

Equações Diferenciais C

Prof. Paulo Cupertino de Lima
Departamento de Matemática - UFMG

Conteúdo

1	Motivação e Algumas Definições	7
1.1	Equações Diferenciais Ordinárias	7
1.2	Equações Diferenciais Parciais	11
2	Equações Diferenciais de Primeira Ordem	12
2.1	Equações Diferenciais Lineares	12
2.2	Aplicações	18
2.2.1	Misturas	18
2.2.2	Decaimento de Materiais Radioativos	20
2.2.3	Lei de Resfriamento de Newton	21
2.2.4	Queda de um Corpo num Meio com Atrito	21
2.3	Equações Diferenciais de Variáveis Separáveis	22
2.4	Mais Aplicações	25
2.4.1	Velocidade de Escape	25
2.4.2	Dinâmica de Populações	27
2.5	Teorema de Existência e Unicidade Geral	31
2.6	Métodos Numéricos	32
2.7	Exercícios Adicionais	34
2.8	Trabalhos - Alguns Modelos Aplicados	38
3	Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem	43
3.1	A Estrutura do Espaço Solução da Equação Homogênea	43
3.2	Equações com Coeficientes Constantes	48
3.3	As Equações de Euler	52
3.4	Equações Não-Homogêneas e a Estrutura do seu Conjunto Solução	53
3.5	O Método dos Coeficientes a Determinar	54
3.6	Aplicações	58
3.6.1	Vibrações Mecânicas	59
3.6.2	Vibrações Elétricas	63
3.7	Exercícios Adicionais	65
3.8	Trabalhos	67

4	A Transformada de Laplace	71
4.1	Definição e Algumas Propriedades da Transformada de Laplace	71
4.2	A Função Degrau	77
4.3	A Transformada de Laplace de Funções Periódicas	84
4.4	Funções de Impulso	85
4.5	O Teorema da Convolução	88
4.6	Tabela de Transformadas de Laplace e de Transformadas Inversas de Laplace	89
5	Revisão - Decomposição em frações parciais	90
5.1	Exercícios Adicionais	91
5.2	Trabalhos	95
5.2.1	Análise de Sistemas e o Princípio de Duhamel	95
5.2.2	Controle Realimentado	96
6	Sistemas de Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem	98
6.1	Transformando o Sistema numa Equação Diferencial de Segunda Ordem	99
6.2	Resolvendo o Sistema Através da Transformada de Laplace	103
6.3	Exercícios	106
7	Séries de Fourier	108
7.1	Séries de Fourier de Funções Pares e Ímpares	113
7.2	Cálculo de Algumas Séries de Fourier	114
7.3	Exercícios	120
7.4	Trabalhos	122
7.4.1	Ressonância	122
7.4.2	Filtragem	123
8	Equações Diferenciais Parciais	126
8.1	A equação de Calor	126
8.1.1	Condições de Fronteira	126
8.1.2	Separação de Variáveis	127
8.1.3	Barra com extremidades mantidas à 0° C	128
8.1.4	Barra isolada termicamente também nas extremidades	130
8.1.5	Barra com uma extremidade isolada e a outra mantida a 0° C	133

8.1.6	Condições de fronteira não-homogêneas	135
8.2	A Equação da Onda	138
8.2.1	A Corda finita	138
8.2.2	Condições de fronteira	139
8.2.3	A corda vibrante com extremidades fixas	139
8.2.4	A Corda infinita e a Fórmula de D'Alembert	148
8.3	Exercícios	152
8.4	Trabalhos	156
8.5	A Equação de Laplace	158
8.5.1	O Problema de Dirichlet no retângulo	161
8.5.2	O Problema de Dirichlet no disco	167
9	Apêndice - Dedução das Equações de Calor e da Onda	171
9.1	Equação da Onda	171
9.2	Equação de Calor	173
10	Solução dos Exercícios	175

Introdução

Este texto tem como objetivo atender à disciplina de Equações Diferenciais C , na qual são introduzidos os importantes conceitos de equações diferenciais ordinárias e de equações diferenciais parciais.

Na Seção 1 introduziremos o conceito de equações diferenciais ordinárias, de equações diferenciais parciais e daremos alguns exemplos onde elas aparecem.

Na Seção 2 estudaremos as equações diferenciais de primeira ordem. Focalizaremos nossa atenção nas equações lineares e de variáveis separáveis, para as quais serão apresentados procedimentos de como resolvê-las. Embora as equações de Bernoulli não sejam lineares, elas serão estudadas como um caso importante de equações que podem ser transformadas em equações lineares através de uma simples mudança de variáveis. Introduziremos os métodos de Euler como uma opção numérica para se resolver problemas de valores iniciais. Finalmente, veremos algumas aplicações das equações de primeira ordem a problemas de misturas, dinâmica de populações, decaimento de materiais radioativos, problemas de mecânica, dentre outros.

Na Seção 3 estudaremos as equações diferenciais lineares de segunda ordem. Veremos que o espaço solução de uma equação diferencial linear de segunda homogênea é um espaço vetorial. Nos cálculos nos restringiremos àquelas equações diferenciais onde as equações homogêneas associadas têm coeficientes constantes e a entrada tenha uma forma específica, pois, nos restringeremos ao método dos coeficientes a determinar na obtenção de soluções particulares. Finalmente, veremos aplicações das equações diferenciais de segunda ordem a problemas de vibrações mecânicas e oscilações elétricas.

Na Seção 4 introduziremos a transformada de Laplace e a sua inversa. Introduziremos a função degrau unitário que nos permite representar de uma maneira concisa funções descontínuas e a delta de Dirac que é uma generalização de uma força que embora atue apenas num dado instante, seja capaz de produzir um impulso unitário. A partir da definição, obteremos várias propriedades da transformada de Laplace e calcularemos as transformadas de várias funções. Veremos como a transformada de Laplace pode ser usada para resolver problemas de valores iniciais, transformando-os em problemas puramente algébricos. No final desta seção apresentaremos uma tabela com transformadas de Laplace e suas inversas.

Na Seção 6 estudaremos os sistemas de duas equações lineares de primeira ordem. Veremos como resolvê-los ou transformando-os em equações diferenciais lineares de segunda ordem ou

através da transformada de Laplace, transformando-os em sistemas de equações algébricas.

Na Seção 7 introduziremos as séries de Fourier e veremos como representar funções a partir das mesmas. Veremos como representar funções pares e funções ímpares através de séries de senos e de co-senos. Vários exemplos serão considerados, em particular, aqueles que serão utilizados na seção seguinte.

Na Seção 8 introduziremos as equações do calor e de onda unidimensionais para uma região finita, L , definiremos diferentes condições de contorno e usaremos o método da separação de variáveis na resolução das mesmas. Também consideramos a equação da onda para uma corda infinita e obteremos a fórmula de D'Alembert que nos dá explicitamente a solução em termos da forma e velocidades iniciais da onda. Ainda nesta seção introduzimos a equação de Laplace e o Princípio de Máximo e consideramos o problema de Dirichlet para o retângulo e para o disco.

No Apêndice, Seção 9, deduziremos as equações de calor e da onda a partir de primeiros princípios, ou seja, a partir da Segunda Lei de Newton e da Lei de Fourier, respectivamente.

Nas Seção 10, apresentaremos a resolução detalhada dos exercícios da série B .

Gostaria de agradecer aos Professores Ricardo Takahashi, Sônia Pinto de Carvalho e Sylvie por terem me estimulado a escrever este texto e por terem contribuído com vários exercícios propostos.

1 Motivação e Algumas Definições

1.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Definição 1.1 Uma equação diferencial ordinária é uma equação que envolve uma função desconhecida, $y(x)$, suas derivadas até uma ordem n e a variável independente x ; ou seja, é uma equação da forma

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

Definição 1.2 A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais alta que aparece na mesma.

Definição 1.3 Dizemos que uma equação diferencial ordinária de ordem n é **linear** se ela é da seguinte forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \quad (2)$$

onde os coeficientes $a_0(x), \dots, a_n(x)$ são funções conhecidas da variável x . Quando $g(x)$ for identicamente nula, dizemos que a equação (2) é **homogênea**.

Se uma equação diferencial ordinária de ordem n não for do tipo (2), dizemos que ela é **não-linear**.

As equações diferenciais ordinárias aparecem em várias aplicações e, a seguir, daremos alguns exemplos das mesmas.

Exemplo 1.1 Se chamarmos de $x(t)$ o número de bactérias no instante t , é comum supor que a taxa de variação de x em cada instante seja proporcional à x , ou seja,

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad (3)$$

onde a constante de proporcionalidade, k , é positiva, o que nos conduz a uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem homogênea.

No estudo do decaimento de massa de materiais radioativos, onde $x(t)$ é a massa do material no instante t , temos uma equação do tipo (3), onde substituímos k por $-k$.

Exemplo 1.2 *A equação diferencial*

$$Q' + p(t)Q = g(t), \quad (4)$$

onde $p(t)$ e $q(t)$ são funções contínuas num dado intervalo aberto I , é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem linear, ela aparece, por exemplo, em modelagem de misturas, onde $Q(t)$ descreve a quantidade de sal presente num recipiente no instante t .

Note que a equação (3) é um caso particular de (4) quando $p(t)$ é constante e $g(t)$ é identicamente nula.

Exemplo 1.3 *A equação diferencial*

$$y' = r \left(1 - \frac{y}{K}\right) y$$

onde r e K são constantes positivas, é chamada de equação de Verhulst, ou equação logística, ela aparece no contexto do crescimento ou declínio da população de uma espécie. Ela é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem não-linear.

Muitas equações diferenciais de segunda ordem aparecem em problemas de mecânica e resultam da Segunda Lei de Newton, a qual diz que a resultante de todas as forças, f , que atuam num corpo, é igual ao produto da massa do mesmo, m , pela sua aceleração. Como a aceleração é a derivada segunda da posição, x , em relação ao tempo, t . A força em geral depende de t , x e da velocidade, x' . Portanto a Segunda Lei de Newton pode ser colocada na seguinte forma

$$x'' = \frac{f(t, x, x')}{m}. \quad (5)$$

Se f não depender explicitamente de t ; ou seja, $f = f(x, v)$, podemos assumir que $v = v(x)$ e $x = x(t)$. Então da regra da cadeia, $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$ e (5) pode ser re-escrita como

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{f(x, v)}{m}, \quad (6)$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem em v .

Exemplo 1.4 *Suponha que um paraquedista ao cair esteja sujeito à uma força de atrito do ar que seja proporcional ao quadrado da sua velocidade, então, a força resultante é $mg - \gamma v^2$ e, de (6),*

$$\frac{dv}{dx} + \frac{\gamma}{m} v = gv^{-1},$$

onde x tem como origem o local de onde o paraquedista foi pulou e é medido positivamente para baixo. Esta equação é um caso particular das **equações de Bernoulli**.

Exemplo 1.5 Outra equação diferencial que resulta da Segunda Lei de Newton é

$$m x'' + \gamma x' + k x = f(t), \quad (7)$$

onde m , γ e k são constantes, com $m \neq 0$. Esta é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, ela modela um sistema massa-mola, onde a massa vale m , a constante elástica da mola é k , num meio que oferece atrito (se $\gamma \neq 0$) e sujeito a uma força externa $f(t)$.

Um caso particularmente interessante de (7) é a equação

$$\theta'' + \frac{g}{l} \theta = 0, \quad (8)$$

que descreve a amplitude de um pêndulo simples, que consiste num sistema formado de uma massa, m , amarrada numa corda de comprimento l , pendurados num teto, no limite em que consideramos pequenas amplitudes ($\sin \theta \approx \theta$).

Em modelagem de circuitos elétricos *RLC* em série, temos uma equação similar a (7), onde x , m , γ , k e $f(t)$, são substituídos, respectivamente, por Q , L , R , $\frac{1}{C}$ e $e(t)$, com $Q(t)$, a carga no capacitor no instante t , R , L e C , são a resistência do resistor, a indutância do indutor e a carga do capacitor, respectivamente.

Definição 1.4 Dizemos que uma função $y = \phi(x)$ com derivadas até ordem n contínuas num intervalo aberto I é **solução** da equação diferencial (1) neste intervalo, se $f(t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(n)}(t)) = 0$, para todo x em I .

Exemplo 1.6 As funções $\cos t$ e $\sin t$ são soluções da equação diferencial $x'' + x = 0$, para todo t real. Da mesma forma, $x = c e^t$, onde c é uma constante arbitrária é solução da equação diferencial $x' = x$, para todo t real.

Dada a equação diferencial (1), muitas vezes estamos interessados em soluções da mesma que satisfaçam um conjunto de condições iniciais num dado instante x_o , ou seja, queremos encontrar $y = \phi(x)$, tal que

$$f(t, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0, \quad x(t_o) = x_o, \quad x'(t_o) = x'_o, \quad \dots, \quad x^{(n)}(t_o) = x_o^{(n)}. \quad (9)$$

Este é chamado de **problema de valor inicial**.

No caso do sistema massa-mola descrito no Exemplo 1.5, um problema de valor inicial corresponderia a especificarmos a posição $x(t_o)$ e a velocidade $x'(t_o)$ iniciais da massa. Por outro

lado, no Exemplo 1.2, corresponderia a especificarmos a massa inicial de sal, $Q(t_0)$, presente no recipiente.

Exemplo 1.7 A função $x = \cos t - \sin t$ é solução do problema de valor inicial

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1,$$

para todo t real.

Em muitas aplicações, em vez de apenas uma equação diferencial, teremos um **sistema de equações diferenciais** de primeira ordem,

$$\begin{aligned}x'_1(t) &= g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\x'_2(t) &= g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\&\vdots \\x'_n(t) &= g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

onde $x_1(t), \dots, x_n(t)$ são funções desconhecidas da variável independente t e as funções g_1, \dots, g_n são dadas.

Definição 1.5 Dizemos que um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem é **linear**, se tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}x'_1(t) &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\x'_2(t) &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\&\vdots \\x'_n(t) &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t),\end{aligned}$$

onde os coeficiente $a_{ij}(t)$ e $b_i(t)$ são funções contínuas de t .

Se o sistema não puder ser colocado na forma acima, dizemos que ele é **não-linear**.

Exemplo 1.8 Um exemplo interessante de sistema de equações de diferenciais de primeira ordem não-lineares é o seguinte:

$$\begin{aligned}x' &= ax - bxy \\y' &= -cxy + dxy\end{aligned}$$

onde a, b, c e d são constantes positivas. Ele é chamado de sistema **predador-presa**.

As funções x e y descrevem as populações da presa e do predador no instante t , por exemplo, coelhos e raposas, respectivamente. A constante a pode ser vista como a taxa de nascimento da população x , o que contribui para o crescimento da mesma; por outro lado, a constante b , representa a interação da presa com o predador, contribuindo para a diminuição da mesma. A constante c é vista como a taxa de morte do predador e d a interação deste como a presa, a qual contribui para o crescimento da mesma.

Exemplo 1.9 Equações diferenciais de ordem n podem ser transformadas em sistemas de n equações diferenciais de primeira ordem. Por exemplo, se introduzirmos a variável $y = x'$, o problema de valor inicial

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad e \quad x'(t_0) = x'_0,$$

é transformado no seguinte sistema de duas equações lineares de primeira ordem:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}.$$

Da mesma forma, um sistema de equações de primeira ordem pode ser transformado numa equação diferencial ordinária linear de ordem n .

1.2 Equações Diferenciais Parciais

No caso de uma função desconhecida, u , depender de duas ou mais variáveis, por exemplo, $u = u(x, t)$, uma equação envolvendo u , suas derivadas parciais e as variáveis independentes é chamada de uma **equação diferencial parcial**.

Neste curso estaremos interessados nas seguintes equações: $u_t = ku_{xx}$ e $u_{tt} = c^2u_{xx}$, chamadas de equações do calor e da onda unidimensionais, respectivamente, onde k e c são constantes. Elas representam os fenômenos de difusão de calor num fio e a propagação de uma onda em uma dimensão espacial.

