

Equações Diferenciais B

Prof. Paulo Cupertino de Lima
Departamento de Matemática - UFMG

Conteúdo

| | |
|---|-----------|
| 1 Séries de Fourier | 5 |
| 1.1 Introdução | 5 |
| 1.2 Funções periódicas | 5 |
| 1.3 Funções contínuas por partes e funções suaves por partes | 6 |
| 1.4 Ortogonalidade | 8 |
| 1.5 O Teorema de Fourier | 11 |
| 1.6 Séries de Fourier de Funções Pares e de Funções Ímpares | 14 |
| 1.7 Cálculo de Algumas Séries de Fourier | 15 |
| 1.8 Séries de Fourier de funções definidas num intervalo finito | 17 |
| 1.9 Derivação e Integração de Séries de Fourier | 24 |
| 1.10 Séries de Fourier Complexas | 26 |
| 1.11 A desigualdade de Parseval e o Lemma de Riemann-Lebesgue | 28 |
| 1.12 Demonstração do Teorema de Fourier | 30 |
| 1.13 Exercícios propostos | 34 |
| 2 Equações Diferenciais Parciais | 36 |
| 2.1 Um pouco sobre equações diferenciais ordinárias | 36 |
| 2.2 O que é uma equação diferencial parcial? | 39 |
| 2.3 Classificação de Equações Diferenciais Parciais | 39 |
| 2.4 O Método de Separação de Variáveis | 40 |
| 2.5 A equação do calor em uma dimensão espacial | 42 |
| 2.5.1 Condições de Fronteira da Equação do Calor | 43 |
| 2.5.2 Barra com extremidades mantidas à 0°C | 44 |
| 2.5.3 Barra isolada termicamente também nas extremidades | 48 |
| 2.5.4 Barra com uma extremidade isolada e a outra mantida a 0°C | 51 |
| 2.5.5 Condições de fronteira não-homogêneas | 53 |
| 2.5.6 Unicidade da equação do calor | 56 |
| 2.5.7 Apêndice equação de calor | 58 |
| 2.6 Exercícios | 59 |
| 2.7 Trabalhos | 61 |
| 2.8 A Equação da Onda | 64 |
| 2.8.1 A Corda finita | 64 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 2.8.2 | Condições de fronteira | 64 |
| 2.8.3 | A corda vibrante com extremidades fixas | 65 |
| 2.8.4 | A Corda infinita e a Fórmula de D'Alembert | 74 |
| 2.9 | Exercícios | 78 |
| 2.10 | A Equação de Laplace | 81 |
| 2.10.1 | O Problema de Dirichlet no retângulo | 85 |
| 2.10.2 | O Problema de Dirichlet no disco | 92 |
| 2.10.3 | O Princípio do Máximo | 95 |
| 3 | Transformada de Fourier | 96 |
| 3.1 | Transformadas de Fourier das funções $\cos(x^2)$ e $\sin(x^2)$ | 110 |
| 3.2 | As transformadas seno e cosseno de Fourier | 112 |
| 3.3 | Aplicações da transformada de Fourier às resoluções de equações diferenciais parciais | 114 |
| 3.4 | A filosofia da transformada de Fourier em equações diferenciais parciais | 121 |
| 3.5 | Exercícios: resolução de equações diferenciais parciais | 124 |
| 4 | Apêndice | 127 |
| 4.1 | Trocando a ordem da derivação e da integração em transformada de Fourier | 127 |
| 4.2 | Lema de Riemann-Lebesgue para Integral e transformada de Fourier | 129 |
| 4.3 | Prova do Teorema da Integral de Fourier | 131 |
| 5 | Apêndice - Dedução das Equações de Calor e da Onda | 132 |
| 5.1 | Equação da Onda | 132 |
| 5.2 | Equação de Calor | 134 |

Introdução

Este texto tem como objetivo atender à disciplina de Equações Diferenciais B , na qual são introduzidos os importantes conceitos de séries de Fourier, transformada de Fourier e equações diferenciais parciais.

Na Seção 1 fazemos uma revisão de funções periódicas, introduzimos os conceitos de funções contínuas por partes e de funções suaves por partes. Introduzimos o conceito de ortogonalidade de funções e definimos a série de Fourier de uma função. Provamos a desigualdade de Bessel e a partir dela provamos o Lemma de Riemann-Lebesgue, o qual usamos na demonstração do principal resultado desta seção, o Teorema de Fourier sobre convergência pontual de séries de Fourier de funções periódicas e suaves por partes. Vemos vários exemplos de cálculos de séries de Fourier e usando o Teorema de Fourier, calculamos explicitamente a soma de algumas séries numéricas importantes. Introduzimos os conceitos de extensões periódicas par e ímpar de funções definidas num intervalo da forma $[0, L]$, bem como outras extensões que precisaremos nas aplicações da seção seguinte.

Na Seção 2 falamos um pouco sobre as equações diferenciais ordinárias, uma vez que o seu conhecimento não é pressuposto para se fazer este curso. Introduziremos as equações do calor e de onda unidimensionais para uma região finita, L , definiremos diferentes condições de contorno e usaremos o método da separação de variáveis na resolução das mesmas. Também consideramos a equação da onda para uma corda infinita e obteremos a fórmula de D'Alembert que nos dá explicitamente a solução em termos da forma e velocidades iniciais da onda. Ainda nesta seção introduzimos a equação de Laplace e o Princípio de Máximo e consideramos o problema de Dirichlet para o retângulo e para o disco.

Na Seção 3, introduziremos o conceito de transformada de Fourier, suas propriedades e a aplicamos na resolução de vários problemas.

Seção 5, que é um apêndice, deduziremos as equações de calor e da onda a partir de primeiros princípios, ou seja, a partir da Segunda Lei de Newton e da Lei de Fourier, respectivamente.

1 Séries de Fourier

1.1 Introdução

O matemático e físico francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) formulou um problema de fluxo de calor em termos de equações diferenciais parciais e, na sua tentativa de resolvê-las, ele foi levado ao problema matemático de expandir uma função em séries envolvendo senos e cossenos. Tais séries são hoje chamadas de séries de Fourier. Elas são muito importantes sob o ponto de vista matemático e por suas aplicações em problemas físicos, por isso as estudaremos neste capítulo. As suas aplicações às equações diferenciais serão dadas nos capítulos seguintes.

1.2 Funções periódicas

Definição 1.1 Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **periódica de período** $T \neq 0$, se

$$f(x + T) = f(x),$$

para todo x .

Exemplo 1.1 As funções $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$ são periódicas de períodos $2\pi/n$. As funções $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{cotg} x$ são periódicas de período π .

Observação 1.1 Se T é um período de f , kT , onde $k \neq 0$ é um inteiro também é um período. Todavia, quando nos referimos ao período de uma função estaremos considerando o seu período fundamental, ou seja, o menor valor de $T > 0$, tal que $f(x + T) = f(x)$, para todo x .

Exercício 1.1 A partir da definição da derivada, mostre que se f é derivável e periódica, então, f' também é periódica.

Exemplo 1.2 A integral de uma função periódica, não é necessariamente uma função periódica: Se $f(x + T) = f(x)$ para todo x , então a função $F(x) = \int_a^x f(y)dy$, satisfaz $F(x + T) = F(x)$ se, e somente se, $\int_0^T f(y)dy = 0$. De fato,

$$F(x + T) - F(x) = \int_x^{x+T} f(y)dy = \int_0^T f(y)dy.$$

1.3 Funções contínuas por partes e funções suaves por partes

Definição 1.2 Dizemos que uma função f na variável x é **seccionalmente contínua** (ou *contínua por partes*) na reta se ela tiver no máximo um número finito de descontinuidades (todas de primeira espécie, ou seja, os limites laterais são finitos em cada ponto de descontinuidade, veja Figura (1)) em qualquer intervalo limitado. Em outras palavras, dados $a < b$, existem $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n = b$, tais que f é contínua em cada intervalo aberto (a_j, a_{j+1}) , $j = 1, 2, \dots, n - 1$ e existem os limites

$$f(a_j + 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x) \quad e \quad f(a_j - 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x).$$

Toda função contínua é seccionalmente contínua.

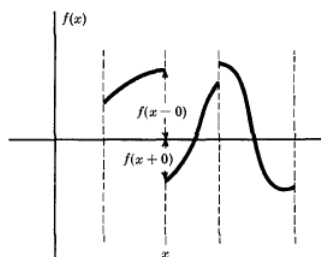


Figura 1: f tem uma descontinuidade de primeira espécie em x .

Exemplo 1.3 A função definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 1, \\ \frac{1}{n+1}, & \text{se } \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

não é seccionalmente contínua: apesar de todas as suas descontinuidades serem de primeira espécie, existem um número infinito das mesmas no intervalo $(0, 1)$.

Exemplo 1.4 Alguns exemplos de funções seccionalmente contínuas.

(a) $f(x) = [x]$, onde $[x]$ é a parte inteira de x , veja Figura 2.

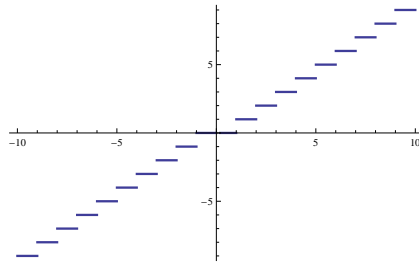


Figura 2: Gráfico da função parte inteira de x , ela é descontínua nos números inteiros diferentes de zero e nestes os limites laterais existem.

(b)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < \pi, \\ 0, & \text{se } -\pi \leq x < 0, \end{cases}$$

$$f(x + 2\pi) = f(x).$$

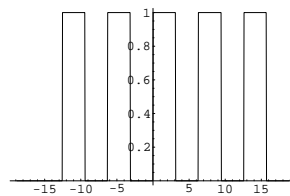


Figura 3: Gráfico da função periódica dada no item (b).

(c) $f(x) = |x|$, se $|x| \leq 1$ e $f(x+2) = f(x)$.

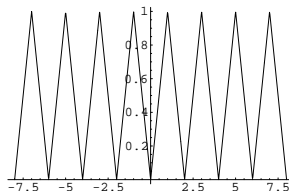


Figura 4: Gráfico da função periódica dada no item (c).

Definição 1.3 Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **seccionalmente diferenciável** (ou derivável por partes) se ela e a sua derivada forem seccionalmente contínuas. Note que f' não existirá onde f for descontínua.

Embora tenhamos introduzido os conceitos de continuidade e diferenciabilidade por partes para funções definidas em toda a reta real, podemos introduzi-los de maneira natural para funções definidas num intervalo finito $[a, b]$ qualquer. Em particular, dizemos que f é contínua por partes em $[a, b]$, se f tiver no máximo um número finito de descontinuidades em $[a, b]$, todas de primeira espécie.

Exercício 1.2 Mostre que se f é contínua por partes em $[-L, L]$, onde $0 < L < \infty$, então f é limitada em $[-L, L]$. Em particular, $f(x)$, $|f(x)|$ e $f^2(x)$ são (Riemann) integráveis em $[-L, L]$.

Observação 1.2 Se f é seccionalmente derivável, então para todo x ,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x_+)}{t} = f'(x_+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f'(x+t)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x+t) - f(x_-)}{t} = f'(x_-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f'(x+t).$$

1.4 Ortogonalidade

Exercício 1.3 Nesta e na próxima seção em várias situações teremos que calcular integrais de funções do tipo $\sin ax \sin bx$, $\sin ax \cos bx$, $\cos ax \cos bx$. Para calculá-las, usamos as seguintes

identidades trigonométricas, cujas demonstrações deixamos para o estudante:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx &= \frac{\cos[(a-b)x] - \cos[(a+b)x]}{2} \\ \operatorname{sen} ax \cos bx &= \frac{\operatorname{sen}[(a+b)x] + \operatorname{sen}[(a-b)x]}{2} \\ \cos ax \cos bx &= \frac{\cos[(a-b)x] + \cos[(a+b)x]}{2}. \end{aligned}$$

Sugestão: Use as identidades $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ e $\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$.

Definição 1.4 Se f e g são contínuas por partes em $[-L, L]$, então fg também é contínua por partes em $[-L, L]$ e, pelo Exercício (1.2), fg é integrável, o que nos permite definir **produto interno ou escalar** de f e g como

$$(f, g) = \int_{-L}^L f(x)g(x)dx. \quad (1)$$

Se o produto escalar de f e g for zero dizemos que estas duas funções são **ortogonais** em $[-L, L]$. A norma de f é definida como

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

Exercício 1.4 Sejam $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ e $p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$, mostre que

(i) $\int_{-1}^1 p_n(x)p_m(x)dx = 0$, se $n \neq m$ e

(ii) $\int_{-1}^1 |p_n(x)|^2 dx = \frac{2}{2n+1}$.

Os polinômios acima são soluções da equação diferencial de Legendre:

$$(1 - x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u = 0,$$

para $n = 0, 1, 2$ e 3 , respectivamente. Eles são chamados de **polinômios de Legendre**.

Exercício 1.5 Usando as identidades do Exercício 1.3, mostre que se m, n são inteiros não nulos, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \delta_{nm} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ \frac{1}{L} \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= 0, \end{aligned}$$

onde o símbolo δ_{nm} , chamado de delta de Kronecker, é definido por

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ 1, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Além disso,

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = 0 \quad e \quad \int_{-L}^L \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx = 0,$$

logo o conjunto formado por $\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right)}{\sqrt{L}}, \frac{\cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right)}{\sqrt{L}}, n = 1, 2, 3, \dots$ é **ortonormal** em $[-L, L]$.

Exemplo 1.5 Seja

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (2)$$

Quanto valem os coeficientes a_n e b_n ?

Resolução. Multiplicando (2) por $f(x)$, integrando de $-L$ a L e lembrando que

$$\int_{-L}^L \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx = 0 = \int_{-L}^L \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx,$$

temos

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{a_o}{2} \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^N \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right) = La_o,$$

portanto

$$a_o = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx.$$

Multiplicando (2) por $\cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right)$, integrando de $-L$ a L e lembrando que

$$\int_{-L}^L \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = 0 \quad e \quad \int_{-L}^L \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = L\delta_{nm}$$

temos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx &= \frac{a_o}{2} \int_{-L}^L \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx \\ &+ \sum_{n=1}^N \left(a_n \int_{-L}^L \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx + b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx \right) \\ &= a_m \int_{-L}^L \cos^2 \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx \\ &= La_m. \end{aligned}$$

Portanto,

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx.$$

Multiplicando (2) por $\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, integrando de $-L$ a L e lembrando que

$$\int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad e \quad \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = L\delta_{nm}$$

temos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \frac{a_o}{2} \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{n=1}^N \left(a_n \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right) \\ &= b_m \int_{-L}^L \text{sen}^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &= Lb_m. \end{aligned}$$

Portanto,

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx.$$

■

1.5 O Teorema de Fourier

Assumiremos que as nossas funções são $2L$ periódicas e suaves por partes. As funções

$$\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{\sqrt{L}}, \frac{\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{\sqrt{L}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

são $2L$ periódicas e suaves (portanto suaves por partes). Além disso, do exercício anterior, vimos que elas formam um conjunto **ortonormal** em $[-L, L]$. Será que podemos escrever uma função periódica de período $2L$ e suave por partes como uma combinação das funções dadas em (3)? O Teorema de Fourier que enunciaremos a seguir, nos diz algo à respeito desta pergunta.

Teorema 1.1 Teorema de Fourier. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então a **série de Fourier** de f definida por*

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right),$$

onde

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

converge para $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$. Os coeficientes a_n e b_n são chamados de **coeficientes de Fourier de f** .

Prova Veja Subseção 1.12. ■

Observação 1.3 No Teorema de Fourier dizer que a série de Fourier converge para $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ significa que para cada x fixo, a seqüência numérica das somas parciais

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (4)$$

converge para $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, quando N tende para infinito. Se $f(x)$ for contínua em x_0 , então $f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0)$ e pelo Teorema de Fourier, a série de Fourier de f converge para $f(x_0)$.

Tendo em vista o Teorema de Fourier, podemos escrever

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right),$$

para qualquer ponto x no qual f é contínua.

Exemplo 1.6 Calcular a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < \pi, \\ 0, & \text{se } -\pi \leq x < 0, \end{cases}$$

$$f(x+2\pi) = f(x).$$

Resolução.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left| \operatorname{sen} nx \right|_0^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx dx = \frac{1}{\pi} \left| \frac{-\cos nx}{n} \right|_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi} (1 - \cos n\pi),$$

ou ainda,

$$b_{2k} = 0, \quad e \quad b_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)\pi}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Portanto, a série de Fourier de $f(x)$ é

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen} [(2k-1)x].$$

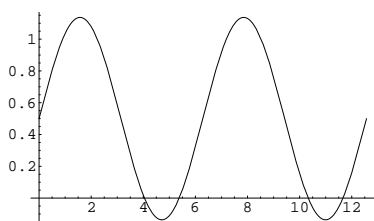


Figura 5: A soma dos dois primeiros termos da série de Fourier de $f(x)$.

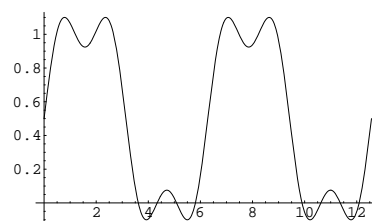


Figura 6: A soma dos três primeiros termos da série de Fourier de $f(x)$.

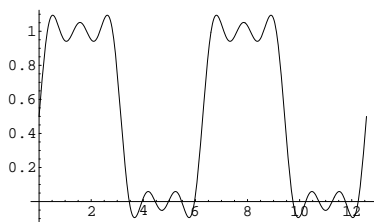


Figura 7: A soma dos quatro termos da série de Fourier de $f(x)$.

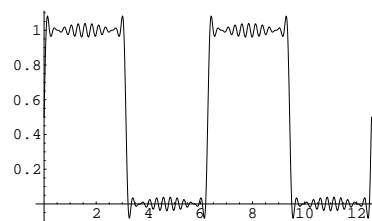


Figura 8: A soma dos quatorze primeiros termos da série de Fourier de $f(x)$

Exemplo 1.7 Use os resultados do exercício 1.6 e obtenha uma expressão em série para π .

Resolução. Segue-se do Teorema de Fourier que no ponto $x = \frac{\pi}{2}$, a série de Fourier é igual a 1.

Logo,

$$1 = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen} \left((2k-1) \frac{\pi}{2} \right),$$

ou seja,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \operatorname{sen} \left((2k-1) \frac{\pi}{2} \right) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1},$$

que é conhecida como a série de Leibniz.

Exemplo 1.8 Supondo que f seja $2L$ periódica e $f''(x)$ seja absolutamente integrável em $[-L, L]$, ou seja, $\int_{-L}^L |f''(x)| dx < \infty$, mostre que os coeficientes de Fourier de f satisfazem

$$|a_n|, |b_n| \leq \frac{C}{n^2}.$$

Resolução. Como f e f' são $2L$ periódicas, fazendo integração por partes duas vezes (os termos de fronteira são nulos), temos

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{n^2 \pi^2} \int_{-L}^L f''(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Como a função cosseno é limitada por 1, segue que

$$|a_n| \leq \frac{L}{n^2 \pi^2} \int_{-L}^L |f''(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)| dx \leq \frac{1}{n^2} \left(\frac{L}{\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx \right) \equiv \frac{C}{n^2}.$$

De maneira análoga, mostra-se que $|b_n| \leq \frac{C}{n^2}$. Portanto, se uma função f for $2L$ periódica e $f''(x)$ for absolutamente integrável, os seus coeficientes de Fourier decaem pelo menos com $1/n^2$. ■

Exercício 1.6 Seja f uma função periódica de período $2L$, k -vezes derivável com derivada de ordem k absolutamente integrável. Mostre que existe uma constante positiva C tal que

$$|a_n|, |b_n| \leq \frac{C}{n^k}, \quad \forall n \geq 1.$$

Sugestão: Use integração por partes k vezes e use o fato que f e suas derivadas até ordem $k - 1$ são periódicas, o que assegura que os termos de fronteira sejam nulos. Podemos tomar $C = \frac{1}{L} \left(\frac{L}{\pi}\right)^k \int_{-L}^L |f^{(k)}(x)| dx$.

O exercício acima mostra que quanto mais suave for uma função, mais rapidamente os seus coeficientes de Fourier decaem com n , ou seja, a convergência de $S_n(x)$ para $f(x)$ é mais rápida. Em particular, a soma dos N primeiros termos da série de Fourier de f , mesmo que N seja relativamente pequeno, será uma aproximação muito boa para f .

1.6 Séries de Fourier de Funções Pares e de Funções Ímpares

Definição 1.5 Seja I um subconjunto da reta que é simétrico em relação à origem, ou seja, se $x \in I$, então, $-x \in I$. Dizemos que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função **par** se $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in I$. Se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in I$, dizemos que f é uma função **ímpar**.

Exemplo 1.9 As funções $\cos \frac{n\pi x}{L}$, x^{2n} , $n = 1, 2, \dots$, são pares. Por outro lado, as funções $\sin \frac{n\pi x}{L}$, x^{2n-1} , $n = 1, 2, \dots$, são ímpares. Assumimos que os domínios destas funções são a reta toda ou qualquer intervalo da forma $(-a, a)$ ou $[a, a]$, onde $a > 0$.

Exercício 1.7 Mostre que

(i) A soma ou diferença de duas funções pares é uma função par. A soma ou diferença de duas funções ímpares é uma função ímpar.

(ii) O produto ou razão de duas funções pares é uma função par.

(iii) O produto ou razão de duas funções ímpares é uma função par.

(iv) O produto ou razão de uma função par e uma função ímpar é uma função ímpar.

(v) Se f está definida num subconjunto da reta que é simétrico em relação à origem, então, podemos escrever f como a soma de uma função par e uma função ímpar.

Exemplo 1.10

(i) Suponha que f seja uma função par, integrável em qualquer intervalo limitado. Então,

$$\int_{-L}^L f(x)dx = 2 \int_0^L f(x)dx.$$

(ii) Suponha que f é uma função ímpar, integrável em qualquer intervalo limitado. Então,

$$\int_{-L}^L f(x)dx = 0.$$

Demonstração. Basta observar que

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_{-L}^0 f(x)dx + \int_0^L f(x)dx$$

e

$$\int_{-L}^0 f(x)dx = - \int_L^0 f(-y)dy = \int_0^L f(-y)dy = \begin{cases} \int_0^L f(y)dy, & \text{se } f \text{ for par,} \\ - \int_0^L f(y)dy, & \text{se } f \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

1.7 Cálculo de Algumas Séries de Fourier

Seja f_1 periódica de período de $2L$ definida por $f_1(x) = x$, para $-L < x < L$. Como f_1 é ímpar, teremos uma série de senos (todos os a_n 's são nulos), cujos os coeficientes são

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = \frac{n\pi x}{L}$, obtemos

$$b_n = \frac{2L}{n^2\pi^2} \int_0^{n\pi} y \operatorname{sen} y \, dy.$$

Integrando por partes,

$$\int_0^{n\pi} y \operatorname{sen} y \, dy = -y \cos y \Big|_0^{n\pi} + \int_0^{n\pi} \cos y \, dy = -n\pi \cos(n\pi).$$

Logo,

$$b_n = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}.$$

Portanto, a série de Fourier de f_1 é

$$\frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Seja f_2 periódica de período $2L$ e definida por

$$f_2(x) = \begin{cases} L - x, & \text{para } 0 \leq x \leq L, \\ L + x, & \text{para } -L \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Como f_2 é uma função par, temos uma série de cossenos (todos os b_n 's são nulos), cujos os coeficientes são

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L} \int_0^L (L - x) \, dx = \frac{2}{L} \frac{L^2}{2} = L, \\ a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L (L - x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx = \frac{2L}{n^2\pi^2} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 2k, \\ \frac{4L}{(2k-1)^2\pi^2}, & \text{se } n = 2k - 1, \end{cases} \end{aligned}$$

$k = 1, 2, \dots$ Portanto, a série de Fourier de f_2 é

$$\frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{L}.$$

Como f é contínua, a série acima converge para $f_2(x)$ em todos os pontos. Usando o Teorema de Fourier para $x = 0$, obtemos

$$L = f_2(0) = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$

ou seja,

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

Seja f_3 a função periódica de período $2L$ e definida por $f_3(x) = x^2$, para $-L \leq x \leq L$. Como f é par, teremos uma série de cossenos cujos coeficientes são

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{2L^2}{3}$$

e

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2L^2}{n^3\pi^3} \int_0^{n\pi} y^2 \cos y dy = \frac{4L^2}{n^2\pi^2} (-1)^n.$$

Portanto, a série de Fourier de f_3 é

$$\frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Como a função f_3 é contínua, a série acima converge para $f(x)$ em todos os pontos. Aplicando o Teorema de Fourier para $x = L$, obtemos

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

1.8 Séries de Fourier de funções definidas num intervalo finito

Até então havíamos calculado a série de Fourier de uma função periódica, com período $2L$. Suponha agora que tenhamos uma função f que esteja definida apenas no intervalo $[0, L]$. É possível falarmos em série de Fourier de f ? A teoria vista se aplica a funções periódicas, por isso temos que considerar uma função g que seja extensão periódica de f , digamos de período $2L$ e calcularmos a sua série de Fourier. Como g restrita a $(0, L)$ é f , então a série de Fourier de g converge para $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, para todo x em $(0, L)$. Para construirmos g , temos que defini-la para x no intervalo $[-L, 0)$, o que podemos fazer de infinitas maneiras, com isso a representação de f em séries de Fourier não será única. Dois casos particulares e importantes de extensões periódicas de período $2L$ de f , são as extensões periódicas par e ímpar, respectivamente, o que nos permite representar f em termos de apenas cossenos e de apenas senos, respectivamente. Pode ser que queiramos uma extensão periódica de f de período $4L$, o que significa que teremos que definir g nos intervalos $(L, 2L]$ e $[-2L, 0)$. Nas aplicações de séries de Fourier faremos a escolha de g que seja a adequada ao problema (condições de contorno).

Exemplo 1.11 Dada $f(x) = x$, para $0 \leq x \leq \pi$, escreva f como uma série de senos.

Resolução. Neste caso temos $L = \pi$. Vimos que quando uma função g é ímpar, a sua série de Fourier contém apenas senos. Logo, tomaremos como g a extensão de f que é periódica de período 2π e ímpar. Portanto, $g(x) = x$, para $-\pi < x \leq \pi$, veja Figura 9.

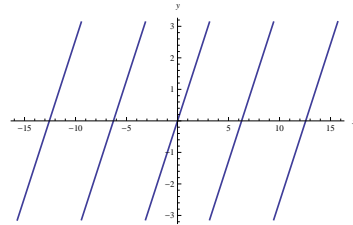


Figura 9: A extensão periódica ímpar de período 2π , da função $f(x) = x$, para $0 \leq x \leq \pi$.

A série de Fourier de g já foi calculada e encontramos a seguinte série de Fourier para f :

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx).$$

Conseqüentemente, do Teorema de Fourier, temos

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx), \quad 0 \leq x < \pi.$$

(Na verdade, a igualdade acima vale para $-\pi < x < \pi$, mas isso não foi pedido no problema.)

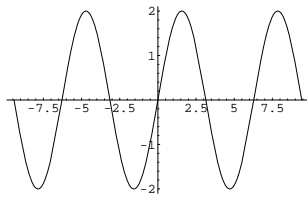


Figura 10: O primeiro termo da série de Fourier de f .

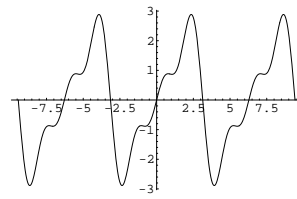


Figura 11: A soma dos três primeiros termos da série de Fourier de f .

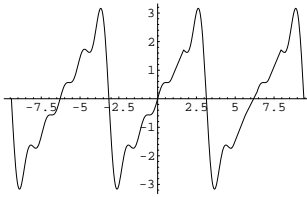


Figura 12: A soma dos cinco primeiros termos da série de Fourier de f .

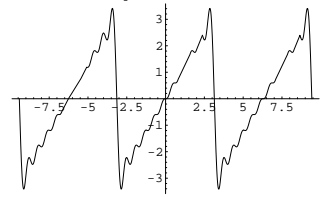


Figura 13: A soma dos dez primeiros termos da série de Fourier de f .

