) = 0$ e $y'(t_o) = 0$; portanto, temos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} 0 &= y(t_o) = \frac{21}{8} - \frac{3}{4}t_o + \left(y_o - \frac{21}{8}\right)e^{-\frac{2}{3}t_o} \\ 0 &= y'(t_o) = -\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\left(y_o - \frac{21}{8}\right)e^{-\frac{2}{3}t_o} \end{aligned}$$

cuja solução é $t_o = 2$ e $y_o = \frac{21}{8} - \frac{9}{8}\,e^{\frac{4}{3}}$, veja Figura 44.

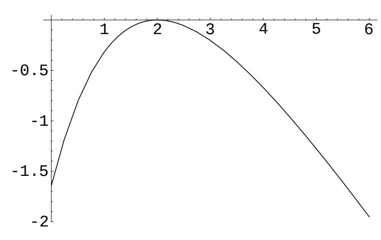

Figura 44: *Gráfico de* $\frac{21}{8} - \frac{3}{4}\,t - \frac{9}{8}\,e^{\frac{4-2t}{3}}$.

18. Note que $(y_1 + y_2)' + p(y_1 + y_2) = (y_1' + p\,y_1) + (y_2' + p\,y_2) = 0 + g(t) = g(t)$.

Seção 3

1. Note que $p(x) = \frac{x}{x^2-3}$, $q(x) = \frac{\ln x}{(x-0.5)(x^2-3)}$ e $g(x) = 0$; portanto, o maior intervalo aberto contendo o ponto $x_o = 1$ no qual as funções acima são contínuas é $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$. Segue-se do Teorema de Existência e Unicidade que este intervalo faz parte do domínio da solução do problema de valor inicial dado (independente dos valores de y e y' em $x_o = 1$).

2. A equação característica é $\lambda^2 + 2b\lambda + 1 = 0$, cujas raízes são $\lambda = -b \pm \sqrt{b^2-1}$. Casos possíveis:

(i) Se $|b| > 1$, teremos duas raízes reais distintas. A solução geral é

$$y = c_1 e^{(-b-\sqrt{b^2-1})t} + c_1 e^{(-b+\sqrt{b^2-1})t},$$

a qual tende para zero quando t tende a infinito, independente dos valores de c_1 e c_2, pois, $-b \pm \sqrt{b^2-1} < 0$.

(ii) Se $b = \pm 1$, a solução geral será

$$y = (c_1 + c_2 t)\, e^{-bt},$$

a qual tenderá a zero quando t tende a infinito independente de c_1 e c_2 apenas se $b = 1$.

(iii) Se $|b| < 1$, a solução geral será

$$y = e^{-bt}\left(c_1 \cos\left(\sqrt{1-b^2}\, t\right) + c_2\, sen\, \left(\sqrt{1-b^2}\, t\right)\right),$$

a qual tende à zero quando t tende a infinito independente de c_1 e c_2 somente se $0 < b < 1$.

Resumindo, se $b > 0$, as soluções tenderão a zero quando t tende a infinito, independente dos valores de c_1 e de c_2.

3. Note que a equação característica é $4\lambda^2 + a\lambda + (a-4) = 0$, cujas raízes são $\lambda = \frac{-a \pm |a-8|}{8}$. Temos as seguintes possibilidades:

(i) Se $a = 8$, neste caso $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Portanto, a solução geral é $y = (c_1 + c_2\, t)\, e^{-t}$, que tende a zero quando t tende a infinito independente de c_1 e de c_2.

(ii) Se $a > 8$, temos duas raízes reais distintas $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \frac{a-4}{4} > 0$.

(iii) Se $a < 8$, temos duas raízes reais distintas $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = \frac{4-a}{4}$ a qual será negativa se $4 < a < 8$.

Nos casos (ii) e (iii), como temos duas raízes reais distintas, a solução geral tenderá a zero quando t tende a infinito, independente dos valores de c_1 e c_2, somente se λ_1 e λ_2 forem negativos, ou seja se a pertencer ao intervalo $(4, 8)$.

Portanto, a solução vai para zero quando t tende a infinito independente de c_1 e c_2, somente se a pertencer ao intervalo $(4, 8]$.