Na equação de calor $u(x, t)$ é a temperatura no ponto x no instante t e, na equação da onda, $u(x, t)$ é a amplitude da onda no ponto x e instante t .

A formulação precisa dos problemas envolvendo estas duas equações será vista na Seção 8.

2 Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Nesta seção estudaremos problemas de valores iniciais do tipo

$$y' + p(x)y = g(x), \quad y(x_o) = y_o \quad (10)$$

e

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}, \quad y(x_o) = y_o. \quad (11)$$

Vimos que (10) é uma **equação linear** de primeira ordem mais geral possível.

Quando uma equação for da forma (11), dizemos que ela é uma equação de **variáveis separáveis**. Um exemplo interessante de equações separáveis são aquelas da forma $y' = f(y)$, chamadas de **autônomas**, as quais aparecem na descrição da dinâmica populacional.

2.1 Equações Diferenciais Lineares

A seguir, consideraremos a equação

$$y' + p(x)y = g(x), \quad (12)$$

e assumiremos que as funções $p(x)$ e $g(x)$ sejam contínuas num intervalo aberto I , contendo o ponto x_o , no qual estaremos prescrevendo a condição inicial.

Se $p(x) = 0$ em (12), temos

$$y' = g(x), \quad (13)$$

portanto,

$$y(x) = \int g(x) dx = G(x) + c,$$

onde c é uma constante arbitrária, $G(x)$ é tal que $G'(x) = g(x)$, ou seja, $G(x)$ é uma anti-derivada de $g(x)$. Se quisermos uma solução de (13) tal que $y(x_o) = y_o$, devemos escolher $c = y_o - G(x_o)$; ou seja,

$$y(x) = y_o + G(x) - G(x_o) = y_o + \int_{x_o}^x g(s) ds$$

é a solução desejada, para todo $x \in I$.

A seguir, mostraremos que podemos transformar o problema (12) em (13). Para tal tentaremos encontrar uma função $\mu(x)$, tal que ao multiplicarmos (12) pela mesma, o lado esquerdo de (12) se torne $(\mu(x)y(x))'$, ou seja, queremos que $\mu y' + p\mu y = \mu y' + \mu' y$, logo, μ deve satisfazer

$$\mu' = p(x)\mu,$$

a qual é equivalente a

$$\frac{\mu'}{\mu} = p(x)$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dx} \ln |\mu(x)| = p(x),$$

cuja solução é

$$\ln |\mu(x)| = \int p(x) dx = P(x) + k, \quad (14)$$

onde $P'(x) = p(x)$ e k uma constante arbitrária. Portanto, tomando-se a exponencial da equação (14), temos

$$\mu(x) = ce^{P(x)},$$

c uma constante não-nula.

A função $\mu(x)$ é chamada de **fator integrante** de (12). Logo, se multiplicarmos (12) por $\mu(x) = ce^{P(x)}$, teremos

$$(\mu(x)y(x))' = \mu(x)g(x), \quad (15)$$

portanto,

$$\mu(x)y(x) = \int \mu(x)g(x)dx,$$

ou ainda,

$$y(x) = \frac{\int \mu(x)g(x)dx}{\mu(x)}. \quad (16)$$

Em virtude da expressão acima, ao usarmos $\mu(x)$ podemos assumir que $c = 1$, o que corresponde a fazer $k = 0$ e teremos $\mu(x) = e^{P(x)}$. Em outras palavras, dado um fator integrante, qualquer múltiplo escalar não-nulo dele também será um fator integrante.

A expressão (16), contendo uma constante arbitrária, é chamada de **solução geral** de (12).

Observação 2.1 *Um erro muito comum do aluno é de esquecer que todo o procedimento acima foi baseado no fato de que o coeficiente de y' em (12) é 1. Assim, se num dado problema isto não acontecer, primeiro divida a equação toda pelo coeficiente de y' , só depois disso identificar $p(x)$ e $g(x)$.*

Exemplo 2.1 *Resolva o problema de valor inicial*

$$y' - y = 1, \quad y(0) = 1. \quad (17)$$

Solução. Neste caso, $p(x) = -1$, logo, $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-x+k}$, faremos $k = 0$ e tomaremos $\mu(x) = e^{-x}$.

Por construção, ao multiplicarmos a equação diferencial em (17) por $\mu(x) = e^{-x}$, teremos

$$(e^{-x}y)' = e^{-x},$$

portanto,

$$e^{-x}y = \int e^{-x}dx = -e^{-x} + c,$$

ou seja,

$$y = \frac{-e^{-x} + c}{e^{-x}} = -1 + ce^x.$$

O que nos dá todas as funções que satisfazem a equação diferencial em (17), ou seja, a solução geral da mesma.

Se quisermos satisfazer a condição inicial dada, devemos escolher a constante c convenientemente, ou seja, devemos impor $1 = y(0) = -1 + c$, portanto, $c = 2$. A solução desejada é $y = -1 + 2e^x$, cujo gráfico é mostrado na Figura 1. ■

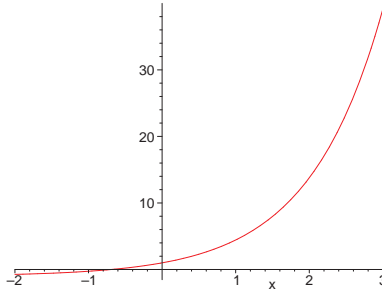


Figura 1: O gráfico da função $y = -1 + 2e^x$.

Podemos encontrar explicitamente a solução do problema de valor inicial (12) em função da condição inicial. De fato, se tomarmos $k = -P(x_o)$, teremos

$$\mu(x) = e^{P(x)-P(x_o)} = e^{\int_{x_o}^x p(s)ds}, \quad (18)$$

em particular, $\mu(x_o) = 1$. Integrando-se a equação que aparece em (15) de x_o a x , com μ dado em (18), temos,

$$\mu(x)y(x) - \mu(x_o)y(x_o) = \int_{x_o}^x \mu(s)g(s)ds$$

como $\mu(x_o) = 1$, temos

$$y(x) = \frac{\int_{x_o}^x \mu(s)g(s)ds + y_o}{\mu(x)}, \quad (19)$$

é a solução do problema de valor inicial (12), a qual está definida para todo x em I .

A unicidade da solução do problema de valor inicial (12) segue da construção acima, pois, se tivéssemos duas soluções y_1 e y_2 deste problema, então, a diferença delas, $y = y_1 - y_2$, seria solução do problema de valor inicial $y' + py = 0$ e $y(x_o) = 0$, em particular, $(e^{P(x)}y(x))' = 0$ em I . Integrando esta equação de x_o a x e lembrando que $y(x_o) = 0$, teremos $e^{P(x)}y(x) = 0$. Como $p(x)$ é contínua em I , $\mu(x)$ é sempre diferente de zero neste intervalo, teríamos $y(x)$ identicamente nula, portanto, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ iguais em I . Assim, temos o seguinte Teorema de Existência e Unicidade no caso linear:

Teorema 2.1 *Sob a hipótese de p e g serem contínuas no intervalo aberto I contendo o ponto x_o , o problema de valor inicial (12) tem uma e somente uma solução $y = \phi(x)$, a qual está definida para todo x em I e é dada por (19).*

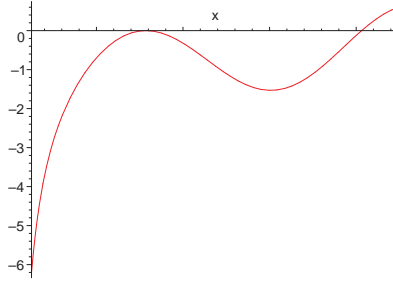


Figura 2: O gráfico de $y = \frac{-x \cos(x) + \text{sen}(x) - \pi}{x}$.

Observação 2.2 Embora tenhamos uma expressão para a solução do problema de valor inicial (12), a qual é dada por (19), nem sempre será possível calculá-la explicitamente, em virtude das integrais envolvidas e teremos que apelar para métodos numéricos.

Exercício 2.1 Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$y' + \frac{1}{x} y = \text{sen } x, \quad y(\pi) = 0.$$

Solução. Note que neste caso o fator integrante é

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|+k}.$$

Como a condição inicial foi especificada em $x_0 = \pi > 0$, podemos assumir que $x > 0$. Portanto, fazendo $k = 0$, teremos $\mu(x) = x$. Logo, ao multiplicarmos a equação diferencial por x , temos $(xy)' = x \text{sen } x$, ou seja, $xy = \int x \text{sen } x dx = -x \cos x + \text{sen } x + c$, ou seja,

$$y = \frac{-x \cos x + \text{sen } x + c}{x}$$

é a solução geral da equação diferencial acima.

Para satisfazermos a condição inicial, devemos ter $0 = y(\pi) = \frac{\pi + c}{\pi}$, ou seja, $c = -\pi$ e a solução do problema de valor inicial é

$$y = \frac{-x \cos x + \text{sen } x - \pi}{x},$$

cujo domínio é $(0, \infty)$, veja gráfico da mesma na Figura 2. ■

Exercício 2.2 (As Equações de Bernoulli.)

Mostre que se fizermos a mudança de variáveis $u(x) = y^{1-n}$, podemos transformar a equação não-linear

$$y' + p(x)y = g(x)y^n, \quad n \neq 0, 1, \quad (20)$$

na seguinte equação linear

$$u' + (1-n)p(x)u = (1-n)g(x). \quad (21)$$

Prova. Se $u(x) = y(x)^{1-n}$, então, $u' = (1-n)y^{-n}y'$, logo, se multiplicarmos (20) por $(1-n)y^{-n}$, teremos (21). ■

Exemplo 2.2 Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$y' - 2y = y^3, \quad y(0) = 1. \quad (22)$$

Solução. Note que a equação dada é de Bernoulli com $n = 3$. Se fizermos $u = y^{-2}$, teremos

$$u' + 4u = -2, \quad (23)$$

cujo fator integrante é $\mu(x) = e^{4x}$, portanto, ao multiplicarmos (23) por este fator ela se torna

$$(e^{4x}u)' = -2e^{4x},$$

ou seja,

$$e^{4x}u(x) = -2 \int e^{4x} dx = -\frac{1}{2}e^{4x} + c.$$

Portanto, a solução geral de (23) é

$$u(x) = \frac{-\frac{1}{2}e^{4x} + c}{e^{4x}} = -\frac{1}{2} + ce^{-4x}.$$

Voltando à variável inicial, temos $y^{-2} = -\frac{1}{2} + ce^{-4x}$. Como $y(0) = 1$, devemos tomar $c = \frac{3}{2}$, logo, $y^{-2} = \frac{1}{2}(-1 + 3e^{-4x})$, portanto, $y = \pm \left(\frac{1}{2}(-1 + 3e^{-4x})\right)^{-\frac{1}{2}}$. Como $y(0) = 1 > 0$, a solução do problema de valor inicial (22) é $y = \left(\frac{1}{2}(-1 + 3e^{-4x})\right)^{-\frac{1}{2}}$, definida para $x < \frac{\ln 3}{4}$, cujo gráfico é mostrado na Figura 3. ■

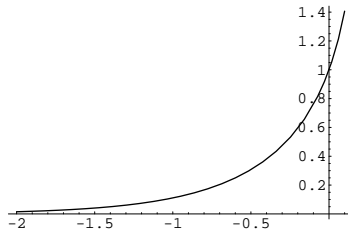


Figura 3: O gráfico da solução $y = \left(\frac{1}{2}(-1 + 3e^{-4x})\right)^{-\frac{1}{2}}$.

2.2 Aplicações

2.2.1 Misturas

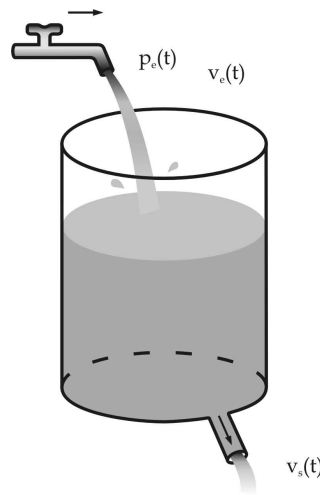


Figura 4: Misturas.

No que se segue nos referiremos à Figura 4. Temos o seguinte problema: suponha que inicialmente haja Q_0 gramas de sal num recipiente contendo V_0 litros de solução. Sabendo-se que uma solução de concentração de $\rho_e(t)$ gramas por litro entra no recipiente a uma taxa de $v_e(t)$ litros por minuto e que esta uma vez misturada saia do recipiente a uma taxa de $\rho_s(t)$ litros por minuto, calcule a quantidade de sal, $Q(t)$, presente no recipiente no instante t .

A taxa de variação do sal com tempo, $Q'(t)$, é igual à taxa na qual o sal está entrando no recipiente, $\rho_e(t) v_e(t)$, menos a taxa na qual o sal está saindo, $\frac{Q(t)}{V(t)} v_s(t)$, onde o volume de solução no instante t é dado por

$$V(t) = V_o + \int_0^t (v_e(w) - v_s(w))dw.$$

Portanto, para encontrarmos $Q(t)$, temos que resolver o seguinte problema de valor inicial:

$$Q'(t) + \frac{v_s(t)}{V(t)} Q(t) = \rho_e(t)v_e(t), \quad Q(0) = Q_o. \quad (24)$$

Exercício 2.3 Na montagem acima suponha que $v_s = v_e = 1$ litro por minuto, $\rho_e = 1$ grama por litro, $Q(0) = 0$ e $V_o = 20$ litros. Sem resolver o problema, o que você esperaria que acontecesse com a quantidade de sal dentro do recipiente quando $t \rightarrow \infty$? Resolva a equação e encontre a quantidade de sal no recipiente num instante qualquer t .

Exemplo 2.3 Um lago, com 460 km^3 de volume, recebe água numa taxa de $310 \text{ km}^3/\text{ano}$, com uma concentração de $c \text{ kg}$ de poluente industrial por km^3 . A água, bem misturada, escoo do lago com a mesma taxa de entrada. No instante inicial, o lago tem uma concentração de poluentes 5 vezes maior do que a concentração encontrada na água que entra nele.

(a) Dê a equação da quantidade de poluente no lago em função do tempo.

(b) Quanto tempo levará para que a concentração de poluente caia para metade da concentração inicial?

(c) Esboce o gráfico quantidade de poluente em função do tempo.

Resolução. Foram dados

$$\begin{aligned} v_e &= 310 \text{ km}^3/\text{ano} \\ \rho_e &= C \text{ Kg}/\text{km}^3 \\ v_s &= v_e = 310 \text{ km}^3/\text{ano} \\ \rho_s &= \frac{Q(t)}{V}, \quad V = 460 \text{ km}^3 \\ \rho(0) &= \frac{Q(0)}{V} \implies Q(0) = 5cV. \end{aligned}$$

Portanto, de (24), a equação que descreve a quantidade de sal $Q(t)$ no instante t é :

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{v_s}{V}Q = v_e\rho_e, \quad Q(0) = 5cV,$$

que é uma equação linear de primeira ordem. Seu fator integrante é $\mu(t) = e^{\frac{v_s}{V}t}$. A solução geral é

$$Q(t) = cV + Ke^{-\frac{v_s}{V}t},$$

onde K é uma constante arbitrária. Como queremos que $Q(0) = 5cV$, temos que tomar $K = 4cV$. Logo, a solução será

$$Q(t) = Vc \left(1 + 4e^{-\frac{v_s}{V}t} \right).$$

Queremos que $\frac{\rho(t)}{\rho(0)} = \frac{1}{2}$, ou seja, $\frac{Q(t)}{Q(0)} = \frac{1}{2}$, portanto, $\frac{Vc(1+4e^{-\frac{v_s}{V}t})}{5cV} = \frac{1}{2}$, logo, $1 + 4e^{-\frac{v_s}{V}t} = \frac{5}{2}$, isto é,

$$t = \frac{V}{v_s} \ln \frac{8}{3} = \frac{46}{31} \ln \frac{8}{3},$$

que é aproximadamente 1.46 anos. Deixamos para o leitor o esboço do gráfico pedido no item (c). ■

2.2.2 Decaimento de Materiais Radioativos

Em problemas de decaimento de materiais radioativos, assume-se que a taxa de variação da massa de material em cada instante seja proporcional à massa presente naquele momento. Se adicionarmos material à uma taxa $g(t)$, então, a taxa de variação da massa $m(t)$, será a soma de duas parcelas: uma devido ao decaimento, $-km$, outra devido ao material que estamos colocando, $g(t)$, portanto, temos a seguinte equação diferencial

$$m' + km = g(t), \tag{25}$$

onde k é uma constante positiva.