Exemplo 1.12 *No exemplo anterior, poderíamos ter escolhido um período T maior do que 2π na definição de uma extensão periódica ímpar de g . Por exemplo, $T = 4\pi$. E aí teríamos também que definir g no intervalo $(\pi, 2\pi]$, além de dizer que ela é ímpar. Uma opção seria definirmos $g(x) = 2\pi - x$, para x em $(\pi, 2\pi]$. Na Figura 14 esboçamos g para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.*

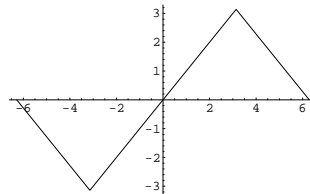


Figura 14:

Resolução. Calculemos os coeficientes b_n , lembrando que $L = 2\pi$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{nx}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} \left(\frac{nx}{2} \right) dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (-x + 2\pi) \operatorname{sen} \left(\frac{nx}{2} \right) dx \\ &= \frac{8}{n^2\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } n = 2k \\ \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}, & \text{se } n = 2k-1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Portanto, a série de Fourier de g é

$$\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)x}{2} \right)$$

a qual converge para $g(x)$ para todo x . Em particular,

$$x = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)x}{2} \right), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Fazendo $x = \pi$ na relação acima, concluímos que

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exemplo 1.13 Dada $f(x) = x$, para $0 \leq x \leq \pi$, escreva f como uma série de co-senos.

Resolução. Neste caso temos $L = \pi$. Vimos que quando uma função g é par, a sua série de Fourier contém apenas cossenos (e o termo constante). Logo, tomaremos como g a extensão de f que é periódica de período 2π e par. Portanto, faremos $g(x) = |x|$, para $-\pi < x \leq \pi$. Portanto, $b_n = 0$ e

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \begin{cases} \pi, & \text{se } n = 0, \\ \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2\pi}, & \text{se } n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Portanto, a série de Fourier de g é

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x,$$

logo, pelo Teorema de Fourier

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Exemplo 1.14 Dada $f(x) = x$, para $0 \leq x \leq \pi$, escreva f como uma série de senos e co-senos.

Resolução. Tomaremos uma extensão de f periódica de período 2π . Temos infinitas possibilidades, por exemplo, podemos fazer $g(x) = 0$ para $-\pi < x \leq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x dx = \frac{\pi}{2} \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \operatorname{sen} nx dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Portanto, a série de Fourier de g é

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen}(kx).$$

Em particular, do Teorema de Fourier, temos

$$x = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Fazendo $x = \frac{\pi}{2}$ na expressão acima, concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercício 1.8 Seja $f(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq \pi$.

(a) Mostre que a série de Fourier de cossenos de f é

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

(b) Usando $x = \pi$, conclua que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

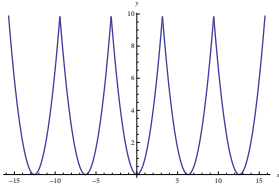


Figura 15: Gráfico da extensão periódica par de f .

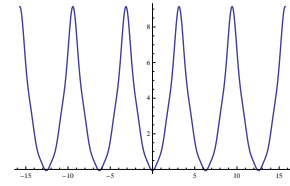


Figura 16: A soma dos sete primeiros termos da série de Fourier de cossenos de f .

Exemplo 1.15 Dada uma função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, mostre que ela possui a seguinte série de senos

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right), \quad (5)$$

onde

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right) dx.$$

Resolução. Suponha que o gráfico de f seja como na Figura 17. Inicialmente, veja Figura 18, iremos estender f para uma função g definida em $[0, 2L]$, de modo que ela coincida com f no intervalo $[0, L]$ e $g(x) = f(2L - x)$, para x no intervalo $[L, 2L]$. Isto faz com que $g(x)$ seja simétrica em relação ao eixo $x = L$, ou seja, $g(L + \Delta x) = f(L - \Delta x) = g(2L - \Delta x)$, para $0 < \Delta x < L$. Feito isso, iremos estendê-la para todo x de forma que ela seja uma função periódica ímpar de período $4L$, veja Figura 19, logo, os seus coeficientes de Fourier (de senos) serão dados por

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2L} \int_0^{2L} g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L} dx \\ &= \frac{1}{L} \left(\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L} dx + \int_L^{2L} g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L} dx \right) \\ &= \frac{1}{L} \left(\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L} dx + \int_L^{2L} f(2L - x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L} dx \right). \end{aligned}$$

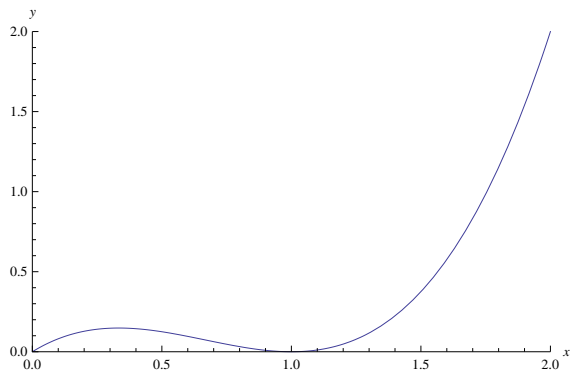


Figura 17: Gráfico de f .

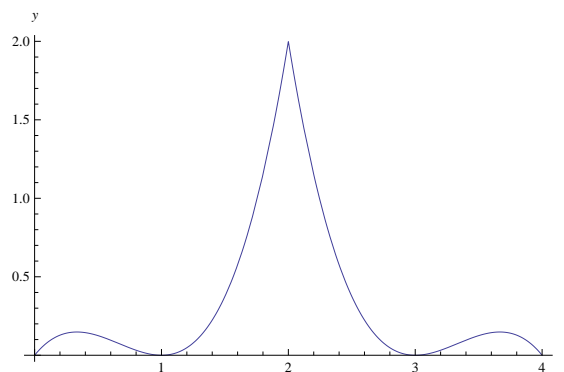


Figura 18: Gráfico da extensão de f para o intervalo $[0, 2L]$ de modo que ela seja simétrica em relação ao eixo $x = L$.

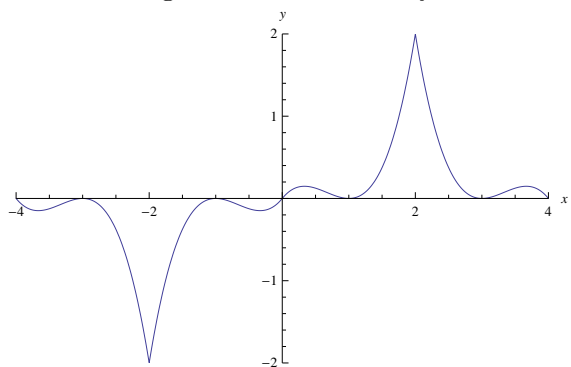


Figura 19: Gráfico da extensão de f para o intervalo $[-2L, 2L]$ de modo que ela seja ímpar.

Note que fazendo a mudança de variáveis $y = 2L - x$ na segunda integral, temos

$$\begin{aligned}
 \int_L^{2L} f(2L - x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2L} \right) dx &= - \int_L^0 f(y) \operatorname{sen} \left(\frac{n(2L - y)\pi}{2L} \right) dy \\
 &= \int_0^L f(y) \operatorname{sen} \left(\frac{n(2L - y)\pi}{2L} \right) dy \\
 &= \int_0^L f(y) \operatorname{sen} \left(n\pi - \frac{n\pi y}{2L} \right) dy \\
 &= -\cos n\pi \int_0^L f(y) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{2L} \right) dy \\
 &= -(-1)^n \int_0^L f(y) \operatorname{sen} \left(\frac{(2k - 1)\pi y}{2L} \right) dy.
 \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$b_n = \frac{1 - (-1)^n}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2L} \right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ for par} \\ \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{2L} \right) dx, & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

que é o resultado desejado. ■

A representação (5) será usada no estudo da equação de calor com condições de contorno mista.

Exercício 1.9 *Seja $f(x)$ definida como*

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

- (a) *Seja g o prolongamento periódico ímpar com período 2π de f . Esboce o gráfico de g .*
- (b) *Calcule a série de Fourier de g .*
- (c) *Qual o valor da série de Fourier de g no ponto $x = \frac{\pi}{2}$.*

1.9 Derivação e Integração de Séries de Fourier

No curso de cálculo vimos que se uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tem raio de convergência $R > 0$, então para todo $a, x \in (-R, R)$, temos

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'$$

e

$$\int_a^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n \right) du = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x a_n u^n du.$$

Em outras palavras, podemos derivar e integrar termo a termo uma série de potências no intervalo $(-L, L)$. Será que podemos fazer o mesmo com uma série de Fourier?

A seguir daremos condições suficientes para integrarmos e derivarmos uma série de Fourier.

Exemplo 1.16 *Suponha que f periódica de período $2L$ e continuamente derivável. Então a série de Fourier de f' é*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L} b_n \cos \frac{n\pi x}{L} - \frac{n\pi}{L} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right),$$

onde a_n e b_n são os coeficientes de Fourier de f . A série acima é obtida derivando termo a termo a série de Fourier de f . Como f' é contínua, a série acima converge para $f'(x)$ em todos os pontos.

Resolução. Como f é periódica de período $2L$, o mesmo acontecerá com f' . Sejam a'_n e b'_n os coeficientes de Fourier de f' . Logo

$$a'_o = \frac{2}{L} \int_{-L}^L f'(x) dx = f(L) - f(-L) = 0,$$

para $n > 0$, fazendo integração por partes (os termos de fronteira são nulos, pois f e $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ são $2L$ periódicas), temos

$$a'_n = \frac{2}{L} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \left[f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L + \frac{n\pi}{L} \frac{2}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{n\pi}{L} b_n.$$

De maneira análoga, obtemos

$$b'_n = -\frac{n\pi}{L} a_n.$$

■

Exemplo 1.17 *Suponha que f seja periódica de período $2L$ e contínua. Então para todo x , integrando por partes, temos*

$$\int_0^x f(y) dy = \frac{a_o}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{L a_n}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{L}{n\pi} b_n \left(\frac{1}{n} - 1\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right),$$

onde a_n e b_n são os coeficientes de Fourier de f . A série acima é obtida integrando termo a termo a série de Fourier de f .

Resolução. Seja $g(x) = f(x) - \frac{\int_{-L}^L f(y) dy}{2L} = f(x) - \frac{a_o}{2}$, então g é $2L$ periódica e $\int_{-L}^L g(y) dy = 0$, portanto $G(x) = \int_0^x g(y) dy$ é $2L$ periódica e continuamente derivável, pois $G'(x) = g(x)$. Sejam A_n e B_n os coeficientes de Fourier de G , então do exercício anterior,

$$g(x) = G'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-A_n n\pi}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{n\pi B_n}{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right),$$

mas

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \right),$$

portanto, para $n \geq 1$, temos

$$A_n = -\frac{L}{n\pi} b_n \quad e \quad B_n = \frac{L}{n\pi} a_n.$$

Portanto,

$$G(x) = \frac{A_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{L}{n\pi} b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{L}{n\pi} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

Como $G(0) = 0$, então

$$\frac{A_o}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} b_n.$$

Logo

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{La_n}{n\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + \frac{L}{n\pi} b_n \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right).$$

Como

$$\int_0^x f(y) dy = G(x) + \frac{a_o}{2} x,$$

obtemos o resultado desejado. ■

1.10 Séries de Fourier Complexas

A seguir mostraremos que a série de Fourier de uma função f periódica de período $2L$ e suave por partes pode ser escrita como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{\frac{in\pi x}{L}}, \quad (6)$$

onde

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{\frac{-in\pi y}{L}} f(y) dy, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

A série (6) é chamada de **série de Fourier complexa de f** ,

Prova. De fato, relação de Euler, para todo θ real, temos

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta,$$

da qual obtemos

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad e \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Das duas últimas relações acima, temos

$$a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) = \frac{a_n - ib_n}{2} e^{\frac{in\pi x}{L}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{\frac{-in\pi x}{L}}. \quad (8)$$

Das definições de a_n , b_n e de \hat{f} e da relação de Euler, temos

$$\begin{aligned}\frac{a_n - ib_n}{2} &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) \left(\cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \right) dy \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-\frac{in\pi y}{L}} f(y) dy = \hat{f}(n)\end{aligned}\tag{9}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{a_n + ib_n}{2} &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) \left(\cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \right) dy \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{\frac{in\pi y}{L}} f(y) dy \\ &= \hat{f}(-n).\end{aligned}\tag{10}$$

Substituindo (9), (10) em (8), temos

$$a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \hat{f}(n)e^{\frac{in\pi x}{L}} + \hat{f}(-n)e^{-\frac{in\pi x}{L}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}S_N(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \right) \\ &= \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^N \left(\hat{f}(n)e^{\frac{in\pi x}{L}} + \hat{f}(-n)e^{-\frac{in\pi x}{L}} \right) \\ &= \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e^{\frac{in\pi x}{L}}.\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema de Fourier, a sequência $\sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e^{\frac{in\pi x}{L}}$ converge para $\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$, quando N tende a infinito. ■

As relações (9) e (10) nos permitem passar da série de Fourier complexa para a série de Fourier real e vice-versa.

Exemplo 1.18 *Encontre a série de Fourier de f periódica de período 2π , definida como*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0, & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}.$$

Resolução. Note que os coeficientes de Fourier complexos são

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-inx} dx = \begin{cases} \frac{e^{-in\pi}-1}{-2\pi in}, & \text{se } n \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{se } n = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1-(-1)^n}{2\pi in}, & \text{se } n \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

Logo a série de Fourier complexa de f é

$$\frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \sum_{|n| \geq 1} \frac{e^{i(2n-1)x}}{2n-1}.$$

■

1.11 A desigualdade de Parseval e o Lemma de Riemann-Lebesgue

Exercício 1.10 Usando as relações de ortogonalidade dadas no Exercício 1.5 mostre que

$$\int_{-L}^L (S_N(x))^2 dx = L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right). \quad (11)$$

Exercício 1.11 Multiplicando (4) por $f(x)$ e integrando de $-L$ a L , mostre que

$$2 \int_{-L}^L f(x)S_N(x) dx = 2L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right). \quad (12)$$

Como $0 \leq (f(x) - S_N(x))^2$, de (11) e (12) temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-L}^L (f(x) - S_N(x))^2 dx \\ &= \int_{-L}^L (f(x))^2 dx - 2 \int_{-L}^L f(x)S_N(x) dx + \int_{-L}^L (S_N(x))^2 dx \\ &= \int_{-L}^L (f(x))^2 dx - L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right) \end{aligned}$$

portanto, para todo N , temos

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L (f(x))^2 dx,$$

tomando o limite quando N tende a infinito, obtemos a seguinte desigualdade, chamada de **Desigualdade de Bessel**:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L (f(x))^2 dx < \infty.$$

Como a série $\frac{a_n^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ é convergente, então o seu termo geral $a_n^2 + b_n^2$ tende a zero quando n tende a infinito, ou equivalentemente, os coeficientes a_n e b_n tendem a zero quando $n \rightarrow \infty$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad (13)$$

este resultado é chamado de **Lema de Riemann-Lebesgue**.

Exemplo 1.19 *Suponha que $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua por partes, então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^L g(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt = 0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^L g(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt = 0,$$

portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^L g(t) \sin \left(\frac{(n + 1/2)t}{L} \right) dt = 0. \quad (14)$$

Resolução. Como g é contínua por partes em $[0, L]$, logo $G : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$G(t) = \begin{cases} g(t), & \text{se } t \in [0, L] \\ 0, & \text{se } t \in [-L, 0) \end{cases}$$

é contínua por partes em $[-L, L]$, portanto tem quadrado integrável. Então aplicando o lema de Riemann-Lebesgue a $G(t)$, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L G(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L G(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt = 0$, portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^L g(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L G(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt = 0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^L g(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L G(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt = 0.$$

■

Exemplo 1.20 *Suponha que $h : [-L, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua por partes, então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^0 h(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt = 0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^0 h(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt = 0,$$

consequentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^0 h(t) \sin \left(\frac{(n + 1/2)\pi t}{L} \right) dt = 0. \quad (15)$$

Resolução. Como h é contínua por partes em $[-L, 0]$, logo $H : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$H(t) = \begin{cases} h(t), & \text{se } t \in [-L, 0] \\ 0, & \text{se } t \in (0, L] \end{cases}$$

é contínua por partes em $[-L, L]$, aplique o lema de Riemann-Lebesgue a $H(t)$ e proceda como no Exemplo 1.19. ■

Exemplo 1.21 *Seja f derivável por partes na reta real. Para x fixo, defina $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : [-L, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t)-f(x_+)}{2\text{sen}(t/2)}, & \text{se } t \in (0, L] \\ f'(x_+), & \text{se } t = 0 \end{cases} \quad (16)$$

e

$$h(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t)-f(x_-)}{2\text{sen}(t/2)}, & \text{se } t \in [-\pi, 0) \\ f'(x_-), & \text{se } t = 0 \end{cases}. \quad (17)$$

Como g e h são contínuas por partes, segue de (14) e (15), que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^L g(t) \text{sen} \frac{(n+1/2)\pi t}{L} dt = 0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^0 h(t) \text{sen} \frac{(n+1/2)\pi t}{L} dt = 0.$$

1.12 Demonstração do Teorema de Fourier

O nosso objetivo é demonstrar o Teorema de Fourier, primeiro consideraremos o caso particular em que $L = \pi$, depois consideraremos o caso em que $L > 0$ é arbitrário.

Seja f periódica com período 2π , da definição dos seus coeficientes de Fourier podemos escrever

$$\begin{aligned}
 a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\operatorname{cos} kx \operatorname{cos} kt + \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} kt) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{cos}[k(x-t)] dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{cos}[k(t-x)] dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+y) \operatorname{cos} ky dy, \quad (t-x=y) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \operatorname{cos} kt dt, \quad (y=t) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \operatorname{cos} kt dt,
 \end{aligned}$$

na última igualdade usamos que $f(x+t) \operatorname{cos} kt$ é periódica com período 2π , logo a sua integral sobre qualquer intervalo de comprimento 2π tem o mesmo valor. Da mesma forma, obtemos

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) dt.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \operatorname{cos} nx + b_n \operatorname{sen} nx) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \operatorname{cos}(kt) \right) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_N(t) dt,
 \end{aligned}$$

onde

$$D_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \operatorname{cos}(kt) \tag{18}$$

é chamado de **núcleo de Dirichlet**. Mostraremos que

$$D_N(t) = \begin{cases} N + \frac{1}{2} & \text{se } t = 0 \\ \frac{\operatorname{sen}((N+1/2)t)}{2 \operatorname{sen}(t/2)}, & \text{se } t \neq 0 \end{cases}. \tag{19}$$

A função dada acima é claramente contínua em $[-L, L]$.

Note que de (18), temos $D_N(0) = N + \frac{1}{2}$. Da relação de Euler, podemos escrever

$$D_n(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{k=1}^N e^{ikt} + \sum_{k=1}^N e^{-ikt} \right),$$

fazendo $q = e^{it}$ na identidade

$$\sum_{k=1}^N q^k = \frac{q - q^{N+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

temos

$$\sum_{k=1}^N e^{ikt} = \frac{e^{it} - e^{i(N+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{-e^{it/2}(e^{it/2} - e^{i(N+1/2)t})}{e^{it/2}(e^{-it/2} - e^{it/2})} = \frac{e^{it/2} - e^{i(N+1/2)t}}{e^{-it/2} - e^{it/2}} = \frac{-e^{it/2} + e^{i(N+1/2)t}}{2i \operatorname{sen}(t/2)}$$

trocando t por $-t$ na relação acima, temos

$$\sum_{k=1}^N e^{-ikt} = \frac{e^{-it/2} - e^{-i(N+1/2)t}}{2i \operatorname{sen}(t/2)},$$

portanto

$$\sum_{k=1}^N e^{ikt} + \sum_{k=1}^N e^{-ikt} = \frac{-2i \operatorname{sen}(t/2) + 2i \operatorname{sen}((N+1/2)t)}{2i \operatorname{sen}(t/2)} = -1 + \frac{\operatorname{sen}((N+1/2)t)}{\operatorname{sen}(t/2)}.$$

■

Note que

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_N(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) D_N(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) D_N(t) dt,$$

mostraremos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) D_N(t) dt = \frac{f(x_-)}{2} \quad e \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) D_N(t) dt = \frac{f(x_+)}{2}.$$

com isso teremos mostrado o Teorema de Fourier para $L = 2\pi$. Note que de (18), temos

$$\int_0^{\pi} D_N(t) dt = \frac{\pi}{2} \quad e \quad \int_0^0 D_N(t) dt = \frac{\pi}{2},$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) D_N(t) dt - \frac{f(x_+)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) D_N(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x_+) D_N(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) - f(x_+)) D_N(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \operatorname{sen}(t/2) g(t) D_N(t) dt, \quad \left(\text{fizemos } g(t) = \frac{f(x+t) - f(x_+)}{2 \operatorname{sen}(t/2)}, \text{ veja (16)} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(t) \operatorname{sen}((N+1/2)t) dt \end{aligned}$$

esta última expressão tende a zero quando N tende a infinito, veja (14). De maneira análoga, definindo $h(t) = \frac{f(x+t)-f(x-)}{2\text{sen}(t/2)}$, veja (17), podemos escrever

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t)D_N(t)dt - \frac{f(x-)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 h(t) \text{sen}((N+1/2)t)dt.$$

que tende a zero quando N tende a infinito, veja (15). ■

Note que se $f(x)$ é $2L$ periódica e suave por partes, então $p(x) = f(\pi x/L)$ é 2π periódica e suave por partes, sendo que para $p(x)$ já mostramos o Teorema de Fourier. É fácil ver que os coeficientes de f e p são iguais, portanto se $S_n(x)$ e $s_N(x)$ são as somas parciais das séries de Fourier de f e p , respectivamente, então

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_N(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_N \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \\ &= \frac{p \left(\frac{n\pi x}{L} + \right) + p \left(\frac{n\pi x}{L} - \right)}{2} \\ &= \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, com isso provamos o Teorema de Fourier para $L > 0$ qualquer. ■

1.13 Exercícios propostos

1. Nos problemas a seguir, esboce o gráfico da função e encontre a sua série de Fourier.

(a) $f(x) = -x$, $-L \leq x < L$, $f(x + 2L) = f(x)$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1 , & -L \leq x < 0 \\ 0 , & 0 \leq x < L \end{cases}$; $f(x + 2L) = f(x)$

(c) $f(x) = \begin{cases} -L - x , & -L \leq x < 0 \\ L - x , & 0 \leq x < L \end{cases}$; $f(x + 2L) = f(x)$

(d) $f(x) = \begin{cases} x + 1 , & -1 \leq x < 0 \\ x , & 0 \leq x < 1 \end{cases}$; $f(x + 2) = f(x)$

(e) $f(x) = \begin{cases} 0 , & -1 \leq x < 0 \\ x^2 , & 0 \leq x < 1 \end{cases}$; $f(x + 2) = f(x)$

(f) $f(x) = \begin{cases} 0 , & -\pi \leq x < 0 \\ \text{sen } x , & 0 \leq x < \pi \end{cases}$; $f(x + 2\pi) = f(x)$

(g) $f(x) = |\text{sen } x|$

(h) $f(x) = \text{sen}^2 x$

2. Nos problemas a seguir, determinar se cada função dada é par, ou ímpar, ou nem par nem ímpar. Esboce o gráfico da função em cada caso.

(a) x^3 (e) $\sec x$

(b) $x^3 - 2x$ (f) $|x^3|$

(c) $x^3 - 2x + 1$ (g) e^{-x}

(d) $\tan 2x$ (h) $e^{-|x|}$

3. Considere a função $f(x) = x^2$, $0 \leq x < 1$.

(a) Faça o desenvolvimento em séries de Fourier correspondente à *extensão periódica* dessa função, ou seja, o desenvolvimento da função como se ela fosse periódica fora do intervalo no qual ela se encontra definida, sendo seu período igual a 1. Esboce o gráfico da função resultante no intervalo $[-4, 4]$.

(b) Faça o desenvolvimento em séries de Fourier correspondente à *extensão periódica par* dessa função, ou seja, o desenvolvimento utilizando apenas termos em cosseno, com período 2. Esboce o gráfico da função resultante no intervalo $[-4, 4]$.

- (c) Faça o desenvolvimento em séries de Fourier correspondente à *extensão periódica ímpar* dessa função, ou seja, o desenvolvimento utilizando apenas termos em seno, com período 2. Esboce o gráfico da função resultante no intervalo $[-4, 4]$.

4. Considere as funções:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < x \leq 1 \\ x & , \quad 1 < x \leq 3 \end{cases} & \text{(c)} f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 < x \leq 1 \\ 1-x & , \quad 1 < x \leq 3 \end{cases} \\ \text{(b)} f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 & , \quad 1 < x \leq 3 \end{cases} & \text{(d)} f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad 0 < x \leq 1 \\ -x & , \quad 1 < x \leq 3 \end{cases} \end{array}$$

Para cada uma das funções acima:

- (i) Esboce o gráfico da extensão periódica de período igual a 3 da função, no intervalo de -12 a 12. Determine a série de Fourier dessa extensão.
- (ii) Esboce o gráfico da extensão par de período igual a 6 da função, no intervalo de -12 a 12. Determine a série de Fourier dessa extensão.
- (iii) Esboce o gráfico da extensão ímpar de período igual a 6 da função, no intervalo de -12 a 12. Determine a série de Fourier dessa extensão.
5. Suponha que o conjunto de funções $u_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ seja ortonormal em $[a, b]$, ou seja, $\int_a^b u_n(x)u_m(x)dx = \delta_{nm}$. Se a integral $\int_a^b f^2(x)dx$ é finita, defina

$$c_n = \int_a^b f(x)u_n(x)dx.$$

Mostre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx$$

e conclua que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)u_n(x)dx = 0.$$

2 Equações Diferenciais Parciais

2.1 Um pouco sobre equações diferenciais ordinárias

Como não se pressupõe que o aluno tenha feito um curso de equações diferenciais ordinárias para fazer este curso, falaremos brevemente sobre este assunto.

Uma equação diferencial ordinária. *EDO*, é uma equação que envolve uma função desconhecida $u(x)$ e derivadas da mesma. A **ordem de uma EDO** é a ordem da derivada mais alta que aparece na mesma. Por exemplo $u'(x) = ku(x)$ e $u''(x) = \omega^2 u(x)$, onde k, ω são constantes positivas, são *EDO's* de primeira e segunda ordem, respectivamente. Eles descrevem o crescimento populacional e o movimento de um oscilador harmônico, respectivamente.

Uma **equação linear de primeira ordem** mais geral possível é da forma

$$u'(x) + p(x)u(x) = g(x), \quad (20)$$

onde os coeficientes p e g são funções conhecidas. Se $P(x)$ for uma anti-derivada de $p(x)$, então multiplicando a equação acima por $e^{P(x)}$, temos $e^{P(x)}u' + p(x)e^{P(x)}u(x) = e^{P(x)}g(x)$, ou seja $(e^{P(x)}u(x))' = e^{P(x)}g(x)$. Portanto, $e^{P(x)}u(x) = \int e^{P(x)}g(x)dx + C$, ou seja,

$$u(x) = \frac{\int e^{P(x)}g(x)dx + C}{e^{P(x)}}$$

é a solução geral de (20). No cálculo da integral indefinida $\int e^{P(x)}g(x)dx$ devemos fazer a constante arbitrária igual a zero, uma vez que já temos uma constante arbitrária C . Por exemplo, dada a equação $u' + 2xu = x$, temos $p(x) = 2x$ e $g(x) = x$, logo $P(x) = e^{x^2}$, portanto

$$u(x) = \frac{\int e^{x^2} x dx + C}{e^{x^2}} = \frac{\frac{1}{2}e^{x^2} + C}{e^{x^2}} = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}.$$

O **problema de valor inicial** para uma equação linear de primeira ordem consiste em encontrarmos a solução de (20) que satisfaça a condição inicial $u(x_0) = u_0$. Por exemplo, para encontrarmos a solução de $u' + 2xu = x$, $u(0) = 1$, escolhemos C em $u(x) = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$ de modo que $u(0) = 1$, ou seja, $C = 1/2$. Logo a solução desejada é $u(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-x^2}$.

Toda equação de primeira ordem que não é da forma (20) é chamada de **não linear**.

Dizemos que uma equação de primeira ordem é de **variáveis separáveis** se ela é da forma

$$u' = \frac{f(u)}{g(x)}, \quad (21)$$

por exemplo, $u' = \frac{u^2+1}{x+3}$. Note que (21) pode ser reescrita como

$$\frac{du}{f(u)} = \frac{dx}{g(x)},$$

onde separamos as variáveis u e x . A solução geral de (21) é

$$\int \frac{du}{f(u)} = \int \frac{dx}{g(x)}.$$

Em particular, se $u' = \frac{u^2+1}{x+3}$ temos

$$\int \frac{du}{u^2+1} = \int \frac{dx}{x+3}$$

ou seja, $\arctg u = \ln|x+3| + C$ ou $u = \operatorname{tg}(\ln|x+3| + C)$.