4. Neste caso a equação característica da equação homogênea associada é $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$. Como $g(t) = 3\,e^{-t}$, segue-se que $\alpha = -1$, $\beta = 0$ e $n = 0$. Como $\alpha + i\beta = -1$ não é raiz da equação característica, segue-se que $s = 0$, portanto, a solução particular da equação é da forma $Y = Ae^{-t}$. Substituindo esta expressão na equação diferencial, temos $A = -\frac{3}{4}$. Portanto, $Y = -\frac{3}{4}e^{-t}$ é uma solução particular da equação diferencial. Assim, a solução geral é

$$y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t} - \frac{3}{4}e^{-t}.$$

Como queremos a solução que satisfaz às condições $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$, temos que $c_1 + c_2 = \frac{3}{4}$ e $3c_1 - 2c_2 = -\frac{3}{4}$; portanto, $c_1 = \frac{3}{20}$ e $c_2 = \frac{3}{5}$ e a solução desejada é

$$y = \frac{3}{20}\,e^{3t} + \frac{3}{5}\,e^{-2t} - \frac{3}{4}\,e^{-t}.$$

5. A equação característica da equação homogênea associada é $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$, cujas raízes são $\lambda = 2 \pm i$. Como $g(t) = sen\,(2t)$, segue-se que $\alpha = 0$, $\beta = 2$ e $n = 0$. Visto que $\alpha + i\beta = 2\,i$ não é raiz da equação característica, segue-se que $s = 0$; portanto, a solução particular é da seguinte forma: $Y = A\cos(2t) + B\,sen\,(2t)$. Substituindo esta expressão na equação diferencial temos $(A - 8B)\cos(2t) = +8A + B)\,sen\,(2t) = sen\,(2t)$. Logo, devemos ter $A - 8B = 0$ e $8A + B = 1$; ou seja, $A = \frac{8}{65}$ e $B = \frac{1}{65}$. Disso, concluimos que a solução geral é

$$y = (c_1 \cos t + c_2\,sen\,t)\,e^{2t} + \frac{8}{65}\cos(2t) + \frac{1}{65}sen\,(2t).$$

Como queremos $y(0) = 0 = y'(0)$, segue-se que $c_1 = -\frac{8}{65}$ e $c_2 = \frac{3}{65}$. Portanto, a solução é

$$y = \left(-\frac{8}{65}\cos t + \frac{3}{65}\,sen\,t\right) e^{2t} + \frac{8}{65}\,\cos(2t) + \frac{1}{65}\,sen\,(2t).$$

6. A equação característica da equação homogênea associada é $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -3$. Como $g(t) = 3t$, segue-se que $\alpha = 0 = \beta$ e $n = 1$. Como que $\alpha + i\beta = 0$ não é raiz da equação característica, segue-se que $s = 0$; portanto, a solução particular é da seguinte forma: $Y = A + Bt$. Substituindo esta expressão na equação diferencial, temos, $6A + 5B = 0$ e $6B = 3$; portanto, $B = \frac{1}{2}$ e $A = -\frac{5}{12}$. Logo a solução geral é

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} - \frac{5}{12} + \frac{t}{2}.$$

Como queremos $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$, temos que $c_1 + c_2 = \frac{5}{12}$ e $2c_1 + 3c_2 = -\frac{3}{2}$; portanto, $c_1 = \frac{11}{4}$ e $c_2 = -\frac{7}{3}$.

$$y = \frac{11}{4}\,e^{-2t} - \frac{7}{3}\,e^{-3t} + \frac{t}{2} - \frac{5}{12}.$$

7. A equação característica da equação homogênea associada é $\lambda^2 + 4 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = \pm 2i$. Neste problema vamos chamar de $g_1 = t^2$ e $g_2 = 3e^t$ e consideraremos as seguinte equações $y'' + 4y = g_i$, $i = 1, 2$. Para g_1, temos $\alpha = 0 = \beta$ e $n = 2$, como $\alpha + i\beta = 0$ não é raiz da equação característica, segue-se que $s = 0$; portanto, a solução particular de $y'' + 4y = g_1$ será da forma $Y_1 = At^2 + Bt + C$, substituindo esta expressão na equação $y'' + 4y = g_1$, encontramos $A = \frac{1}{4}$, $B = 0$ e $C = -\frac{1}{8}$; logo, $Y_1 = \frac{t^2}{4} - \frac{1}{8}$.