No caso em que $g(t)$ é identicamente nula, a solução de (25) é

$$m(t) = m(0)e^{-kt}.$$

Note que após um certo tempo τ , a massa será a metade da massa inicial $m(0)$, portanto,

$$\frac{1}{2} = \frac{m(\tau)}{m(0)} = e^{-k\tau},$$

ou seja,

$$k = \frac{\ln 2}{\tau}.$$

A quantidade τ é chamada de **tempo de meia-vida** do material radioativo.

2.2.3 Lei de Resfriamento de Newton

Suponha que um corpo esteja num meio onde a temperatura seja T_A . Seja $T(t)$ a temperatura do corpo no instante t . De acordo com a Lei de Resfriamento de Newton, a taxa de variação da temperatura do corpo é proporcional à diferença entre as temperaturas do meio e do corpo, ou seja,

$$\frac{dT}{dt} = k(T_A - T),$$

onde k é uma constante positiva, a qual pode ser re-escrita como

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_A,$$

que é de linear de primeira ordem, cuja solução geral é

$$T(t) = T_A + Ce^{-kt}.$$

Note que independentemente das condições iniciais, o corpo entrará em equilíbrio térmico com o meio, ou seja, $T(t)$ tende a T_A , quando $t \rightarrow \infty$.

Suponha que inicialmente a temperatura do corpo seja T_o e que após t_1 minutos ela seja T_1 . Então, temos $T_o = T(0) = T_A + C$, portanto, $C = T_o - T_A$, logo, a solução do problema de valor inicial será

$$T(t) = T_A + (T_o - T_A)e^{-kt}.$$

Resta-nos calcular k . Como $T(t_1) = T_1$, temos,

$$T_1 = T(t_1) = T_A + (T_o - T_A)e^{-kt_1} \implies \frac{T_1 - T_A}{T_o - T_A} = e^{-kt_1} \implies k = -\frac{1}{t_1} \ln \left(\frac{T_1 - T_A}{T_o - T_A} \right).$$

2.2.4 Queda de um Corpo num Meio com Atrito

Suponha que um corpo esteja caindo no ar e que a força de atrito deste seja proporcional ao quadrado da velocidade com que o corpo se move no mesmo. Vimos no Exemplo 1.4 que a sua velocidade obedece a seguinte equação de primeira ordem

$$\frac{dv}{dx} + \frac{\gamma}{m}v = gv^{-1},$$

que é uma equação de Bernoulli.

Exercício 2.4 *Suponha que $v(0) = v_o$, mostre que*

$$v(x) = \sqrt{\frac{mg}{\gamma} + \left(v_o^2 - \frac{mg}{\gamma} \right) e^{-\frac{2\gamma}{m}x}}.$$

2.3 Equações Diferenciais de Variáveis Separáveis

Vimos que uma equação diferencial de primeira ordem é de **variáveis separáveis** se ela é da forma

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)},$$

ou equivalentemente,

$$M(x) + N(y)y' = 0. \quad (26)$$

Observação 2.3 *Em vista da notação de Leibniz, é comum escrevermos uma equação de variáveis separáveis da seguinte forma*

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \quad (27)$$

uma vez que y' é visto como a razão das diferenciais dy e dx .

Sejam $H_1(x)$ e $H_2(y)$, anti-derivadas de $M(x)$ e $N(y)$, respectivamente, ou seja,

$$\frac{d}{dx}H_1(x) = M(x) \quad (28)$$

e

$$\frac{d}{dy}H_2(y) = N(y). \quad (29)$$

Assumindo que y seja uma função de x , da regra da cadeia e de (29), temos

$$\frac{d}{dx}H_2(y(x)) = \frac{d}{dy}H_2(y) \frac{dy}{dx} = N(y)y'. \quad (30)$$

Logo, de (28) e (30), segue-se que (26) é equivalente a

$$\frac{d}{dx}(H_1(x) + H_2(y)) = 0, \quad (31)$$

ou seja,

$$H_1(x) + H_2(y) = c, \quad (32)$$

onde c é uma constante arbitrária.

A equação (32) define implicitamente, a solução geral de (27).

Note que se quisermos a solução que satisfaz a condição inicial $y(x_o) = y_o$, teremos

$$H_1(x_o) + H_2(y_o) = c.$$

Ou seja,

$$H_1(x) + H_2(y) = H_1(x_o) + H_2(y_o)$$

o que é equivalente a

$$\int_{x_o}^x M(s)ds + \int_{y_o}^y N(s)ds = 0. \quad (33)$$

Portanto, (33) nos dá a curva solução, \mathcal{C} , que passa por (x_o, y_o) , a qual define implicitamente y como uma ou mais funções de x . No caso de \mathcal{C} definir y como mais de uma função de x , o gráfico de cada função será obtido geometricamente da seguinte maneira: tome todos os pontos (\bar{x}, \bar{y}) nos quais as tangentes à \mathcal{C} são verticais, ou seja, se a equação está sob a forma $y' = f(x, y)$, devemos fazer $\frac{dx}{dy}|_{(\bar{x}, \bar{y})} = 1/f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Tais pontos irão quebrar \mathcal{C} em pedaços maximais, sendo que cada um destes será caracterizado por ser o maior pedaço conexo de \mathcal{C} possível, tal que as suas extremidades contenham no máximo dois pontos onde a tangente a \mathcal{C} é vertical. O gráfico da solução desejada, será aquele pedaço de \mathcal{C} que contém o ponto no qual especificamos a condição inicial (x_o, y_o) . Nas Figuras 5 e 6 ilustramos os casos em que as curvas soluções têm um e dois pontos de tangência vertical, respectivamente.

Exemplo 2.4 *Encontre a solução do problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}, \quad y(0) = -1.$$

Solução. Note que a equação acima pode ser re-escrita como

$$(3x^2 + 4x + 2) - 2(y - 1)\frac{dy}{dx} = 0,$$

que é da forma (26) com $M(x) = 3x^2 + 4x + 2$ e $N(y) = -2(y - 1)$, portanto, a solução do problema de valor inicial é dada por

$$\int_0^x (3s^2 + 4s + 2)ds - 2 \int_{-1}^y (s - 1)ds = 0,$$

ou seja,

$$x^3 + 2x^2 + 2x - (y^2 - 2y) + 3 = 0,$$

ou ainda,

$$y^2 - 2y - (x^3 + 2x^2 + 2x + 3) = 0,$$

sendo que esta curva define implicitamente y como duas funções de x :

$$y(x) = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}.$$

Como queremos que $y(0) = -1$, tomaremos $y(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$. ■

Geometricamente, temos a seguinte situação: na curva $y^2 - 2y - (x^3 + 2x^2 + 2x + 3) = 0$ temos um ponto onde a tangente é vertical, ou seja, $\frac{dx}{dy} = \frac{2(y-1)}{3x^2+4x+2} = 0$, o que corresponde a $y = 1$, portanto, $x = -2$, veja a Figura 5. Assim, o ponto, $(-2, 1)$ divide a curva solução em dois pedaços, cada um dos quais define y como uma função de x , devemos tomar aquele que passa pela condição inicial $(0, -1)$, cujo domínio é $(-2, \infty)$.

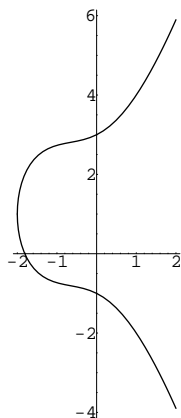


Figura 5: O gráfico da curva $y^2 - 2y - (x^3 + 2x^2 + 2x + 3) = 0$.

Exemplo 2.5 Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 3x^2}{3y^2 - 6y}, \quad y(0) = 1.$$

Solução. Antes de resolvermos esta equação, faremos uma análise qualitativa da mesma. Seja

$$f(x, y) = \frac{1 + 3x^2}{3y^2 - 6y} = \frac{1 + 3x^2}{3y(y - 2)},$$

então, o sinal de $f(x, y)$ e, portanto, o o sinal de $y'(x)$, é dado pelo sinal do seu denominador, $3y(y - 2)$. No plano xy as retas horizontais $y = 0$ e $y = 2$ dividem o plano em três regiões, nas quais o sinal de $f(x, y)$ é o seguinte:

(i) nas regiões $y > 2$ ou $y < 0$, temos $f(x, y) > 0$, portanto, enquanto a solução estiver nestas ela deve ser crescente e

(ii) na região $0 < y < 2$, temos $f(x, y) < 0$, logo, enquanto a solução estiver na mesma ela é decrescente.

Sobre as retas $y = 0$ e $y = 2$, a função f fica ilimitada, o que significa que a tangente a uma curva solução fica vertical quando ela cruza estas duas retas. Como a condição inicial é $(0, 1)$, então a solução será decrescente e estará definida enquanto ela estiver na região do plano xy com $0 < y < 2$.

Note que a solução desejada é dada por

$$\int_0^x (1 + 3s^2)ds - \int_1^y (3s^2 - 6s)ds = 0,$$

ou seja,

$$-y^3 + 3y^2 + x^3 + x - 2 = 0. \quad (34)$$

A relação acima nos dá uma curva plana (veja Figura 6) que define y implicitamente como solução de x .

Quando $y = 0$, temos $x^3 + x - 2 = 0$, ou seja, $x = 1$. Por outro lado, quando $y = 1$, temos $x^3 + x + 2 = 0$, portanto, $x = -1$. A curva que nos dá a solução tem tangente vertical quando ela passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(-1, 2)$, os quais a quebram em três pedaços: cada um dentro de uma das regiões descritas acima. O pedaço que nos interessa é aquele que passa por $(0, 1)$. Logo, o domínio da solução desejada é o intervalo $(-1, 1)$ e ela é sempre decrescente no mesmo. ■

2.4 Mais Aplicações

2.4.1 Velocidade de Escape

Um dos problemas comuns em mecânica é aquele que consiste em determinar a velocidade inicial necessária para colocar um projétil fora da órbita da Terra.

Admitiremos que a única força que atua no corpo seja o seu peso, $w(x)$, dado por

$$w(x) = -\frac{k}{(R + x)^2},$$

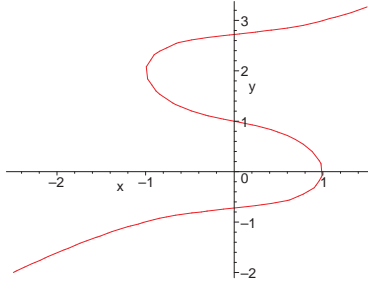


Figura 6: O gráfico da curva $y^3 - 3y^2 - x^3 - x = 2$.

onde k é uma constante, R o raio da Terra e x é a distância do corpo à superfície da mesma. Esta expressão para w segue da Lei de Atração Gravitacional, visto que o peso de um corpo é a força de atração entre este e a Terra e ela cai com o quadrado de suas distâncias.

Por definição da aceleração da gravidade, g , o peso de um corpo de massa m , sobre a superfície da terra é $w(0) = -mg$, logo,

$$-mg = w(0) = -\frac{k}{R^2}$$

e concluímos que $k = mgR^2$. Portanto,

$$w(x) = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}.$$

Da Segunda Lei de Newton, temos $ma = m\frac{dv}{dt} = w(x) = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}$, ou seja,

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{gR^2}{(R+x)^2}.$$

Podemos supor que $v = v(x)$, onde $x = x(t)$, portanto, da Regra da Cadeia, temos $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v$ e teremos o seguinte problema de valor inicial, onde a equação é de variáveis separáveis

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(R+x)^2}, \quad v(0) = v_o.$$

Estamos supondo que o projétil está sendo lançado verticalmente para cima, a partir da superfície da Terra, $x_o = 0$, com velocidade inicial v_o . A equação acima é de variáveis separáveis e a sua solução geral é $\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{R+x} + C$. Como $x_o = 0$, segue-se que $C = \frac{v_o^2}{2} - gR$. Portanto,

$$v = \pm \sqrt{v_o^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{R+x}},$$

onde escolheremos o sinal +, para indicar que o projétil está subindo, ou seja x está crescendo com tempo. Quando o projétil atingir a altura máxima, x_{max} , a sua velocidade será zero, ou seja,

$$0 = v_o^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{R + x_{max}},$$

o que nos dá $x_{max} = \frac{v_o^2 R}{2gR - v_o^2}$, portanto, a velocidade inicial necessária para elevar o corpo até a altura máxima, x_{max} , é

$$v_o = \sqrt{2gR \frac{x_{max}}{R + x_{max}}}.$$

velocidade de escape, v_e , é encontrada fazendo-se $x_{max} \rightarrow \infty$ na expressão acima, ou seja,

$$v_e = \sqrt{2gR} \approx 11,1 \text{ Km/s}.$$

Se considerássemos o atrito, a velocidade de escape seria maior do que o valor encontrado acima.

2.4.2 Dinâmica de Populações

Uma classe importante de equações de primeira ordem é aquela em que a variável independente não aparece explicitamente. Estas equações são chamadas de **equações autônomas** e têm a seguinte forma

$$\frac{dy}{dt} = f(y).$$

Note que os zeros da função $f(y)$ nos dão soluções constantes da equação acima, as quais são denominadas de **soluções de equilíbrio** ou **pontos críticos**. Um exemplo de equação que é da forma acima é a equação logística

$$\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{K}\right) y, \tag{35}$$

onde r e K são constantes positivas.

A seguir, iremos descrever qualitativamente as soluções de (35). Note que os seus pontos críticos, ou seja, zeros de $f(y) = r \left(1 - \frac{y}{K}\right) y$, são $y = 0$ e $y = K$. Assim, as soluções $y = \phi_1(t) \equiv 0$ e $y = \phi_2(t) \equiv K$ são as soluções de equilíbrio de (35). Note que $f(y)$ é uma parábola com concavidade voltada para baixo, isto significa que $f(y) > 0$ entre as raízes $y = 0$ e $y = K$ e $f(y) < 0$ se $y < 0$ e $y > K$. Se desenharmos as retas $y = 0$ e $y = K$ no plano ty , estas dividirão este plano em três regiões: $y < 0$, $0 < y < K$ e $y > K$.

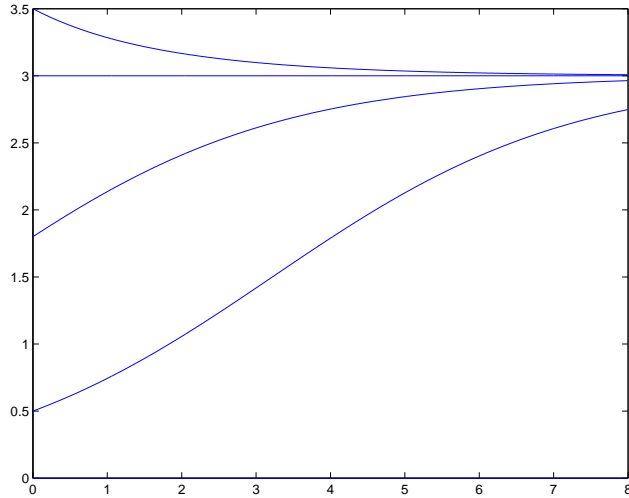


Figura 7: Soluções de $y' = r(1 - y/K)y$, com $r = 0.5$ e $K = 3$ para as condições iniciais $y_o = 3.5, 3, 1.8, 0.5, 0$.