Uma **EDO linear de segunda ordem** mais geral possível é da forma

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = g(x), \quad (22)$$

onde os coeficientes p , q e g são funções conhecidas. Se $g(x) = 0$ dizemos que a equação é **homogênea**. O problema de valor inicial para uma equação linear de segunda ordem consiste em encontrarmos a solução de (22) que satisfaça às condições iniciais $u'(x_o) = u_o$ e $u''(x_o) = u''_o$, que no caso de um oscilador harmônico correspondem à posição e à velocidade da massa no instante x_o .

O conjunto solução de uma equação linear de segunda ordem é um espaço **vetorial de dimensão 2**. Para encontrarmos uma base para o mesmo, basta encontrarmos duas soluções $u_1(x)$ e $u_2(x)$ que sejam linearmente independentes, isto significa que

$$W(u_1(x), u_2(x)) = \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Um caso particularmente interessante de uma **EDO linear de segunda ordem homogênea** é quando os coeficientes são constantes, ou seja, ela é da forma

$$au'' + bu' + cu = 0,$$

onde a, b, c são constantes que assumiremos reais, com $a \neq 0$. Para resolvermos tal equação, buscamos uma solução da forma $e^{\lambda x}$, o que significa que λ tem que ser raiz da seguinte equação

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

chamada de **equação característica da EDO**. Fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$ temos as seguintes possibilidades:

(i) $\Delta > 0$, neste caso temos duas raízes reais distintas: $\lambda_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ e a solução geral da equação será

$$u(x) = c_1 e^{\lambda_- x} + c_2 e^{\lambda_+ x}.$$

(ii) $\Delta = 0$, neste caso $\lambda_- = \lambda_+ = \frac{-b}{2a}$, o que nos dá a solução $e^{-\frac{b}{2a}x}$, para encontrarmos uma outra solução que não seja múltiplo desta, tentamos uma solução da forma $u(x) = v(x)e^{-\frac{b}{2a}x}$, com isso encontramos $v(x) = x$. Portanto a solução geral da equação é

$$u(x) = (c_1 + c_2 x) e^{-\frac{b}{2a}x}.$$

(iii) $\Delta < 0$, neste caso temos duas raízes complexas distintas: $\lambda_{\pm} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \alpha \pm i\beta$, o que nos dá as soluções complexas $u_1(x) = e^{\alpha x} e^{i\beta x}$ e $u_2(x) = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$. Como a equação (22) é linear e homogênea, combinações lineares de suas soluções também serão soluções. Em particular, $\frac{u_1(x) + u_2(x)}{2} = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ e $\frac{u_1(x) - u_2(x)}{2i} = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ são soluções de (22), como uma não é múltiplo escalar da outra, elas são linearmente independentes, portanto a solução geral de (22) será

$$u(x) = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)). \quad (23)$$

Se quisermos resolver o problema de valor inicial, teremos que escolher c_1 e c_2 de forma satisfazer as condições iniciais, isto significa resolver um sistema de equações lineares (duas equações de duas incógnitas).

Em muitas situações estaremos interessados em resolver uma equação ordinária de segunda ordem onde a situação física requer que consideremos $u(x)$ apenas para $x \in [0, L]$, onde L é positivo e finito. Neste caso invés de especificarmos as condições iniciais, teremos que especificar condições em u e ou u' nas extremidades deste intervalo, com isso teremos o que chamamos de **condições de contorno**. A equação diferencial, juntamente com estas condições de contorno nos levam aos **problemas de valores de contornos**. Embora existam outras **condições de contorno** importantes, consideraremos condições de contorno de **Dirichlet**, de **Neumann** e **mista**, dadas por (i) $u(0) = 0 = u(L)$, (ii) $u'(0) = 0 = u'(L)$ e (iii) $u(0) = 0 = u'(L)$. respectivamente, onde λ é uma constante. Mais precisamente, consideraremos os seguintes problemas de valores de contornos: $u''(x) = \lambda u(x)$, para $0 < x < L$ e u satisfaz uma das três condições de contorno (i). (ii) ou (iii). Estes problemas serão resolvidos quando estudarmos a solução da equação do calor.

2.2 O que é uma equação diferencial parcial?

Uma equação diferencial parcial, *EDP*, é uma equação contendo uma função desconhecida u de duas ou mais variáveis independentes e derivadas parciais de u em relação a estas variáveis.

2.3 Classificação de Equações Diferenciais Parciais

A ordem de uma equação *EDP* é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na mesma. Por exemplo, $u_x + uu_y = 0$ e $u_x = u_{yy}$ são *EDP*'s de primeira e segunda ordem, respectivamente, nas variáveis independentes x e y .

Dizemos que uma *EDP* de **primeira ordem** nas variáveis independentes x e y é **linear** se ela é da forma:

$$au_x + bu_y + cu = d, \quad (24)$$

onde os coeficientes a, b, c, d podem depender apenas de x, y . Por exemplo, $xu_x + u_y = \cos(xy)u + e^{xy}$ é uma equação linear de primeira ordem. Se $d = 0$, dizemos que a equação linear é **homogênea**. Uma equação de primeira ordem nas variáveis x, y que não é da forma (24) é dita ser **não-linear**. Por exemplo, $u_x + uu_y = 0$ é de primeira ordem e não-linear.

Dizemos que uma *EDP* de **segunda ordem** nas variáveis independentes x, y é **linear**, se ela for da seguinte forma:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g \quad (25)$$

onde os coeficientes a, b, \dots, g só podem depender de x e y , não podem depender de u ou de suas derivadas parciais. Uma *EDP* de segunda ordem que não é da forma (25) é chamada de **não-linear**. Se g for identicamente zero, dizemos que a *EDP* (25) é **homogênea**, caso contrário, dizemos que ela é **não-homogênea**.

Exercício 2.1 (*Princípio da Superposição*) *Mostre que se u_1 e u_2 forem soluções de uma EDP linear e homogênea, então $u = c_1u_1 + c_2u_2$ também será.*

É comum classificarmos as equações (25) em função do sinal de $\Delta = b^2 - ac$. Dizemos que (25) é **elíptica**, **hiperbólica** ou **parabólica**, se Δ for negativo, positivo ou zero, respectivamente. Por exemplo a equação $u_{xx} + u_{yy} = 0$ é elíptica.

Exemplo 2.1 A equação $u_t = ku_{xx}$, onde k é uma constante positiva, é parabólica. A equação $u_{tt} = c^2u_{xx}$, onde c é uma constante positiva, é hiperbólica. A equação $xu_{xx} + yu_{yy} + 3y^2u_x = 0$ é elíptica na região $xy < 0$, é hiperbólica na região $xy > 0$ e se $xy = 0$, ela é parabólica (verifique estas afirmações!).

Dizemos que u é uma **solução de uma EDP**, se ela a satisfaz identicamente e se u e todas as suas derivadas parciais que aparecem na EDP forem contínuas. Por exemplo,

$$u(x, y) = x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + 2\sin x + 3y^4 - 5$$

é uma solução de $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y$.

Exercício 2.2 Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 (têm derivadas até segunda ordem contínuas).

Mostre que

$$u(x, t) = f(2x + 5t) + g(2x - 5t)$$

é solução da equação $4u_{tt} = 25u_{xx}$.

2.4 O Método de Separação de Variáveis

Uma das técnicas para resolução de EDP's é o **método de separação de variáveis**. Em que consiste este método? Se a EDP tiver variáveis independente x e y , ou seja, se $u = u(x, y)$, buscamos uma solução u da forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Ao substituirmos esta solução na EDP, tentamos separar de um lado da equação a variável x e do outro a variável y , se isto for possível, como estas duas variáveis são independentes e temos uma função de x igual a uma função de y para todo x, y , então cada lado deve ser igual a uma constante λ , o que nos leva a duas equações diferenciais ordinárias uma para a variável x e a outra para a variável y . Por exemplo, dada a equação $u_{xx} + u_{yy} = 0$, se fizemos $u(x, y) = X(x)Y(y)$, teremos $X(x)X''(x) + Y(y)Y''(y) = 0$. Dividindo esta equação por $X(x)Y(y)$ e separando as variáveis, obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda,$$

o que nos leva a duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, lineares, com coeficientes constantes e homogêneas,

$$X''(x) = \lambda X(x) \quad e \quad Y''(y) = -\lambda Y(y),$$

que são facilmente resolvíveis, veja seção 2.1. Em princípio λ é uma constante qualquer, mas nos problemas que consideraremos, somente valores particulares de λ serão permitidos, eles serão determinados pelas condições de contorno. Se tivermos n variáveis independentes na *EDP*, tentamos uma solução que seja o produto de n funções, cada uma das quais numa das n variáveis independentes, na expectativa de obter n equações diferenciais ordinárias. Neste caso, teríamos $n - 1$ constantes de separação de variáveis $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$.

Exemplo 2.2 *Resolva o seguinte problema usando separação de variáveis:*

$$u_x = 4u_y, \quad u(0, y) = 8e^{-3y}.$$

Resolução. Fazendo $u(x, y) = X(x)Y(y)$, temos

$$\frac{X'(x)}{4X(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda,$$

o que nos leva as seguintes equações diferenciais ordinárias de primeira ordem de variáveis separáveis:

$$X'(x) = 4\lambda X(x), \quad Y'(y) = \lambda Y(y).$$

Suas soluções gerais são $X(x) = c_1 e^{4\lambda x}$ e $Y(y) = c_2 e^{\lambda y}$, o que nos leva a

$$u(x, y) = c_1 c_2 e^{\lambda(4x+y)} = c e^{\lambda(4x+y)}.$$

Como queremos que $u(0, y) = 8e^{-3y}$, então $c e^{\lambda y} = 8e^{-3y}$, portanto $\lambda = -3$ e $c = 8$, que nos leva a solução $u(x, y) = 8e^{-3(4x+y)}$. ■

Exemplo 2.3 *Resolva o seguinte problema usando separação de variáveis:*

$$u_x = 4u_y, \quad u(0, y) = 8e^{-3y} + 4e^{-5y}.$$

Resolução. A *EDP* acima é linear e homogênea, logo se $u_1(x, y)$ e $u_2(x, y)$ forem soluções da mesma, então $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$ também será. No exemplo anterior vimos que $u_1(x, y) = c_1 e^{\lambda_1(4x+y)}$ e $u_2(x, y) = c_2 e^{\lambda_2(4x+y)}$ são soluções da *EDP*, então

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) = c_1 e^{\lambda_1(4x+y)} + c_2 e^{\lambda_2(4x+y)}$$

também é solução da mesma. A seguir escolheremos as constantes c_1 , c_2 , λ_1 e λ_2 de modo a satisfazer a condição $u(0, y) = 8e^{-3y} + 4e^{-5y}$. Ou seja, devemos ter

$$c_1 e^{\lambda_1 y} + c_2 e^{\lambda_2 y} = 8e^{-3y} + 4e^{-5y},$$

o que implica que $c_1 = 8$, $c_2 = 4$, $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -5$. Portanto a solução desejada é

$$u(x, y) = 8e^{-12x-3y} + 4e^{-20x-5y}.$$

Exercício 2.3 *Resolva os seguintes problemas usando separação de variáveis*

(a) $3u_x + 2u_y = 0, \quad u(x, 0) = 4e^{-x}$

(b) $u_x = 2u_y + u, \quad u(x, 0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x}$

(c) $u_t = 4u_{xx}, \quad u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = 2\text{sen}(3x) - 4\text{sen}(5x)$

(d) $u_t = u_{xx}, \quad u_x(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0, \quad u(x, 0) = 8 \cos\left(\frac{3\pi x}{4}\right) - 6 \cos\left(\frac{9\pi x}{4}\right)$

(e) $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad u(0, t) = u(5, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 5 \text{sen}(\pi x).$

2.5 A equação do calor em uma dimensão espacial

A equação de calor em uma dimensão espacial modela o fluxo de calor num fio que é isolado em toda parte, exceto, nas duas extremidades. Matematicamente, temos o seguinte problema: seja \mathcal{R} a região do plano (x, t) determinada por $0 < x < L$ e $t > 0$, e $\overline{\mathcal{R}}$ a união de \mathcal{R} com sua fronteira que é formada pelas semi-retas $\{x = 0, t > 0\}$ e $\{x = L, t > 0\}$ e pelo segmento $\{0 \leq x \leq L, t = 0\}$. O problema da condução do calor consiste em determinar uma função real $u(x, t)$, temperatura no ponto x e no instante t , definida em $\overline{\mathcal{R}}$ que satisfaça à equação do calor

$$u_t = K u_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \tag{26}$$

que satisfaça à condição inicial

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \tag{27}$$

onde $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada e, finalmente, que satisfaça às condições de fronteira que vamos descrever abaixo. A constante K é chamada de **difusividade térmica**, depende apenas do material de que é feita a barra, por exemplo, se o material for cobre, então, $K = 1.14 \text{cm}^2/\text{s}$.

2.5.1 Condições de Fronteira da Equação do Calor

Tipo I. Suponhamos que, por algum processo, as extremidades da barra sejam mantidas a temperaturas conhecidas. Por exemplo, constante em cada extremidade,

$$u(0, t) = T_1 \quad e \quad u(L, t) = T_2,$$

onde T_1 e T_2 são temperaturas dadas. Um caso mais complexo seria aquele em que se conhece a variação de temperatura em um das extremidades (ou em ambas), isto é

$$u(0, t) = h_o(t) \quad e \quad u(L, t) = h_1(t),$$

onde $h_o(t)$ e $h_1(t)$, para $t \geq 0$, são as temperaturas em cada uma das extremidades.

Tipo II. Suponhamos que as extremidades estejam isoladas termicamente. Isto quer dizer que os fluxos de calor através de $x = 0$ e $x = L$ são nulos, ou seja,

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0.$$

Tipo III. Suponhamos que meio ambiente tenha uma temperatura u_o e que haja transferência de calor, entre a barra e o meio ambiente, regidas pela lei

$$ku_x(0, t) = e(u(0, t) - u_o), \quad ku_x(L, t) = -e(u(L, t) - u_o),$$

onde e é uma constante, dita emissividade, característica do material da barra do meio ambiente.

Tipo IV. Uma combinação de duas quaisquer das condições acima, como, por exemplo,

$$u(0, t) = 0 \quad e \quad u_x(L, t) = 0.$$

Usaremos o método de separação de variáveis encontrar a solução da equação do calor, assumiremos que

$$u(x, t) = F(x)G(t). \tag{28}$$

Substituindo (28) em (45), temos

$$F(x)G'(t) = KF''(x)G(t) \tag{29}$$

ou

$$\frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}. \quad (30)$$

Como o lado esquerdo de (30) depende apenas de t e o direito depende apenas de x e estas duas variáveis são independentes, ambos os lados devem ser iguais a uma constante σ . Isto nos leva as equações

$$\frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = \sigma \quad e \quad \frac{F''(x)}{F(x)} = \sigma. \quad (31)$$

Em particular, temos

$$F''(x) - \sigma F(x) = 0, \quad \text{para } 0 < x < L. \quad (32)$$

2.5.2 Barra com extremidades mantidas à 0° C

Vamos assumir que a condição de contorno seja do Tipo I, com $u(0, t) = u(L, t) = 0$. Então devemos ter

$$F(0) = F(L) = 0, \quad (33)$$

pois, como $u(0, t) = F(0)G(t) = 0$, para todo $t > 0$, segue-se que se $F(0) \neq 0$, então, $G(t) \equiv 0$ e, portanto, $u \equiv 0$, o que não tem a chance de satisfazer à condição inicial $u(x, 0) = f(x)$, a menos que $f(x) \equiv 0$.

Há três possibilidades para σ .

i) Se $\sigma > 0$, então a solução geral é da forma

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}.$$

Portanto, se tal F satisfizer (33), o par (c_1, c_2) de constantes deverá satisfazer

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0, \\ c_1 e^{\sqrt{\sigma}L} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}L} &= 0. \end{aligned}$$

Da primeira equação, temos $c_2 = -c_1$, substituindo este resultado na segunda equação obtemos,

$$0 = c_1 \left(e^{\sqrt{\sigma}L} - e^{-\sqrt{\sigma}L} \right) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}L} \left(1 - e^{-2\sqrt{\sigma}L} \right).$$

Como $\sigma \neq 0$, devemos ter $c_1 = 0$, portanto $c_2 = 0$. Isto implica $F \equiv 0$, o que não nos interessa.

ii) Se $\sigma = 0$, a solução geral de (32) é

$$F(x) = c_1 x + c_2,$$

e, para satisfazer (33) deveremos ter

$$c_2 = 0 \quad e \quad c_1 L + c_2 = 0,$$

o que implica $c_1 = c_2 = 0$ e, portanto, $F \equiv 0$, o que não nos interessa.

iii) Se $\sigma < 0$, fazemos $\sigma = -\lambda^2$, onde $\lambda > 0$, e a solução geral é

$$F(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x.$$

Para que tal função satisfaça (33), deveremos ter

$$c_1 = 0 \quad e \quad c_2 \operatorname{sen} \lambda L = 0,$$

como não queremos $c_2 = 0$, devemos ter

$$\operatorname{sen} \lambda L = 0,$$

o que implica $\lambda L = n\pi$, onde n é um inteiro positivo, pois $\lambda > 0$. Portanto,

$$\lambda_n = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2},$$

chamados de autovalores do problema e as funções

$$F_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

são chamadas de autofunções associadas. Para cada n a solução da segunda equação diferencial do lado esquerdo de (31) é proporcional a

$$G_n(t) = e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} K t}.$$

Logo, para cada $n = 1, 2, \dots$, temos uma função

$$u_n(x, t) = e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

que satisfaz a equação a equação de calor e as condições de fronteira dadas.

Exercício 2.4 (*Princípio da Superposição*) *Mostre que se $u_1(x, t)$ e $u_2(x, t)$ são soluções da equação de calor, o mesmo acontecerá com $u(x, t) = c_1 u_1(x, t) + c_2 u_2(x, t)$. Portanto, qualquer combinação linear finita de soluções da equação de calor também será solução da mesma.*

Segue-se do Princípio da Superposição, veja exercício acima, que toda expressão da forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right), \quad (34)$$

onde c_n são constantes, é solução da equação de calor. Claramente ela satisfaz às condições de fronteira dadas, ou seja, $u(0, t) = 0 = u(L, t)$, para todo t . Conseqüentemente, se a condição inicial $f(x)$ fosse da forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^N b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right), \quad (35)$$

portanto

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) dx. \quad (36)$$

então, deveríamos ter

$$\sum_{n=1}^N b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) = \sum_{n=1}^N c_n \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right),$$

para todo x . Logo $c_n = b_n$, $n = 1, \dots, N$.

Dada uma função f suave por partes, nem sempre ela será uma combinação linear finita de senos como em (35). Conforme visto no nosso estudo de séries de Fourier, f poderá ser representada pela seguinte série infinita de senos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right).$$

onde b_n é dado por (36). Portanto ao invés da combinação finita (34), o nosso candidato para solução do problema de condição de calor com temperatura zero em $x = 0$ e $x = L$ e distribuição inicial de temperatura f , será a seguinte combinação linear infinita:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right). \quad (37)$$

Por causa da condição inicial $u(x, 0) = f(x)$, devemos fazer $c_n = b_n$, para todo n , onde b_n é dada por (36).

Exemplo 2.4 Independentemente da distribuição de temperatura inicial f , segue da (37) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0. \quad (38)$$

Isto era esperado, pois se mantivermos as extremidades do fio imersas no gelo, pelas leis da Termodinâmica, a temperatura em qualquer ponto deve tender a zero quando o tempo tender a infinito. Neste caso dizemos que a **temperatura de equilíbrio** é 0 grau, o seu valor depende apenas das condições de fronteira.

Para mostrarmos (38), notamos que

$$|b_n| = \left| \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right| \leq \frac{2}{L} \int_0^L |f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right)| dx \leq \frac{2}{L} \int_0^L |f(x)| dx \equiv C.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n \pi^2 K t}{L^2}} \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{\pi^2 K t}{L^2}} \right)^n \\ &= \frac{C e^{-\frac{\pi^2 K t}{L^2}}}{1 - e^{-\frac{\pi^2 K t}{L^2}}}. \end{aligned}$$

Logo

$$0 \leq |u(x, t)| \leq \frac{C e^{-\frac{\pi^2 K t}{L^2}}}{1 - e^{-\frac{\pi^2 K t}{L^2}}}$$

e pelo Teorema do Sanduiche, concluímos que $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(x, t)| = 0$, o que equivale $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$. ■

Exemplo 2.5 Resolva o seguinte problema

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \\ u(x, 0) &= \operatorname{sen}^3 x, \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Resolução. Note que $\operatorname{sen}^3 x = \frac{1}{4}\operatorname{sen} x - \frac{3}{4}\operatorname{sen} 3x$. Logo,

$$u(x, t) = \frac{1}{4} e^{-t} \operatorname{sen} x - \frac{3}{4} e^{-9t} \operatorname{sen} 3x.$$

■

Exemplo 2.6 *Resolva o seguinte problema*

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \\ u(x, 0) &= x, \quad \text{para } 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

Resolução. Note que

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n},$$

portanto

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n^2 t} \operatorname{sen}(nx).$$

■

Exercício 2.5 *Resolva o seguinte problema*

$$\begin{aligned} u_t &= 4u_{xx} + 4u, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \\ u(x, 0) &= 1, \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Sugestão. *Escreva $u(x, t) = e^{4t}v(x, t)$ e mostre que $v(x, t)$ satisfaz a equação de calor já estudada. Quanto vale $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)$?*

2.5.3 Barra isolada termicamente também nas extremidades

Procedendo como no caso anterior, podemos estudar o problema

$$\begin{aligned}u_t &= K u_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\u_x(0, t) &= u_x(L, t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \\u(x, 0) &= f(x), \quad \text{para } 0 < x < L.\end{aligned}$$

Do método de separação de variáveis, temos

$$\begin{aligned}G'(t) &= \sigma G(t), \quad t \geq 0, \\F''(x) - \sigma F(x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq L,\end{aligned}$$

onde σ é determinado pela condição de fronteira

$$F'(0) = F'(L) = 0.$$

Os autovalores são $\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ e as autofunções correspondentes são $F_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}$. Para a segunda equação temos $G_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}}$. Note que para cada n , a função $u_n(x, t) = e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} \cos \frac{n\pi x}{L}$ satisfaz a equação de calor e as condições de fronteira dadas e o mesmo vale para qualquer combinação finita destas funções. Vamos tomar a solução da forma

$$u(x, t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} \cos \frac{n\pi x}{L},$$

onde os coeficientes c_n deverão ser tomadas de modo que $f(x) = u(x, 0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L}$; ou seja,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Exemplo 2.7 *Resolva o seguinte problema*

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\u_x(0, t) &= u_x(\pi, t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \\u(x, 0) &= \cos^2 x + \cos 5x, \quad \text{para } 0 < x < \pi.\end{aligned}$$

Solução. Vimos que a solução do problema acima é da forma

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos nx,$$

onde

$$\cos^2 x + \cos 5x = u(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

por outro lado, como $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, temos que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \cos 5x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

logo, $a_0 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_5 = 1$ e os demais coeficientes são nulos, portanto a solução do problema é

$$u(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-4t} \cos 2x + e^{-25t} \cos 5x.$$

Alternativamente, tendo em vista que $\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x)$, poderíamos ter calculado os coeficientes acima usando as relações

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos^2 x + \cos 5x) \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 x \cos nx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos 5x \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 x \cos nx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos 5x \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2x) \cos nx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos 5x \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \cos 2x dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos 5x \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos(n-2)x + \cos(n+2)x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(n-5) + \cos(n+5)x) dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq 0, 2, 5 \\ 1, & \text{se } n = 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{se } n = 2 \\ 1, & \text{se } n = 5, \end{cases} \end{aligned}$$

o que nos dá o mesmo resultado. ■

Exemplo 2.8 Considere o seguinte problema de condução de calor num fio com as extremidades isoladas.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, & u_x(\pi, t) = 0, t > 0, \\ u(x, 0) &= \operatorname{sen}^3 x, & 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

- (a) Encontre a solução do problema acima.
 (b) Qual é a temperatura de equilíbrio do fio?

Solução. A solução do problema acima é da forma $u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos nx$, onde

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Note que temos a seguinte identidade trigonométrica

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 \\ &= \frac{(e^{-i3\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{i3\theta})}{-8i} \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{e^{i3\theta} - e^{-i3\theta}}{2i} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \operatorname{sen} 3\theta + \frac{3}{4} \operatorname{sen} \theta. \end{aligned}$$

Portanto, lembrando que $\operatorname{sen} ax \cos bx = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a+b)x + \operatorname{sen}(a-b)x)$, temos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(-\frac{1}{4} \operatorname{sen} 3x + \frac{3}{4} \operatorname{sen} x \right) \cos nx dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} 3x \cos nx dx + \frac{3}{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos nx dx \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} (\operatorname{sen}(n+3)x - \operatorname{sen}(n-3)x) dx + \frac{3}{4\pi} \int_0^{\pi} (\operatorname{sen}(n+1)x - \operatorname{sen}(n-1)x) dx. \end{aligned}$$

Deixamos para o leitor o cálculo das integrais acima. A temperatura de equilíbrio é $\frac{a_0}{2} = \frac{4}{3\pi}$. ■

2.5.4 Barra com uma extremidade isolada e a outra mantida a 0° C

Temos o seguinte problema

$$\begin{aligned} u_t &= Ku_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\ u(0, t) &= u_x(L, t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Pelo método de separação de variáveis temos

$$\begin{aligned} F''(x) &= \sigma F(x), \quad 0 \leq x \leq L, \\ F(0) &= F'(L), \end{aligned}$$

o que nos leva a $\sigma_n = -\frac{(2n-1)\pi^2}{4L^2}$, $n = 1, 2, \dots$, e as respectivas autofunções $F_n(x) = \text{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2L}$.

Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 K t}{4L^2}} \text{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2L},$$

onde os coeficientes c_n devem ser tais que (veja Exemplo 1.15)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2L},$$

ou seja,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2L} dx.$$

Exercício 2.6

$$u_t = 4u_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R},$$

$$u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad \text{para } t > 0$$

$$u(x, 0) = x^2, \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi.$$

Exercício 2.7 Mostre que a solução de

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R},$$

$$u_x(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \text{para } t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq L$$

é

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi\alpha}{2L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right),$$

onde

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} dx.$$

Sugestão. Temos duas alternativas:

(i) Repetir o que foi feito para o caso em que $u(0, t) = u_x(L, t) = 0$, neste caso, precisaremos representar uma função f definida no intervalo $[0, L]$ em termos de uma série de cossenos da forma $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$, o que corresponde fazermos uma extensão periódica par de f com período $4L$, a qual denotaremos por $g(x)$. Para que apareça somente n ímpares, devemos fazer

$g(x) = -f(2L - x)$ para x no intervalo de $(L, 2L]$, ou seja, g é anti-simétrica em relação à reta $x = L$; ou ainda,

(ii) Podemos escrever $v(x, t) = u(L - x, t)$ e mostrar que $v(x, t)$ é solução do problema que já conhecemos:

$$\begin{aligned}v_t &= \alpha^2 v_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\v(0, t) &= v_x(L, t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \\v(x, 0) &= f(L - x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq L.\end{aligned}$$

2.5.5 Condições de fronteira não-homogêneas

Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned}u_t &= Ku_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\u(0, t) &= h_0(t), \quad u(L, t) = h_1(t), \quad \text{para } t > 0, \\u(x, 0) &= f(x), \quad \text{para } 0 < x < L.\end{aligned} \tag{39}$$

A idéia é transformar este problema num de condições de fronteira homogêneas, através de uma mudança da variável dependente u . Assim, suponha que seja possível achar uma função $v(x, t)$ tal que

$$v(0, t) = h_0(t), \quad v(L, t) = h_1(t)$$

e que u seja a solução do problema de valor inicial (39), segue-se que a função $w = u - v$ satisfaz ao seguinte problema

$$\begin{aligned}w_t &= Kw_{xx} + g(x, t) \quad \text{em } \mathcal{R}, \\w(0, t) &= w(L, t) = 0, \quad \text{para } t > 0, \\w(x, 0) &= f(x) - v(x, 0), \quad \text{para } 0 < x < L,\end{aligned} \tag{40}$$

onde $g(x, t) = Kv_{xx} - v_t$. Se for possível determinar v tal que ela seja solução equação de calor em \mathcal{R} , então, $g \equiv 0$. Em muitos problemas, tomaremos $v(x, t) = U(x)$, portanto, $U(x) = ax + b$, onde a e b são determinados pelas condições de contorno.