Para g_2, temos $\alpha = 1$, $\beta = 0$ e $n = 0$, como $\alpha + i\beta = 1$ não é raiz da equação característica, segue-se que $s = 0$; portanto, a solução particular de $y'' + 4y = g_1$ será da forma $Y_2 = De^t$, substituindo esta expressão na equação $y'' + 4y = g_2$, encontramos $D = \frac{3}{5}$. Logo, $Y_2 = \frac{3}{5}\,e^t$. Pelo Princípio da Superposição, segue-se que $Y = \frac{3}{5}\,e^t + \frac{t^2}{4} - \frac{1}{8}$ é uma solução particular da equação $y'' + 4y = 3e^t + t^2$. Portanto, a solução geral da equação será

$$y = c_1 \cos(2t) + c_2\, sen\,(2t) + \frac{3}{5}\,e^t + \frac{t^2}{4} - \frac{1}{8}.$$

Como queremos que $y(0) = 0 = y'(0)$, segue-se que $c_1 = -\frac{19}{40}$ e $c_2 = -\frac{3}{10}$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = -\frac{19}{40}\cos(2t) - \frac{3}{10}\, sen\,(2t) + \frac{3}{5}\,e^t + \frac{t^2}{4} - \frac{1}{8}.$$

8. Vamos considerar as seguintes equações: $y'' + 3y' + 2y = g_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, onde $g_1 = e^t(t^2 + 1)\, sen\,(2t)$, $g_2 = 3e^{-t}\cos t$ e $g_3 = 4te^{-t}$ e $g_4 = t^2$. Sejam Y_i soluções particulares de $y'' + 3y' + 2y = g_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Do método dos coeficientes a determinar, temos as seguintes formas para as soluções particulares:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= e^t\left(\left(At^2 + Bt + C\right)\cos(2t) + \left(Dt^2 + Et + F\right)\right)\\
Y_2 &= e^{-t}\left(G\cos t + H\, sen\, t\right)\\
Y_3 &= te^{-t}\left(It + J\right)\\
Y_4 &= Ht^2 + Lt + M.
\end{aligned}$$

Segue-se do Princípio da Superposição que $Y = Y_1 + y_2 + Y_3 + Y_4$ é uma solução particular da equação $y'' + 3y' + 2y = e^t(t^2 + 1) sen\,(2t) + 3e^{-t}\cos(t) + 4t\,e^{-t} + t^2$.

9. Note que a equação dada é de Euler. Fazendo-se a mudança de variáveis $t = e^x$ ou $x = \ln t$, ela se transforma na seguinte equação com coeficientes constantes: $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} - 6y = 0$. A equação característica desta equação e $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -1$. Logo, a sua solução geral é $y = c_1 e^{6x} + c_2 e^{-x}$, tendo em vista que $x = \ln t$ ou $e^x = t$, temos

$$y = c_1 t^{-1} + c_2 t^6.$$

10. Se fizermos a mudança de variáveis $t = e^x$, a equação dada se transforma na seguinte equação:

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}. \tag{222}$$

A equação característica da equação homogênea associa a (222) é $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ cujas raízes são $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Como $g(x) = xe^{2x}$, segue-se que $\alpha = 2$, $\beta = 0$ e $n = 1$. Portanto, $\alpha + i\beta = 2$ é raiz dupla da equação característica e $s = 2$. Temos a seguinte forma da solução particular de (222): $Y = x^2 e^{2x}(Ax + B)$. Substituindo esta expressão em (222), temos, $6Ax + 2B = x$, ou seja, $a = \frac{1}{6}$ e $B = 0$. Logo, $Y = \frac{1}{6}x^2 e^{2x}$ é uma solução particular de (222). A solução geral de (222) é, portanto, $y = (c_1 + c_2 x)\, e^{2x} + \frac{x^2 e^{2x}}{6}$. Voltando à variável antiga, temos