Na região onde $y > K$, como $f(y) < 0$, então $y' > 0$, ou seja, nela a solução é decrescente. Em particular, se considerarmos uma solução tal que $y(0) = y_o > K$, ela decresce a partir deste valor sem tocar a reta $y = K$. O fato desta solução nunca tocar a reta $y = K$ segue do unicidade de soluções de (35). O mesmo acontece na região $y < 0$, ou seja, as soluções são decrescentes nesta região.

Por outro lado, na região em que $0 < y < K$, como $f(y) > 0$, segue-se que $y' > 0$ e a solução é crescente. Em particular, se considerarmos uma solução tal que $y(0) = y_o$, com $0 < y_o < K$, ela cresce a partir deste valor sem tocar a reta $y = K$.

Se quisermos uma informação mais detalhada da solução, podemos considerar a concavidade da mesma, ou seja, o sinal de

$$y''(t) = \frac{d}{dt}f(y) = \frac{d}{dy}f(y) \frac{dy}{dt} = f(y)f'(y) = r^2 \left(1 - \frac{y}{K}\right) y \left(1 - \frac{2y}{K}\right).$$

Note que os pontos de inflexão de $y(t)$ são $y = 0$, $y = K$ e $y = \frac{K}{2}$ e o sinal de $y''(t)$ é positivo se $y > K$ ou $0 < y < \frac{K}{2}$ e será negativo se $y < 0$ ou $\frac{K}{2} < y < K$. Em particular, se $y(0) > K$, então, a concavidade do gráfico de $y(t)$ será para cima. Se $y(0) < 0$ ou $\frac{K}{2} < y < K$, a concavidade do gráfico de $y(t)$ será para baixo. Finalmente, se $0 < y(0) < \frac{K}{2}$, então, a concavidade do gráfico de $y(t)$ será para cima até o instante em que a solução corta a reta $y = \frac{K}{2}$, onde ele muda de concavidade e permanece com concavidade para baixo, veja a Figura 7.

Embora tenhamos feito uma análise puramente qualitativa das soluções de (35), podemos

calcular explicitamente suas soluções, observando-se que (35) é uma equação de variáveis separáveis.

De fato,

$$\int \frac{dy}{(k-y)y} = \frac{r}{K} \int dt.$$

Após decomposição em frações parciais, temos

$$\frac{1}{(K-y)y} = \frac{1}{K} \left(\frac{1}{K-y} + \frac{1}{y} \right),$$

portanto,

$$\frac{1}{K} \ln \left| \frac{y}{K-y} \right| = \frac{r}{K} t + \frac{C_1}{K}$$

ou seja,

$$\frac{y}{K-y} = C e^{rt},$$

ou $y = \frac{KC}{C + e^{-rt}}$. Da condição inicial $y(0) = y_0$, temos $C = \frac{y_0}{K - y_0}$, portanto,

$$y = \frac{K y_0}{y_0 + (K - y_0) e^{-rt}}. \quad (36)$$

Note que independentemente da condição inicial $y(0) > 0$, as soluções tendem à solução de equilíbrio $y = \phi_2(t) = K$, quando $t \rightarrow \infty$ e dizemos que ela é **assintoticamente estável**.

Exercício 2.5 *No contexto de dinâmica de populações, na equação (35) assumimos que $y \geq 0$, em particular, devemos ter $y_0 \geq 0$. Mas num contexto em que nesta equação permitirmos que y assuma valores negativos, podemos mostrar que toda solução com $y_0 < 0$ só está definida para valores de*

$$t < \frac{1}{r} \ln \left(\frac{k + |y_0|}{|y_0|} \right),$$

porque?

Se trocarmos o sinal de f , ou seja, considerarmos $f(y) = -r \left(1 - \frac{y}{K} \right) y$, ainda teremos as mesmas soluções de equilíbrio; contudo, o comportamento das soluções será completamente diferente. Em particular, mesmo que tomemos condições iniciais $y(0) \neq K$, arbitrariamente próximas de K , as soluções correspondentes se afastam de $y = \phi_2(t) = K$ e dizemos que esta solução de equilíbrio é **assintoticamente instável**. Já a solução $y = \phi_1(t) = 0$ será assintoticamente estável, neste caso.

Em muitas aplicações, por exemplo, na descrição de população de bactérias é comum assumir que a taxa de variação da população, y , em cada instante seja proporcional à y , o que nos conduz à seguinte equação diferencial linear

$$y' = ky, \quad (37)$$

onde k é uma constante positiva. A solução de (37) que satisfaz à condição inicial $y(0) = y_0$ é $y(t) = y_0 e^{kt}$, o que nos dá um crescimento exponencial da população.

Na prática a equação (37) é uma aproximação que deve ser válida para pequenos valores de t , pois, à medida em que a população cresce há competição entre os seus indivíduos por espaço e por alimento; portanto, o que se espera é que haja uma estabilização da população e teremos que considerar uma equação que modele isto, por exemplo, uma equação tipo (35). Podemos ver o termo não-linear como uma interação entre os indivíduos da mesma espécie.

Exemplo 2.6 *Considere o seguinte problema de valor inicial:*

$$y' = f(y) = y(y^2 + 3y + 2), y(0) = y_0.$$

(a) *Faça um esboço de $f(y)$, determine os pontos de equilíbrio e classifique cada deles como assintoticamente estável ou instável.*

(b) *Esboce algumas soluções para diferentes valores de y_0 , sem necessariamente resolver a equação acima.*

Solução. Os pontos críticos são os zeros de $f(y)$, ou seja, as soluções constantes $y_2(t) \equiv -1$, $y_3(t) \equiv 0$ e $y_1(t) \equiv -2$.

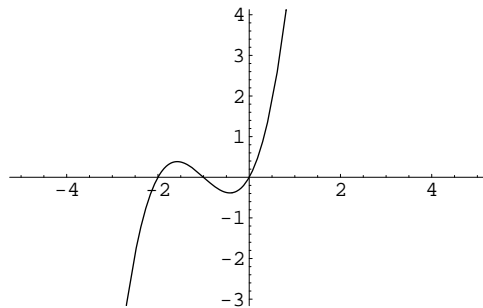


Figura 8: O gráfico de $f(y) = y(y^2 + 3y + 2)$, o que nos dá as regiões de crescimento e de decréscimo das soluções .

Como para valores de $y > 0$ a função f é positiva e para $-1 < y < 0$, f é negativa, segue-se que a solução y_3 é assintoticamente instável.

Como para $-1 < y < 0$ a função f é negativa e para $-2 < y < -1$, f é positiva, segue-se que a solução y_2 é assintoticamente estável.

Como para valores $-2 < y < -1$, f é positiva e para $y < -2$, f é negativa, segue-se que a solução y_1 é assintoticamente instável.

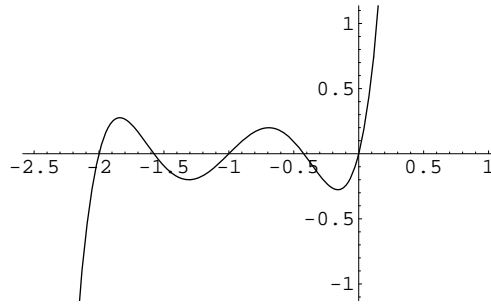


Figura 9: O gráfico de $f(y)f'(y) = y(y^2 + 3y + 2)(3y^2 + 6y + 2)$, o que nos dá a concavidade das soluções.

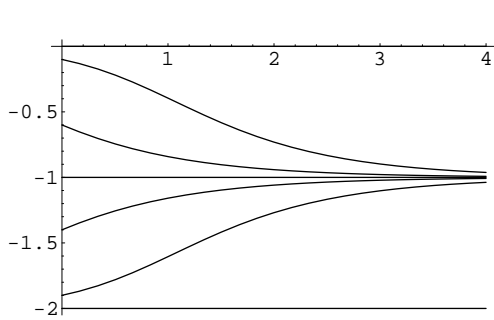


Figura 10: O gráfico de algumas soluções com $-2 < y_0 < 0$.

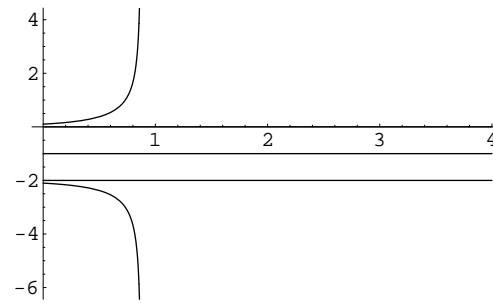


Figura 11: O gráfico de algumas soluções com $y_0 > 0$ e $y_0 < -2$, as quais divergem para um valor finito do tempo.

2.5 Teorema de Existência e Unicidade Geral

Problemas de valores iniciais do tipo (10) nem sempre tem uma única solução. Por exemplo, o problema de valor inicial

$$y' = y^{\frac{1}{3}}, \quad y(0) = 0, \quad (38)$$

além da solução nula, admite soluções da forma

$$\phi_c^\pm(x) \equiv \begin{cases} \pm[\frac{2}{3}(x - c)]^{\frac{3}{2}}, & \text{se } x > c \\ 0, & \text{se } x \leq c, \end{cases} \quad (39)$$

para cada $c > 0$. Isto mostra que o problema (38) tem infinitas soluções, veja Figura 12.

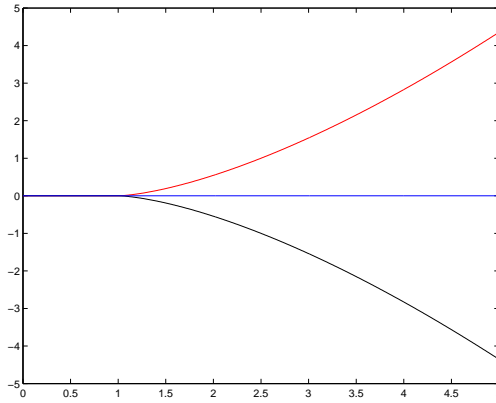


Figura 12: Os Gráficos da solução nula e das soluções $\phi_1^\pm(x)$.

Como nem sempre saberemos resolver equações do tipo (10), por isso é importante que tenhamos um teorema que nos diga a respeito de existência e unicidade de suas soluções e, se necessário, calculá-las numericamente.

A seguir iremos enunciar o Teorema de Existência e Unicidade para o problema de valor inicial (10), cuja demonstração foge do propósito deste curso e pode ser encontrada, por exemplo, na referência [1].

Teorema 2.2 *Suponha que $f(x, y)$ e sua derivada parcial $f_y(x, y)$ sejam contínuas no retângulo $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}$, contendo o ponto (x_o, y_o) . Então existe um intervalo aberto, I , da forma $I = (x_o - \delta, x_o + \delta) \subset (a, b)$, no qual existe uma e somente uma solução $y = \phi(t)$ do problema de valor inicial (10).*

2.6 Métodos Numéricos

A seguir introduziremos os métodos numéricos de Euler e de Euler melhorado para resolução numérica de equações diferenciais de primeira ordem.

Dada a equação diferencial

$$y' = f(x, y),$$

se a integramos de x_n a x_{n+1} , teremos

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(s, y(s)) ds,$$

onde a integral acima pode ser interpretada como a área sob o gráfico de $g(s) = f(s, y(s))$, com s entre x_n e x_{n+1} . Podemos aproximar esta pela área do retângulo de altura $f(x_n, y(x_n))$ e base $x_{n+1} - x_n$ e teremos a seguinte aproximação:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) \approx f(x_n, y(x_n))(x_{n+1} - x_n),$$

ou seja,

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + f(x_n, y(x_n))(x_{n+1} - x_n),$$

se fizermos $y_k = y(x_k)$ e tomarmos $x_{n+1} - x_n = h$, teremos o seguinte método numérico que nos permite calcular o y_{n+1} a partir de y_n :

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)h. \quad (40)$$

Nas aplicações, conhecemos o valor inicial $y_o = y(x_o)$ e se considerarmos incrementos iguais a h de forma que tenhamos $x_k = x_o + kh$, teremos o seguinte algoritmo numérico

$$\begin{aligned} y_o &= y(x_o), \\ y_{n+1} &= y_n + f(x_n, y_n)h, \end{aligned}$$

chamado de método de Euler.

Se fizermos a expansão de Taylor de $y(x_n + h)$ em torno de x_n , temos

$$\begin{aligned} y(x_n + h) &= y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2}h^2 + O(h^3) \\ &= y_n + f(x_n, y_n)h + \frac{f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)f(x_n, y_n)}{2}h^2 + O(h^3) \end{aligned} \quad (41)$$

se compararmos esta expressão com a aproximação de Euler dada em (40), concluímos ela concordam até primeira ordem em h , portanto, em cada passo temos um erro da ordem de h^2 .

Uma melhora no método consiste em aproximarmos a área sob o gráfico de $g(s) = f(s, y(s))$, com s entre x_n e x_{n+1} pela área do trapézio com vértices em $(x_n, 0)$, $(x_{n+1}, 0)$, $(x_n, f(x_n, y_n))$ e $(x_{n+1}, f(x_{n+1}, y_{n+1}))$. Ou seja,

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &\approx y(x_n) + \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))}{2} (x_{n+1} - x_n) \\ &\approx y(x_n) + \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y(x_n)) + f((x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n))}{2} (x_{n+1} - x_n), \end{aligned}$$

na segunda aproximação usamos o método de Euler e aproximamos $y(x_{n+1})$ por $y_n + f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n)$. Isto nos dá o seguinte método numérico

$$y_{n+1} = y_n + \frac{f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + f(x_n, y_n)h)}{2} h, \quad (42)$$

onde $y_o = y(x_o)$ e $x_n = x_o + nh$.

Se fizermos a expansão de Taylor em torno de $h = 0$ da expressão dada no lado direito de (42) (veja Exercício 2.6) e a compararmos com (41), concluiremos que elas concordam até segunda ordem em h , ou seja, no método numérico (42) temos um erro da ordem de h^3 em cada passo.

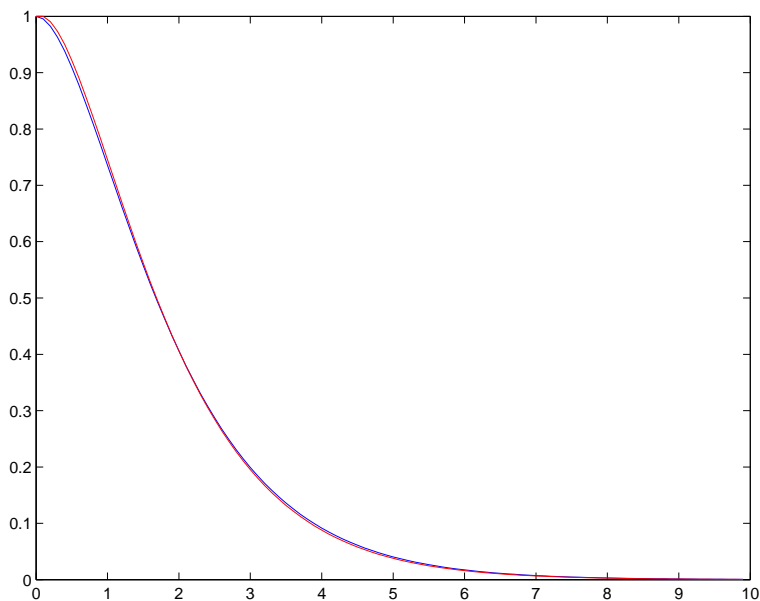


Figura 13: Os gráficos das soluções exata e aproximada do problema de valor inicial $y' + y = e^{-t}$, $y(0) = 1$. Usamos o método de Euler dado por (40), com $h = 0.1$.