Exemplo 2.9 Se $h_0(t) = \alpha$ e $h_1(t) = \beta$, onde α e β são constantes.

Neste caso, basta tomar $v(x, t) = \alpha + \frac{(\beta - \alpha)x}{L}$. Uma tal v é solução do calor. Portanto, w é solução do problema

$$\begin{aligned} w_t &= Kw_{xx} \text{ em } \mathcal{R}, \\ w(0, t) &= w(L, t) = 0, \text{ para } t > 0, \\ w(x, 0) &= f(x) - \alpha - \frac{(\beta - \alpha)x}{L}, \text{ para } 0 < x < L, \end{aligned}$$

cuja solução é

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{L},$$

onde os c_n são os coeficientes de Fourier de seno da função $f(x) - \alpha - \frac{(\beta - \alpha)x}{L}$, ou seja,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left(f(x) - \alpha - \frac{(\beta - \alpha)x}{L} \right) \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{L} dx.$$

Logo, a solução do problema de valor inicial (39) com $h_0(t) = \alpha$ e $h_1(t) = \beta$ é

$$u(x, t) = \alpha + \frac{(\beta - \alpha)x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{L}.$$

A temperatura

$$U(x) = \alpha + \frac{(\beta - \alpha)x}{L}$$

é chamada de **temperatura de equilíbrio**. Note que quanto t tende a infinito, $u(x, t)$ tende a $U(x)$. Por outro lado, $u(x, t) - U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{L}$, a qual tende a zero quando t tende a infinito, é chamada de **temperatura transiente**.

Exemplo 2.10 Considere o seguinte problema de condução de calor num fio.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(\pi, t) = 10, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 2 \operatorname{sen} 5x - 0.1 \operatorname{sen} 9x + \frac{10}{\pi} x, \quad 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

(a) Encontre a solução do problema acima.

(b) Qual é a temperatura de equilíbrio?

Solução. Note que para encontrarmos a temperatura de equilíbrio não precisamos resolver o problema. No caso considerado ela é determinada completamente a partir das condições de fronteira, não depende das condições iniciais: $U(x) = \frac{10x}{\pi}$. Portanto a solução do problema é

$$u(x, t) = \frac{10x}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx.$$

Da condição inicial, temos

$$2 \operatorname{sen} 5x - 0.1 \operatorname{sen} 9x + \frac{10x}{\pi} = u(x, 0) = \frac{10x}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} nx.$$

Portanto,

$$2 \operatorname{sen} 5x - 0.1 \operatorname{sen} 9x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} nx,$$

e concluímos que $c_5 = 2$, $c_9 = -0.1$ e dos demais coeficientes são nulos. Logo, a solução desejada é

$$u(x, t) = \frac{10x}{\pi} + 2e^{-25t} \operatorname{sen} 5x - 0.1e^{-81t} \operatorname{sen} 9x.$$

Alternativamente, poderíamos ter calculados os coeficientes c_n a partir das relações

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (2 \operatorname{sen} 5x - 0.1 \operatorname{sen} 9x) \operatorname{sen} nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(n-5)x - \cos(n+5)x) \, dx - \frac{0.1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(n-9)x - \cos(n+9)x) \, dx, \end{aligned}$$

o que nos dá o resultado acima. ■

Exercício 2.8 *Encontre a solução do seguinte problema*

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\ u(0, t) &= T, \quad u_x(L, t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Sugestão. *Note que a temperatura de equilíbrio é $U(x) = T$. Faça $u(x, t) = T + v(x, t)$ e mostre que $v(x, t)$ é solução do problema conhecido*

$$\begin{aligned} v_t &= \alpha^2 v_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\ v(0, t) &= 0, \quad v_x(L, t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \\ v(x, 0) &= f(x) - T, \quad \text{para } 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Exercício 2.9 *Encontre a solução do seguinte problema (veja sugestão do exercício anterior)*

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = T, \quad \text{para } t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Observação 2.1 A temperatura de equilíbrio é uma função de x apenas e satisfaz a equação de calor considerada; em particular, a temperatura de equilíbrio da equação $u_t = \alpha^2 u_{xx}$, satisfaz $U''(x) = 0$, logo ela é da forma $U(x) = ax + b$, onde as constantes a e b são determinadas pelas condições de fronteira (e ou inicial quando as condições de fronteiras não forem suficientes para calcularmos a e b , por exemplo, quando as duas extremidades da barra estão isoladas). Para a condição de fronteira $u(0, t) - u_x(0, t) = 0$ e $u(L, t) = T$, devemos ter $U(0) - U'(0) = 0$ e $U(L) = T$, portanto, $U(x) = \frac{T}{1+L}(1+x)$. Já para a equação de calor $u_t = \alpha^2 u_{xx} + bu$, a temperatura de equilíbrio deve satisfazer $U'' + \frac{b}{\alpha^2}U = 0$, em particular, se $\frac{b}{\alpha^2} = 1$, $L = \pi$ e as extremidades foram mantidas à temperatura zero, devemos ter $U(0) = 0 = U(\pi)$, portanto, $U(x) = c_1 \sin x$, onde c_1 é uma constante a ser determinada pela condição inicial: $c_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin x dx$.

2.5.6 Unicidade da equação do calor

Teorema 2.1 Seja $T > 0$ finito e $g(x, t)$ contínua em $[0, L] \times [0, T]$. Então o problema

$$u_t - Ku_{xx} = g(x, t), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L, \quad (41)$$

com uma das seguintes condições de fronteiras:

- (i) $u(0, t) = h_0(t)$ e $u(L, t) = h_1(t)$,
- (ii) $u_x(0, t) = h_0(t)$ e $u_x(L, t) = h_1(t)$
- (iii) $u(0, t) = h_0(t)$ e $u_x(L, t) = h_1(t)$ ou
- (iv) $u_x(0, t) = h_0(t)$ e $u(L, t) = h_1(t)$,

para $0 \leq t \leq T$, tem no máximo uma solução u , tal que u, u_t, u_x e u_{xx} sejam contínuas em $[0, L] \times [0, T]$.

Prova. Suponha que tivéssemos duas soluções $u_1(x, t)$ e $u_2(x, t)$, defina $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$, então u é solução do seguinte problema

$$u_t = Ku_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L,$$

com uma das seguintes condições de fronteiras (homogêneas) (i) $u(0, t) = 0$ e $u(L, t) = 0$, (ii) $u_x(0, t) = 0$ e $u_x(L, t) = 0$, (iii) $u(0, t) = 0$ e $u_x(L, t) = 0$ ou (iv) $u_x(0, t) = 0$ e $u(L, t) = 0$, para $0 \leq t \leq T$. Além disso, $u(x, t)$, u_t , u_x e u_{xx} são contínuas em $[0, L] \times [0, T]$. Multiplicando a

equação $u_t = Ku_{xx}$ por u e integrando em relação à x de 0 a L , temos

$$\int_0^L u(x, t)u_t(x, t)dx = \int_0^L Ku(x, t)u_{xx}(x, t)dx, \quad (42)$$

como u e u_t são contínuas, lado esquerdo de (42) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \int_0^L u(x, t)u_t(x, t)dx &= \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} \frac{u^2(x, t)}{2} dx \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^L u^2(x, t)dx \right) \quad (\text{usamos o Teorema 2.2}) \\ &= \frac{d}{dt} E(t), \end{aligned}$$

onde

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2(x, t)dx \geq 0.$$

Após uma integração por partes no lado direito da equação (42) e notando que os termos de fronteira são iguais a zero, temos

$$\int_0^L Ku(x, t)u_{xx}(x, t)dx = [Ku(x, t)u_x(x, t)]_0^L - K \int_0^L u_x^2(x, t)dx = -K \int_0^L u_x^2(x, t)dx \leq 0.$$

Portanto, para $0 \leq t \leq T$, temos

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq 0,$$

logo

$$E(t) \leq E(0) = 0.$$

Como $E(t) \geq 0$, concluímos $E(t) = 0$, para $0 \leq t \leq T$. Ou seja,

$$\int_0^L u^2(x, t)dx = 0,$$

para $0 \leq t \leq T$. Como para cada $t \in [0, T]$ fixo, a função $u^2(x, t)$ é não negativa e contínua em x em $[0, L]$, então segue da igualdade acima (veja Exemplo 2.11) que $u^2(x, t) = 0$ em $[0, L] \times [0, T]$. Ou seja, $u(x, t) = 0$ em $[0, L] \times [0, T]$. Portanto,

$$u_1(x, t) = u_2(x, t)$$

em $[0, L] \times [0, T]$. ■

2.5.7 Apêndice equação de calor

Exemplo 2.11 Se $h(x)$ for contínua em $[a, b]$ e

$$\int_a^b h(x)dx = 0, \quad (43)$$

então $h(x) = 0$ em $[a, b]$.

Resolução. Suponha que $h(x)$ não seja zero em $[a, b]$, digamos que $h(x_o) > 0$, para algum $x_o \in (a, b)$. Na definição de continuidade, fazendo $\epsilon = \frac{h(x_o)}{2}$, existiria $\delta > 0$, tal que se $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$, então $h(x) > h(x_o) - \epsilon = \frac{h(x_o)}{2}$. Logo, como $h(x) \geq 0$ e $(x_o - \delta, x_o + \delta) \subset [a, b]$, temos

$$\int_a^b h(x)dx \geq \int_{x_o - \delta}^{x_o + \delta} h(x)dx \geq \int_{x_o - \delta}^{x_o + \delta} \frac{h(x_o)}{2} dx = \delta h(x_o) > 0,$$

contrariando (43). ■

Teorema 2.2 Sejam $h(x, t)$ e $\frac{\partial}{\partial t} h(x, t)$ contínuas em $[a, b] \times [c, d]$, então

$$\frac{d}{dt} \int_a^b h(x, t)dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} h(x, t)dx, \quad (44)$$

para todo $t \in [c, d]$.

2.6 Exercícios

1. Em cada problema a seguir, determinar se o método de separação de variáveis pode ser usado para substituir a equação diferencial parcial dada por um par de equações diferenciais ordinárias. Se for possível, achar as equações.

(a) $xu_{xx} + u_t = 0$

(d) $tu_{xx} + xu_t = 0$

(b) $u_{xx} + u_{xt} + u_t = 0$

(e) $[p(x)u_x]_x - r(x)u_{tt} = 0$

(c) $u_{xx} + (x + y)u_{yy} = 0$

(f) $u_{xx} + u_{yy} + xu = 0$

2. Considere o problema de condução de calor numa barra metálica de comprimento unitário, descrito pela equação:

$$100 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

Considere também as condições de contorno:

(I) $\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{cases}$

(II) $\begin{cases} u(0, t) = 50 \\ u(1, t) = 80 \end{cases}$

(III) $\begin{cases} u_x(0, t) = 0 \\ u_x(1, t) = 0 \end{cases}$

Considere por fim as distribuições iniciais de temperatura na barra dadas por:

(A) $u(x, 0) = 10$

(B) $u(x, 0) = \text{sen}^2 \pi x$

(C) $u(x, 0) = x^2$

Determine a solução $u(x, t)$ do problema com:

- (a) Condições de contorno: I; condição inicial: A
- (b) Condições de contorno: I; condição inicial: B
- (c) Condições de contorno: I; condição inicial: C
- (d) Condições de contorno: II; condição inicial: A
- (e) Condições de contorno: II; condição inicial: B
- (f) Condições de contorno: II; condição inicial: C
- (g) Condições de contorno: III; condição inicial: A
- (h) Condições de contorno: III; condição inicial: B
- (i) Condições de contorno: III; condição inicial: C

3. Considere uma barra de comprimento igual a 2. A seguinte equação diferencial representa a propagação de calor nessa barra:

$$2u_{xx} = u_t$$

Essa barra possui, inicialmente, a temperatura em todos os seus pontos igual a 10, sendo que as extremidades da barra possuem temperaturas fixadas em 20, para $x = 0$, e em -20, para $x = 2$. A barra é mantida assim até entrar em equilíbrio térmico. Quando a barra atinge equilíbrio térmico nessas condições (considere que esse instante é convencionado como $t = 0$) suas extremidades são subitamente levadas novamente à temperatura de 10, sendo mantidas fixas nesse valor para todo tempo a partir desse instante.

- (a) Determine a função que descreve a distribuição de temperaturas na barra, em função de x , no instante $t = 0$.
- (b) Calcule a função que descreve a distribuição de temperaturas na barra, em função de x , quando $t = 5$.
4. Considere uma barra de comprimento igual a 2. A seguinte equação diferencial representa a propagação de calor nessa barra:

$$2u_{xx} = u_t$$

Supõe-se que a barra esteja inicialmente com temperatura igual a 0 em toda sua extensão, e que no instante $t = 0$ as extremidades da barra sejam subitamente levadas à temperatura de 10, sendo mantidas nessa temperatura desse momento em diante.

- (a) Determine as equações diferenciais ordinárias que surgem quando se emprega o método de separação de variáveis para tratar esse problema.
- (b) Calcule a função que descreve a distribuição de temperaturas na barra em função de x quando $t = 5$.
5. Considere uma barra de comprimento igual a 2. A seguinte equação diferencial representa a propagação de calor nessa barra:

$$4u_{xx} = u_t$$

- (a) Essa barra encontra-se com as extremidades (pontos $x = 0$ e $x = 2$) termicamente isoladas, e possui, inicialmente, a temperatura em seus pontos dada por:

$$u(x, 0) = 5x^2$$

A barra é deixada assim por várias horas, até entrar em equilíbrio térmico. Determine a equação que descreve a distribuição de temperaturas na barra quando o equilíbrio é atingido.

- (b) Após entrar em equilíbrio térmico, a barra subitamente tem os isolamentos térmicos das extremidades retirados, sendo as temperaturas nas extremidades fixadas em $u(0, t) = 20$ e $u(2, t) = -20$ a partir desse instante (adote a convenção de que $t = 0$ no exato instante em que o isolamento térmico é retirado, e as temperaturas das extremidades são fixadas nesses valores). Determine a função que descreve a distribuição de temperaturas na barra, em função de x e t , após a barra ter as temperaturas de suas extremidades fixadas.

6. Considere uma barra de comprimento igual a 2. A seguinte equação diferencial representa a propagação de calor nessa barra:

$$4u_{xx} = u_t$$

Essa barra possui, inicialmente, a temperatura em todos os seus pontos igual a 10, sendo que as extremidades da barra possuem temperaturas fixadas em 20, para $x = 0$, e em -20, para $x = 2$. A barra é mantida assim por várias horas, até entrar em equilíbrio térmico. Quando a barra atinge equilíbrio térmico nessas condições, suas extremidades são isoladas termicamente, sendo mantidas isoladas a partir desse instante. (Dica: adote a convenção de que $t = 0$ no exato instante em que a barra recebe isolamento térmico em suas extremidades).

- (a) Determine a distribuição de temperaturas na barra em função de x , no instante imediatamente anterior à colocação do isolante térmico nas extremidades da barra.
- (b) Calcule a função que descreve a distribuição de temperaturas na barra, em função de x e t , após a barra ter suas extremidades termicamente isoladas.

2.7 Trabalhos

Questão 1. Considere a equação da propagação do calor em uma barra:

$$\alpha^2 u_{xx}(x, t) = u_t(x, t)$$

A barra, de comprimento L e extremidades $x = 0$ e $x = L$, é sujeita a dois experimentos distintos (situações **a** e **b**), com diferentes temperaturas nas extremidades e diferentes distribuições iniciais

de temperatura, resultando em duas soluções distintas para a equação do calor. O relacionamento das condições iniciais e de contorno com as soluções da equação é mostrado na tabela abaixo.

| | $u(0, t)$ | $u(L, t)$ | $u(x, 0)$ | $u(x, t)$ |
|-----|---------------|---------------|-------------|-------------|
| (a) | θ_{0a} | θ_{La} | $\phi_a(x)$ | $u_a(x, t)$ |
| (b) | θ_{0b} | θ_{Lb} | $\phi_b(x)$ | $u_b(x, t)$ |

As temperaturas das extremidades da barra são agora fixadas nos valores:

$$u(0, t) = \beta\theta_{0a} + \gamma\theta_{0b}$$

$$u(L, t) = \beta\theta_{La} + \gamma\theta_{Lb}$$

sendo dada a distribuição inicial de temperaturas na barra:

$$u(x, 0) = \beta\phi_a(x) + \gamma\phi_b(x)$$

Determine a função $u(x, t)$ para essas condições iniciais e de contorno. (Observação: o fato mostrado neste exercício é chamado de **linearidade** da equação do calor).

Questão 2. Deduza a expressão da solução da equação do calor em uma barra quando uma das extremidades tem temperatura fixa e a outra encontra-se termicamente isolada.

Questão 3. Modifique a solução da equação de Laplace, de tal forma que a mesma seja capaz de representar a distribuição em regime estacionário de temperaturas numa placa retangular quando a temperatura nas fronteiras da placa é dada por quatro funções arbitrárias: $h_1(x)$, $h_2(x)$, $h_3(y)$, $h_4(y)$.

Questão 4. Considere uma barra de 2m de comprimento, na qual a propagação do calor obedece à equação:

$$9u_{xx} = u_t$$

Essa barra faz parte de um sistema de troca de calor entre um recipiente no qual ocorre uma reação de combustão, e que fica à temperatura de θ , e o meio ambiente, que se encontra à temperatura de 20° . Isso significa que, em uma das extremidades, a barra tem sua temperatura fixada em θ , e na outra em 20° . Um sensor de temperatura, de massa desprezível, está afixado bem no meio da barra, e nesse ponto ele mede a temperatura $h(t) = u(1, t)$.

(a) Encontre a equação diferencial ordinária que relaciona a temperatura θ com a temperatura $h(t)$.

- (b) Suponha que o recipiente, após passar várias horas à temperatura $\theta = 80^\circ$, subitamente tem sua temperatura elevada para $\theta = 120^\circ$. Determinar a expressão de $h(t)$ nesse caso.

2.8 A Equação da Onda

Outra equação diferencial parcial muito importante que aparece em matemática aplicada é a equação de onda. Ela aparece na descrição de fenômenos envolvendo a propagação de ondas num meio contínuo, por exemplo, no estudo de ondas acústicas, ondas de água, ondas eletromagnéticas e ondas sísmicas. No apêndice 5 temos a dedução da equação da onda em uma dimensão espacial. Desprezando os efeitos de amortecimento, como a resistência do ar e se a amplitude do movimento não for muito grande, ela é dada por

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

2.8.1 A Corda finita

O problema de vibrações transversais de uma corda perfeitamente flexível, de comprimento L , ligeiramente esticada entre dois suportes no mesmo nível horizontal, de modo que o eixo dos x esteja ao longo da corda (veja Figura), consiste em determinar uma função real $u(x, t)$ (deslocamento da corda no ponto x no instante t) definida para $(x, t) \in [0, L] \times [0, \infty)$ que satisfaça à equação da onda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \quad (45)$$

que satisfaça às condições iniciais

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (46)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (47)$$

onde $f, g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas e, finalmente, que satisfaça às condições de fronteira que vamos descrever abaixo. Especificar as condições iniciais consiste em dizermos inicialmente qual a forma da corda, representada por $u(x, 0)$, e o modo que a corda é abandonada nesta posição, o que é traduzido pela velocidade inicial $u_t(x, 0)$. A constante c é a velocidade de propagação da onda no meio.

2.8.2 Condições de fronteira

I - Corda finita com extremidades fixas. Suponhamos que a corda tenha comprimento L , e que, quando em sua posição de repouso, ela ocupe a porção do plano (x, u) entre 0 e L . Assim, a hipótese de extremidades fixas implica que

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \text{para } t \geq 0.$$

II - Corda finita com extremidades livres. Neste caso a corda de comprimento L , tem suas extremidades forçadas a não se afastarem de trilhos colocados perpendicularmente à corda, no plano (x, u) de vibração. Isso implica

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad \text{para } t \geq 0.$$

III - Outras condições de fronteira. Podemos ter o caso em que as extremidades se movem, transversalmente, de acordo com leis conhecidas. Por exemplo,

$$u(0, t) = a(t), \quad u(L, t) = b(t), \quad \text{para } t \geq 0.$$

2.8.3 A corda vibrante com extremidades fixas

Considereremos o seguinte problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad \text{para } t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad \text{para } 0 < x < L. \end{aligned}$$

Vamos fazer separação de variáveis. Assumindo que a solução do problema é da forma $u(x, t) = F(x)G(t)$, ao substituirmos esta expressão na equação diferencial temos

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)}$$

o que nos leva as seguintes equações diferenciais ordinárias

$$F'' - \sigma F = 0, \tag{48}$$

$$G'' = \sigma c^2 G. \tag{49}$$

As condições de fronteira implicam $F(0) = F(L) = 0$, caso contrário, $G(t) \equiv 0$, o que não nos interessa. Assim, somos levados ao seguinte problema

$$\begin{aligned} F'' - \sigma F &= 0, \\ F(0) &= F(L) = 0, \end{aligned}$$

que já foi resolvido quando consideramos a equação do calor: $\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, para $n = 1, 2, \dots$, cujas autofunções são $F_n(x) = \text{sen } \frac{n\pi x}{L}$. Para cada σ_n , a solução geral de (48) é

$$G_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \text{sen } \frac{n\pi ct}{L},$$

onde a_n e b_n são constantes arbitrárias. Logo, as funções

$$u_n(x, t) = a_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \text{sen } \frac{n\pi ct}{L}$$

satisfazem a equação de onda e as condições de fronteira. O passo seguinte é determinar os coeficientes a_n e b_n , de modo que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \text{sen } \frac{n\pi ct}{L} \right), \quad (50)$$

satisfaça às condições iniciais. Isto implica que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L},$$

e é necessário que

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen } \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Para a determinação dos b_n , derivamos (formalmente) termo a termo a série que define $u(x, t)$, em relação a t . Usando a segunda condição inicial temos,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} b_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L},$$

logo, devemos ter

$$\frac{n\pi c}{L} b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \text{sen } \frac{n\pi x}{L} dx,$$

de onde obtemos,

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \text{sen } \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Embora não tenhamos feito nenhuma hipótese em f e g , sob a hipótese que f, f', f'', g, g' serem contínuas e f''' e g'' serem seccionalmente contínuas em $[0, L]$ e, além disso, $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = g(0) = g(L) = 0$; então, os coeficientes a_n e b_n decairão pelo menos com $\frac{1}{n^3}$ e não teremos problemas de convergência, todo o procedimento acima é rigoroso, nos levando a solução do problema proposto.

Tendo em vistas as identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} a \cos b &= \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)], \\ \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b &= \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)], \end{aligned}$$

a expressão (50) pode ser re-escrita como

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi(x+ct)}{L} + a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi(x-ct)}{L} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \cos \frac{n\pi(x-ct)}{L} - b_n \cos \frac{n\pi(x+ct)}{L} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi(x+ct)}{L} - b_n \cos \frac{n\pi(x+ct)}{L} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi(x-ct)}{L} + b_n \cos \frac{n\pi(x-ct)}{L} \right) \\ &= \frac{F(x+ct) + G(x-ct)}{2}, \end{aligned}$$

onde

$$F(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi w}{L} - b_n \cos \frac{n\pi w}{L} \right)$$

e

$$G(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi w}{L} + b_n \cos \frac{n\pi w}{L} \right).$$

Portanto, podemos escrever

$$u(x, t) = \frac{F(x+ct) + G(x-ct)}{2},$$

ou seja, a solução do problema pode ser vista como a superposição de duas ondas $\frac{F(x-ct)}{2}$ e $\frac{G(x+ct)}{2}$, que se propagam para a direita e esquerda, respectivamente, com velocidade c . Se $g(x) = 0$, então $b_n = 0$, para todo n e $F = G$, em particular,

$$F(x, t) = \frac{F(x-ct) + F(x+ct)}{2},$$

onde $F(w)$ é o prolongamento periódico ímpar de f com período $2L$.

Exercício 2.10 Mostre que a equação de onda é linear, ou seja, se $u_1(x, t)$ e $u_2(x, t)$ forem duas soluções de $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, então, para quaisquer constantes c_1 e c_2 , $u(x, t) = c_1 u_1(x, t) + c_2 u_2(x, t)$ também será solução da equação de calor.

Exercício 2.11 Mostre que se $u_1(x, t)$ for solução de

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad \text{para } t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad \text{para } 0 \leq x \leq L, \end{aligned}$$

e $u_2(x, t)$ for solução de

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad \text{para } t \geq 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq L, \end{aligned}$$

então, $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$ é solução de

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad \text{para } t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Exercício 2.12 Resolva o seguinte problema:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) &= 0 = u(\pi, t), \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) &= \text{sen } x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Esboce os gráficos de $u(x, t)$ nos instantes $t = 0$, $t = \pi/2$ e $t = \pi$.

Resolução. Como $g(x) \equiv 0$, segue-se que $b_n = 0$ para todo n . Por outro lado,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \text{sen } x \text{ sen}(nx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(n-1)x - \cos(n+1)x) \, dx \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}, \end{aligned}$$

logo,

$$u(x, t) = \text{sen } x \cos t = \frac{1}{2} \text{sen}(x - t) + \frac{1}{2} \text{sen}(x + t),$$

que a superposição de duas ondas que se propagam com velocidade $c = 1$, se propagando em direções opostas (veja Figuras 20 e 21, mostrando a solução, dada em azul, como a superposição de duas ondas, gráficos nas cores vermelho e verde, nos instantes $t = \pi/4$ e $t = \pi/2$. Note que quando $t = \pi/2$, as duas componentes estão completamente fora de fase e temos interferência destrutiva, $u(x, \pi/2) \equiv 0$. Note que embora em cada instante, cada uma das duas ondas componentes tenham amplitude variando nos pontos $x = 0$ e $x = \pi$, nestes a interferência é sempre destrutiva e $u(0, t) = 0 = u(\pi, t)$, para todo t e temos dois “nós” nestes pontos.) ■

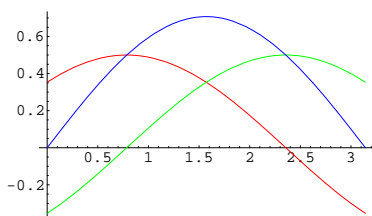


Figura 20: O gráfico de $u(x, \pi/4)$ em azul.

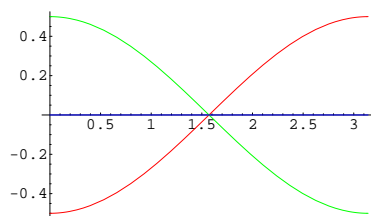


Figura 21: O gráfico de $u(x, \pi/2)$ em azul.

Exercício 2.13 *Resolva o seguinte problema:*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) &= 0 = u(\pi, t), & t \geq 0 \\ u(x, 0) &= 0 \quad u_t(x, 0) = \cos x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Mostre que se $t = k\pi/2$, onde $k \in \mathbb{Z}$, então a corda estará esticada horizontalmente, ou seja, $u(x, k\pi/2) = 0$ para todo x .