$$y = (c_1 + c_2 \ln t)\, t^2 + \frac{t^2 \ln^2 t}{6}. \tag{223}$$

11. Note que $p(x) = \frac{1}{x}$, portanto, do Teorema de Abel, $W(y_1, y_2)(x) = e^{\int p(x)dx} = Cx$.

12. Note que $W(y_1, y_2)(t_o) = y_1(t_o)y_2'(t_o) - y_1'(t_o)y_2(t_o) = y_1(t_o)\,0) - 0\, y_2(t_o) = 0$, logo, as duas soluções são linearmente dependentes.

13. Fazendo-se $y_1 = cos(x^2)$ e $p(x) = -\frac{1}{x}$, segue-se de (76)

$$\frac{dv}{v} = \left(\frac{1}{x} - 2\frac{(\cos(x^2))'}{\cos(x^2)}\right) dx = \left(\frac{1}{x} - 2\left(\ln\cos\left(x^2\right)\right)'\right) dx,$$

portanto, $v = \ln x - 2\ln\left(\cos)x^2)\right) + k_1 = e^{k_1}\frac{x}{\cos^2(x^2)}$, ou seja, $u = \frac{e^{k_1}}{2}\, tg\,(x^2) + c_1 \equiv c_2\, tg\,(x^2) + c_1$. Logo, a solução geral é $y = y_1 u = \cos(x^2)\left(c_2\, tg\,(x^2) + c_1\right) = c_1\cos(x^2) + c_2\, sen\,(x^2)$ e uma segunda solução é $y_2 = sen\,(x^2)$.

14. Vimos no Exemplo 3.1 que duas soluções linearmente independentes da equação homogênea são $y_1 = t$ e $y_2 = e^t$, cujos Wronskiano é $(t-1)e^t$. O método da variação de parâmetros nos dá a

seguinte solução geral da equação:

$$\begin{aligned} y &= 2t\int e^{-t}\,dt - 2e^t\int te^{-2t}\,dt \\ &= 2t\left(-e^{-t}+\frac{c_1}{2}\right)+e^t\left(te^{-2t}+\frac{e^{-2t}}{2}+c_2\right) \\ &= c_1t+c_2e^t-te^{-t}-\frac{e^{-t}}{2}. \end{aligned}$$

15. A equação característica da equação homogênea é $\lambda^2+5\lambda+6=0$, cujas raízes são $\lambda_1=-2$ e $\lambda_2=-3$. Além disso, e^{-2t} e e^{-3t} são duas soluções linearmente independentes da mesma. O Wronskiano delas é $-5e^{-5t}$, portanto, do método da variação de parâmetros, a solução geral da equação dada é

$$\begin{aligned} y &= -e^{-2t}\int\frac{e^{-3t}t^2}{-5e^{-5t}}dt+e^{-3t}\int\frac{e^{-2t}t^2}{-5e^{-5t}}dt \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{k_1}{5}e^{-2t}-\frac{1}{5}\left(\frac{t^2}{3}-\frac{2t}{9}+\frac{2}{27}\right)-\frac{k_2}{5}e^{-3t} \\ &= c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+\frac{t^2}{30}-\frac{t}{18}+\frac{19}{540} \end{aligned}$$

onde fizemos $c_1=\frac{k_1}{5}$ e $c_2=-\frac{k_2}{5}$.

16. No que se segue usaremos o sistema de unidades MKS e omitiremos as unidades. Vimos que $k=\frac{mg}{L}=\frac{9.8}{0.15}\approx 65,33$. Logo, o problema de valor inicial que descreve o movimento é $y''+ky=0$, $y(0)=0.075$ e $y'(0)=0$. A solução geral da equação é $y=c_1\cos\sqrt{k}+c_2\,sen\,\sqrt{k}$. Tendo em vista as condições iniciais, temos $c_1=y(0)=0.075$ e $c_2=\frac{y'(0)}{\sqrt{k}}=0$. Portanto, a solução desejada é $y=0.075\cos\left(\sqrt{\frac{9.8}{0.15}}t\right)$. Freqüência é $\omega_o=\sqrt{\frac{9.8}{0.15}}\approx 8.08$, veja Figura 45. O Período é $T=2\pi\sqrt{\frac{0.15}{9.8}}\approx 0.718$.