Exercício 2.6 Mostre que

$$f(x_n + h, y_n + f(x_n, y_n)h) = f(x_n, y_n) + (f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)f(x_n, y_n))h + O(h^2).$$

Exercício 2.7 Usando os dois métodos numéricos descritos acima, encontre a solução do seguinte problema de valor inicial

$$y' = \ln(x^2 + y^2) + \text{sen } x, \quad y(1) = 1,$$

para x em $[1, 2]$, tomando-se o incremento na variável x , $h = 0.01$. Plotar o gráfico das duas soluções juntas.

2.7 Exercícios Adicionais

Série A

1. Em cada problema, achar a solução da equação diferencial e verificar se a resposta obtida satisfaz a mesma.

(a) $y' + 3y = x + e^{-2x}$.

(e) $y' - y = 2e^x$.

(b) $y' - 2y = x^2 e^{2x}$.

(f) $xy' + 2y = \operatorname{sen} x, \quad x > 0$.

(c) $y' + y = xe^{-x} + 1$.

(g) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

(d) $y' + \frac{y}{x} = 3 \cos 2x, \quad x > 0$.

(h) $(1 + x^2)y' + 4xy = (1 + x^2)^{-2}$.

2. Em cada item, achar a solução do problema de valor inicial e verificar se a resposta obtida o satisfaz.

(a) $y' - y = 2xe^{2x}, \quad y(0) = 1$.

(e) $y' - 2y = e^{2x}, \quad y(0) = 2$.

(b) $y' + 2y = xe^{-2x}, \quad y(1) = 0$.

(f) $xy' + 2y = \operatorname{sen} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

(c) $xy' + 2y = x^2 - x + 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad x > 0$.

(g) $x^3y' + 4x^2y = e^{-x}, \quad y(-1) = 0$.

(d) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos x}{x^2}, \quad y(\pi) = 0, \quad x > 0$.

(h) $xy' + (x+1)y = x, \quad y(\ln 2) = 1$.

Série B

Nos exercícios 1 – 5, encontre as soluções gerais das equações dadas.

1. $(1 - t^2)y' - 2ty = 1, t > 1.$
2. $ty' + 2y = \text{sen } t.$
3. $y' + tgy = t \text{sen } 2t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$
4. $y' = \cos^2(x) \cos^2(2y).$
5. $y' = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}.$

Nos exercícios 6 – 10, resolva os problemas de valores iniciais propostos e, na medida do possível, encontre os domínios das soluções obtidas.

6. $y' = \epsilon y - \sigma y^3, \quad y(0) = 1,$ onde ϵ e σ são constantes positivas.
7. $y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, \quad y(0) = 1.$
8. $y' = \frac{3x^2}{3y^2-4}, \quad y(1) = 0.$
9. $y(1 + x^3)y' - x^2 = 0, \quad y(0) = 1.$
10. $y' + (1 + 2x^{-1})y = x^3 e^{-x}, \quad y(1) = 2.$
11. Suponha que a população da Terra tem aumentado a uma taxa proporcional à população instantânea $P(t)$. A constante de proporcionalidade não é conhecida a princípio, mas sabe-se que no ano de 1650 a população era de 600 milhões e em 2000 era de 6 bilhões. Estima-se que a maior população que a Terra é capaz de sustentar seja de 30 bilhões de habitantes. Se a constante de proporcionalidade não se alterar, quando esse limite será atingido?
12. Uma substância se decompõe com uma taxa temporal proporcional à quantidade $Q(t)$ de substância. A princípio, não se conhece a constante de proporcionalidade, mas sabe-se que 100 gramas dessa substância se reduzem pela metade em 1 hora. Em quanto tempo 100 gramas se reduzem a 20 gramas?
13. Considere o problema de valor inicial $y' + \frac{2}{3}y = 1 - \frac{1}{2}t, \quad y(0) = y_0.$ Determine o valor de y_0 para o qual a solução toca, mas não cruza, o eixo t .

14. Seja $y = y_1(t)$ uma solução de

$$y' + p(t)y = 0,$$

e seja $y = y_2(t)$ uma solução de

$$y' + p(t)y = g(t).$$

Mostre que $y = y_1(t) + y_2(t)$ também é solução da segunda equação.

Nos exercícios de 16-18, são consideradas equações autônomas da forma $y' = f(y)$. Esboce o gráfico de f em função de y , determine os pontos de equilíbrios e os classifique.

15. $y' = ay + by^2$, $a > 0$, $b > 0$, $y_0 \geq 0$.

16. $y' = y(y - 1)(y - 2)$, $y_0 \geq 0$.

17. $y' = y(1 - y^2)$, $y_0 \geq 0$.

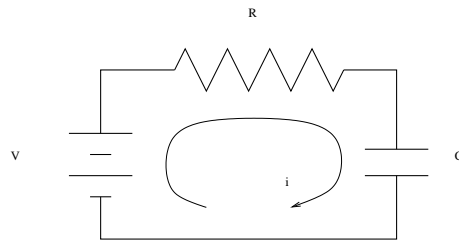
2.8 Trabalhos - Alguns Modelos Aplicados

Questão 1. Considere as situações listadas nos itens a seguir. Em todos os casos, determine a equação diferencial que rege o sistema em questão.

(a) Em um circuito elétrico, a corrente i é uma função do tempo. A resistência R , a capacitância C e a indutância L são constantes conhecidas. A tensão aplicada por uma bateria (E) é uma função do tempo. A carga total q é a taxa de variação da corrente i .

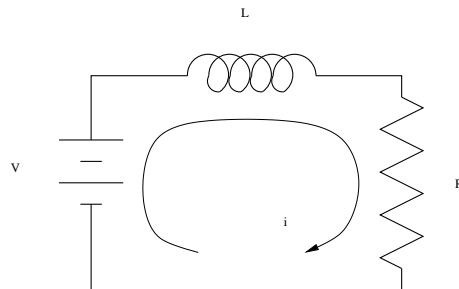
A Lei de Kirchhoff diz que *em um circuito fechado, a tensão aplicada é igual à soma das quedas de tensão no resto do circuito*. E as leis da eletricidade dizem que: a queda de tensão no resistor é Ri , a queda de tensão no capacitor é $\frac{q}{C}$ e a queda de tensão no indutor é $L \frac{di}{dt}$.

Um circuito elétrico é composto por uma bateria, um resistor e um capacitor ligados em série, conforme mostra a figura.



Modele o comportamento da corrente i para este circuito.

(b) Um circuito elétrico é composto por uma bateria, um resistor e um indutor ligados em série, como mostra a figura.



Modele o comportamento da corrente i para este circuito.

(c) Uma esfera de massa M cai verticalmente, sob aceleração da gravidade constante, com um movimento que é afetado pelo atrito com o ar. Supõe-se que a força de atrito do ar seja proporcional à velocidade da esfera. Deseja-se determinar a velocidade $v(t)$ e a posição $x(t)$ da esfera ao longo do tempo.

(d) Um corpo de massa M se move num plano horizontal, com velocidade inicial v_o , estando seu movimento sujeito a um atrito proporcional à sua velocidade em cada instante. Deseja-se descrever a velocidade $v(t)$ e a posição $x(t)$ do corpo em função do tempo.

(e) Um objeto metálico é inicialmente aquecido até a temperatura T_1 , sendo a seguir colocado em um ambiente que se encontra à temperatura T_2 , sendo mantido aí até entrar em equilíbrio térmico com esse ambiente. Deseja-se a descrição da temperatura do objeto em função do tempo, sabendo-se que a taxa de variação dessa temperatura em cada instante é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do ambiente.

(f) Uma colônia de bactérias encontra-se num meio de cultura em que os nutrientes são fornecidos constantemente, em quantidade constante por unidade de tempo. Evidentemente, há um número máximo de bactérias que pode existir na colônia ao mesmo tempo, limitado pela quantidade de nutrientes disponível. Enquanto existe um número de bactérias menor que esse máximo, a colônia cresce com uma taxa de crescimento que é proporcional à diferença entre o número atual de bactérias e o número máximo possível. Deseja-se descrever o número $n(t)$ de bactérias presentes a cada instante de tempo.

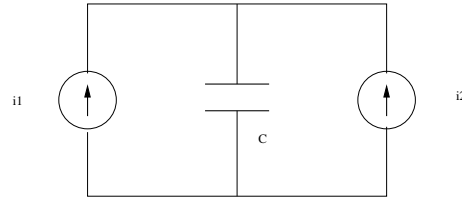
(g) Suponha que em um reservatório exista um volume V de água, que se mantém constante com o passar do tempo. A cada hora, entra no reservatório um volume v de água, que vem misturada com uma quantidade q de determinado reagente, sendo que no mesmo período o mesmo volume v de água é retirado do reservatório. Supondo que a concentração do reagente seja sempre homogênea no interior do reservatório, deseja-se saber a variação da quantidade $Q(t)$ de reagente presente no interior do reservatório.

(h) Em uma caixa está contida uma quantidade inicial Q_o de determinado material radioativo. Esse material sofre decaimento (ou seja, se transforma em um material não-radioativo) segundo uma taxa que é proporcional à quantidade presente em cada instante, sendo a constante de proporcionalidade igual a α . Deseja-se saber a expressão $Q(t)$ que representa a quantidade de material radioativo em cada instante.

(i) Certo país possui uma dívida externa de X bilhões de dólares. A cada mês esse país consegue pagar uma quantia fixa de p bilhões de dólares. A dívida, entretanto, é corrigida a cada mês, imediatamente antes do pagamento, segundo uma “taxa de juros” que significa um acréscimo de uma proporção q do total da dívida. Deseja-se a análise da variação ao longo do tempo da dívida $X(t)$, tanto para o caso em que o pagamento é menor que os juros da dívida, quanto para o caso

em que o pagamento é maior que os juros da dívida. (Observação: neste exercício deve-se assumir a aproximação de que o processo de atualização da dívida e de pagamento ocorra continuamente no tempo).

(j) O circuito da figura abaixo possui duas “fontes de corrente”, que fornecem as correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ a um capacitor C .



Suponha que a fonte de corrente i_1 funciona segundo uma estranha lei, pela qual a corrente fornecida é proporcional à carga existente no capacitor:

$$i_1(t) = \alpha q(t)$$

Estude o problema de modelar o comportamento da carga $q(t)$ para os casos em que a corrente $i_2(t)$ segue as leis:

$$i_2(t) = -\beta$$

e

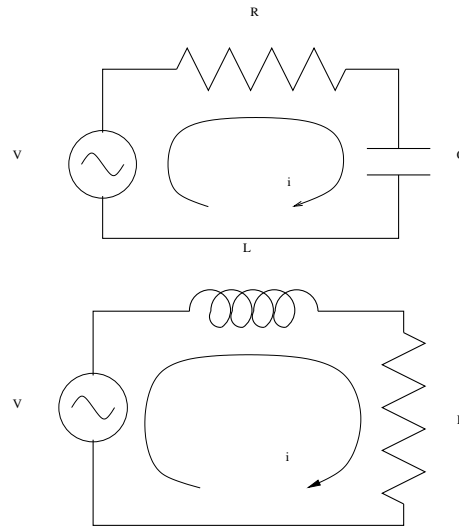
$$i_2(t) = -\beta q(t)$$

sendo α e β duas constantes positivas.

Questão 2.

- (a) Resolva as equações diferenciais associadas a cada item da questão 1.
- (b) Trace três gráficos que sirvam para representar (a menos do significado dos eixos) todas as situações estudadas. Associe cada situação a um dos gráficos. Tente interpretar as similaridades entre as diferentes situações que recaíram nos mesmos gráficos, e as diferenças entre as situações que recaíram em gráficos diferentes.
- (c) Estude o que são as características que diferenciam os casos (i) e (j) dos demais casos, na questão 1. Por quê esses casos são chamados “instáveis”? Tente explicar por quê na natureza dificilmente ocorrem situações descritas por esse tipo de modelo (note que os casos (i) e (j) tratam-se de sistemas artificiais).

Questão 3. Considere os circuitos elétricos das figuras abaixo, compostos por uma fonte de tensão senoidal, um resistor, e, conforme o caso, um capacitor ou um indutor ligados em série.



A tensão fornecida pela fonte, em ambos os circuitos, é dada pela expressão:

$$v_e(t) = A \sin(\omega t)$$

Adapte os modelos desenvolvidos na questão 1, itens (a) e (b), para responder às questões a seguir.

- (a) Encontre a expressão da tensão no resistor, $v_r(t)$, em função do tempo, para os dois circuitos.
- (b) A tensão medida sobre o resistor será oscilatória em ambos os casos. Considere a situação de *regime permanente*, ou seja, um tempo para o qual a contribuição da solução da equação homogênea para a solução da equação diferencial já tiver atingido um valor desprezível. Como será a expressão da tensão no *regime permanente*?
- (c) Estude qual será o efeito de fazer a frequência ω assumir valores muito grandes ou muito pequenos, sobre a amplitude da oscilação apresentada pela tensão no *regime permanente*. Discuta por quê esse comportamento justifica o fato de um dos circuitos ser chamado de *filtro passa-altas* e o outro ser chamado de *filtro passa-baixas*. (Observação: esses são, de fato, os filtros mais simples que são empregados em circuitos eletrônicos).

Questão 4. Um termômetro registra a variação da temperatura de um objeto que foi deixado num

ambiente. Ao longo do dia, a temperatura do ambiente $\theta(t)$ varia de maneira aproximadamente senoidal, ao redor de uma temperatura média θ_0 , sendo a expressão da temperatura do ambiente dada por:

$$\theta(t) = \theta_0 + \alpha \text{sen}(\omega t)$$

Considere a situação de *regime permanente*, para a qual a contribuição dos termos associados à solução da equação homogênea for muito pequena, em relação à solução da equação. Tente definir, para tal situação, um método para determinação da temperatura do ambiente, a partir da temperatura medida no objeto, utilizando uma adaptação do modelo de equação diferencial desenvolvido na questão 1, letra (e). Ou seja: sabendo que a temperatura do ambiente varia de forma senoidal¹, mas sem ter acesso diretamente à expressão da senóide, deseja-se descobrir tal expressão a partir da leitura feita no termômetro.

¹Chamamos de *senóide* uma função resultante da soma de uma função seno e uma função cosseno de mesma frequência.

3 Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem

3.1 A Estrutura do Espaço Solução da Equação Homogênea

Uma equação linear de segunda ordem mais geral é da seguinte forma

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = g(x), \quad (43)$$

onde as funções $p(x)$, $q(x)$ e $g(x)$ serão assumidas contínuas num intervalo aberto I . A **equação homogênea** associada é

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0. \quad (44)$$

Exercício 3.1 *Sejam y_1 e y_2 duas soluções de (44). Mostre que para quaisquer constantes c_1 e c_2 , $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ também é solução de (44).*

Solução. Note que em vista da linearidade da derivação podemos escrever

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= (c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + p(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + q(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1 (y_1'' + p y_1' + q y_1) + c_2 (y_2'' + p y_2' + q y_2) \\ &= c_1 0 + c_2 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usamos o fato que y_1 e y_2 são soluções da equação (44). ■

O Exercício 3.1 nos leva a concluir que o conjunto solução da equação homogênea (44) é um **espaço vetorial**.

Teorema 3.1 (*Existência e Unicidade*) *Sejam $p(x)$, $g(x)$ e $q(x)$ funções contínuas no intervalo aberto I contendo o ponto x_o . Então o problema de valor inicial*

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = g(x), \quad y(x_o) = y_o, \quad y'(x_o) = y'_o, \quad (45)$$

possui uma e somente uma solução e o seu domínio é pelo menos o intervalo I .

A unicidade no teorema acima segue do Lemma 3.1, abaixo. A existência não será provada neste caso geral, mas no exemplos que consideraremos encontraremos explicitamente uma solução para os problemas de valores iniciais considerados.

Lema 3.1 *Mostre que se y é uma solução do problema de valor inicial*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \quad (46)$$

em I , então $y(x)$ é identicamente nula neste intervalo.