Resolução. Como $f(x) \equiv 0$, segue-se que $a_n = 0$, para todo n . Por outro lado,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos x \operatorname{sen}(nx) dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi (\operatorname{sen}(n+1)x + \operatorname{sen}(n-1)x) dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \begin{cases} 0, & \text{se } n = 1 \\ -\left(\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right) \Big|_0^\pi, & n \neq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } n = 1 \\ \frac{2}{\pi} \frac{1+(-1)^n}{n^2-1}, & n \neq 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Logo,

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2-1} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(nt) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \operatorname{sen}(2nx) \operatorname{sen}(2nt).$$

Em particular, $u(x, k\pi/2) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, para todo x . Além disso, a solução pode ser re-escrita como

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos[2n(x-t)] - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos[2n(x+t)] \equiv F(x-t) - F(x+t),$$

onde $F(w) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos(2nw)$. ■

Exercício 2.14 *Resolva o seguinte problema:*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, & 0 < x < \pi, & t > 0 \\ u(0, t) &= 0 = u(\pi, t), & t & \geq 0 \\ u(x, 0) &= \operatorname{sen} x, & u_t(x, 0) &= \cos x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Resolução. Temos duas alternativas: (i) usar o Exercício 2.11 que diz que a solução do problema acima é a soma das soluções dos Exercícios 2.12 e 2.13 ou (ii) calcular diretamente os coeficientes a_n 's e os b_n 's. ■

Exercício 2.15 *Resolva o seguinte problema:*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx}, & 0 < x < 30, & t > 0 \\ u(0, t) &= 0 = u(30, t), & t & \geq 0 \\ u(x, 0) &= f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10}, & 0 \leq x \leq 10 \\ \frac{30-x}{20}, & 10 \leq x \leq 30 \end{cases} \\ u_t(x, 0) &= 0, & 0 \leq x \leq 30. \end{aligned}$$

Resolução. Vimos que a solução deste problema é da forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{30} \right) \cos \left(\frac{n\pi t}{15} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{30} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi t}{15} \right) \right).$$

Como $u_t(x, 0) = 0$, segue-se que $b_n = 0$, para todo n . Por outro lado,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{15} \left(\int_0^{10} \frac{x}{10} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{30} \right) dx + \int_{10}^{30} \frac{30-x}{20} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{30} \right) dx \right) \\ &= \frac{9}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$u(x, t) = \frac{9}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{3} \right)}{n^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{30} \right) \cos \left(\frac{n\pi t}{15} \right).$$

Note que a solução acima pode ser re-escrita como

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{3} \right)}{n^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi(x-2t)}{30} \right) + \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{3} \right)}{n^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi(x+2t)}{30} \right) \\ &\equiv F(x-2t) + F(x+2t), \end{aligned}$$

onde

$$F(w) = \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{3} \right)}{n^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi w}{30} \right),$$

portanto, $F(w)$ é o prolongamento periódico ímpar de período 60 de $f(x)$. ■

Exercício 2.16 (*Corda com uma extremidade fixa e a outra livre.*) Suponha que uma corda elástica de comprimento L tenha a sua extremidade $x = 0$ fixa ($u(0, t) = 0, \forall t$) e a extremidade $x = L$ livre ($u_x(L, t) = 0, \forall t$) e que ela seja colocada em movimento sem velocidade inicial a partir da posição inicial $u(x, 0) = f(x)$. Mostre que o deslocamento da corda, $u(x, t)$, é dado

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right) \cos \left(\frac{(2n-1)\pi ct}{2L} \right),$$

onde

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right) dx.$$

Exercício 2.17 (*Corda com as extremidades fixas em alturas diferentes de zero.*) Resolva o seguinte problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & 0 < x < L, & t > 0 \\ u(0, t) &= \alpha, & u(L, t) &= \beta, & t \geq 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & u_t(x, 0) &= g(x), & 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Sugestão. Encontre a posição de equilíbrio da corda, ou seja, uma função $U = U(x)$ que satisfaz a equação de onda e as condições de contorno acima, ou seja, $U(x) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{L} x$. Escreva $u(x, t) = U(x) + v(x, t)$, como u e U satisfazem a equação de onda, segue da linearidade desta equação que $v(x, t)$ também é solução da mesma; ou seja v é solução de um problema conhecido:

$$\begin{aligned}v_{tt} &= c^2 v_{xx}, & 0 < x < L, t > 0 \\v(0, t) &= 0, & v(L, t) = 0, & t \geq 0 \\v(x, 0) &= f(x) - U(x), & v_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq L.\end{aligned}$$

Exercício 2.18 (Corda com ambas as extremidades livres.) Resolva o seguinte problema

$$\begin{aligned}u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & 0 < x < L, t > 0 \\u_x(0, t) &= 0, & u_x(L, t) = 0, & t \geq 0 \\u(x, 0) &= f(x), & u_t(x, 0) = g(x), & 0 < x < L.\end{aligned}$$

Sugestão. Se assumirmos que $u(x, t) = X(x)T(t)$, das condições de contorno $u_x(0, t) = 0 = u_x(L, t)$, para todo t , devemos ter $X'(0) = 0 = X'(L)$ e do método de separação de variáveis temos $X'' = \lambda X$, $X'(0) = 0 = X'(L)$, veja solução da equação de calor para um fio com extremidades isoladas. Temos $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ e

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A equação em T fica

$$T'' = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T,$$

a qual já foi resolvida, exceto, que agora, n pode ser zero e para este valor de n temos

$$T_0(t) = a_0 + b_0 t,$$

onde a_0 e b_0 são constantes arbitrárias. Para $n \geq 1$, vimos que

$$T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right).$$

Portanto, a solução da corda com as duas extremidades livres é da forma

$$u(x, t) = a_0 + b_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Observação 2.2 Note que no problema da corda com as extremidades livres, se

$$b_o = \frac{1}{L} \int_0^L g(x) dx \neq 0,$$

então a corda se moverá vertical e indefinidamente para baixo ou para cima, dependendo do sinal de b_o .

Exercício 2.19 Uma corda em movimento num meio elástico satisfaz a equação

$$c^2 u_{xx} - \alpha^2 u = u_{tt}$$

onde α^2 é proporcional ao coeficiente de elasticidade do meio. Supondo que a corda está fixa nas suas extremidades e seja colocada em movimento sem velocidade inicial a partir da posição inicial $u(x, 0) = f(x)$, $0 < x < L$, encontre o deslocamento $u(x, t)$.

Sugestão. Assuma que $u(x, t) = X(x)T(t)$, portanto, das condições de contorno, devemos ter $X(0) = 0 = X(L)$ e do método de separação de variáveis, temos

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} - \frac{\alpha^2}{c^2} = \mu$$

logo,

$$X'' = \left(\mu + \frac{\alpha^2}{c^2} \right) X \equiv \lambda X, \quad X(0) = 0 = X(L) \quad (51)$$

e

$$T'' = c^2 \mu T.$$

O problema de contorno (51) já apareceu no problema de condução de calor num fio com extremidades mantidas à temperatura 0; ou seja, $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ e

$$X_n(x) = \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Por outro lado, $\mu_n = -\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{c^2}\right)$, portanto,

$$T'' = -\left(\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 + \alpha^2\right) T,$$

ou seja,

$$T_n(t) = a_n \cos \left(\sqrt{\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 + \alpha^2} t \right) + b_n \text{sen} \left(\sqrt{\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 + \alpha^2} t \right).$$

2.8.4 A Corda infinita e a Fórmula de D'Alembert

Vamos agora estudar o problema de vibração de uma corda de comprimento infinito, a qual é uma idealização de uma corda muito longa. Neste caso, não há condições de fronteira a satisfazer, e, assim, o problema consiste em buscar uma função $u(x, t)$ definida no semi-plano fechado, $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$, tal que

$$\begin{aligned}u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, & t > 0, \\u(x, 0) &= f(x), & u_t(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

onde f e g são condições iniciais.

Note que se $F(x)$ e $G(x)$ são duas funções com derivadas até segunda ordem contínuas, então, a função $u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$ satisfaz a equação da onda. A pergunta natural é a seguinte será que podemos escolher estas funções de modo a satisfazer as condições iniciais, ou seja,

$$f(x) = u(x, 0) = F(x) + G(x) \tag{52}$$

$$g(x) = u_t(x, 0) = cF'(x) - cG'(x) \tag{53}$$

Tomando a derivada de (52) em relação a x e multiplicando a equação resultante por c , temos $cF'(x) + cG'(x) = cf'(x)$. Esta equação juntamente com (53) nos conduz ao seguinte sistema

$$cF'(x) + cG'(x) = cf'(x)$$

$$cF'(x) - cG'(x) = g(x).$$

Somando as duas equações do sistema acima e dividindo o resultado por $2c$, temos,

$$F'(x) = \frac{f'(x)}{2} + \frac{g(x)}{2c}. \tag{54}$$

De maneira análoga, se subtrairmos a segunda equação da primeira no sistema acima e multiplicarmos o resultado por $2c$, encontramos

$$G'(x) = \frac{f'(x)}{2} - \frac{g(x)}{2c}. \tag{55}$$

Integrando as equações (54) e (55) de 0 a x , temos, respectivamente,

$$F(x) = F(0) - \frac{f(0)}{2} + \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds$$

e

$$G(x) = G(0) - \frac{f(0)}{2} + \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x + ct) + G(x - ct) \\ &= F(0) + G(0) - f(0) + \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(s) ds - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(s) ds \\ &= F(0) + G(0) - f(0) + \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \\ &= \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (\text{pois, } F(0) + G(0) = u(0, 0) = f(0)). \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$u(x, t) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds,$$

Conhecida como fórmula acima é conhecida como a **fórmula de D'Alembert**.

No caso particular em que $g(x) \equiv 0$, temos

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)],$$

ou seja, a solução é a superposição de duas ondas. A função $f(x + ct)$ é chamada uma onda regressiva (se move para a esquerda) e $f(x - ct)$ é chamada uma onda progressiva (se move para a direita).

No caso particular que $f(x) \equiv 0$, temos

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} h(x + ct) - \frac{1}{2c} h(x - ct),$$

onde $h(w) = \int_0^w g(s) ds$. Portanto, temos a superposição de uma onda regressiva e uma progressiva.

Em geral, temos

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct),$$

onde

$$\phi(w) = \frac{1}{2} f(w) + \frac{1}{2c} h(w) \quad e \quad \psi(w) = \frac{1}{2} f(w) - \frac{1}{2c} h(w),$$

ou seja, a solução é a superposição de duas ondas, que se propagam com mesma velocidade c e em sentido contrário.

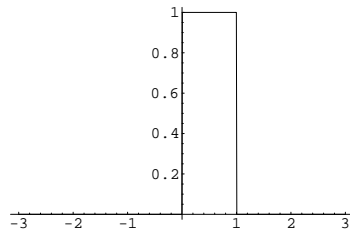


Figura 22: Gráfico de g .

Exercício 2.20 Suponha que $f(x) \equiv 0$ e que o gráfico de $g(x)$ é aquele mostrado na Figura 22.

- (a) Encontre $u(x, t)$.
- (b) Esboce o gráfico de $u(x, 0)$ e $u(x, 1)$.

Resolução. Da fórmula de D'Alembert, temos $u(x, t) = \frac{h(x+ct) - h(x-ct)}{2c}$, onde $h(w) = \int_0^w g(s) ds$. Claramente, $u(x, 0) \equiv 0$. Note que se $w < 0$, então, $h(w) = -\int_w^0 g(s) ds = 0$, pois, $g(s) = 0$ para $s \leq 0$. Por outro lado, se $w > 1$, então, $h(w) = \int_0^w g(s) ds = \int_0^1 g(s) ds = 1$. Finalmente, se $0 < w < 1$, então, $h(w) = \int_0^w g(s) ds = \int_0^w ds = w$. Logo, o gráfico de $h(w)$ é aquele que está mostrado na Figura 23. O gráfico de $u(x, 1)$ é mostrado na Figura 24, cada unidade no eixo vertical vale c .

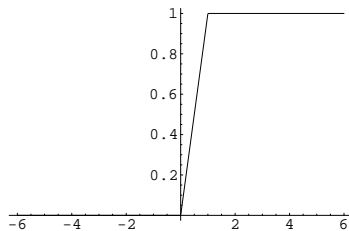


Figura 23: Gráfico de $h(x)$.

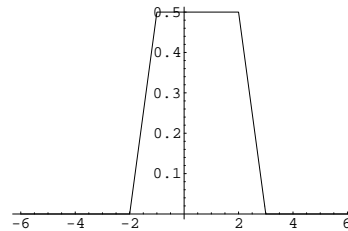


Figura 24: $u(x, 1) = \frac{h(x+1) - h(x-1)}{2}$, ($c = 1$).

Exercício 2.21 Considere uma corda infinita inicialmente esticada horizontalmente, com velocidade inicial $u_t(x, 0)$ dada pela função cujo gráfico aparece na Figura 27. Supondo que $c = 1$, mostre que $u(x, t) = h(x + t) - h(x - t)$, onde o gráfico de h é dado na Figura 25.

Solução. Da fórmula de D'Alembert, $u(x, t) = \frac{h(x+ct) - h(x-ct)}{2c}$, onde $h(w) = \int_0^w g(s) ds$. Note que se $w < -1$, então, $h(w) = -\int_w^0 g(s) ds = -\int_{-1}^0 g(s) ds = -\int_{-1}^0 (1 + s) ds = -\frac{1}{2}$. Se $w > 1$, então, $h(w) = \int_0^1 g(s) ds = \int_0^1 (1 - s) ds = \frac{1}{2}$. Se $0 < w < 1$, então, $h(w) = \int_0^w (1 - s) ds = w - \frac{w^2}{2}$.

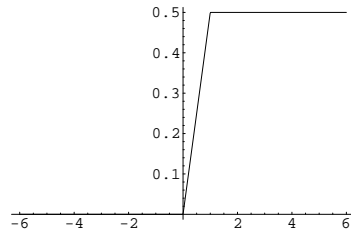


Figura 25: Gráfico de h .

Finalmente, se $-1 < w < 0$, então, $h(w) = -\int_w^0(1+s)ds = w + w^2/2$. Portanto,

$$h(w) = \begin{cases} -0.5, & w \leq -1 \\ w + w^2/2, & -1 < w \leq 0 \\ w - w^2/2, & 0 < w \leq 1 \\ 0.5, & w > 1 \end{cases} .$$

Veja o gráfico de h na Figura 26.

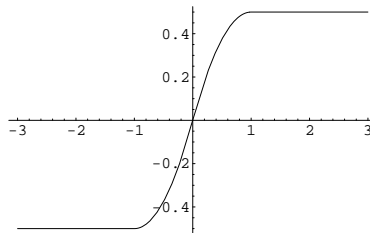


Figura 26: Gráfico de h .

Exemplo 2.12 *Suponha que $c = 1$ na equação da onda e que a forma inicial da corda seja dada na Figura 27. Esboce os gráficos de $u(x, t)$ para $t = 0.25, 0.5, 0.75, 1$ e 1.5 .*

Resolução. Os esboços seguem imediatamente da fórmula de D'Alembert e são mostrados nas Figuras 27-32. Note que no instante $t = 1$ uma onda acaba de passar pela outra e a partir deste instante elas se movem independentemente.

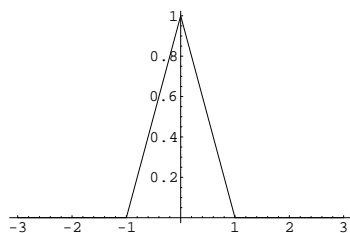


Figura 27: $u(x, 0) = f(x)$.

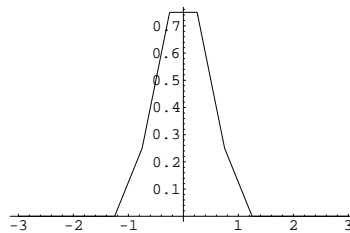


Figura 28: $u(x, 0.25) = \frac{f(x+0.25)+f(x-0.25)}{2}$.

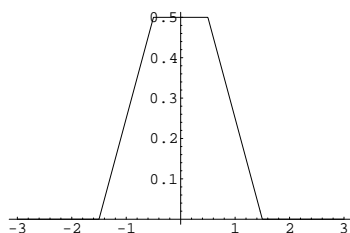


Figura 29: $u(x, 0.5) = \frac{f(x+0.5)+f(x-0.5)}{2}$.

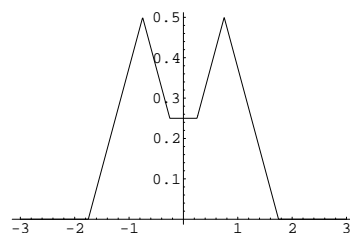


Figura 30: $u(x, 0.75) = \frac{f(x+0.75)+f(x-0.75)}{2}$.

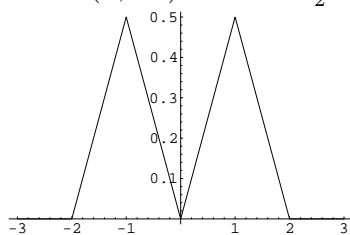


Figura 31: $u(x, 1) = \frac{f(x+1)+f(x-1)}{2}$.

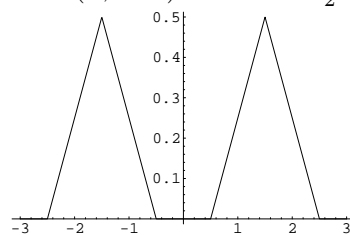


Figura 32: $u(x, 1.5) = \frac{f(x+1.5)+f(x-1.5)}{2}$.

2.9 Exercícios

1. Considere o problema de vibração de uma corda elástica fixa nas duas extremidades, com comprimento $L = 2$, que obedece à equação:

$$9u_{xx} = u_{tt}$$

Considere as seguintes funções que descrevem a posição inicial da corda, em situações distintas:

$$(I) \quad u(x, 0) = 0$$

$$(II) \quad u(x, 0) = \text{sen} \frac{\pi x}{2}$$

$$(III) \quad u(x, 0) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1 \\ 2(x-2)^2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Considere também as seguintes funções que descrevem a velocidade inicial da corda em cada ponto, também em situações distintas:

$$(A) \quad u_t(x, 0) = 0$$

$$(B) \quad u_t(x, 0) = -\text{sen} \frac{3\pi x}{2}$$

$$(C) \quad u_t(x, 0) = (x-1)^2 - 1$$

Determine a solução $u(x, t)$ do problema para:

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| (a) Condições iniciais I e A. | (f) Condições iniciais II e C. |
| (b) Condições iniciais I e B. | (g) Condições iniciais III e A. |
| (c) Condições iniciais I e C. | (h) Condições iniciais III e B. |
| (d) Condições iniciais II e A. | (i) Condições iniciais III e C. |
| (e) Condições iniciais II e B. | |
2. Considere uma corda de comprimento igual a 5, fixa nas duas extremidades. A seguinte equação diferencial descreve o movimento oscilatório que ocorre na corda:

$$4u_{xx} = u_{tt}$$

A corda encontra-se inicialmente com deslocamento nulo em toda sua extensão, e a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada pela expressão:

$$u_t(x, 0) = -\text{sen}(3\pi x)$$

- (a) Determine a função que descreve a **posição** da corda, em cada ponto, em função do tempo.

- (b) Determine a função que descreve a **velocidade** da corda, em cada ponto, em função do tempo.
- (c) Determine a expressão da **posição** da corda, em cada ponto, no instante $t = 10$.
- (d) Determine a expressão da **velocidade** do ponto $x = 2$, em função do tempo.
- (e) Supondo que o movimento da corda produza um sinal de som, que frequências estarão presentes nesse sinal de som?

2.10 A Equação de Laplace

Seja $u = u(x_1, \dots, x_n)$ de classe C^2 num subconjunto aberto e conexo \mathbb{R}^n . Definimos o operador Laplaciano como

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Em duas e três dimensões temos

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

e

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

respectivamente.

A equação de Laplace é dada por

$$\Delta u = 0.$$

Ela Laplace aparece no estudo de campos eletrostáticos, descrevendo a função potencial num meio dielétrico sem cargas elétricas.

Exercício 2.22 (*Linearidade da Equação de Laplace.*) *Mostre que se u_1 e u_2 satisfizerem a equação de Laplace, então, $c_1 u_1 + c_2 u_2$, também satisfará, para quaisquer escolhas das constantes c_1 e c_2 . Portanto, se u_1, \dots, u_n forem soluções da equação de Laplace, então, $c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$ também será, para quaisquer valores das constantes c_1, \dots, c_n .*

No que se segue Ω será uma região aberta e conexa do plano (ou do espaço). Denotaremos por $\partial\Omega$ a fronteira de Ω e $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Em muitas aplicações, Ω será, por exemplo, um disco, um retângulo, um semi-plano, um cubo ou uma esfera.

Uma função com derivadas parciais até segunda ordem contínuas $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ será **harmônica** se ela satisfizer à equação de Laplace em Ω .

Exemplo 2.13 *Alguns exemplos de funções harmônicas.*

(a) $u(x, y) = ax + by + c$, onde a , b e c são constantes arbitrárias.

(b) $u(x, y) = x^2 - y^2$.

(c) *Se f for uma função analítica complexa, então suas partes real e imaginárias serão funções harmônicas.*

Exercício 2.23 Determine relações entre as constantes a , b e c de modo que $u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ seja harmônica.

Exercício 2.24 (O Laplaciano em coordenadas polares) Seja $v = v(r, \theta)$, mostre que

$$\Delta v = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}.$$

Resolução. Em coordenadas polares temos a transformação $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, cuja transformação inversa é

$$r = r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } \theta = \theta(x, y) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{y}{x} \right),$$

logo $r_x = \frac{x}{r} = \cos \theta$, $\theta_x = -\frac{\sin \theta}{r}$, $r_y = \sin \theta$ e $\theta_y = \frac{\cos \theta}{r}$, portanto, se $f = f(r, \theta)$, onde $r = r(x, y)$ e $\theta = \theta(x, y)$, pela regra da cadeia, temos

$$f_x = f_r r_x + f_\theta \theta_x = \cos \theta f_r - \frac{\sin \theta}{r} f_\theta \quad (56)$$

$$f_y = f_r r_y + f_\theta \theta_y = \sin \theta f_r + \frac{\cos \theta}{r} f_\theta. \quad (57)$$

Aplicando a regra da cadeia novamente a $f_x = f_x(r, \theta)$, $f_y = f_y(r, \theta)$, onde $r = r(x, y)$ e $\theta = \theta(x, y)$, temos

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (f_x)_r r_x + (f_x)_\theta \theta_x = \cos \theta \left(\cos \theta f_r - \frac{\sin \theta}{r} f_\theta \right)_r - \frac{\sin \theta}{r} \left(\cos \theta f_r - \frac{\sin \theta}{r} f_\theta \right)_\theta \\ &= \cos \theta \left(\cos \theta f_{rr} + \frac{\sin \theta}{r^2} f_\theta - \frac{\sin \theta}{r} f_{\theta r} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \left(-\sin \theta f_r + \cos \theta f_{r\theta} - \frac{\sin \theta}{r} f_{\theta\theta} - \frac{\cos \theta}{r} f_\theta \right) \\ &= \cos^2 \theta f_{rr} - 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} f_{\theta r} + 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} f_\theta + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} f_{\theta\theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} f_r \\ f_{yy} &= (f_y)_r r_y + (f_y)_\theta \theta_y = \sin \theta \left(\sin \theta f_r + \frac{\cos \theta}{r} f_\theta \right)_r + \frac{\cos \theta}{r} \left(\sin \theta f_r + \frac{\cos \theta}{r} f_\theta \right)_\theta \\ &= \sin \theta \left(\sin \theta f_{rr} - \frac{\cos \theta}{r^2} f_\theta + \frac{\cos \theta}{r} f_{\theta r} \right) + \frac{\cos \theta}{r} \left(\cos \theta f_r + \sin \theta f_{r\theta} + \frac{\cos \theta}{r} f_{\theta\theta} - \frac{\sin \theta}{r} f_\theta \right) \\ &= \sin^2 \theta f_{rr} - 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} f_\theta + 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} f_{\theta r} + \frac{\cos^2 \theta}{r} f_r + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} f_{\theta\theta}. \end{aligned}$$

Somando-se as expressões para f_{xx} e f_{yy} acima e supondo que f tenha derivadas até segunda ordem contínuas na variáveis r e θ , portanto, $f_{r,\theta} = f_{\theta,r}$, temos

$$f_{xx} + f_{yy} = f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta},$$

com isso concluímos a resolução do exercício. ■

Note que de (56) e (57), se fizermos $\hat{r} = (\cos \theta, \sin \theta)$ e $\hat{\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta)$, então

$$\nabla f = (f_x, f_y) = (\cos \theta, \sin \theta) v_r + \frac{1}{r}(-\sin \theta, \cos \theta) v_\theta = v_r \hat{r} + \frac{1}{r} v_\theta \hat{\theta},$$

que é que nos dá o gradiente de uma função f dada em coordenadas polares.

Exemplo 2.14 *Do Teorema de Green, temos*

$$\int_{\Omega} (Q_x - P_y) dx dy = \oint_{\partial\Omega} P dx + Q dy,$$

onde $\partial\Omega$ é percorrida no sentido anti-horário, P, Q são funções de Classe C^1 num aberto contendo Ω . Fazendo $P = -uu_y$ e $Q = uu_x$, do Teorema de Green temos

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (u \nabla u) dx = \oint_{\partial\Omega} -uu_y dx + uu_x dy,$$

mas se $x = x(t)$ e $y = y(t)$, onde $t \in [a, b]$ é uma parametrização para a curva $\partial\Omega$, então podemos escrever

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} -uu_y dx + uu_x dy &= \int_a^b (-uu_y x' + uu_x y') dt \\ &= \int_a^b u \nabla u \cdot (y', -x') dt \\ &= \int_a^b u \nabla u \cdot \vec{n} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt \\ &= \oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} ds \end{aligned}$$

onde $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \vec{n}$ e $\vec{n} = \frac{(y', -x')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$ é o vetor normal unitário de $\partial\Omega$. Portanto, temos

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (u \nabla u) dx dy = \oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} ds. \quad (58)$$

Em particular se u ou $\frac{\partial u}{\partial n}$ for nulo em $\partial\Omega$ a integral acima é zero.

Quanto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e $\partial\Omega$ é a superfície fronteira de Ω , temos uma fórmula similar a (58) e ela segue imediatamente do Teorema da Divergência.

Exemplo 2.15 *Podemos fazer a seguinte pergunta: quais são as funções harmônicas $v(r, \theta)$ que só dependem da distância r à origem? Se $v(r, \theta) = f(r)$, então v será harmônica se e somente se*

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) = 0,$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem redutível à uma equação de primeira ordem. Imediatamente, encontramos que $f(r) = 1$ e $f(r) = \ln r$ como duas soluções linearmente independentes da equação acima. A função $\ln r$ é, portanto, uma função harmônica na região $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, que é independente de θ .

O **problema de Dirichlet** para a equação de Laplace é formulado da seguinte forma: dada uma função contínua $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, determinar uma função $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

- (i) $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, ou seja, u seja contínua em $\bar{\Omega}$ e de classe C^2 em Ω
- (ii) $\Delta u = 0$ em Ω e
- (iii) $u = f$ em $\partial\Omega$ (condição de fronteira).

O problema acima é altamente não-trivial para uma região Ω arbitrária e nem sempre tem solução. Neste texto nos limitaremos a regiões retangulares ou discos, para as quais iremos obter as soluções através de séries de Fourier.

Exemplo 2.16 (*Unicidade do Problema de Dirichlet*) *A seguir mostraremos que o Problema de Dirichlet para a equação de Laplace admite no máximo uma solução $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. De fato, temos a seguinte identidade que imediata:*

$$\nabla \cdot (u \nabla u) = \nabla u \cdot \nabla u + u \Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u \Delta u,$$

integrando esta identidade sobre Ω , temos

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (u(x) \nabla u(x)) dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x) dx + \int_{\Omega} u(x) \Delta u(x) dx$$

usando a equação (58) e o comentário sobre a mesma, à integral do lado esquerdo da equação acima, temos

$$\int_{\partial\Omega} u(\nabla u) \cdot n dS = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 dx + \int_{\Omega} u \Delta u dx. \quad (59)$$

Se u_1 e u_2 fossem soluções $C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ do problema de Dirichlet para a equação de Laplace, então $u = u_1 - u_2 \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $u = 0$ em $\partial\Omega$ e $\Delta u = 0$ em Ω . O fato de $u = 0$ em $\partial\Omega$ faz com que o lado esquerdo de (59) seja zero, como $\Delta u = 0$ em Ω , a segunda integral do lado direito de (60) se anula. Portanto, teríamos

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x) dx = 0, \quad (60)$$

o que implicaria que $u_{x_i} = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$ e $x \in \Omega$, portanto u é constante em Ω , como $u \in C^0(\bar{\Omega})$ e $u = 0$ em $\partial\Omega$, segue que $u = 0$ em $\bar{\Omega}$, portanto, $u_1 = u_2$ em $\bar{\Omega}$.

2.10.1 O Problema de Dirichlet no retângulo

Neste problema a região Ω é o retângulo $0 < x < a$ e $0 < y < b$. A sua fronteira consiste de quatro segmentos aos quais devemos especificar as condições de fronteira:

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= f_0(x), & u(x, b) &= f_1(x), & 0 < x < a \\u(0, y) &= g_0(y), & u(a, y) &= g_1(y), & 0 < y < b.\end{aligned}$$

Note que se quisermos que a condição de fronteira seja contínua, devemos ter as seguintes condições de compatibilidade: $f_0(0) = g_0(0)$, $f_0(a) = g_1(0)$ e $g_1(b) = f_1(a)$ e $f_1(0) = g_0(b)$. Se essas condições não forem satisfeitas, pode-se ainda encontrar uma função harmônica, u , em Ω , a qual satisfaz às condições de fronteira num certo sentido, mas que não poderá ser contínua em $\bar{\Omega}$.