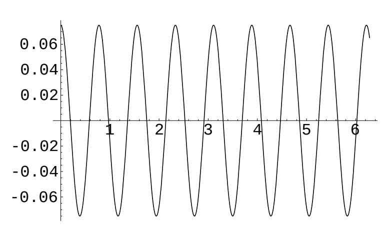

Figura 45: *Gráfico de* $y=0.075\cos\left(\sqrt{\frac{9.8}{0.15}}t\right)$.

17. A constante elástica da mola é $k = 30$ (Newtons por metro). Quando uma força de 3 N é aplicada no corpo ela imprime nesse uma velocidade constante de 5 metros por segundo, isto significa que a força de atrito, que estamos proporcional à velocidade, nestas condições vale 5γ e ela é igual à força aplicada; portanto, $\gamma = 0.6$ unidades. Como a massa é de 2 kg, o problema de valor inicial que descreve o problema é $2y'' + 0.6y' + 30y = 0$, $y(0) = 0.05$ e $y'(0) = 0.1$. A solução geral da equação é $y = e^{-0.15t}\left(c_1 \cos(\sqrt{59.91}\,t) + c_2\, sen\,(\sqrt{59.91}\,t)\right)$. Tendo em vistas as condições iniciais, temos que $c_1 = 0.05$ metros e $c_2 = \frac{0.1075}{\sqrt{59.91}} \approx 0.014$ metros.

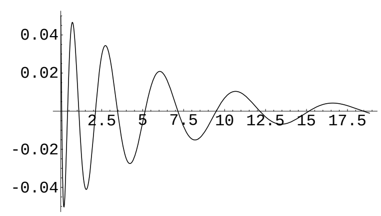

Figura 46: *Gráfico de* $y = e^{-0.15t}\left(0.05\,\cos(\sqrt{59.91}\,t) + \frac{0.1075}{\sqrt{59.91}}\,sen\,(\sqrt{59.91}\,t)\right)$.

Seção 4

1. Temos $\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)(n+2)a_{n+2} + (n+5)a_n\right)x^n = 1 + x$, o que nos leva às seguintes relações:

$$
\begin{aligned}
2!a_2 + a_o &= 1\\
3!a_3 + 6a_1 &= 1\\
a_{n+2} &= -\frac{(n+5)}{(n+1)(n+2)}\,a_n, \quad n \geq 2.
\end{aligned}
$$

Então, $a_2 = -\frac{1}{2!}a_o + \frac{1}{2!}$, $a_3 = -\frac{6}{3!}a_1 + \frac{1}{3!}$, em geral, para $n \geq 2$, temos

$$
\begin{aligned}
a_{2n} &= (-1)^n\frac{(2n+3)!!}{3(2n)!}\,a_o + (-1)^n\frac{(2n+3)!!}{3.5(2n)!},\\
a_{2n+1} &= (-1)^n\frac{(2n+4)!!}{2.4(2n+1)!}\,a_1 - (-1)^n\frac{(2n+4)!!}{2.4.6(2n+1)!}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
y = a_o y_1(x) + a_1 y_2(x) + Y(x),
$$

onde

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 1 - \frac{5}{2!}x^2 + \frac{5.7}{4!}x^4 + \ldots + (-1)^n \frac{(2n+3)!!}{3(2n)!}\, x^{2n} + \ldots \\
y_2 &= x - \frac{6}{3!}x^3 - \frac{6.8}{5!}x^5 + \ldots + (-1)^n \frac{(2n+4)!!}{3(2n+1)!}\, x^{2n+1} + \ldots \\
Y &= \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{7}{4!}x^4 - \frac{8}{5!}x^5 + \frac{7.9}{6!}x^6 + \frac{8.10}{7!}x^7 + \ldots +
\end{aligned}
$$