Prova. Se fizermos $y' = w$, então o problema de valor inicial (46) é equivalente a

$$\begin{aligned} y' &= w \\ w' &= -pw - qy, \end{aligned}$$

com condições iniciais $y(x_0) = 0$ e $w(x_0) = 0$. Integrando as equações acima de x_0 a x , temos

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{x_0}^x w(s) ds \\ w(x) &= - \int_{x_0}^x p(s)w(s) ds - \int_{x_0}^x q(s)y(s) ds. \end{aligned}$$

Tomando-se os módulos das equações acima e usando a desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq \int_{x_0}^x |w(s)| ds \\ |w(x)| &\leq \int_{x_0}^x |p(s)| |w(s)| ds + \int_{x_0}^x |q(s)| |y(s)| ds. \end{aligned}$$

Como p e q são contínuas em I , dado qualquer intervalo fechado $[a, b] \subset I$ contendo x_0 , existe uma constante positiva K tal que $|p(x)|, |q(x)| \leq K$ para todo x em $[a, b]$. Portanto, temos

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq \int_{x_0}^x |w(s)| ds \\ |w(x)| &\leq K \int_{x_0}^x |w(s)| ds + K \int_{x_0}^x |y(s)| ds. \end{aligned}$$

Somando-se as desigualdades acima obtemos

$$|y(x)| + |w(x)| \leq (1 + K) \int_{x_0}^x (|y(s)| + |w(s)|) ds.$$

Fazendo $u(x) = |y(x)| + |w(x)|$, temos

$$u(x) \leq (1 + K) \int_{x_0}^x u(s) ds \equiv U(x).$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, U é diferenciável e

$$U'(x) = (1 + K)u(x) \leq (1 + K)U(x).$$

Portanto, $U'(x) - (1 + K)U(x) \leq 0$. Multiplicando esta equação por $e^{-(1+K)x}$, concluímos que $(U(x)e^{-(1+K)x})' \leq 0$, integrando esta desigualdade de x_o a x e lembrando que $U(x_o) = 0$, temos $U(x)e^{-(1+K)x} \leq U(x_o)e^{-(1+K)x_o} = 0$, ou seja, $U(x) \leq 0$ para todo x em $[a, b]$, como $u(x) \leq U(x)$, segue-se que $u(x) \leq 0$, portanto, $u(x) = 0$, pois, por definição $u(x) \geq 0$. Em particular, como $0 \leq |y(x)| \leq |u(x)|$, também temos que $y(x) = 0$ para todo x em $[a, b]$. Como a, b foram tomados arbitrariamente, segue-se que $y(x) = 0$ em I . ■

Exercício 3.2 *O problema de valor inicial*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), y(x_o) = y_o, y'(x_o) = y'_o, \quad (47)$$

tem no máximo uma solução em I .

Prova. Se tivéssemos duas soluções y_1 e y_2 do problema acima em I , então $y = y_1 - y_2$ seria solução do problema de valor inicial (46), portanto, y seria identicamente nula em I , ou seja, devemos ter $y_1(x) = y_2(x)$ para todo x . ■

Suponha que tenhamos duas soluções y_1 e y_2 da equação diferencial homogênea (44). Vimos que a combinação linear delas também é solução de (44). Quando é que podemos garantir que toda solução do problema de valor inicial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, y(x_o), y'(x_o) = y'_o,$$

pode ser escrita como

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2?$$

Se $W(y_1, y_2)(x_o) \equiv y_1(x_o)y_2'(x_o) - y_1'(x_o)y_2(x_o) \neq 0$, a resposta é afirmativa, pois, sendo $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ sendo solução da equação (44) para qualquer escolha das constantes c_1 e c_2 , resta-nos mostrar que podemos encontrar c_1 e c_2 , de forma a satisfazer as condições iniciais, isto é

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_o) + c_2 y_2(x_o) &= y_o \\ c_1 y_1'(x_o) + c_2 y_2'(x_o) &= y'_o, \end{aligned}$$

o que é verdade se $W(y_1, y_2)(x_o) \neq 0$ e a solução do sistema acima é

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{y_o y_2'(x_o) - y'_o y_2(x_o)}{W(y_1, y_2)(x_o)} \\ c_2 &= \frac{y'_o y_1(x_o) - y_o y_1'(x_o)}{W(y_1, y_2)(x_o)}. \end{aligned}$$

Pela unicidade, segue-se que $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ com c_1 e c_2 dados acima é a única solução do problema de valor inicial.

Definição 3.1 Dadas duas funções f e g diferenciáveis, a função $W(f, g)(x) \equiv f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$ é chamada de **Wronskiano** de f e g no ponto x .

Teorema 3.2 (Abel) Se y_1 e y_2 são duas soluções de (44) em I , então,

$$W(y_1, y_2)(t) = ce^{-\int p(t)dt}, \quad (48)$$

onde c é uma constante determinada a partir de y_1 e y_2 . Logo, ou $W(y_1, y_2)(t) \equiv 0$ em I ou $W(y_1, y_2)(t)$ nunca se anula em I .

Prova. Como y_1 e y_2 são duas soluções de (44) em I , então,

$$y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t) = 0 \quad (49)$$

$$y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t) = 0. \quad (50)$$

Multiplicando (49) por $y_2(t)$ e subtraindo o resultado de (50) multiplicada por $y_1(t)$, temos a seguinte equação diferencial para $W(t)$

$$W' + p(t)W = 0,$$

cuja solução é (48). ■

O Teorema de Abel mostra que se y_1 e y_2 forem duas soluções de (44) (as quais pelo Teorema e Existência e Unicidade necessariamente estarão definidas em I) tais que $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ em I , então qualquer solução de (44) será uma combinação linear de y_1 e y_2 , ou seja, estas duas **geram** o espaço vetorial formado pelas soluções desta equação.

Definição 3.2 Dizemos que duas funções f e g são **linearmente dependentes** (*l.d*) em I , se a equação

$$k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0, \quad t \in I, \quad (51)$$

admite solução não trivial, ou seja, pelo menos uma das constantes k_1 ou k_2 for diferente de zero. Se a única solução da equação acima for a trivial $k_1 = 0 = k_2$, dizemos que as duas funções são **linearmente independentes** (*l.i*) em I .

Note que duas funções são linearmente dependentes num intervalo I , se e somente se, uma for um múltiplo escalar da outra em todo o intervalo I .

Teorema 3.3 *Se f e g forem duas funções diferenciáveis quaisquer em I e $W(f, g)(t_o) \neq 0$ para algum t_o em I , então, f e g são linearmente independentes em I . Além disso, se f e g forem l.d em I , então, $W(f, g)(t) \equiv 0$ em I .*

Prova. Considere a equação

$$k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0, \quad t \in I. \quad (52)$$

Tomando a derivada de (52) em relação à t , temos

$$k_1 f'(t) + k_2 g'(t) = 0, \quad t \in I. \quad (53)$$

Como as equações (52) e (53) valem para todo $t \in I$, em particular elas valem em t_o e teremos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} k_1 f(t_o) + k_2 g(t_o) &= 0 \\ k_1 f'(t_o) + k_2 g'(t_o) &= 0 \end{aligned}$$

o qual só admite a solução trivial, pois, por hipótese, $W(f, g)(t_o) \neq 0$. ■

Em vista dos resultados acima, se y_1 e y_2 forem duas soluções de (44), tais que $W(y_1, y_2)$ não se anule em I , então, elas geram o conjunto solução de (44) e são linearmente independentes, ou seja, elas formam uma **base** para o mesmo. Em particular, se tomarmos y_1 e y_2 como as soluções de (44), satisfazendo as condições iniciais $y_1(x_o) = 1$ e $y_1'(x_o) = 0$, $y_2(x_o) = 0$ e $y_2'(x_o) = 1$, cujas existências são asseguradas pelo Teorema de Existência e Unicidade. Então, $W(y_1(x_o), y_2(x_o)) = 1 \neq 0$, logo, elas formam uma base para o espaço solução da equação homogêna (44), o que mostra que o seu espaço solução tem dimensão dois.

Resumindo: Se y_1 e y_2 forem duas soluções de (44), tais que $W(y_1, y_2)$ não se anule em I , então toda solução desta equação é da forma

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

e dizemos que esta é a **solução geral** de (44).

3.2 Equações com Coeficientes Constantes

O nosso objetivo é encontrar duas soluções linearmente independentes da equação com coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (54)$$

com isso descrevermos o conjunto solução da mesma.

Tentaremos uma solução da forma

$$y = e^{\lambda t}, \quad (55)$$

onde λ é uma constante a ser determinada.

Substituindo (55) em (54), conclui-se que λ deve satisfazer à seguinte equação do segundo grau

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad (56)$$

chamada de **equação característica** de (54). Temos que considerar três casos possíveis:

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$, neste caso temos duas raízes reais distintas

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

o que nos dá duas soluções distintas $y_1 = e^{\lambda_1 t}$ e $y_2 = e^{\lambda_2 t}$.

Exercício 3.3 *Mostre que $W(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}) = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \neq 0$.*

Segue-se do Exercício 3.3 que a solução geral de (44) é

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (57)$$

Exemplo 3.1 *Resolva o seguinte problema de valor inicial*

$$y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \quad (58)$$

Solução. Note que a equação característica de (58) é $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$. Assim, a solução geral será

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}.$$

Queremos que $1 = y(0) = c_1 + c_2$ e $1 = y'(0) = -c_1 + 2c_2$, portanto, $c_1 = \frac{1}{3}$ e $c_2 = \frac{2}{3}$. Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t},$$

cuj gráfico é mostrado na Figura 14.

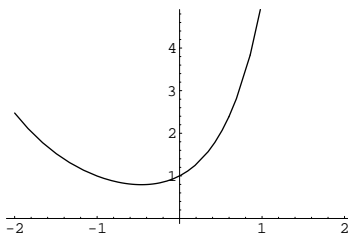


Figura 14: Gráfico de $y = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t}$.

(II) $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, neste caso temos duas raízes reais iguais

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a},$$

e o método acima nos dá uma solução $y_1 = e^{-b/2a t}$.

Como encontrar uma segunda solução y_2 tal que y_1 e y_2 sejam l.i.?

Tentaremos encontrar uma segunda solução da forma

$$y = uy_1 = ue^{-\frac{b}{2a}t}, \quad (59)$$

onde a função u será determinada.

De (59), temos

$$y' = \left(u' - \frac{b}{2a}u\right) e^{-\frac{b}{2a}t} \quad (60)$$

$$y'' = \left(u'' - \frac{b}{a}u' + \frac{b^2}{4a^2}u\right) e^{-\frac{b}{2a}t}. \quad (61)$$

Substituindo (59), (60) e (61) em (54) e lembrando-se que $b^2 - 4ac = 0$, obtemos

$$u''(t) = 0 \implies u' = k_1 \implies u = k_1 t + k_2,$$

onde k_1 e k_2 são constantes arbitrárias. Levando em conta a estrutura da solução geral da equação homogênea, podemos fazer $k_1 = 1$ e $k_2 = 0$ e teremos $u(t) = t$. Portanto, uma segunda solução de (54) é $y_2(t) = te^{-\frac{b}{2a}t}$.

Exercício 3.4 Mostre $W(e^{-b/2a t}, te^{-b/2a t}) = e^{-\frac{b}{a}t} \neq 0$.

Portanto, do Exercício 3.4, segue-se que a solução geral será

$$y = (c_1 + c_2 t) e^{-b/2a t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.2 Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \quad (62)$$

Solução. Note que a equação característica de (62) é $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Assim a solução geral será

$$y = e^{-t} (c_1 + c_2 t).$$

Queremos que $1 = y(0) = c_1$ e $-1 = y'(0) = c_1 + c_2$, portanto, $c_1 = 1$ e $c_2 = -2$. Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$y = e^{-t} (1 - 2t),$$

cujo gráfico é mostrado na Figura 15.

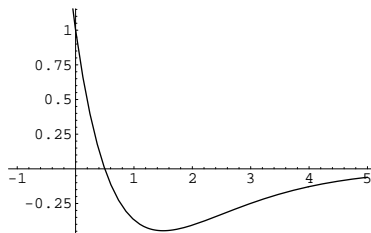


Figura 15: Gráfico de $y = e^{-t} (1 - 2t)$.

(III) $\Delta < 0$, neste caso temos duas raízes complexas distintas $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ onde $\alpha = -\frac{b}{2a}$ e $\beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} \neq 0$.

Como

$$e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t)$$

$$e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \operatorname{sen} \beta t)$$

são soluções de (54), então, pelo Exercício 3.1,

$$\frac{e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}}{2} = e^{\alpha t} \cos \beta t$$

e

$$\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{2i} = e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t,$$

também serão soluções de (54), com a vantagem delas serem funções reais.

Exercício 3.5 *Mostre que $W(e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t) = \beta e^{2\alpha t} \neq 0$.*

Do Exercício 3.5, segue-se que a solução geral de (54) é

$$y = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \operatorname{sen} \beta t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (63)$$

Exercício 3.6 *Na literatura de Física é comum escrever a solução geral no caso em que $\Delta < 0$, como*

$$y = Ae^{\alpha t} \cos(\beta t - \delta), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (64)$$

Mostre que temos as seguintes relações: $c_1 = A \cos \delta$ e $c_2 = A \operatorname{sen} \delta$. Ou ainda, $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e $\delta = \arctan(c_2/c_1)$. Portanto, (63) e (64) são equivalentes.

Exemplo 3.3 *Resolva o seguinte problema de valor inicial*

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \quad (65)$$

Solução. Note que a equação característica de (65) é $\lambda^2 + 4 = 0$, cujas raízes são $\lambda = \pm 2i$, logo, $\alpha = 0$ e $\beta = 2$. Assim a solução geral será

$$y = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t.$$

Queremos que $0 = y(0) = c_1$ e $1 = y'(0) = 2c_2$, portanto, $c_1 = 0$ e $c_2 = \frac{1}{2}$. Logo a solução do problema de valor inicial é $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t$.

Exemplo 3.4 *Resolva o seguinte problema de valor inicial*

$$y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (66)$$

Solução. Note que a equação característica de (66) é $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$, cujas raízes são $\lambda = -2 \pm i$, logo, $\alpha = -2$ e $\beta = 1$. Assim a solução geral será

$$y = e^{-2t} (c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t).$$

Queremos que $1 = y(0) = c_1$ e $0 = y'(0) = -2c_1 + c_2$, portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = e^{-2t} (\cos t + 2 \operatorname{sen} t),$$

cujo gráfico é mostrado na Figura 16.

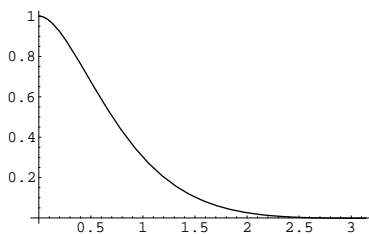


Figura 16: Gráfico de $y = e^{-2t} (\cos t + 2 \operatorname{sen} t)$.

3.3 As Equações de Euler

As equações de Euler são equações da seguinte forma

$$\alpha x^2 y'' + \beta xy' + \gamma y = 0, \quad (67)$$

onde α , β e γ são constantes ($\alpha \neq 0$).

Fazendo uma mudança na variável independente,

$$x = e^t \quad \text{ou} \quad t = \ln x, \quad (68)$$

segue-se da Regra da Cadeia que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{x} = \frac{dy}{dt} e^{-t} \quad (69)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} e^{-t} \right) \frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} e^{-t} - \frac{dy}{dt} e^{-t} \right) e^{-t} = e^{-2t} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right), \quad (70)$$

substituindo (69) e (70) em (67), temos a seguinte equação com coeficientes constantes

$$\alpha \frac{d^2y}{dt^2} + (\beta - \alpha) \frac{dy}{dt} + \gamma y = 0, \quad (71)$$

que já vimos como resolver.

Uma vez encontrada a solução $y = \phi(t)$ de (71), a solução desejada será $\phi(\ln x)$.