Exercício 2.25 *Mostre que para se resolver problema acima, basta considerarmos as soluções de quatro problemas, cada um dos quais com condições de fronteira zero em três lados do retângulo e mantendo-se a condição de fronteira dada no quarto lado. A soma das quatro soluções obtidas nos dá a solução do problema original (veja Exercício 2.22).*

Observação 2.3 *No Exercício 2.25, se a condição de fronteira não for zero em algum dos vértices do retângulo, então cada uma das soluções com condições de fronteira não-nula nos lados que contêm estes vértices serão descontínuas nestes vértices, pois, nestes a solução em série converge para zero que não é o valor especificado pela condição de fronteira; contudo, sob a hipótese de continuidade da condição de fronteira do problema original, cada uma das soluções será contínua em todos os pontos da fronteira, exceto, naqueles vértices onde a condição não for zero e, por conseguinte, ao somarmos as quatro soluções teremos uma solução que será contínua em todos os pontos da fronteira, exceto, nos vértices onde a condição de fronteira não é zero e podemos definir a solução nestes por continuidade (de modo que ela seja contínua em todos os pontos da fronteira): nos vértices onde as condições de fronteira do problema original não forem zero, faça u igual ao valor das condições de fronteira nestes pontos; nos demais pontos, faça u igual à soma das quatro soluções obtidas no Exercício 2.25.*

Como os quatro problemas descritos no exercício acima são similares, iremos considerar apenas aquele correspondente às seguintes condições de fronteira:

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0.$$

Vamos assumir que $f(0) = f(a) = 0$ e que f seja contínua. Usaremos o método de separação de variáveis e assumiremos que $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Substituindo esta expressão na equação de Laplace, temos

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda,$$

onde λ é um parâmetro independente de x e y . Portanto, temos

$$X'' - \lambda X = 0, \quad (61)$$

$$Y'' + \lambda Y = 0. \quad (62)$$

Da condição de fronteira, $u(0, y) = 0 = u(a, y)$, como não queremos que Y seja identicamente nula, devemos ter $X(0) = 0 = X(a)$. Portanto, devemos ter $\lambda = -n^2\pi^2/a^2$. Portanto, para cada n , $X_n(x) = \text{sen } \frac{n\pi x}{a}$ será solução de (61) e a equação (62) fica

$$Y'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2}Y = 0, \quad (63)$$

cuja solução geral é

$$Y(y) = a_n e^{n\pi y/a} + b_n e^{-n\pi y/a}.$$

Da condição de fronteira $u(x, b) = 0$, como não queremos $X \equiv 0$, devemos ter $Y(b) = 0$, o que nos dá a seguinte relação: $b_n = -a_n e^{2n\pi b/a}$, portanto,

$$\begin{aligned} Y(y) &= a_n e^{n\pi y/a} - a_n e^{2n\pi b/a} e^{-n\pi y/a} \\ &= a_n e^{n\pi b/a} \left(e^{(n\pi/a)(y-b)} - e^{-(n\pi/a)(y-b)} \right) \\ &= 2a_n e^{n\pi b/a} \left(\frac{e^{(n\pi/a)(y-b)} - e^{-(n\pi/a)(y-b)}}{2} \right) \\ &\equiv 2a_n e^{n\pi b/a} \text{senh } \frac{n\pi(y-b)}{a} \\ &\propto \text{senh } \frac{n\pi(b-y)}{a} \equiv Y_n(y). \end{aligned}$$

Portanto, $u_n(x, y) = \text{sen } \frac{n\pi x}{a} \text{senh } \frac{n\pi(b-y)}{a}$ é harmônica e satisfaz as condições de fronteiras, exceto, $u(x, 0) = f(x)$. Tentaremos uma solução da forma

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen } \frac{n\pi x}{a} \text{senh } \frac{n\pi(b-y)}{a}.$$

Os coeficientes c_n 's têm que ser escolhidos de modo que

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi b}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a},$$

ou seja,

$$c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx \equiv f_n.$$

Portanto,

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\operatorname{senh} \frac{n\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{senh} \frac{n\pi b}{a}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a},$$

onde

$$f_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx.$$

Exercício 2.26 (O Problema de Dirichlet numa faixa semi-infinita) Encontre a solução da equação de Laplace na faixa $0 < x < a$, $y > 0$, que satisfaz as condições

$$u(0, y) = 0, u(a, y) = 0, y > 0, u(x, 0) = f(x), 0 \leq x \leq a,$$

além disso, $u(x, y)$ tende a zero quando y tende a infinito.

Resolução. Por causa das condições de fronteira $u(0, y) = 0 = u(a, y) = 0$, vimos que $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ e $X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$, portanto, a solução geral da equação em y após a separação de variáveis é $Y_n(y) = a_n e^{n\pi y/a} + b_n e^{-n\pi y/a}$. Como queremos $u(x, y)$ tenda a zero quando $y \rightarrow \infty$, devemos fazer $a_n = 0$. Portanto a solução será

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} e^{-n\pi y/a},$$

onde

$$c_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx.$$

■

Exercício 2.27 Resolva o problema de Dirichlet no retângulo, satisfazendo às seguintes condições de fronteira:

$$u(x, 0) = 3 \operatorname{sen}(2x) - 0.5 \operatorname{sen}(9x), u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0.$$

Exercício 2.28 Resolva o problema de Dirichlet no retângulo, satisfazendo às seguintes condições de fronteira:

$$u(x, 0) = x(a - x), \quad u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0.$$

Exercício 2.29 Mostre que a solução do problema de Dirichlet com condições de contorno

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x), \quad u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0$$

é

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$

onde

$$f_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx.$$

Exercício 2.30 Mostre que a solução do problema de Dirichlet com condições de contorno

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = f(y)$$

é

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right),$$

onde

$$f_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy.$$

Exercício 2.31 Resolva o problema de Dirichlet no retângulo $0 < x < 3$ e $0 < y < 2$,

$$u(x, 0) = u(0, y) = u(x, 2) = 0, \quad u(3, y) = f(y), \quad \text{onde}$$

$$f(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y, & \text{se } 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

Exercício 2.32 Encontre a solução da equação de Laplace na faixa $0 < y < b$, $x > 0$, que satisfaz as condições

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0, \quad x > 0, \quad u(0, y) = f(y), \quad 0 \leq y \leq b.$$

Exercício 2.33 Resolva o problema de Dirichlet no quadrado $0 < x < \pi$ e $0 < y < \pi$, $u(x, 0) = 1 + \operatorname{sen} x$, $u(0, y) = u(x, \pi) = u(\pi, y) = 1$.

Sugestão. Veja este problema como a solução de dois problemas de Dirichlet no quadrado $0 < x < \pi$ e $0 < y < \pi$, sendo que para um deles a condição de fronteira é constante e igual a 1.

Exercício 2.34 Mostre que a solução do problema de Dirichlet com condições de contorno

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0, \quad u(0, y) = f(y), \quad u(a, y) = 0$$

é

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\operatorname{senh} \frac{n\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b}} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b},$$

onde

$$f_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy.$$

Definição 2.1 (*O problema de Neumann para a equação de Laplace*) Ao invés de especificarmos o valor de u na fronteira da região considerada, neste problema especificamos a componente do gradiente de u na direção do vetor normal unitário à fronteira em cada ponto, chamado de **derivada normal** de u no ponto dado e denotada por

$$\nabla u \cdot n.$$

No caso de um retângulo, a derivada normal será u_x ou u_y , dependendo do lado ser perpendicular ao eixo dos x ou ao eixo dos y , respectivamente. Por quê?

Exemplo 2.17 (*Unicidade dos problema de Neumann*) Suponha que tivéssemos duas soluções u_1 e u_2 , seja $u = u_1 - u_2$. Note que a equação (60) continua sendo válida se $\nabla u \cdot n = 0$ em $\partial\Omega$ e concluímos que a solução do problema de Neumann é unicamente determinada a menos de uma constante.

Exercício 2.35 Mostre que a solução da equação de Laplace com condições de fronteira

$$u_y(x, 0) = 0, \quad u_y(x, b) = 0, \quad u_x(0, y) = 0, \quad u_x(a, y) = f(y),$$

onde $\int_0^b f(y) dy = 0$, é determinada a menos de uma constante e encontre esta solução.

Resolução. Das condições de fronteira, $u_y(x, 0) = 0 = u_y(x, b) = 0$, temos $Y(0) = 0 = Y(b)$, portanto, temos o seguinte problema:

$$Y'' = -\lambda Y, \quad Y'(0) = 0 = Y'(b).$$

Portanto, $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$ ($n = 0, 1, \dots$) e a solução é proporcional a $Y_n(y) = \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$. A outra equação fica $X'' = \frac{n^2\pi^2}{b^2} X$ e em virtude da condição de contorno $u_x(0, y) = 0$, temos que $X(x)$ será proporcional a $X_n(x) = \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)$. Portanto a solução será da forma

$$u(x, y) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Da condição de contorno, $u_x(a, y) = f(y)$, devemos ter

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right),$$

que, por se tratar da série de cossenos de $f(y)$, a qual não possui o termo constante, só tem solução se $\int_0^b f(y) dy = 0$. Como a condição $\int_0^b f(y) dy = 0$ acontece por hipótese, devemos ter

$$\frac{n\pi a_n}{b} \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy, \quad n = 1, 2, \dots$$

em particular, não sabemos quanto vale a_o , ou seja, a solução é determinada a menos desta constante. ■

O exercício acima nos mostra que não para qualquer f que o problema de Dirichlet tem solução, mais precisamente, neste problema só teremos solução se f tiver média zero e, neste caso, a solução não será única, ela é determinada a menos de uma constante aditiva.

Definição 2.2 (Condições de fronteira mista) *Consiste em especificarmos o valor de u em parte da fronteira e no restante da mesma especificarmos a componente do gradiente de u na direção do vetor unitário normal à fronteira em cada ponto.*

Exemplo 2.18 (Unicidade da solução da equação de Laplace com condições de fronteira mista) *Suponha que tivéssemos duas soluções u_1 e u_2 , seja $u = u_1 - u_2$. Note que a equação (60) continua sendo válida se $u = 0$ numa porção de $\partial\Omega$ e $\nabla u \cdot n = 0$ na outra porção de $\partial\Omega$ e concluimos u é constante em $\bar{\Omega}$, sendo u contínua em $\bar{\Omega}$ e zero em algum ponto de $\bar{\Omega}$ (no presente caso num ponto de $\partial\Omega$), ela tem que ser identicamente nula em $\bar{\Omega}$. Portanto, $u_1 = u_2$ em $\bar{\Omega}$.*

Exercício 2.36 Encontre da equação de Laplace com condições de fronteira

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 < y < b, \quad u_y(x, 0) = 0, \quad u_y(x, b) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a.$$

Suponha que

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x \leq a/2 \\ a - x, & \text{se } a/2 \leq x \leq a. \end{cases}$$

Encontre $u(x, y)$.

Resolução. Das condições de fronteira $u(0, y) = 0 = u(a, y)$, temos o seguinte problema:

$$X'' = \lambda X, \quad X(0) = 0 = X(a),$$

portanto, $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}$ ($n = 1, 2, \dots$) e a solução é proporcional a $X_n(x) = \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right)$. A outra equação fica $Y'' = \frac{n^2\pi^2}{a^2} Y$ e em virtude da condição de contorno $u_y(x, 0) = 0$, temos que $Y(y)$ será proporcional a $Y_n(y) = \cosh \left(\frac{n\pi y}{a} \right)$. Portanto a solução será da forma

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cosh \left(\frac{n\pi y}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right).$$

Da condição de contorno, $u_y(x, b) = f(x)$, devemos ter

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{a} \right) \text{senh} \left(\frac{n\pi b}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right),$$

portanto,

$$\frac{n\pi a_n}{a} \text{senh} \left(\frac{n\pi b}{a} \right) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Resolva o problema para o caso particular do f dado. ■

Exercício 2.37 Resolva o seguinte problema de Dirichlet no quadrado:

$$u(x, 0) = \text{sen } 3x, \quad u(\pi, y) = \text{sen } y - 0.5 \text{sen } 5y, \quad u(x, \pi) = 0 = u(0, y).$$

2.10.2 O Problema de Dirichlet no disco

Seja Ω o disco aberto $x^2 + y^2 < a^2$, queremos encontrar uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, tal que

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{em } \Omega,$$

e

$$u = f \quad \text{em } \partial\Omega,$$

onde g é contínua. Como $u \in C^0(\bar{\Omega})$, em particular, u tem que ser limitada no disco fechado $\bar{\Omega}$.

Fazendo $v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$ e $f(\theta) = g(a \cos \theta, a \sin \theta)$, então f e v são periódicas de período 2π na variável θ e v deve ser solução do problema

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} = 0, \quad v(a, \theta) = f(\theta), \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (64)$$

Usando separação de variáveis, buscaremos soluções da forma $v(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Substituindo esta expressão em (64), temos

$$r^2 R'' + rR' + \lambda R = 0, \quad (65)$$

$$\Theta'' - \lambda\Theta = 0, \quad \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta). \quad (66)$$

Como Θ deve ser uma função periódica de período 2π , conclui-se que $\lambda = -n^2$, $n \geq 0$, e que a solução geral de (66) é

$$\Theta_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta.$$

A equação (65) fica

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0, \quad (67)$$

que é uma equação de Euler. Para resolvê-la podemos fazer a seguinte mudança na variável independente $r = e^t$ ou $t = \ln r$. Portanto, da regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} R &= \frac{d}{dt} R(r) \frac{dt}{dr} = e^{-t} \frac{d}{dt} R \\ \frac{d^2}{dr^2} R &= \frac{d}{dr} \left(\frac{dR}{dr} \right) = \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{dR}{dt} \right) \frac{dt}{dr} = e^{-2t} \left(\frac{d^2 R}{dt^2} - \frac{dR}{dt} \right), \end{aligned}$$

e temos a seguinte equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} - n^2 R = 0. \quad (68)$$

Note que para $n = 0$ esta equação fica $\frac{d^2 R}{dt^2} = 0$, cuja solução geral é $c_1 + c_2 t$, voltando à variável inicial, temos $R(r) = c_1 + c_2 \ln r$; ou seja, para $n = 0$ temos 1 e $\ln r$ como soluções linearmente independentes de (67). Para $n \neq 0$, a solução geral de (68) é $c_1 e^{-nt} + c_2 e^{nt}$ e em termos da variável original, temos $R(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n}$; portanto, temos r^n e r^{-n} como soluções linearmente independentes de (67). As soluções, r^{-n} e $\ln r$ serão descartadas no presente caso, pois, nos dariam soluções $v(r, \theta)$ ilimitadas na origem, portanto, não podem ser contínuas neste ponto. Logo, tomaremos $R_n(r) = r^n$, para $n \geq 0$. Para cada n ,

$$v_n(r, \theta) = r^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta),$$

onde a_n e b_n são constantes arbitrárias é solução de (64). Para satisfazermos a condição de fronteira $v(a, \theta) = f(\theta)$, vamos tentar

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta).$$

devemos ter

$$f(\theta) = v(a, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta),$$

logo,

$$a_n a^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta \quad e \quad b_n a^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta.$$

Exercício 2.38

(a) *Mostre que a solução da equação de Laplace na região semi-circular $r < a$, $0 < \theta < \pi$, que satisfaz as condições de contorno*

$$\begin{aligned} u(r, 0) &= 0, \quad u(r, \pi) = 0, \quad 0 \leq r < a \\ u(a, \theta) &= f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \end{aligned}$$

admitindo que ela está bem definida e é limitada na região dada é

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n \operatorname{sen}(n\theta),$$

onde

$$a^n b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \operatorname{sen}(n\theta) \, d\theta.$$

(b) *Supondo que $f(\theta) = \theta(\pi - \theta)$, encontre a solução u .*

Sugestão. *Veja o Exercício 2.41.*

Exercício 2.39 Encontre a solução da equação de Laplace fora do círculo de raio a , que satisfaz as condições de contorno

$$u(a, \theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

que está bem definida e é limitada para $r > a$.

Resolução. Este problema é bastante parecido com o problema de Dirichlet no disco, as soluções deverão ser periódicas de período 2π . Na resolução da equação de Laplace no círculo, devemos descartar r^n e $\ln r$, pois estas não são finitas fora do disco. Portanto, a solução será da forma

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta),$$

onde

$$a_n \rho^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta \quad e \quad b_n \rho^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta.$$

■

Exercício 2.40 Encontre a solução da equação de Laplace na região anular $a < r < b$, que seja independente de θ e satisfaça as seguintes condições de fronteiras $u(a, \theta) = V_a$ e $u(b, \theta) = V_b$, para $0 \leq \theta < 2\pi$.

Resolução. Como a solução deve ser independente de θ , do Exemplo 2.15, ela é da forma $u(r) = c_1 + c_2 \ln r$. Das condições de fronteiras, temos $c_1 = \frac{\ln\left(\frac{bV_a}{aV_b}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$ e $c_2 = \frac{V_a - c_1}{\ln a}$. ■

Exercício 2.41 Seja $0 < \alpha < 2\pi$. Mostre que a solução da equação de Laplace no setor circular $0 < r < a$ e $0 \leq \theta < \alpha$, com condições de fronteira $u(r, 0) = 0 = u(r, \alpha)$, $0 \leq r < a$ e $u(a, \theta) = f(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \alpha$ é

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi\theta}{\alpha} \right),$$

onde

$$b_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}} = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} f(\theta) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi\theta}{\alpha} \right) \, d\theta.$$

Sugestão. Neste caso ao invés da hipótese de u ser periódica de período 2π , devemos usar as condições de fronteira $u(r, 0) = 0 = u(r, \alpha)$ as quais implicam que $\Theta(0) = 0 = \Theta(\alpha)$, portanto, $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2}$ ($n = 1, 2, \dots$) e $\Theta(\theta)$ será proporcional a $\Theta_n(\theta) = \text{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\alpha}\right)$. Como não temos autovalor $\lambda = 0$, as soluções radiais são $r^{-\frac{n\pi}{\alpha}}$ e $r^{\frac{n\pi}{\alpha}}$. A hipótese de $u(r, \theta)$ ser limitada nos força a descartar as soluções radiais $r^{-\frac{n\pi}{\alpha}}$.

2.10.3 O Princípio do Máximo

Teorema 2.1 (Princípio de Máximo) Sejam Ω uma região limitada, aberta e conexa do plano, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ e harmônica em Ω . Então o máximo de u é atingido na fronteira de Ω .

Corolário 2.1 Seja u como no Teorema 2.1. Então u assume seu mínimo em $\partial\Omega$.

Prova. Se u for harmônica em Ω , então, $-u$ também o será e, do Princípio de Máximo, o máximo de $-u$ também será atingido na fronteira, ou seja,

$$\max_{\partial\Omega} -u(x, y) \geq \max_{\bar{\Omega}} -u(x, y) \implies -\min_{\partial\Omega} u(x, y) \geq -\min_{\bar{\Omega}} u(x, y).$$

Multiplicando esta desigualdade por -1 , temos

$$\min_{\partial\Omega} u(x, y) \leq \min_{\bar{\Omega}} u(x, y)$$

e concluímos que o mínimo de u também é atingido na fronteira. ■

Caso o problema de Dirichlet seja solúvel, a sua unicidade pode também ser mostrada utilizando-se o Princípio de Máximo.

Teorema 2.2 Sejam u_1 e u_2 duas soluções do problema de Dirichlet para um mesmo f . Então, $u_1 = u_2$.

Prova. A função $u = u_1 - u_2$ é harmônica em Ω e igual à zero em $\partial\Omega$, logo, pelo Princípio de Máximo, $u(x, y) \geq 0$ em $\bar{\Omega}$. Por outro lado, pelo Corolário 2.1, $u(x, y) \leq 0$ em $\bar{\Omega}$. Portanto, $u(x, y) = 0$ em $\bar{\Omega}$. ■

3 Transformada de Fourier

Havíamos considerado a teoria e aplicações envolvendo a expansão de uma função $f(x)$ periódica de período $2L$ em termos de $\text{sen}(n\pi x/L)$ e $\text{cos}(n\pi x/L)$, o que nos levou ao conceito de séries de Fourier. A pergunta natural é a seguinte: podemos representar uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ não periódica em termos de senos e cossenos?

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, suave por partes, tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$. A seguir, formalmente, sem nos preocuparmos com o rigor matemático, encontraremos uma representação de f em termos de senos e cossenos. O nosso ponto de partida é o Teorema de Fourier, para tal seja f_L a função periódica de período $2L$ cuja restrição ao intervalo $(-L, L)$ coincida com f . Note que para todo x , $f_L(x) = f(x)$, se L for suficientemente grande, portanto

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x).$$

Pelo Teorema de Fourier,

$$\frac{a_{0,L}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n,L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + a_{n,L} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) = \frac{f_L(x_-) + f_L(x_+)}{2},$$

onde

$$a_{n,L} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_L(u) \cos\left(\frac{n\pi u}{L}\right) du \quad e \quad b_{n,L} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_L(u) \text{sen}\left(\frac{n\pi u}{L}\right) du.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2} &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{f_L(x_-) + f_L(x_+)}{2} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{a_{0,L}}{2} + \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n,L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + a_{n,L} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \right). \end{aligned}$$

Como $|\cos(\frac{n\pi x}{L})| \leq 1$, temos

$$\left| \frac{a_{0,L}}{2} \right| \leq \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} |f_L(x)| dx \leq \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx,$$

logo, pelo Teorema do Sanduiche, temos

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{a_{0,L}}{2} = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_-) + f(x_+)}{2} &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n,L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + a_{n,L} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \right) \\
&= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L f(u) \left(\cos\left(\frac{n\pi u}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \text{sen}\left(\frac{n\pi u}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) du \\
&= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L f(u) \cos\left(\frac{n\pi(u-x)}{L}\right) du \\
&= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos\left(\frac{n\pi(u-x)}{L}\right) du \\
&\quad (\text{formalmente substituímos } \int_{-L}^L f(u) \cos\left(\frac{n\pi(u-x)}{L}\right) du \text{ por } \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos\left(\frac{n\pi(u-x)}{L}\right) du) \\
&= \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos\left(\frac{n\pi(u-x)}{L}\right) du \right] \frac{\pi}{L} \\
&= \lim_{\Delta k \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} F(n\Delta k) \Delta k, \quad (\text{fizemos } \Delta k = \frac{\pi}{L} \text{ e } F(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos(k(u-x)) du.) \\
&= \int_0^{\infty} F(k) dk, \quad (\sum_{n=1}^{\infty} F(n\Delta k) \Delta k \text{ é a soma de Riemann de } \int_0^{\infty} F(k) dk) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos(k(u-x)) du \right) dk \\
&= \int_0^{\infty} (A(k) \cos(kx) + B(k) \text{sen}(kx)) dk \\
&\quad \left(A(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(kx) dx, \text{ e } B(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \text{sen}(kx) dx \right)
\end{aligned}$$

Teorema 3.1 (Teorema da Integral de Fourier) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que f e f' sejam contínuas por partes e $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$. Então*

$$\int_0^{\infty} (A(k) \cos(kx) + B(k) \text{sen}(kx)) dk = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \tag{69}$$

onde

$$A(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(kx) dx \tag{70}$$

e

$$B(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \text{sen}(kx) dx. \tag{71}$$

A integral em (69) é chamada **de integral de Fourier de f** .

Prova. Veja Subseção 4.3. ■

É comum identificarmos $f(x)$ com a sua integral de Fourier, ficando implícito que nos pontos de descontinuidades de f ela converge para à média aritmética dos limites laterais de f nos mesmos. Com isso escreveremos

$$f(x) = \int_0^{\infty} (A(k) \cos(kx) + B(k) \operatorname{sen}(kx)) dk.$$

Observação 3.1 Note que se $f(x)$ for par, então $B(k) = 0$ e $A(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx$. Em particular,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(y) \cos(ky) dy \right) \cos(kx) dk.$$

De maneira análoga, se $f(x)$ for ímpar, então $A(k) = 0$ e

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(y) \operatorname{sen}(ky) dy \right) \operatorname{sen}(kx) dk.$$

De (70) e (71), temos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (A(k) \cos(kx) + B(k) \operatorname{sen}(kx)) dk &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) (\cos kx \cos ky + \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} ky) dy dk \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos k(x-y) dy dk \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{e^{ik(x-y)} + e^{-ik(x-y)}}{2} dy dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)} f(y) dy dk + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-y)} f(y) dy dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)} f(y) dy dk + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)} f(y) dy dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)} f(y) dy dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} f(y) dy \right) dk \\ &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \widehat{f}(k) dk \end{aligned} \tag{72}$$

onde

$$\widehat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx. \tag{73}$$

é chamada de **transformada de Fourier de f** . De (72) e de (69), concluímos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \widehat{f}(k) dk = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \quad (74)$$

o lado esquerdo de (74) nos permite recuperar a função f a partir da \widehat{f} e por isso é chamada de **transformada inversa de Fourier**.

Observação 3.2 (Integração e derivação de funções complexas) Dadas $x, t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, consideraremos derivadas e integrais de Riemann da função $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, onde $u(t) = x(t) + iy(t)$.

(a) Se x, y forem diferenciáveis, definimos

$$u'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} + i \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right) = x'(t) + iy'(t). \quad (75)$$

(b) Se x, t forem contínuas em $[a, b]$, definimos $\int_a^b u(t) dt$ como limite de somas de Riemann de u em $[a, b]$, de modo que

$$\int_a^b u(t) dt = \int_a^b (x(t) + iy(t)) dt = \int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt = [X(t)]_a^b + i [Y(t)]_a^b, \quad (76)$$

onde $X'(t) = x(t)$ e $Y'(t) = y(t)$.

A partir de (75) e (76), usamos as regras de derivação e de integração usuais. Por exemplo, se a é for uma constante real não nula, então

$$\frac{d}{dt} e^{iat} = \frac{d}{dt} (\cos at + i \operatorname{sen} at) = -a \operatorname{sen} at + i \cos at = ia(\cos at + i \operatorname{sen} at) = ia e^{iat}.$$

$$\int_0^\pi e^{iat} dt = \int_0^\pi \cos(at) + i \int_0^\pi \operatorname{sen}(at) dt = \frac{1}{a} [\operatorname{sen}(at)]_0^\pi - i \frac{1}{a} [\cos at]_0^\pi = 0 + \frac{2i}{a} = \frac{2i}{a}.$$

Exercício 3.1 Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| < a \\ 0, & \text{se } |x| > a. \end{cases}$$

Mostre que

$$\widehat{f}(k) = \begin{cases} 2 \frac{\operatorname{sen} ka}{k}, & \text{se } k \neq 0 \\ 2a, & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

Resolução. Note que

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx \\ &= \int_{-a}^a e^{-ikx} dx \\ &= \begin{cases} 2a, & \text{se } k = 0 \\ \left| \frac{e^{-ikx}}{-ik} \right|_{-a}^a, & \text{se } k \neq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2a, & \text{se } k = 0 \\ \frac{2\text{sen}(ka)}{k}, & \text{se } k \neq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Note que $\hat{f}(k)$ é contínua em todos os pontos. ■

Exercício 3.2 (a) Use o exercício anterior para calcular a integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(ka) \cos(kx)}{k} dk$.
 (b) Deduza o valor da integral $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } u}{u} du$.

Resolução.