2. A relação de recorrência é

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1)a_{n+1} + (2-n)a_n}{(n+1)(n+2)}\, a_n, \quad n \geq 0.$$

Em particular,

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_o, \\
a_3 &= \frac{a_1}{6} + \frac{a_o}{3}, \\
a_4 &= \frac{a_1}{12} + \frac{a_o}{6}, \\
a_5 &= \frac{a_1}{24} - \frac{a_o}{12}, \\
a_6 &= \frac{a_1}{45} - \frac{a_o}{15},
\end{aligned}
$$

portanto,

$$
\begin{aligned}
y(x) &= a_o\left(1 + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{12} - \frac{x^6}{15} + \ldots\right) + a_1\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24} + \frac{x^6}{45} + \ldots\right) \\
&\equiv a_o y_1(x) + a_1 y_2(x).
\end{aligned}
$$

Devemos tomar $a_o = 0$ e $a_1 = 1$, para satisfazer às condições iniciais.

3. Lembrando-se que $y(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$, se representarmos $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ao substituirmos na equação diferencial, teremos

$$
\begin{aligned}
y'' + sen\, x\, y &= 2a_2 + (a_o + 6a_3)x + (12a_4 - a_1)x^2 + \left((20a_5 - a_2 - \frac{a_o}{6}\right))x^3 + \left(30a_6 - a_3 - \frac{a_1}{6}\right)x^4 + \\
&+ \left(42a_7 - a_4 - a_2 - \frac{a_o}{15}\right)x^5 + \ldots = 0.
\end{aligned}
$$

Assim, temos $a_2 = 0$, $a_3 = -\frac{a_o}{6}$, $a_4 = \frac{a_1}{12}$, $a_5 = \frac{a_o}{120}$, $a_6 = -\frac{a_o}{180} + \frac{a_1}{180}$, $a_7 = \frac{a_o}{630} + \frac{a_1}{504}$, portanto,

$$y = a_o\left(1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^6}{180} + \frac{x^7}{630} + \ldots\right) + a_1\left(x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{180} + \frac{x^7}{504} + \ldots\right).$$

4. A relação de recorrência é

$$a_{n+2} = -\frac{(n^2 - 5n + 1)}{(n+1)(n+2)}\, a_n, \quad n \geq 0.$$

Obtemos os seguintes valores $a_2 = -\frac{a_o}{2}$, $a_3 = \frac{a_1}{2}$, $a_4 = -\frac{5a_o}{24}$, $a_5 = \frac{a_1}{8}$, $a_6 = -\frac{a_o}{48}$ e $a_7 = -\frac{a_1}{336}$, portanto,

$$y = a_o \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{5}{24}x^4 - \frac{x^6}{48} - \ldots\right) + a_1 \left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{8} - \frac{x^7}{336} - \ldots\right)$$

5. A relação de recorrência é

$$a_{n+1} = \frac{(n-p)}{(n+1)^2}\, a_n, \quad n \geq 0,$$

da qual vemos que se $n = p$, então, $a_{p+1} = 0$ e, conseqüentemente, $a_k = 0$, para todo $k \geq p$, portanto, a solução será um polinômio de grau p. Além disso,

$$\begin{aligned} L_o(x) &= 1, \\ L_1(x) &= 1 - x, \\ L_2(x) &= 1 - x + \frac{x^2}{4}, \\ L_2(x) &= 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{6}. \end{aligned}$$

6. Se fizermos $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, teremos a seguinte equação indicial: $r(r-1) = 0$, portanto, $r_1 = 1$ e $r_2 = 0$ que é o caso em que as raízes diferem por um inteiro. Em geral, temos a seguinte relação de recorrência

$$a_n = -\frac{a_n}{(n+r)(n+r-1)}, \quad n \geq 1.$$

Se fizermos $r = 1$ na relação de recorrência, encontramos que

$$a_n = (-1)^n \frac{a_o}{(n!)^2(n+1)},$$

para todo $n \geq 1$, o que nos conduz à seguinte solução:

$$y_1(x) = x\left(1 - \frac{x}{(1!)^2.2} + \frac{x^2}{(2!)^2.3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^2(n+1)} + \ldots\right).$$