Exemplo 3.5 *Encontre a solução geral da equação*

$$x^2 y'' + xy' + y = 0, \quad x > 0. \quad (72)$$

Solução. Neste caso, $\alpha = \beta = \gamma = 1$, portanto, após a mudança de variáveis $t = e^x$, a equação acima é transformada em

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0,$$

cujas soluções gerais são $y = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, logo, a solução geral da equação (72) é

$$y = c_1 \cos \ln x + c_2 \sin \ln x.$$

■

Se quisermos, por exemplo, a solução que satisfaça à condição $y(1) = 1 = y'(1)$, devemos tomar $c_1 = c_2 = 1$, ou seja,

$$y = \cos \ln x + \sin \ln x,$$

definida para todo x real. O seu gráfico é mostrado na Figura 17.

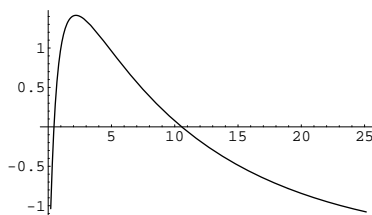


Figura 17: Gráfico de $y = \cos \ln x + \sin \ln x$.

3.4 Equações Não-Homogêneas e a Estrutura do seu Conjunto Solução

O exercício abaixo nos dá a estrutura da solução geral de uma equação linear não-homogênea de segunda ordem e sua demonstração ficará a cargo do leitor.

Exercício 3.7 *Mostre que se y e Y_p são duas soluções quaisquer da equação*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \tag{73}$$

então, a diferença $y - Y_p$ é solução da equação homogênea associada

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{74}$$

Portanto, se y_1 e y_2 forem duas soluções l.i de (74), então, $y - Y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2$, ou seja,

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + Y_p. \quad (75)$$

Do Exercício 3.7, segue-se que conhecendo-se uma solução particular, Y_p , de (73) e a solução geral da equação homogênea (74), então, toda solução de (73) é dada por (75), ou seja, a solução geral de (73) é dada por (75).

Exemplo 3.6 Sabendo-se que $Y_p = 1$ é uma solução

$$y'' + y = 1, \quad (76)$$

encontre a solução geral da mesma.

Solução. Vimos que solução geral da equação homogênea associada a (76) é $c_1 \cos t + c_2 \sin t$, logo, a solução geral de (76) é

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 1.$$

3.5 O Método dos Coeficientes a Determinar

Uma classe importante de equações não-homogêneas é da forma

$$ay'' + by' + cy = g(t), \quad (77)$$

onde

$$g(t) = e^{\alpha t} Q_n(t) \cos(\beta t) \quad \text{ou} \quad g(t) = e^{\alpha t} Q_n(t) \sin(\beta t), \quad (78)$$

onde $Q_n(t)$ é um polinômio de grau n .

Para equação desta forma, a equação homogênea associada tem coeficientes constantes, portanto, sabemos como resolvê-la. Resta-nos encontrar uma solução particular de (77), o que será descrito a seguir.

O **método dos coeficientes a determinar** nos permite encontrar uma solução particular, Y_p , de uma equação não-homogênea do tipo (77) com $g(t)$ dado por (78) e tem a vantagem de ser puramente algébrico.

Este método dá a seguinte forma para uma solução particular

$$Y_p = t^s e^{\alpha t} \left((A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + \dots + A_n) \cos(\beta t) + (B_0 t^n + B_1 t^{n-1} + \dots + B_n) \operatorname{sen}(\beta t) \right) \quad (79)$$

onde $s = 0, 1$ ou 2 é o número de vezes que $\alpha + i\beta$ é raiz da equação característica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, da equação homogênea associada a (77). As constantes α e β são aquelas que aparecem na definição de $g(t)$ dada por (78). Sempre que não aparecer o fator exponencial, α será 0 e sempre que não aparecer o fator envolvendo o seno ou o cosseno, β será 0 . Note que se $\alpha + i\beta$ for uma raiz da equação característica e $\beta \neq 0$, então, s será 1 , visto que se $\alpha + i\beta$ for raiz da equação característica $\alpha - i\beta$ também será; pois, estamos assumindo que as constantes a , b e c são reais.

Exercício 3.8 *Mostre que uma solução particular de*

$$ay'' + by' + cy = e^{\alpha x} \cos(\beta x) Q_n(x), \quad (80)$$

onde $Q_n(x)$ é um polinômio de grau n com coeficientes reais é aquela dada por (79).

Prova. Note que $e^{\alpha x} \cos(\beta x) P_n(x) = g_1(x) + \overline{g_1(x)}$, onde $g_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} P_n(x)/2$. Logo, pelo princípio da superposição, $y = y_1 + y_2$, onde y_1 e y_2 são soluções particulares de $ay'' + by' + cy = g(x)$, onde $g(x) = g_1$ e $g(x) = \overline{g_1(x)}$, respectivamente. Como os coeficientes do polinômio Q_n , a , b e c são reais, se $y_1(x)$ for uma solução de $ay'' + by' + cy = g_1(x)$, então, $y = \overline{y_1}$ será solução de $ay'' + by' + cy = \overline{g_1(x)}$, assim, tomaremos $y_2(x) = \overline{y_1(x)}$, portanto $y = 2\operatorname{Re}(y_1)$. Por isso, o nosso problema se reduz ao estudo de uma solução particular de

$$ay'' + by' + cy = e^{(\alpha+i\beta)x} Q_n(x)/2. \quad (81)$$

Vamos tentar uma solução da forma $y = e^{(\alpha+i\beta)x} u(x)$, onde u é uma função desconhecida. Ao substituirmos y na equação acima, temos

$$au'' + (2a(\alpha + i\beta) + b)u' + (a(\alpha + i\beta)^2 + b(\alpha + i\beta) + c)u = Q_n(x)/2. \quad (82)$$

Vamos considerar três casos:

- $a(\alpha+i\beta)^2 + b(\alpha+i\beta) + c \neq 0$, ou seja, $\alpha+i\beta$ não é raiz da equação característica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Neste caso podemos tomar $u = Ax^n + \dots + A_1x + A_0$ como uma solução particular de (82), visto que ambos os lados desta equação serão polinômios de graus n . Resolvendo um sistema de $n + 1$ equações encontramos A_0, A_1, \dots, A_n . Se tomarmos o grau de $u(x)$ maior do que n , encontraremos que os coeficientes das potências maiores do que n todos iguais a zero.

- $a(\alpha + i\beta)^2 + b(\alpha + i\beta) + c = 0$ e $2a(\alpha + i\beta) + b \neq 0$, ou seja, $\alpha + i\beta$ é raiz simples da equação característica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Neste caso, como o termo em u não está presente em (82), podemos tomar $u = P_{n+1}(x)$, ou seja um polinômio de grau $n + 1$ e ambos os lados desta equação será um polinômio de grau n . Por causa das derivadas que aparecem nesta equação, o termo constante de u não aparecerá no lado esquerdo de (82), portanto, não poderá ser determinado. Mas isto não é problema pois constantes são solução da equação homogênea $au'' + (2a(\alpha + i\beta) + b)u' = 0$ e por causa da estrutura da solução geral da equação não-homogênea, podemos fazer o termo constante de u igual a zero. Logo, $p_{n+1}(x)$ será um polinômio de grau $n + 1$ que não tem o termo constante, ou seja, $u(x) = xP_n(x)$, onde $P_n(x)$ é um polinômio de grau n .
- $a(\alpha + i\beta)^2 + b(\alpha + i\beta) + c = 0$ e $2a(\alpha + i\beta) + b = 0$, ou seja, $\alpha + i\beta$ é raiz dupla da equação característica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Neste caso, tomaremos $u(x) = P_{n+2}(x)$, um polinômio de grau $n + 2$. Com isso, ambos os lados de (82) serão polinômios de graus n . É claro que o termo constante e o coeficiente de do termo linear de $P_{n+2}(x)$ ficarão indeterminados, pois eles não aparecerão no lado esquerdo de (82). Novamente, poderemos fazê-los nulos, visto que neste caso a equação homogênea associada a (82) se reduz a $ay'' = 0$, cuja solução geral é da forma $c_1x + c_2$ e não estaríamos perdendo nada. Logo, $u(x) = x^2P_n(x)$, onde $P_n(x)$ é um polinômio de grau n .

Portanto uma solução de (81) é

$$y_1 = x^s e^{(\alpha+i\beta)x} P_n(x) = x^s e^{\alpha x} ((\cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x))(\operatorname{Re}(P_n(x) + i \operatorname{Im}(P_n(x))))),$$

Logo, uma solução particular de (80) é

$$y = 2\operatorname{Re}(y_1) = x^s e^{\alpha x} (2 \operatorname{Re}(P_n(x)) \cos(\beta x) - 2 \operatorname{Im}(P_n(x)) \operatorname{sen}(\beta x)).$$

Como $\operatorname{Re}(P_n(x))$ e $\operatorname{Im}(P_n(x))$ são polinômios de graus n com coeficientes reais na variável, x , concluímos a nossa demonstração. ■

Exemplo 3.7 *Encontre uma solução particular de*

$$y'' + y = 1. \tag{83}$$

Solução. A equação acima tem como equação característica, $\lambda^2 + 1 = 0$, cujas raízes são $\lambda = 0 \pm i$. Note que $g(t) = 1$, portanto, $\alpha = 0 = \beta$ e $n = 0$, logo, $\alpha + i\beta = 0$ não é raiz da equação

característica, logo, $s = 0$. Neste caso

$$Y_p = A,$$

logo,

$$Y_p'' = 0,$$

substituindo estes valores em (83), temos, $A = 1$, portanto, $Y_p = 1$. ■

Exemplo 3.8 *Encontre uma solução particular de*

$$y'' + y = \operatorname{sen} t. \quad (84)$$

Solução. Note que neste caso $g(t) = \operatorname{sen} t$, portanto, $n = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, logo, $\alpha + i\beta = i$, como as raízes da equação característica $\lambda^2 + 1 = 0$ são $\pm i$, disso concluímos que $s = 1$ e

$$Y_p = t(A \operatorname{sen} t + B \operatorname{cos} t), \quad (85)$$

portanto,

$$Y_p'' = 2A \operatorname{cos} t - 2B \operatorname{sen} t - At \operatorname{sen} t - Bt \operatorname{cos} t \quad (86)$$

Substituindo (85) e (86) em (84), temos

$$2A \operatorname{cos} t - 2B \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} t,$$

logo, $2A = 0$ e $-2B = 1$, portanto, $A = 0$ e $B = -\frac{1}{2}$. Disso concluímos que

$$Y_p = -\frac{t}{2} \operatorname{cos} t. \quad \blacksquare$$

Exercício 3.9 (*Princípio da Superposição.*) *Mostre que se Y_i for uma solução particular de*

$$y'' + p y' + q y = g_i \quad i = 1, \dots, n, \quad (87)$$

então, $Y = Y_1 + \dots, Y_n$ é uma solução particular de

$$y'' + p y' + q y = g_1 + \dots + g_n. \quad (88)$$

Exemplo 3.9 *Encontre a solução geral da seguinte equação*

$$y'' + y = 1 + \operatorname{sen} t.$$

Solução. Vimos que 1 é uma solução particular de $y'' + y = 1$ e que $-\frac{t}{2} \cos t$ é uma solução particular de $y'' + y = \operatorname{sen} t$, logo,

$$Y_p = 1 - \frac{t}{2} \cos t$$

será uma solução particular de $y'' + y = 1 + \operatorname{sen} t$; portanto, a solução geral desta será

$$y = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + 1 - \frac{t}{2} \cos t.$$

Exemplo 3.10 *Determine a forma adequada de uma solução particular de*

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-t} + 2e^{-t} \cos t + 4e^{-t}t^2 \operatorname{sen} t,$$

Solução. Pelo Princípio da Superposição, a solução particular será da forma $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$ onde Y_i são soluções particulares de

$$y'' + 2y' + 2y = g_i,$$

onde $g_1 = 3e^{-t}$, $g_2 = 2e^{-t} \cos t$ e $g_3 = 4e^{-t}t^2 \operatorname{sen} t$. Portanto, pelo método dos coeficientes a determinar, temos

$$Y_1 = Ae^{-t},$$

$$Y_2 = te^{-t}(B \cos t + C \operatorname{sen} t) e$$

$$Y_3 = te^{-t}((D + Et + Ft^2) \cos t + (G + Ht + It^2) \operatorname{sen} t).$$

Exercício 3.10 *Encontre os coeficientes A, B, C, D, E, F, G, H e I , do exemplo anterior.*

3.6 Aplicações

As equações lineares com coeficientes constantes modelam matematicamente importantes fenômenos físicos, nos restringiremos a aplicações em vibrações mecânicas e oscilações elétricas.

3.6.1 Vibrações Mecânicas

A modelagem matemática das vibrações mecânicas resulta da Segunda Lei de Newton.

Imagine uma mola esteja com uma das suas extremidades presa verticalmente a um suporte e a outra acoplada a um corpo de massa m . Se liberarmos a mola lentamente até ela atingir o seu alongamento máximo, L , devido ao peso, mg , do corpo, ela ficará em repouso nesta posição: a força elástica da mola, F_e , e o peso se equilibram, ou seja,

$$F_e + mg = 0. \quad (89)$$

Dentro de um certo limite (pequenas deformações), segue-se da Lei de Hooke que a **força elástica** F_e é **proporcional à deformação da mola** e como esta é uma força que se opõe ao movimento, temos

$$F_e = -kL, \quad (90)$$

onde constante de proporcionalidade, $k > 0$, é chamada de constante elástica da mola. Portanto, de (89) e (90), temos

$$k = \frac{mg}{L}.$$

A nossa posição de referência será aquela em que a mola está equilibrada pelo seu peso, ou seja, está distendida de L e a tomaremos como $y = 0$. Imagine que afastemos o corpo de y_o desta posição e que o soltemos com uma velocidade inicial y'_o . Neste caso, em cada instante a mola estará alongada de $y(t) + L$, portanto a força elástica será

$$F_e = -k(y + L) = -ky - mg, \quad (91)$$

a velocidade será $(y + L)' = y'$ e a aceleração será $(y + L)'' = y''$.

Assumindo que a força de atrito, F_a , do meio no qual o corpo se mova seja proporcional à velocidade, $y'(t)$, do mesmo, como ela se opõe ao movimento, temos

$$F_a = -\gamma y', \quad (92)$$

onde a constante de proporcionalidade, γ , é chamada de coeficiente de atrito e é positiva. Podemos considerar um meio sem atrito como sendo aquele em que $\gamma = 0$.

Supondo que além das forças elástica e de atrito haja uma força externa, $g(t)$, da Segunda Lei de Newton, de (91) e (92), temos

$$my'' = mg + F_e + F_a + g(t) = -ky - \gamma y' + g(t), \quad (93)$$

o que nos leva ao seguinte problema de valor inicial

$$my'' + ky + \gamma y' = g(t), \quad y(0) = y_o, \quad y'(0) = y'_o. \quad (94)$$

Dizemos que **um movimento é livre** quando não há força externa atuando no corpo, ou seja, $g(t) \equiv 0$. Se $\gamma = 0$, dizemos que o **movimento é não-amortecido**.

I - Nas vibrações livres não-amortecidas, também chamado de movimento harmônico simples, temos

$$my'' + ky = 0 \quad \text{ou} \quad y'' + \omega_o^2 y = 0, \quad (95)$$

onde

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

é chamada de **frequência natural** do movimento.

Vimos que a solução geral de (95) é da forma

$$y = c_1 \cos \omega_o t + c_2 \sen \omega_o t,$$

que também pode ser escrita como $y = R \cos(\omega_o t - \delta)$, onde $c_1 = R \sen \delta$, $c_2 = R \cos \delta$, ou seja, $R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e $\tg \delta = \frac{c_2}{c_1}$, as quantidades R e δ são denominadas de amplitude e ângulo de fase do movimento.