(a) Pelo Teorema de Fourier,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{f}(k) dk = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| < a \\ 1/2, & \text{se } |x| = a \\ 0, & \text{se } |x| > a. \end{cases}$$

Mas

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{f}(k) dk &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(ka) \cos(kx)}{k} dk + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(ka) \text{sen}(kx)}{k} dk \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(ka) \cos(kx)}{k} dk,\end{aligned}$$

pois o integrando da segunda integral da primeira igualdade é ímpar. Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(ka) \cos(kx)}{k} dk = \begin{cases} \pi, & \text{se } |x| < a \\ \pi/2, & \text{se } |x| = a \\ 0, & \text{se } |x| > a. \end{cases}$$

(b) Se $x = 0$ e $a = 1$, de (a), concluímos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } k}{k} dk = \pi \quad \text{ou} \quad \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } k}{k} dk = \pi/2.$$

■

Exercício 3.3 *Encontre as transformadas de Fourier das funções abaixo.*

$$1. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| < a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \text{ onde } a > 0.$$

$$2. f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } -1 < x < 0 \\ 1, & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & \text{se } |x| < \pi/2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A partir da convergência da transformada inversa de Fourier em $x = 0$, conclua que $\int_0^\infty \left(\frac{\text{sen}k}{k}\right)^2 dk = \frac{\pi}{2}$. **Sugestão:** use a identidade $1 - \cos k = 2\text{sen}^2(k/2)$.

$$5. f(x) = e^{-|x|}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 1 < |x| < 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$9. f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{se } x > 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} \text{sen}x, & \text{se } 0 < x < \pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exercício 3.4 Seja $a > 0$. Deduza a fórmula

$$e^{-ax} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(kx)}{a^2 + k^2} dk, \quad x \geq 0.$$

Exercício 3.5 A função sinal de x é definida como

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Mostre que

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(xt)}{t} dt = \operatorname{sgn}(x).$$

Exercício 3.6 Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Mostre que

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k \cos(kx)}{k} dk = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| < 1 \\ 1/2, & \text{se } |x| = 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Expresse f em termos de translações da função $\operatorname{sgn}(x)$. **Sugestão:** use a identidade

$$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)}{2}.$$

Fazendo integração por partes e assumindo que f e f' se anulam em $\pm\infty$, temos as seguintes propriedades da transformada de Fourier:

$$\widehat{f}'(k) = ik\widehat{f}(k), \quad \widehat{f}''(k) = -k^2\widehat{f}(k). \quad (77)$$

De fato,

$$\widehat{f}'(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f'(x) dx = \left| e^{-ikx} f(x) \right|_{-\infty}^{\infty} + ik \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx = ik\widehat{f}(k).$$

De maneira análoga, fazendo-se duas integrações por partes, temos a segunda relação de (77). ■

Dadas duas funções f e g contínuas por partes e absolutamente integráveis, a e b constantes quaisquer, então

$$\begin{aligned}
 (\widehat{af + bg})(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} (af + bg)(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} (af(x) + bg(x)) dx \\
 &= a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} g(x) dx \quad (\text{usamos a linearidade da integral}) \\
 &= a\widehat{f}(k) + b\widehat{g}(k),
 \end{aligned}$$

o que mostra que **a transformada de Fourier é uma operação linear**. De maneira análoga, mostra-se que a transformada inversa de Fourier também é linear.

Exemplo 3.1 *Suponha que a transformada de Fourier de f exista.*

(a) *Seja $g(x) = f(x - b)$ onde b é uma constante, então*

$$\widehat{g}(k) = e^{-ikb} \widehat{f}(k). \quad (78)$$

(b) *Seja $g(x) = f(ax)$ onde $a \neq 0$ é uma constante, então*

$$\widehat{g}(k) = \frac{\widehat{f}(k/a)}{|a|}.$$

Resolução.

(a) *Seja $g(x) = f(x - b)$, então*

$$\begin{aligned}
 \widehat{g}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x - b) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(y+b)} f(y) dy \quad (\text{fizemos a mudança de variáveis } y = x - b) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} e^{-ibk} f(y) dy \\
 &= e^{-ibk} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} f(y) dy \\
 &= e^{-ibk} \widehat{f}(k).
 \end{aligned}$$

(b) Seja $g(x) = f(ax)$, então

$$\begin{aligned}\widehat{g}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(ax) dx \\ &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(y/a)} f(y) dy, & \text{se } a > 0 \\ \int_{\infty}^{-\infty} e^{-ik(y/a)} f(y) dy, & \text{se } a < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k/a)y} f(y) dy \\ &= \frac{1}{|a|} \widehat{f}(k/a)\end{aligned}$$

na segunda igualdade usamos a mudança de variáveis $y = ax$. ■

Exercício 3.7 *Suponha que a transformada de Fourier de f exista e seja $g(x) = f(ax - b)$. Mostre que*

$$\widehat{g}(k) = \frac{e^{-ikb} \widehat{f}(k/a)}{|a|}.$$

Note que se f for absolutamente integrável então $|f(x)|$ tende a zero quando x tende a $\pm\infty$, logo $|e^{-ikx} f(x)| = |f(x)|$ também tende a zero quando x tende a $\pm\infty$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-ikx} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-ikx} f(x) = 0.$$

Portanto, se f e f' forem contínuas por partes e absolutamente integráveis, temos

$$\begin{aligned}\widehat{f}'(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f'(x) dx \\ &= \left[f(x) e^{-ikx} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-ik) e^{-ikx} f(x) dx \quad (\text{fizemos integração por partes}) \\ &= 0 + ik \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx \\ &= ik \widehat{f}(k).\end{aligned}$$

Em geral, se $f, f', \dots, f^{(n)}$ forem contínuas por partes e absolutamente integráveis, temos

$$\widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n \widehat{f}(k).$$

Em particular,

$$\widehat{f''}(k) = -k^2 \widehat{f}(k).$$

Sejam f contínua por partes e xf absolutamente integrável (veja Subseção 4.1). Então

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dk} \widehat{f}(k) &= \frac{d}{dk} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dk} e^{-ikx} \right) f(x) dx \quad (\text{trocamos a ordem da derivada com a integral}) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-ikx} f(x) dx \\
 &= -i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} x f(x) dx \\
 &= -i \widehat{xf}(k).
 \end{aligned} \tag{79}$$

Em geral, se f for contínua por partes e $x^n f$ for absolutamente integrável, então

$$\frac{d^n}{dk^n} \widehat{f}(k) = (-i)^n \widehat{x^n f}(k),$$

ou seja,

$$\widehat{x^n f}(k) = (i)^n \frac{d^n}{dk^n} \widehat{f}(k).$$

Seja $g(x) = e^{ik_0 x} f(x)$, onde f é contínua por partes e absolutamente integrável. Então

$$\widehat{g}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{ik_0 x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k-k_0)x} f(x) dx = \widehat{f}(k - k_0).$$

Usando a relação acima e a linearidade da transformada de Fourier, se

$$g(x) = f(x) \cos(k_0 x),$$

como $\cos(k_0 x) = (e^{ik_0 x} + e^{-ik_0 x})/2$, temos

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{2} \left(\widehat{f}(k - k_0) + \widehat{f}(k + k_0) \right).$$

De maneira análoga, se $g(x) = f(x) \sin(k_0 x)$, como $\sin(k_0 x) = (e^{ik_0 x} - e^{-ik_0 x})/2i$, temos

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{2i} \left(\widehat{f}(k - k_0) - \widehat{f}(k + k_0) \right).$$

Exercício 3.8 Fazendo integração por partes mostre que

$$\int e^{-\alpha x} \cos(\beta x) dx = \left(\frac{\beta \sin(\beta x) - \alpha \cos(\beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} \right) e^{-\alpha x} + C,$$

onde C é uma constante. Em particular,

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta x) dx = \frac{\alpha}{\beta^2 + \alpha^2}. \tag{80}$$

Exercício 3.9 Seja $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, onde $\alpha > 0$. Mostre que

$$\widehat{f}(k) = \frac{2\alpha}{k^2 + \alpha^2} \quad (81)$$

e use-a para concluir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2 + \alpha^2} dk = \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha|x|}. \quad (82)$$

Resolução. Note que

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{-\alpha|x|} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(kx) e^{-\alpha|x|} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(kx) e^{-\alpha|x|} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(kx) e^{-\alpha|x|} dx \quad (\text{a função } \operatorname{sen}(kx) e^{-\alpha|x|} \text{ é ímpar, sua integral é zero}) \\ &= 2 \int_0^{\infty} \cos(kx) e^{-\alpha x} dx \\ &= \frac{2\alpha}{k^2 + \alpha^2} \quad (\text{veja Exercício 3.8}) \end{aligned}$$

Da Fórmula de inversão temos

$$e^{-\alpha|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{2\alpha}{k^2 + \alpha^2} dk = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2 + \alpha^2} dk,$$

portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2 + \alpha^2} dk = \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha|x|}.$$

■

Exemplo 3.2 A transformada de Fourier de $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$, onde $a > 0$, é

$$\frac{\pi}{a} e^{-a|k|}. \quad (83)$$

Resolução.

$$\widehat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2 + a^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a|k|} \quad (\text{usamos (82)}).$$

Exemplo 3.3 A transformada de Fourier de $e^{-\alpha x^2}$, onde $\alpha > 0$, é

$$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-k^2/4\alpha}. \quad (84)$$

Resolução.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \hat{f}(k) &= -i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} x e^{-\alpha x^2} dx \quad (\text{usamos (79)}) \\ &= -i \left(\left[\frac{e^{-ikx} e^{-\alpha x^2}}{-2\alpha} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-ik) e^{-ikx} \frac{e^{-\alpha x^2}}{-2\alpha} dx \right) \quad (\text{integrando por partes}) \\ &= \frac{-k \hat{f}(k)}{2\alpha}. \end{aligned}$$

Acima usamos que $\left[\frac{e^{-ikx} e^{-\alpha x^2}}{-2\alpha} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0$, pois $\left| \frac{e^{-ikx} e^{-\alpha x^2}}{-2\alpha} \right| = \frac{e^{-\alpha x^2}}{-2\alpha}$ tende a zero quando x tende para $\pm\infty$. Portanto a transformada de Fourier de f satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária linear de primeira ordem e homogênea:

$$\frac{d}{dk} \hat{f}(k) + \frac{k}{2\alpha} \hat{f}(k) = 0.$$

A sua solução geral é

$$\hat{f}(k) = A e^{-k^2/4\alpha}.$$

onde

$$A = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx.$$

A seguir calcularemos esta integral. Note que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx dy \right)^{1/2} \quad (\text{usamos o Teorema de Fubini}) \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\alpha r^2} r dr \right)^{1/2} \quad (\text{usamos coordenadas polares}) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-k^2/4\alpha}.$$

■

Definição 3.1 Dadas as funções f e g absolutamente integráveis na reta, a convolução de f com g , denotada por $f * g$, é definida como

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)dy.$$

Note que após as mudanças de variáveis $x - y = u$ e $u = y$, concluímos que

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y)dy.$$

Alguns autores definem

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y)dy.$$

Teorema 3.2 (*Propriedades da Convolução*) A convolução obedece as leis comutativa, associativa e distributiva:

$$f * g = g * f, \quad f * (g * h) = (f * g) * h, \quad f * (g + h) = f * g + f * h. \quad (85)$$

Teorema 3.3 (*Teorema da Convolução*)

$$\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k),$$

Prova. Como

$$\widehat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iku} f(u)du \quad e \quad \widehat{g}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikv} g(v)dv,$$

então

$$\widehat{f}(k)\widehat{g}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(u+v)} f(u)g(v)dudv.$$

Fazendo as mudanças de variáveis: $u + v = x$ e $u = u$, então

$$du dv = \frac{\partial(u, v)}{\partial(u, x)} du dx = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} du dx = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} du dx = du dx,$$

portanto

$$\widehat{f}(k)\widehat{g}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(u)g(x - u)dudx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x - u)du \right) dx = \widehat{f * g}(k),$$

ou seja,

$$\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k). \quad (86)$$

■

Se tomarmos a transformada inversa de Fourier da equação acima, concluiremos que a transformada inversa de Fourier de $\widehat{f}(k)\widehat{g}(k)$ é igual a $(f * g)(x)$.

Exercício 3.10 Usando o Teorema da Convolução, resolva a seguinte equação integral

$$h(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} h(u)w(x-u)du,$$

onde g e w são funções dadas.

Resolução. Note que a equação acima, pode ser escrita como

$$h(x) = g(x) + (h * w)(x),$$

logo, pelo Teorema da Convolução, temos

$$\widehat{h}(k) = \widehat{g}(k) + \widehat{h}(k) \widehat{w}(k),$$

portanto,

$$\widehat{h}(k) = \frac{\widehat{g}(k)}{1 - \widehat{w}(k)}.$$

Logo,

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{\widehat{g}(k)}{1 - \widehat{w}(k)} dk.$$

■

Exercício 3.11 Usando o Teorema da Convolução, resolva a seguinte equação integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(u)}{(x-u)^2 + a^2} du = \frac{1}{x^2 + b^2}, \quad 0 < a < b.$$

Resolução. Sejam $w(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$ e $g(x) = \frac{1}{x^2+b^2}$ então a equação acima, pode ser escrita como

$$(h * w)(x) = g(x),$$

e do Teorema da Convolução temos

$$\widehat{h}(k) \widehat{w}(k) = \widehat{g}(k).$$

Logo

$$\widehat{h}(k) = \frac{\widehat{g}(k)}{\widehat{w}(k)}.$$

Mas a transformada de $\frac{1}{x^2+\alpha^2}$ é

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{1}{x^2 + \alpha^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{x^2 + \alpha^2} dx = \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha|k|} \quad (\text{usamos (82)}).$$

Logo

$$\widehat{h}(k) = \frac{a}{b} e^{-(b-a)|k|}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \widehat{h}(k) dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \left(\frac{a}{b} e^{-(b-a)|k|} \right) dk \\ &= \frac{a}{b\pi} \int_0^{\infty} e^{-(b-a)k} \cos(kx) dk \\ &= \frac{a(b-a)}{\pi b} \frac{1}{x^2 + (b-a)^2}, \quad (\text{usamos (80)}). \end{aligned}$$

Exercício 3.12 *Seja f absolutamente integrável, derivável, par e $g(x) = \cos(ax)$. Mostre que*

$$(f * g)(x) = \cos(ax) \widehat{f}(a).$$

Exercício 3.13 *Seja*

$$g_n(x) = \begin{cases} n, & \text{se } |x| < 1/n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Mostre que

$$(f * g_n)(x) = n(F(x + 1/n) - F(x - 1/n)),$$

onde $F'(x) = f(x)$ e conclua que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f * g_n)(x) = f(x).$$

3.1 Transformadas de Fourier das funções $\cos(x^2)$ e $\sin(x^2)$

Se f for uma função absolutamente integrável, então

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-ikx} f(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty,$$

o que implica que $\widehat{f}(k)$ existe. Isto significa que a hipótese de f ser absolutamente integrável é suficiente para garantir a existência de $\widehat{f}(k)$. No entanto, esta condição não é necessária, pois existem funções que não são absolutamente integráveis cujas transformadas de Fourier existem, dois exemplos de tais funções são as funções $\cos(x^2)$ e $\sin(x^2)$, como veremos a seguir.

Da teoria de integração complexa (Teoria de Resíduos), veja por exemplo [5],

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(x^2) dx, \quad (87)$$

estas duas integrais impróprias recebem o nome de **integrais de Fresnel**. Usaremos o conhecimento destas duas integrais para calcularmos as transformadas de Fourier de $\cos(x^2)$ e $\operatorname{sen}(x^2)$. Mostraremos que

$$\widehat{\cos(x^2)}(k) = \sqrt{\pi} \cos(k^2/4 - \pi/4) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} (\cos(k^2/4) + \operatorname{sen}(k^2/4)) \quad (88)$$

e

$$\widehat{\operatorname{sen}(x^2)}(k) = \sqrt{\pi} \operatorname{sen}(k^2/4 + \pi/4) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} (\operatorname{sen}(k^2/4) + \cos(k^2/4)). \quad (89)$$

Prova. Note que de (87), temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} (1 - i) = \sqrt{\pi} \frac{1 - i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi} e^{-i\pi/4}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \cos(x^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \left(\frac{e^{ix^2} + e^{-ix^2}}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x^2+kx)} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x^2-kx)} dx.$$

Do completamento de quadrados $x^2 \pm kx = (x \pm k/2)^2 - k^2/4$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \cos(x^2) dx &= \frac{e^{ik^2/4}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x+k/2)^2} dx + \frac{e^{-ik^2/4}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-k/2)^2} dx \\ &= \frac{e^{ik^2/4}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix^2} dx + \frac{e^{-ik^2/4}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2} dx \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{ik^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix^2} dx \right) \quad (\text{se } z = x + iy, z + \bar{z} = 2x = 2\operatorname{Re}(z)) \\ &= \sqrt{\pi} \operatorname{Re} \left(e^{i(k^2/4 - \pi/4)} \right) \\ &= \sqrt{\pi} \cos(k^2/4 - \pi/4). \end{aligned}$$

De maneira análoga, mostra-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \operatorname{sen}(x^2) dx = -\sqrt{\pi} \operatorname{sen}(k^2/4 - \pi/4). \quad \blacksquare$$

De (88) e (89) segue que

$$\widehat{e^{-ix^2}}(k) = \sqrt{4\pi} e^{i(k^2/4 + \pi/4)}. \quad (90)$$

3.2 As transformadas seno e cosseno de Fourier

A integral de Fourier nos permite representar uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que g e g' sejam contínuas por partes e $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty$, em termos de $\cos(kx)$ e $\sin(kx)$. A pergunta natural é a seguinte: é possível representarmos uma função $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que f, f' sejam contínuas por partes e $\int_0^{\infty} |f(x)| dx < \infty$, em termos de $\cos(kx)$ e $\sin(kx)$?

Seja g uma extensão de f para a reta toda, tal que g e g' sejam contínuas por partes e $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty$, segue do Teorema 3.1 que

$$\int_0^{\infty} (A(k) \cos(kx) + B(k) \sin(kx)) dk = \frac{g(x+0) + g(x-0)}{2}$$

onde

$$A(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cos(kx) dx$$

e

$$B(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \sin(kx) dx.$$

A seguir consideraremos dois casos particulares de extensões de f , a par e a ímpar.

(1) Tomando g a extensão par de f , segue que para $x > 0$, temos a seguinte representação de f em termos de cossenos, chamada de **Transformada cosseno de Fourier** de f :

$$\int_0^{\infty} A(k) \cos(kx) dk = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

onde

$$A(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx.$$

(2) Tomando g a extensão ímpar de f , segue que para $x > 0$, temos a seguinte representação de f em termos de senos, chamada de **Transformada seno de Fourier** de f :

$$\int_0^{\infty} B(k) \sin(kx) dk = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

onde

$$B(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx.$$

Exercício 3.14 *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Encontre uma representação para $f(x)$ em termos senos.

(b) Encontre uma representação para $f(x)$ em termos de cossenos.

| Transformadas de Fourier Elementares | | | |
|---|--|--|---|
| $f(x)$ | $\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f)(w)$ | $f(x)$ | $\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f)(w)$ |
| $\begin{cases} 1, & 0 \leq x < a; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$ | $\frac{1 - e^{-iaw}}{iw}$ | $f(ax), \quad a \neq 0$ | $\frac{1}{ a } \hat{f}\left(\frac{w}{a}\right)$ |
| $\begin{cases} e^{-ax}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ | $\frac{1}{a + iw}, \quad a > 0$ | $xf(x)$ | $i \frac{d\hat{f}}{dw}(w)$ |
| $\frac{1}{x^2 + a^2}, \quad a > 0$ | $\frac{\pi}{a} e^{-a w },$ | $f'(x)$ | $iw\hat{f}(w)$ |
| $e^{-ax^2}, \quad a > 0$ | $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}, \quad a > 0,$ | $f(x - a)$ | $e^{-iaw} \hat{f}(w)$ |
| $e^{-a x }, \quad a > 0$ | $\frac{2a}{a^2 + w^2},$ | $e^{iax} f(x)$ | $\hat{f}(w - a)$ |
| $\hat{f}(x)$ | $f(-w)$ | $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)dy$ | $\hat{f}(w) \cdot \hat{g}(w)$ |

3.3 Aplicações da transformada de Fourier às resoluções de equações diferenciais parciais

Exercício 3.15 (A equação da onda em uma corda infinita) *Resolva o seguinte problema*

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (91)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (92)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (93)$$

Assuma que f, g sejam contínuas, limitadas e absolutamente integráveis.

Resolução. Defina a transformada de Fourier de $u(x, t)$ em relação à variável x como

$$\hat{u}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x, t) d\omega.$$

Assim, de (91)-(93) e de (77), então

$$\widehat{u_{xx}}(k, t) = -\omega^2 \hat{u}(\omega, t) \quad e \quad \widehat{u_t}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u_t(x, t) d\omega = \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\omega, t),$$

$$\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega) \quad e \quad \hat{u}_t(\omega, 0) = \hat{g}(\omega).$$

Portanto ao tomarmos a transformada de Fourier da equação diferencial (91) e usando as relações acima, temos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{u}(\omega, t) = -c^2 \omega^2 \hat{u}(\omega, t) \quad (94)$$

$$\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega) \quad (95)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\omega, 0) = \hat{g}(\omega). \quad (96)$$

A solução geral de (94) é

$$\hat{u}(\omega, t) = c_1 \cos(\omega ct) + c_2 \operatorname{sen}(\omega ct),$$

e de (95) e (96), temos que

$$c_1 = \hat{f}(\omega) \quad e \quad c_2 = \frac{\hat{g}(\omega)}{c\omega},$$

respectivamente. Portanto,

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) \cos(\omega ct) + \frac{\operatorname{sen}(\omega ct)}{\omega} \hat{g}(\omega).$$

Logo,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \left(\hat{f}(\omega) \cos(\omega ct) + \frac{\operatorname{sen}(\omega ct)}{\omega} \hat{g}(\omega) \right) d\omega.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) \cos(\omega ct) d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) \left(\frac{e^{i\omega ct} + e^{-i\omega ct}}{2} \right) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{i\omega(x+ct)} + e^{i\omega(x-ct)}}{2} \right) \hat{f}(\omega) d\omega \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x+ct)} \hat{f}(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-ct)} \hat{f}(\omega) d\omega \right) \\
&= \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct)) \quad (\text{usamos (78)}).
\end{aligned}$$

Por outro lado, se fizermos

$$h(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds,$$

então, da equação (97), veja Observação 3.3 abaixo,

$$\frac{\partial}{\partial x} h(x, t) = \frac{1}{2c} (g(x+ct) - g(x-ct)),$$

portanto,

$$i\omega \hat{h}(\omega, t) = \frac{1}{2c} (e^{i\omega ct} - e^{-i\omega ct}) \hat{g}(\omega),$$

ou seja,

$$\hat{h}(\omega, t) = \frac{\text{sen}(\omega ct)}{\omega c} \hat{g}(\omega).$$

Logo,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \frac{\text{sen}(\omega ct)}{\omega} \hat{g}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{h}(\omega, t) d\omega = h(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

e concluímos que a solução desejada pode ser escrita como

$$u(x, t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds,$$

que é a fórmula de D'Alembert. ■

Observação 3.3 *Suponha que $u_x(x, t)$ e $v_x(x, t)$ existam e que g seja contínua, então,*

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{v(x,t)}^{u(x,t)} g(s) ds = g(u(x,t)) u_x(x,t) - g(v(x,t)) v_x(x,t). \quad (97)$$

Exercício 3.16 Resolva o problema de convecção num fio infinito (isto é existe troca de calor do fio com o ambiente):

$$\begin{aligned}u_t &= c^2 u_{xx} + k u_x, & -\infty < x < \infty, & t > 0 \\u(x, 0) &= f(x), & -\infty < x < \infty.\end{aligned}$$

Resolução. Se tomarmos a transformada de Fourier em relação à variável x das equações acima teremos

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\omega, t) = -(c^2 \omega^2 - i\omega k) \hat{u}(\omega, t), \quad \hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega).$$

Logo,

$$\hat{u}(\omega, t) = e^{-(c^2 \omega^2 - i\omega k)t} \hat{f}(\omega) \equiv \hat{h}(\omega, t) \hat{f}(\omega) \quad (98)$$

e pelo Teorema da Convolução,

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x - y, t) f(y) dy.$$

Resta-nos calcular $h(x, t)$. Note que

$$\hat{h}(\omega, t) = e^{i\omega k t} e^{-c^2 \omega^2 t} \equiv e^{i\omega k t} \hat{p}(\omega, t)$$

e pela propriedade do deslocamento, temos

$$h(x, t) = p(x + kt, t),$$

onde $p(x, t)$ é a transformada inversa de (veja (84)) Fourier de

$$e^{-c^2 \omega^2 t} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \right) \quad \alpha = \frac{1}{4c^2 t}$$

Portanto, $p(x, t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}}$. Finalmente,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y+kt)^2}{4c^2 t}} f(y) dy. \quad (99)$$

■

Exercício 3.17 (O problema de Dirichlet para a equação de Laplace no semi-plano)

Resolva o seguinte problema

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0 \quad (100)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (101)$$

Assuma que $u(x, y)$, $u_x(x, y)$ (para cada y fixo) e $f(x)$ sejam absolutamente integráveis em x .

Resolução. Seja

$$\hat{u}(\omega, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x, y) dx,$$

então

$$\hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u_{xx}(x, y) dx = -\omega^2 \hat{u}(\omega, y),$$

logo, tomando-se a transformada de Fourier das equações (100) e (101) em relação à variável x , temos

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{u}(\omega, y) = -\omega^2 \hat{u}(\omega, y), \quad (102)$$

$$\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega). \quad (103)$$

A solução geral de (102) é

$$\hat{u}(\omega, y) = c_1 e^{-|\omega|y} + c_2 e^{|\omega|y}$$

e se quisermos que $\hat{u}(\omega, y)$ seja limitada devemos fazer $c_2 = 0$. Portanto,

$$\hat{u}(\omega, y) = c_1 e^{-|\omega|y}, \quad (104)$$

de (103) devemos ter $c_1 = \hat{f}(\omega)$. Portanto,

$$\hat{u}(\omega, y) = e^{-|\omega|y} \hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega, y) \hat{f}(\omega), \quad (105)$$

onde $\hat{g}(\omega, y) = e^{-|\omega|y}$. Pelo Teorema da convolução, temos

$$u(x, y) = (g(\cdot, y) * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-t, y) f(t) dt. \quad (106)$$

Note que do Exercício 3.2, segue que

$$g(x, y) = \frac{y}{\pi} \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Substituindo este valor de $g(x, y)$ em (106), temos

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(t)}{y^2 + (x-t)^2} dt. \quad (107)$$

Embora para obtermos (107) via transformada de Fourier, foi necessário assumirmos que f fosse contínua e absolutamente integrável. No entanto, para $y > 0$, sob a hipótese que $f(x)$ é contínua e limitada, segue que a expressão (107) é infinitamente diferenciável nas variáveis x e y e podemos obter as derivadas passando-as para dentro da integral. Deixo para o aluno cálculo das derivadas u_{xx} e u_{yy} e verificação de que $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Mostraremos que

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = f(x),$$

ou, equivalentemente, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(x, \epsilon)$, tal que $0 < y < \delta$ implica

$$|u(x, y) - f(x)| < \epsilon.$$

De fato, para $y > 0$, temos

$$\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^2 + y^2} du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{w^2 + 1} dw = \frac{2}{\pi} [\arctg w]_0^{\infty} = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} = 1.$$

Portanto,

$$u(x, y) - f(x) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u) - f(x)}{(u-x)^2 + y^2} du,$$

logo

$$\begin{aligned} |u(x, y) - f(x)| &= \frac{y}{\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u) - f(x)}{(u-x)^2 + y^2} du \right| \\ &\leq \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x+u) - f(x)|}{u^2 + y^2} du. \end{aligned}$$

Como f é contínua em x , dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$, tal que $|f(x+u) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$, se $|u| < \delta_1$. Sendo f limitada, existe $M > 0$, tal que $|f(u)| \leq M$, para todo u , em particular, $|f(x+u) - f(x)| \leq 2M$,

para todo u . Portanto,

$$|u(x, y) - f(x)| \leq \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x+u) - f(x)|}{u^2 + y^2} du \quad (108)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{y}{\pi} \int_{|u| < \delta_1} \frac{|f(x+u) - f(x)|}{u^2 + y^2} du + \frac{y}{\pi} \int_{|u| \geq \delta_1} \frac{|f(x+u) - f(x)|}{u^2 + y^2} du \\ &= \frac{\epsilon y}{2\pi} \int_{|u| < \delta_1} \frac{1}{u^2 + y^2} du + \frac{2My}{\pi} \int_{|u| \geq \delta_1} \frac{1}{u^2 + y^2} du \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^2 + y^2} du \right) + \frac{4My}{\pi} \int_{\delta_1}^{\infty} \frac{1}{u^2 + y^2} du \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{4My}{\pi} \int_{\delta_1}^{\infty} \frac{1}{u^2 + y^2} du \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{4My}{\pi} \int_{\delta_1}^{\infty} \frac{1}{u^2} du \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{4My}{\pi \delta_1}. \end{aligned} \quad (109)$$

Note que se fizermos

$$\delta = \frac{\pi \epsilon \delta_1}{8M},$$

então se $0 < y < \delta$, teremos $0 < \frac{4My}{\pi \delta_1} < \frac{\epsilon}{2}$, portanto de (108), teremos

$$|u(x, y) - f(x)| < \epsilon.$$

■

Resumindo, provamos o resultado abaixo.