7. A equação indicial é $r^2 = 0$, portanto, $r_1 = r_2 = 0$. A relação de recorrência é

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(n+r)^2}, \quad n \geq 1.$$

Se fizermos $r = 0$ na relação de recorrência, encontraremos $a_n = \frac{a_o}{(n!)^2}$. Portanto, uma solução é

$$y_1(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{(2!)^2} + \ldots + \frac{x^n}{(n!)^2} + \ldots\right),$$

a outra é

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n.$$

8. Devemos ter $\left(2r^2 + r - 1\right) a_o x^r = 0$, $\left(2r^2 + 5r + 2\right) a_1 x^{r+1} = 0$ e para $n \geq 2$, temos

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n + r + 1)(n + r - \frac{1}{2})}.$$

Portanto, temos a seguinte equação indicial: $2r^2 + r - 1 = 0$, ou seja, as raízes são $r_1 = \frac{1}{2}$ e $r_2 = -1$. Além disso, devemos ter $a_1 = 0$.

Para $r = \frac{1}{2}$, temos $a_n = -\frac{2a_{n-2}}{(2n+3)n}$, válida para todo $n \geq 2$, portanto, temos a seguinte relação de recorrência

$$a_{2n} = \frac{(-2)^n}{(2n)!!7.9.11.15.19...(4n + 3)}\, a_o$$

e a solução correspondente é

$$y_1(x) = \sqrt{|x|}\left(1 - \frac{2x^2}{2.7} + \frac{2^2x^4}{2.4.7.11} + \ldots + \frac{(-2)^n x^{2n}}{(2n)!!7.11.15.19...(4n + 3)}\right).$$

Para a raiz $r_2 = -1$, temos a seguinte relação de recorrência

$$a_n = -\frac{(-2)^n}{(2n)!!1.5.9...(4n - 3)}\, a_o,$$

válida para $n \geq 2$. A solução associada é

$$y_2(x) = x^{-1}\left(1 + \frac{2x^2}{2.1} - \frac{2^2x^4}{2.4.1.5} + \ldots - \frac{(-2)^n x^{2n}}{(2n)!!1.5.9...(4n - 3)} + \ldots\right).$$

Seção 5

1.(a) Note que após decomposição em frações parciais temos

$$\frac{8s^2 - 4s + 2}{s(s^2 + 4)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{s} + \frac{15}{2}\,\frac{s}{s^2 + 4} - 2\frac{2}{s^2 + 4},$$

cuja tranforma inversa é $\frac{1}{2} + \frac{15}{2}\cos(2t) - 2\,sen\,(2t)$.

1.(b) Após uma manipulação simples podemos escrever

$$\frac{2s+1}{4s^2+4s+5} = \frac{1}{2}\,\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1},$$

cuja transformada inversa é $\frac{1}{2}\,e^{-\frac{t}{2}}\cos t$.

1.(c) Escreveremos $H(s) = e^{-s}F(s) + G(s)$, onde $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+2s+2)}$ e $G(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)(s^2+4)}$; portanto, $h(t) = u_1(t)f(t-1) + g(t)$.

Após decomposição em frações parciais, temos

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s^2(s^2+2s+2)} = -2\,\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + 2\frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+1)^2}, \\ G(s) &= \frac{s^2+1}{(s+1)(s^2+4)} = \frac{2}{5}\,\frac{1}{s+1} + \frac{3}{5}\,\frac{s}{s^2+4} - \frac{3}{10}\,\frac{2}{s^2+4}, \end{aligned}$$

e concluimos que $f(t) = -2 + t + 2e^{-t} + te^{-t}$ e $g(t) = \frac{2}{5}e^{-t} + \frac{3}{5}\cos(2t) - \frac{3}{10}sen\,(2t)$.

2. Podemos escrever $f(t) = sen\,(\pi t) + u_1(t)\,sen\,\pi(t-1) + u_2(t)(t-2) - u_3(t)(t-3)$, cuja transformada de Laplace é $F(s) = \frac{\pi}{s^2+\pi^2} + e^{-s}\frac{\pi}{s^2+\pi^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^2}$.

3.(a) $\frac{3}{(s+3)^4} + e^{-\pi s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2\pi}{s^2} + \frac{\pi^2}{s}\right)$.
3.(b) $-\frac{2}{s^2+4} + e^{-(s-1)}$.
3.(c) Se fizermos $f(t) = \cos t$, então, a transformada de Laplace de $e^{-t}t^2f(t)$ é igual a $F''(s+1)$, onde $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Portanto, a transformada desejada é $\frac{-2(s+1)^3+2(s+1)}{((s+1)^2+1)^3}$.
3.(d) Podemos escrever $f(t) = u_1(t)(t^2 - t + 1) = u_1(t)\left((t-1)^2 + (t-1) - 1\right)$, cuja transformada de Laplace é $F(s) = e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right)$.

4.(a) Temos

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2-s}{(s-1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)(s^2-2s+2)} + \frac{s}{(s^2+1)(s^2-2s+2)} \\ &= -\frac{(s-1)}{(s-1)^2+1} + \frac{1}{(s-1)^2+1} + F(s) + G(s), \end{aligned}$$

onde $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2-2s+2)}$ e $G(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2-2s+2)}$. Logo, $y(t) = -e^t\cos t + e^t\,sen\,t + f(t) + g(t)$. Após decomposição em frações parciais temos $F(s) = -\frac{1}{5}\frac{1}{(s+1)} + \frac{\frac{1}{5}s+\frac{7}{5}}{s^2-2s+2} = -\frac{1}{5}\frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{5}\frac{(s-1)}{(s-1)^2+1} + \frac{8}{5}\frac{1}{(s-1)^2+1}$; logo, $f(t) = -\frac{1}{5}e^{-t} + \frac{1}{5}e^t\cos t + \frac{8}{5}e^t\,sen\,t$. Também temos $G(s) = \frac{\frac{1}{5}s-\frac{2}{5}}{s^2+1} + \frac{-\frac{1}{5}s+\frac{4}{5}}{s^2-2s+2} = \frac{1}{5}\frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{5}\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{5}\frac{s-1}{(s-1)^1+1} + \frac{3}{5}\frac{1}{(s-1)^2+1}$; logo, $g(t) = \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\,sen\,t - \frac{1}{5}e^t\cos t + \frac{3}{5}e^t\,sen\,t$.
4.(b) Note que $f(t) = t - u_1(t) - u_1(t)(t-1)$, portanto, $F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} - e^{-s}s^2$

5. 6. 7.

2cm

Exemplo 7.1 *Transforme o sistema*

$$x_1' = 3x_1 - 2x_2 \tag{224}$$

$$x_2' = 2x_1 - 2x_2 \tag{225}$$

com condições iniciais $x_1(0) = 3$ *e* $x_2(0) = 1$*, numa equação diferencial segunda ordem.*

Solução. De (224), temos

$$x_2 = \frac{3x_1 - x_1'}{2}, \tag{226}$$

portanto, (225) pode ser re-escrita como

$$x_2' = 2x_1 - (3x_1 - x_1') = -x_1 + x_1' \tag{227}$$

mas tomando-se a derivada de (226), temos

$$x_2' = \frac{3x_1' - x_1''}{2}, \tag{228}$$

logo, comparando-se (227) e (228), temos $x_1'' - x_1' + 2x_1 = 0$, o que nos leva ao seguinte problema de valor incial

$$x_1'' - x_1' + 2x_1 = 0, \quad x_1(0) = 3\,,\; x_1'(0) = 7$$

que resolvido, nos dá $x_1(t)$ e de (227), obtemos $x_2(t)$. ∎

Referências

[1] Earl A. Coddington e Norman Levison, em Theory of Ordinary Differential Equations, Krieger Publishing Company, 1983.

[2] *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, William E. Boyce e Richard C. DiPrima, Sétima Edição.

[3] *Functions of Matrices*, Publicações do de Departamento de Matemática, Série Matemática Pura e Aplicada, 2002, Hamilton Bueno Prado.

[4] Jack K. Hale, Ordinary Differential Equations, segunda edição, 1980