Teorema 3.1 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e limitada. Então, a expressão (107) define uma função que é infinitamente diferenciável em $y > 0$, satisfaz (100) e $\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = f(x)$.*

Observação 3.4 *A menos que façamos a restrição que $u(x, y) \rightarrow 0$ quando $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$, a solução do problema de Dirichlet dado por (100) e (101) não será única. De fato, o problema (100) e (101), com $f(x) = 0$ para todo x , tem duas soluções, ou seja, $u(x, y) = 0$ e $u(x, y) = y$.*

Exercício 3.18 *Usando o Teorema 3.1, resolva o problema de Dirichlet dado por (100) e (101) para $f(x) = \sin x$.*

Resolução.

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(t)}{y^2 + (t-x)^2} dt \\
 &= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(s+x)}{y^2 + s^2} ds, \quad t-x=s \\
 &= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } s \cos x + \text{sen } x \cos s}{y^2 + s^2} ds \\
 &= \frac{y \text{sen } x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos s}{y^2 + s^2} ds \\
 &= \frac{y \text{sen } x}{\pi} \frac{\pi e^{-y}}{y} \quad (\text{usamos (82)}) \\
 &= e^{-y} \text{sen } x.
 \end{aligned}$$

Exercício 3.19 (O problema de Dirichlet para a equação de Laplace no quadrante)

Resolva o seguinte problema

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x, y > 0 \quad (110)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad u(0, y) = 0, \quad y > 0. \quad (111)$$

Assuma que f seja contínua, limitada e que $f(0) = 0$

Resolução. Seja $h(x)$ a extensão ímpar de f para a reta toda, ou seja

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \geq 0 \\ -f(-x), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e considere o seguinte problema de Dirichlet no semi-plano

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0 \quad (112)$$

$$u(x, 0) = h(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (113)$$

Como h é contínua e limitada, pelo Teorema 3.1

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{y^2 + (x-t)^2} dt \quad (114)$$

é solução do problema (112) e (113). Em particular, como $\Delta u = 0$ para todo $-\infty < x < \infty$ e $y > 0$, $\Delta u = 0$ para todo $x, y > 0$. Além disso, para todo $x \geq 0$, $\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = h(x) = f(x)$ e se $y \geq 0$,

$$u(0, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{y^2 + t^2} dt = 0,$$

pois, h é uma função ímpar. Portanto, a expressão (114) é solução do problema de Dirichlet dado por (110) e (111). Note que (114) pode ser re-escrita como

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{1}{y^2 + (x-t)^2} - \frac{1}{y^2 + (x+t)^2} \right) f(t) dt. \quad (115)$$

Exercício 3.20 *Mostre que*

$$u(x, y) = \frac{x}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2 + (y-t)^2} - \frac{1}{x^2 + (y+t)^2} \right) f(t) dt. \quad (116)$$

é solução do problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & x, y > 0 \\ u(x, 0) &= 0, & 0 < x < \infty, & \quad u(0, y) = f(y), y \geq 0. \end{aligned}$$

Assuma que $f(0) = 0$ e f seja absolutamente integrável em $(0, \infty)$

Exercício 3.21 *Usando a linearidade da equação de Laplace e os resultados acima, resolva o seguinte problema de Dirichlet*

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & x, y > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & x \geq 0, & \quad u(0, y) = g(y), y \geq 0. \end{aligned}$$

Assuma que $f(0) = g(0)$, f e g sejam contínuas e limitadas.

Exercício 3.22 *Resolva o seguinte problema*

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & x, y > 0 \\ u(x, 0) &= \operatorname{sen} x, & x \geq 0, & \quad u(0, y) = \operatorname{sen} y, y \geq 0. \end{aligned}$$

3.4 A filosofia da transformada de Fourier em equações diferenciais parciais

Em aplicações da transformada de Fourier à resolução de uma equação diferencial parcial, assumimos que a solução, suas derivadas parciais que aparecem na equação e os dados iniciais sejam suficientemente regulares e decaiam suficientemente rápido no infinito, de modo que suas transformadas de Fourier existam. Sob estas hipóteses, chegamos a uma solução do problema, o passo seguinte é verificar quais são as condições nos coeficientes que aparecem na equação diferencial

e nos dados iniciais devemos impor de modo que a expressão obtida via transformada de Fourier ainda seja solução do problema dado. Em geral chegamos a condições muito menos restritivas do que as condições inicialmente impostas, para justificarmos o uso da transformada de Fourier, como ilustraremos no exemplo a seguir.

Exemplo 3.4 *Encontre uma solução para o problema*

$$u_t + u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Resolução. Defina

$$\widehat{u}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(x, t) dx,$$

então

$$\begin{aligned} \widehat{u}(k, 0) &= \widehat{f}(k), \\ \widehat{u}_t(k, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(k, t), \\ \widehat{u}_x(k, t) &= ik \widehat{u}(k, t). \end{aligned}$$

Tomando a transformada de Fourier da equação diferencial, temos o seguinte problema de valor inicial para $\widehat{u}(k, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(k, t) = -ik \widehat{u}(k, t), \quad \widehat{u}(k, 0) = \widehat{f}(k).$$

Para cada k fixo, podemos tratar a equação acima como uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem e de variáveis separáveis, na variável independente t , onde k entra apenas como um parâmetro (tratado como constante). A sua solução geral é (verifique isto)

$$\widehat{u}(k, t) = A(k)e^{-ikt},$$

como $\widehat{u}(k, 0) = \widehat{f}(k)$, segue que $A(k) = \widehat{f}(k)$. Portanto,

$$\widehat{u}(k, t) = \widehat{f}(k)e^{-ikt}.$$

Logo

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \widehat{u}(k, t) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-t)} \widehat{f}(k) dk = f(x-t).$$

ou seja,

$$u(x, t) = f(x-t).$$

Agora observe que $f(x-t)$ é solução de classe C^1 do nosso problema, mesmo se fizermos apenas a hipótese de que f seja de classe C^1 . Se f for de classe C^k , o mesmo acontecerá com a solução

$u(x, t) = f(x - t)$. A moral da estória é que descobrimos que $u(x, t) = f(x - t)$ é uma solução de classe C^k do nosso problema, sob nenhuma hipótese a priori na solução, tudo que precisamos é que f seja C^k , a transformada de Fourier de f nem precisa existir. Em particular, e^{x-t} é uma solução infinitamente derivável de

$$u_t + u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

embora a função e^x nem tenha transformada de Fourier!

Exemplo 3.5 *Encontre uma solução para o problema*

$$u_t + g(t)u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Resolução. Defina

$$\hat{u}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(x, t) dx,$$

então, como exemplo anterior, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(k, t) = -ikg(t) \hat{u}(k, t), \quad \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k).$$

A solução geral da equação acima é (verifique isto)

$$\hat{u}(k, t) = A(k)e^{-ikG(t)},$$

onde $G'(t) = g(t)$. Como $\hat{f}(k) = \hat{u}(k, 0) = A(k)e^{-ikG(0)}$, segue que

$$A(k) = e^{ikG(0)} \hat{f}(k).$$

Portanto,

$$\hat{u}(k, t) = \hat{f}(k)e^{ik(G(0)-G(t))}.$$

Logo

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{u}(k, t) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x+G(0)-G(t))} \hat{f}(k) dk = f(x + G(0) - G(t)).$$

Logo,

$$u(x, t) = f(x + G(0) - G(t)).$$

Note que $f(x + G(0) - G(t))$ é uma solução de classe C^1 do nosso problema, mesmo se fizermos apenas a hipótese de que f é de classe C^1 e que g seja contínua. Se f for de classe C^k e g for

de classe C^{k-1} , então $f(x + G(0) - G(t))$ será uma solução de ordem C^k do nosso problema. Em particular $\cos(x + 1 - t^3/3 - \cos t)$ é uma solução infinitamente derivável de

$$u_t + (t^2 + \sin t)u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R},$$

embora a função $\cos x$ nem tenha transformada de Fourier (no sentido usual)! ■

Tendo em vista o que foi dito acima, se tivermos que resolver um problema de valor inicial para uma equação diferencial parcial via transformada de Fourier e as transformadas de Fourier dos dados iniciais não existirem, não desista do método. Faça o seguinte, substitua os dados iniciais particulares por funções genéricas e suponha que estas sejam tão suaves e decaiam suficientemente rápido no infinito, de modo que o procedimento via transformada de Fourier esteja bem definido matematicamente. Encontrada a solução via transformada de Fourier, veja quais as condições os dados iniciais devem satisfazer para que a expressão obtida seja uma solução; em particular, se os dados iniciais originais satisfizeram tais condições, então a expressão obtida é solução do problema dado. Por exemplo, se ainda não tivéssemos resolvido o exemplo anterior e tivéssemos que resolver o problema

$$u_t + t^3 u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = x^2 e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (117)$$

via transformada de Fourier, como a função $x^2 e^x$ não tem transformada de Fourier, a primeira coisa que deveríamos fazer é substituir o $x^2 e^x$ por $f(x)$, onde assumiríamos que $f(x)$ é suficientemente suave e decaisse tão rápido no infinito, de modo que a resolução via transformada de Fourier estaria bem definida matematicamente. Então encontraríamos $u(x, t) = f(x + G(0) - G(t))$, onde $G(t) = t^4/4$, a qual, como observamos no exemplo anterior, vale mesmo que f for apenas C^1 e g contínua e que a esta solução é de classe C^k se f for de classe C^k e g for de classe C^{k-1} . Como isso concluiríamos que $u(x, t) = (x - t^4/4)^2 e^{x-t^4/4}$ é solução do problema (117). ■

3.5 Exercícios: resolução de equações diferenciais parciais

No espírito da subseção anterior, resolva os exercícios abaixo usando a transformada de Fourier. Assuma que a equação seja válida para $-\infty < x < \infty$ e $t > 0$.

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = e^{-|x|}.$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = \frac{1}{x^2+1}, \quad u_t(x, 0) = 0.$
3. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx}, \quad u(x, 0) = e^{-x^2}.$
4. $u_t = \frac{1}{100} u_{xx}, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 100, & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$
5. $u_t = u_{xx}, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{2}, & \text{se } |x| < 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$
6. $u_x + 3u_t = 0, \quad u(x, 0) = f(x).$
7. $au_x + bu_t = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad a, b \text{ são constantes e } b \neq 0.$
8. $tu_x + u_t = 0, \quad u(x, 0) = f(x).$
9. $t^2u_x - u_t = 0, \quad u(x, 0) = f(x).$
10. $u_t + \text{sen } t u_x = 0, \quad u(x, 0) = \text{sen } x.$
11. $u_t = e^{-t}u_{xx}, \quad u(x, 0) = f(x).$
12. $u_t = a(t)u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad a(t) > 0.$
13. $u_{tt} + 2u_t = -u, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x).$
14. $u_{tt} + u_{xxxx} = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad u_t(x, 0) = 0.$
15. $u_t = tu_{xxxx}, \quad u(x, 0) = f(x).$
16. $u_{tt} = u_{txx}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x).$
17. $u_{tt} - 4u_{txx} + 3u_{xxxx} = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0.$

Respostas de exercícios:

(14) $\hat{u}(k, t) = \hat{f}(k) \cos(k^2 t)$, as integrais de Fresnel $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2) dx$ e $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(x^2) dx$ convergem para $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$, com isso a transformada inversa de Fourier de $\hat{g}(k, t) = \cos(k^2 t)$, com $t > 0$, pode ser facilmente calculada, o seu valor é $g(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{x^2}{4t} - \frac{\pi}{4}\right)$. Portanto, a solução é $u(x, t) = f(x) * g(x, t)$.

(16) $\widehat{u}(k, t) = \widehat{f}(k) + \frac{1-e^{-k^2 t}}{k^2} \widehat{g}(k) \equiv \widehat{f}(k) + \widehat{h}(k, t)\widehat{g}(k)$, onde $\widehat{h}(k, t) = \frac{1-e^{-k^2 t}}{k^2}$, a qual converge para t quando $k \rightarrow 0$, portanto é limitada numa vizinhança do zero, $|\widehat{h}(k, t)| < \frac{2}{k^2}$. A transformada inversa de Fourier de $\widehat{h}(k, t)$ existe para cada $t > 0$. Logo, para $t > 0$, $u(x, t) = f(x) + g(x) * h(x, t)$. Note que para $t > 0$ e $k \neq 0$, $\frac{1-e^{-k^2 t}}{k^2} = \int_0^t e^{-k^2 s} ds$, portanto, $h(x, t) = \int_0^t \frac{e^{-x^2/4s}}{\sqrt{4\pi s}} ds$.

$$(17) \widehat{u}(k, t) = -\frac{1}{2} \widehat{f}(k) e^{-3k^2 t} + \frac{3}{2} \widehat{f}(k) e^{-k^2 t} = \widehat{f}(k) \widehat{h}(k, t) + \widehat{f}(k) \widehat{p}(k, t), \text{ portanto}$$

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} f(x) * h(x, t) + \frac{3}{2} f(x) * p(x, t),$$

onde $p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$ e $h(x, t) = \frac{1}{\sqrt{12\pi t}} e^{-x^2/12t}$

4 Apêndice

4.1 Trocando a ordem da derivação e da integração em transformada de Fourier

Teorema 4.1 *Sejam f contínua por partes, f e xf absolutamente integráveis na reta. Então*

$$\frac{d}{dk} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-ikx} f(x) dx. \quad (118)$$

ou seja,

$$\frac{d}{dk} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dk} e^{-ikx} \right) f(x) dx.$$

Prova. Seja

$$\phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx,$$

como f é contínua por partes e absolutamente integrável, então ϕ está bem definida. Mostraremos que ϕ é derivável e que a sua derivada é

$$\phi'(k) = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-ikx} f(x) dx. \quad (119)$$

Como por definição

$$\phi'(k) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(k+h) - \phi(k)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \left(\frac{e^{-ihx} - 1}{h} \right) f(x) dx,$$

ou seja,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \left(\frac{e^{-ihx} - 1}{h} \right) f(x) dx - \phi'(k) \right) = 0,$$

portanto, em virtude de (119), temos que mostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \left(\frac{e^{-ihx} - 1}{h} + ix \right) f(x) dx = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \left(\frac{e^{-ihx} - 1}{h} + ix \right) f(x) dx \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-ikx} \left(\frac{e^{-ihx} - 1}{h} + ix \right) f(x) \right| dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{e^{-ihx} - 1}{h} + ix \right) \right| |f(x)| dx \end{aligned}$$

basta provarmos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{e^{-ihx} - 1}{h} + ix \right) \right| |f(x)| dx = 0,$$

o que é equivalente a dizer que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $|h| < \delta$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{e^{-ihx} - 1}{h} + ix \right) \right| |f(x)| dx < \epsilon.$$

Note que

$$\frac{e^{-ihx} - 1}{h} + ix = x \left(\frac{\cos(hx) - 1}{hx} - i \frac{\operatorname{sen}(hx) - hx}{hx} \right). \quad (120)$$

Do Teorema do Valor Médio, temos

$$\frac{\cos u - 1}{u} = \operatorname{sen}(\xi) \quad e \quad \frac{\operatorname{sen} u}{u} = \cos(\xi),$$

onde ξ está entre 0 e u , como $|\cos \xi|, |\operatorname{sen} u| \leq 1$, concluímos que

$$\left| \frac{\cos u - 1}{u} \right| \leq 1 \quad e \quad \left| \frac{\operatorname{sen} u}{u} \right| \leq 1.$$

Portanto,

$$\left| \frac{e^{-ihx} - 1}{h} + ix \right| = |x| \left| \frac{\cos hx - 1}{hx} - i \frac{\operatorname{sen} hx}{hx} + i \right| \leq |x| \left(\left| \frac{\cos hx - 1}{hx} \right| + \left| \frac{\operatorname{sen} hx}{hx} \right| + 1 \right) \leq 3|x|$$

na segunda desigualdade usamos a Desigualdade Triangular. Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{e^{-ihx} - 1}{h} + ix \right) \right| |f(x)| dx \leq 3 \int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)| dx < \infty.$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$, existe um $R > 0$, tal que

$$\int_{|x| \geq R} \left| \left(\frac{e^{-ihx} - 1}{h} + ix \right) \right| |f(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

Do Teorema de Taylor, se $f(u)$ é tem derivadas até segunda ordem contínuas, então

$$f(u) = f(0) + f'(0)u + \frac{f''(\xi)}{2}u^2,$$

onde ξ está entre 0 e u , em particular

$$\cos u = 1 - \frac{\cos \xi}{2!} u^2 \quad e \quad \operatorname{sen} u = u - \frac{\operatorname{sen} \xi}{2!} u^2.$$

Portanto, para $u \neq 0$, podemos escrever

$$\frac{\cos u - 1}{u} = \frac{\cos \xi}{2!} u \quad e \quad \frac{\operatorname{sen} u - u}{u} = \frac{\operatorname{sen} \xi}{2!} u,$$

Como $|\cos \xi|, |\operatorname{sen} \xi| \leq 1$, segue que das relações acima que

$$\left| \frac{\cos u - 1}{u} \right| \leq \frac{|u|}{2} \quad e \quad \left| \frac{\operatorname{sen} u - u}{u} \right| \leq \frac{|u|}{2}. \quad (121)$$

Portanto, de (120) e (121), fazendo $u = xh$, temos

$$\left| \frac{e^{-ihx} - 1}{h} + ix \right| \leq |x| \frac{|hx|}{\sqrt{2}}.$$

Portanto,

$$\int_{-R}^R \left| \left(\frac{e^{-ihx} - 1}{h} + ix \right) \right| |f(x)| dx \leq \frac{|h|R}{\sqrt{2}} \int_{-R}^R |xf(x)| dx \leq \frac{|hR|}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)| dx < \frac{\epsilon}{2},$$

se

$$|h| < \frac{\epsilon}{R\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)| dx} \equiv \delta.$$

■

4.2 Lema de Riemann-Lebesgue para Integral e transformada de Fourier

Teorema 4.2 *Seja f Riemann integrável em $[a, b]$. Então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx = 0 \quad (122)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x) dx = 0 \quad (123)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx = 0. \quad (124)$$

Prova. Provaremos (122), de maneira análoga prova-se (123). Como $e^{i\lambda x} = \cos(\lambda x) + i \operatorname{sen}(\lambda x)$, então (124) segue de (122) e (123). Como f é Riemann integrável, dado $\epsilon > 0$, existe uma partição $[a = x_0, x_1, \dots, x_n = b]$, tal que

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i < \frac{\epsilon}{2},$$

onde $m_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$. Mas a soma de Riemann acima pode ser escrita como

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \int_a^b g(x) dx,$$

onde $g(x) = \sum_{i=1}^n m_i \chi_{[x_{i-1}, x_i]}(x)$, com $\chi_{[x_{i-1}, x_i]}(x)$ a função característica do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, ou seja, ela vale 1 se $x \in [x_{i-1}, x_i]$ e 0, caso contrário. Portanto, $f(x) - g(x) \geq 0$ e

$$0 \leq \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| &\leq \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| + \left| \int_a^b g(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| \\
&\leq \int_a^b |(f(x) - g(x)) \operatorname{sen}(\lambda x)| dx + \left| \int_a^b g(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| \\
&\leq \int_a^b (f(x) - g(x)) dx + \left| \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n m_i (\cos(\lambda x_{i-1}) - \cos(\lambda x_i)) \right| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{2n \max_{i=1, \dots, n} |m_i|}{\lambda}
\end{aligned}$$

Como $\frac{2n \max_{i=1, \dots, n} |m_i|}{\lambda}$ tende a zero quando λ tende a infinito, então existe $M > 0$, tal que $\frac{2n \max_{i=1, \dots, n} |m_i|}{\lambda} < \frac{\epsilon}{2}$, se $\lambda > M$. Portanto, se $\lambda > M$, teremos

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| < \epsilon,$$

o que prova (122), ■

Teorema 4.3 *Suponha que $\int_0^\infty |f(x)| dx$ seja finita. Então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^\infty f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx = 0 \quad (125)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^\infty f(x) \cos(\lambda x) dx = 0. \quad (126)$$

Prova. Provaremos (125), de maneira análoga, prova-se (126). Como $\int_0^\infty |f(x)| dx$ é finita, dado $\epsilon > 0$, existe $L > 0$, tal que

$$\int_L^\infty |f(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pelo teorema anterior, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx = 0$, logo existe $M > 0$, tal que se $\lambda > M$ temos

$$\left| \int_0^L f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, se $\lambda > M$, temos

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^\infty f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| &\leq \left| \int_0^L f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| + \left| \int_L^\infty f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| \\
&\leq \left| \int_0^L f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| + \int_L^\infty |f(x)| dx \\
&< \epsilon,
\end{aligned}$$

o que prova (125) ■

Teorema 4.4 *Suponha que $\int_{-\infty}^0 |f(x)|dx$ seja finita. Então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^0 f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx = 0 \quad (127)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^0 f(x) \cos(\lambda x) dx = 0. \quad (128)$$

Prova. Similar à prova do teorema anterior. ■

Do Teorema acima, se $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ seja finita, então

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x) dx = 0.$$

4.3 Prova do Teorema da Integral de Fourier

5 Apêndice - Dedução das Equações de Calor e da Onda

5.1 Equação da Onda

A seguir, aplicaremos a Segunda Lei de Newton a uma corda elástica e concluiremos que pequenas amplitudes transversais de uma corda vibrante obedece à equação da onda. Considere um pequeno elemento da corda, mostrado na Figura 33.

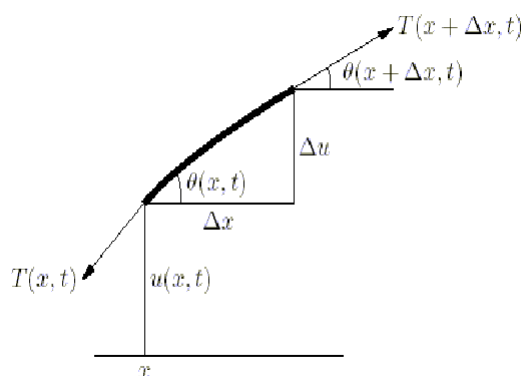


Figura 33: Um elemento da corda.

Usaremos as seguintes notações:

- $u(x, t)$ = deslocamento vertical da corda do eixo x no posição x e no instante t
- $\theta(x, t)$ = ângulo entre a corda e uma linha horizontal na posição x e no instante t
- $T(x, t)$ = tensão na corda na posição x e no instante t
- $\rho(x)$ = densidade de massa da corda na posição x .

As forças atuando no pequeno elemento de corda são

- (a) a tensão puxando no lado direito, a qual tem magnitude $T(x + \Delta x, t)$ e atua segundo um ângulo $\theta(x + \Delta, t)$ acima da horizontal,
- (b) a tensão puxando no lado esquerdo, a qual tem magnitude $T(x, t)$ e atua segundo uma ângulo $\theta(x, t)$, abaixo da horizontal e, possivelmente,
- (c) várias forças externas, como gravidade. Assumiremos que todas as forças atuam verticalmente e denotaremos por $F(x, t)\Delta x$ a magnitude total das forças externas atuando no elemento de corda.

A massa do elemento de corda é essencialmente $\rho(x)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta u^2}$, assim, a componente vertical da força, dada pela Lei de Newton, é

$$\rho(x) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = T(x + \Delta x, t) \operatorname{sen} \theta(x + \Delta, t) - T(x, t) \operatorname{sen} \theta(x, t) + F(x, t) \Delta x.$$

Dividindo por Δx e tomando o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, temos

$$\begin{aligned} \rho(x) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} [T(x, t) \operatorname{sen} \theta(x, t)] + F(x, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} T(x, t) \operatorname{sen} \theta(x, t) + T(x, t) \cos \theta(x, t) \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) + \\ &\quad + F(x, t). \end{aligned} \tag{129}$$

Note que

$$\operatorname{tg} \theta(x, t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t),$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta(x, t) &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right)^2}}, \quad \cos \theta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right)^2}} \\ \theta(x, t) &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)}{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right)^2}. \end{aligned}$$

Para pequenas vibrações, $|\theta(x, t)| \ll 1$, para todo x e t , isto implica que $\operatorname{tg} \theta(x, t) \ll 1$, logo, $|\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)| \ll 1$, portanto,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \approx 1, \quad \operatorname{sen} \theta(x, t) \approx \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), \quad \cos \theta(x, t) \approx 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t).$$

Substituindo os valores acima na equação (129), temos

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + T(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + F(x, t). \tag{130}$$

Como o nosso pequeno elemento da corda move-se apenas verticalmente, então, a componente da força na direção horizontal é zero. Portanto, da Segunda Lei de Newton, temos

$$T(x + \Delta x, t) \cos \theta(x + \Delta x, t) - T(x, t) \cos \theta(x, t) = 0.$$

Dividindo esta equação por Δx e tomando o limite quando Δx tende a zero, temos

$$\frac{\partial}{\partial x} [T(x, t) \cos(x, t)] = 0.$$

Para pequenas amplitudes de vibrações, $\cos \theta$ é muito próximo de um e $\frac{\partial T}{\partial x}(x, t)$ é muito próximo de zero. Em outras palavras, T é uma função apenas de t , a qual é determinada pela maneira de quão forte estamos puxando as extremidades da corda no instante t . Logo, para pequenas amplitudes de vibrações verticais, (130) pode ser re-escrita como

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = T(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + F(x, t).$$

Se a densidade da corda, ρ , é constante, independente de x , e a tensão $T(t)$ é uma constante independente de t e não existe forças externas, F , obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t),$$

onde

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

5.2 Equação de Calor

Consideramos um fio de material condutor, de comprimento L , cujas laterais estão perfeitamente isoladas, tal que não haja nenhuma perda de calor através das mesmas. Assumiremos que a temperatura u no fio dependa apenas da posição x e do instante t , e não dependa das coordenadas y e z , de modo que a temperatura ao longo de qualquer seção transversal seja uniforme.

De acordo com a Lei de Fourier, a quantidade de calor fluindo através de uma seção transversal de área unitária por unidade de tempo da barra, chamado de fluxo, Q , é dado por

$$Q(x, t) = -K \frac{\partial u}{\partial x}(x, t),$$

onde K é a constante de difusão de calor e depende apenas do material do fio, e $u(x, t)$ é temperatura na posição x e tempo t .

Considere uma porção infinitesimal do fio de comprimento Δx , localizado entre os pontos x e $x + \Delta x$. A quantidade de calor fluindo no ponto x é $Q(x, t)$. Da mesma forma, a quantidade de calor fluindo no ponto $x + \Delta x$ é $-Q(x + \Delta x, t)$. O aumento total de calor no elemento diferencial (por unidade de seção transversal de área) num intervalo de tempo Δt , é dado como

$$\text{o aumento de calor no elemento no tempo } \Delta t = [Q(x, t) - Q(x + \Delta x, t)]\Delta t.$$

A quantidade de calor por unidade de seção transversal na seção selecionada no fio, isto é, de elemento de massa ΔM (e comprimento Δx) no instante t é

$$\sigma \Delta M u \equiv \sigma \rho \Delta x u \approx \sigma \rho \Delta x \Delta t u_t(x, t),$$

onde σ é o calor específico do material, ρ é a densidade linear da material e u é a temperatura média no elemento no instante t . Tomaremos $u = u(x + \frac{\Delta x}{2}, t)$, ou seja, u é a temperatura no centro de elemento. Portanto, temos

$$\text{o aumento de calor no elemento no tempo } \Delta t = \sigma \rho \Delta x \Delta t u_t(x + \frac{\Delta x}{2}, t).$$

Combinando as equações acima,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{Q(x, t) - Q(x + \Delta x, t)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sigma \rho u_t(x + \frac{\Delta x}{2}, t),$$

ou seja,

$$-Q_x(x, t) = \sigma \rho u_t(x, t),$$

ou ainda,

$$K u_{xx} = \sigma \rho u_t(x, t) \iff u_t = \alpha^2 u_{xx},$$

onde a constante $\alpha^2 = \frac{K}{\sigma \rho}$ é chamada de difusividade térmica.

Referências

- [1] William E. Boyce e Richard C. DiPrima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Sétima Edição.
- [2] Murray R. Spiegel, *Análise de Fourier*, Coleção Schaum. McGraw-Hill.
- [3] C. H. Edwards e D. E. Penney, *Differential Equations, computing and modeling*, Prentice Hall, 2000.
- [4] Djairo Guedes de Figueiredo, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides, 1997.
- [5] A. I. Markushevich, *Theory of a Complex Variable* (três volumes em um). Chelsea Publishin Company, New York, N.Y, segunda edição, (1977), página 275, da primeira parte do livro
- [6] Joel Feldman, *Derivation of the Wave Equation*, encontrado no endereço www.math.ubc.ca/~feldman/apps/wave.pdf.
- [7] Ali R Ansari, *The One-Dimensional Heat Equation*, encontrado no endereço <http://www.ul.ie/~aransari/MS4007Notes4.pdf>