Define-se o **período** do movimento como

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

II - Nas Vibrações Livres Amortecidas, temos

$$my'' + \gamma y' + ky = 0, \quad (96)$$

cujas raízes da equação característica são dadas por

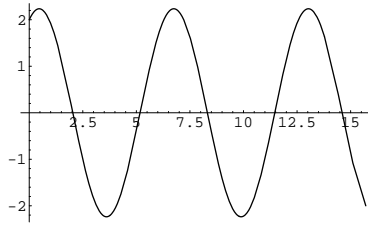


Figura 18: Vibração livre não-amortecida: $y'' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$; ou seja, $y(t) = 2 \cos t + \sin t$.

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m} = \frac{\gamma}{2m} \left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4km}{\gamma^2}} \right).$$

Se $1 - \frac{4km}{\gamma^2} > 0$, temos duas **raízes reais distintas e negativas**, e a solução geral será da forma

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

e dizemos que o **amortecimento é super-crítico**.

Se $1 - \frac{4km}{\gamma^2} = 0$, temos duas **raízes reais iguais** e a solução geral será da forma

$$y = (c_1 + c_2 t) e^{-\gamma t/2m},$$

e dizemos que o **amortecimento é crítico**.

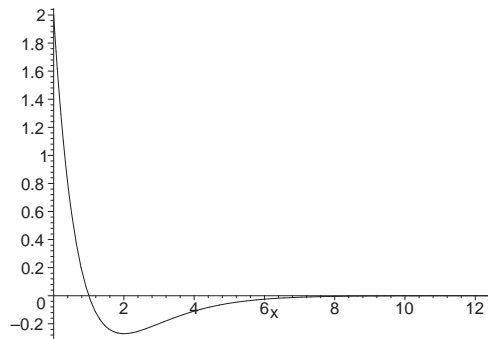


Figura 19: Amortecimento crítico: $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 2$ e $y'(0) = -4$; ou seja, $y = (2 - 2t) e^{-t}$.

Nos dois casos acima, independente das constantes c_1 e c_2 , a solução tende a zero quando $t \rightarrow \infty$.

Se $1 - \frac{4km}{\gamma^2} < 0$, as raízes da equação característica serão complexas conjugadas e solução geral será da forma

$$y = e^{-\gamma t/2m} (c_1 \cos \mu t + c_2 \sen \mu t) = R e^{-\gamma t/2m} \cos(\mu t - \delta),$$

onde $\mu = \frac{\sqrt{\frac{4km}{\gamma^2} - 1}}{2m} > 0$ é chanda de **quase frequência**. Neste caso a amplitude do sistema diminui quando t cresce e o movimento é chamado de **vibração amortecida**.

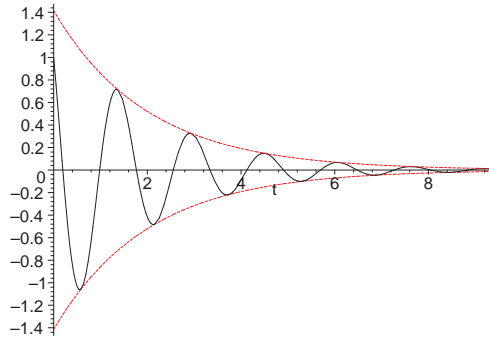


Figura 20: Vibração amortecida: $y'' + y' + \frac{65}{4}y = 0$, $y(0) = 1$ e $y'(0) = -4.5$; ou seja, $y = e^{-0.5t} (\cos 4t - \sen 4t)$.

A seguir vamos comparar este movimento com o movimento não-amortecido.

Note que para pequenos valores de γ , $\frac{\mu}{\omega_o} = \left(1 - \frac{\gamma^2}{4km}\right)^{1/2} \approx 1 - \frac{\gamma^2}{8km}$, o que mostra que o atrito tem o efeito de reduzir o valor da frequência de oscilação.

III - Nas Vibrações Forçadas não amortecidas, vamos nos restringir ao caso em que a força externa é periódica e temos

$$my'' + ky = F_o \cos \omega t,$$

cuja solução geral é a soma de uma solução particular da mesma (que pode ser obtida através do método dos coeficientes a determinar) com a solução geral da equação homogênea associada e será da forma $y = c_1 \cos \omega_o t + c_2 \sen \omega_o t + \frac{F_o}{m(\omega_o^2 - \omega^2)} \cos \omega t$, $\omega \neq \omega_o$. Em particular, se $y(0) = 0 = y'(0)$, temos $c_2 = 0$ e $c_1 = -\frac{F_o}{m(\omega_o^2 - \omega^2)}$. Portanto,

$$y = \frac{F_o}{m(\omega_o^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_o t) = \frac{2F_o}{m(\omega_o^2 - \omega^2)} \sen \left(\frac{(\omega_o - \omega)t}{2} \right) \sen \left(\frac{(\omega_o + \omega)t}{2} \right).$$

Se $|\omega_o - \omega|$ for pequeno, então $\omega_o + \omega$ será muito maior que $|\omega_o - \omega|$; em conseqüência, $\text{sen}\left(\frac{(\omega_o + \omega)t}{2}\right)$ oscilará muito mais rapidamente $\text{sen}\left(\frac{(\omega_o - \omega)t}{2}\right)$. Assim, a oscilação será rápida com freqüência $\frac{(\omega_o + \omega)}{2}$, mas com uma amplitude senoidal variando lentamente, $\frac{2F_o}{m(\omega_o^2 - \omega^2)} \text{sen}\left(\frac{(\omega_o - \omega)t}{2}\right)$. Tal fenômeno é chamado de **batimento**.

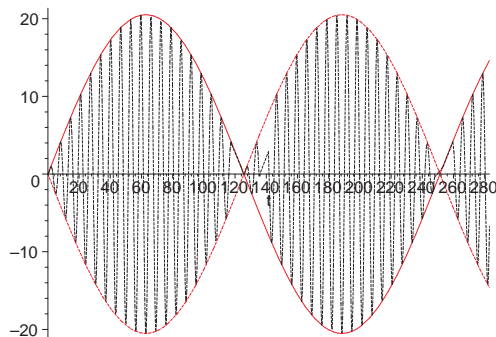


Figura 21: Batimento: $y'' + y = 0.5 \cos(0.95t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$; ou seja, $y = \frac{2}{0.0975} \text{sen}(0.025t) \text{sen}(0.975t)$.

Quanto $\omega = \omega_o$, o método dos coeficientes a determinar nos dá uma solução particular $\frac{F_o}{2m\omega_o} t \text{sen}(\omega_o t)$, portanto, a solução geral é da forma

$$y = c_1 \cos \omega_o t + c_2 \text{sen} \omega_o t + \frac{F_o}{2m\omega_o} t \text{sen} \omega_o t.$$

O movimento torna-se ilimitado quando $t \rightarrow \infty$ e dizemos que ocorre o fenômeno de **ressonância**.

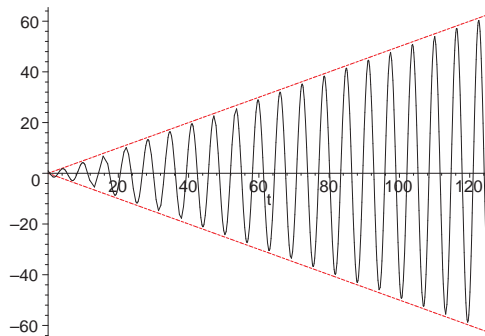


Figura 22: Ressonância: $y'' + y = \text{sen} t$, $y(0) = 1 = y'(0)$; ou seja, $y = \cos t - 1.5 \text{sen} t - 0.5 t \cos t$.

3.6.2 Vibrações Elétricas

No contexto de oscilações elétricas, a Segunda Lei de Kirchhoff é equivalente à Segunda Lei de Newton em problemas de mecânica. Ela diz: **em um circuito fechado, a tensão aplicada é igual a soma das quedas de tensão no resto do circuito.** Em particular, no circuito RLC em série, mostrado na Figura 23, formado por um resistor, um indutor e um capacitor, nos quais as quedas de tensão são RI , $L\frac{dI}{dt}$ e $\frac{Q}{C}$, respectivamente, com R , L , Q e C , a resistência do resistor, a indutância do indutor e carga e capacitância do capacitor, respectivamente. A quantidade $I = \frac{dQ}{dt}$ é a corrente que circula no circuito. Portanto, no circuito RLC com uma tensão aplicada $e(t)$, temos

$$LI' + RI + \frac{Q}{C} = e(t)$$

ou ainda, em termos da carga Q ,

$$LQ'' + RQ' + \frac{Q}{C} = e(t),$$

sujeito às condições iniciais $Q(t_o) = Q_o$ e $Q'(t_o) = I(t_o) = I_o$.

Note a semelhança desta equação com aquela que descreve um sistema massa-mola: a indutância, a resistência e o inverso da capacitância, são os correspondentes da massa, coeficiente de atrito e constante elástica da mola, respectivamente; a carga corresponde à posição.

Figura 23: Circuito RLC em série.

3.7 Exercícios Adicionais

Série A

1. Em cada problema, achar a solução da equação diferencial e verificar se a resposta obtida satisfaz a mesma.

(a) $y'' + 2y' - 3y = 0$.

(b) $6y'' - y' - y = 0$.

(c) $y'' + 5y' = 0$.

(d) $y'' - 9y' + 9y = 0$.

(e) $y'' - 2y' + 2y = 0$.

(f) $y'' + 2y' - 8y = 0$.

(g) $y'' + 2y' + 2y = 0$.

(h) $y'' + 6y' + 13y = 0$.

(i) $y'' + 2y' + 1.25y = 0$.

(j) $y'' + y' + 1.25y = 0$.

(k) $y'' - 2y' + y = 0$.

(l) $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x}$.

(m) $y'' + 2y' + 5y = 3 \operatorname{sen} 2x$.

(n) $y'' - 2y' - 3y = -3xe^{-x}$.

(o) $y'' + 2y' = 3 + 4 \operatorname{sen} 2x$.

(p) $y'' + 9y = x^2e^{3x} + 6$.

(r) $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.

(s) $2y'' + 3y' + y = x^2 + 3 \operatorname{sen} x$.

(t) $y'' + y = 3 \operatorname{sen} 2x + x \cos 2x$.

(u) $u'' + \omega_0^2 u = \cos \omega_0 x$.

(v) $y'' + y' + 4y = e^x - e^{-x}$.

(x) $y'' - y' - 2y = \operatorname{senh} 2x$.

2. Em cada item, achar a solução do problema de valor inicial e verificar se a resposta obtida o satisfaz. Desenhar o gráfico da solução e descrever o seu comportamento quando x cresce.

(a) $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

(b) $6y'' - 5y' + y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.

(c) $y'' + 8y' - 9y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

(d) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

(e) $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

(f) $y'' + y' - 2y = 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

(g) $y'' + 4y = x^2 + 3e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

(h) $y'' - 2y' + y = xe^x + 4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Série B

1. Considere a equação

$$y'' + 2by' + y = 0, \quad b \text{ é uma constante real.}$$

- (a) Quais são as possíveis soluções gerais da equação acima em função do valor de b ?

(b) Para quais valores de b temos $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ independente das condições iniciais?

2. Considere a equação

$$4y'' + ay' + (a - 4)y = 0, \quad a \text{ é uma constante real.}$$

(a) Para qual faixa de valores de a teremos $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$?

(b) Usando a igual ao número de letras de seu primeiro nome, obtenha a solução geral $y(t)$.

Nos exercícios 3 – 6, resolva os problemas de valores iniciais propostos.

3. $y'' - y' - 6y = 3e^{-t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4. $y'' - 4y' + 5y = \text{sen } 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

5. $y'' + 5y' + 6y = 3t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

6. $y'' + 4y = t^2 + 3e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

7. Usando o método dos coeficientes a determinar, encontre, sem achar explicitamente os coeficientes, a expressão da solução geral da equação

$$y'' + 3y' + 2y = e^t(t^2 + 1) \text{ sen } 2t + 3e^{-t} \cos t + 4te^{-t} + t^2.$$

8. Sem resolver a equação, encontre o Wronskiano de duas soluções da seguinte equação

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu \text{ é uma constante.}$$

9. Sejam y_1 e y_2 são duas soluções da equação $y'' + py' + qy = 0$, onde p e q são contínuas num intervalo I . Mostre que se y_1 e y_2 tiverem máximos ou mínimos num mesmo ponto $t_o \in I$, então, estas soluções são linearmente dependentes neste intervalo.

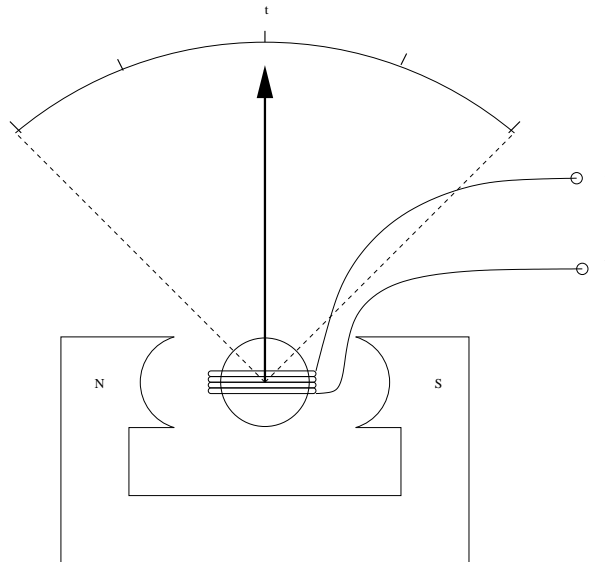
10. Uma massa de 1 kg estica uma mola de 15 cm. Se a massa é puxada para baixo 7.5 cm adicionais e depois é solta, e se não há amortecimento, determine a posição y da massa em qualquer instante t . Encontre a frequência, o período e a amplitude do movimento.

11. Uma mola é esticada 10 cm por uma força de 3 Newtons. Uma massa de 2 kg é pendurada na mola e presa a um amortecedor viscoso que exerce uma força de 3 Newtons quando a velocidade da massa é 5 metros por segundo. Se a massa é puxada de 5 cm para baixo de sua posição de equilíbrio e dada uma velocidade inicial para baixo de 10 cm por segundo, determine a sua posição em qualquer instante t .

12. Determine todas as soluções da equação $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$. (**Dica:** tente soluções da forma $y = e^{\lambda t}$).
13. (a) Mostre que todas as soluções de $y'' + 4y = 0$ que têm $y(0) = 0$ também satisfazem $y(\pi) = 0$.
- (b) Determine os valores de λ para os quais as soluções da equação $y'' + \lambda y = 0$ com a propriedade de que $y(0) = 0$ também satisfazem $y(\pi) = 0$.

3.8 Trabalhos

Questão 1. Um importante instrumento de medição existente (a partir do qual são construídos instrumentos para medir variáveis as mais diversas) é o *medidor de bobina móvel*. Esse instrumento mostra o valor da corrente que nele circula a partir da indicação de um “ponteiro”, que está ligado a um eixo, que por sua vez está preso a uma mola circular. No eixo móvel, está enrolada uma bobina, por onde circula a corrente que vai ser medida (a corrente é injetada entre os terminais a e b). Essa corrente, circulando na bobina, cria um campo magnético, que interage com um ímã posicionado externamente.



A força magnética da interação entre o ímã e a corrente que circula na bobina tenderia a fazer a bobina girar 90° (fazendo o ponteiro ficar na posição horizontal), para o campo magnético da bobina se alinhar com o do ímã. A mola, por sua vez, está relaxada quando o ponteiro encontra-

se na posição vertical, produzindo uma força proporcional ao ângulo de deflexão (em relação à posição vertical), para qualquer outra posição. Dessa forma, quando se aplica uma corrente na bobina, ocorre uma deflexão do ponteiro de um ângulo θ , no qual se equilibram o torque da mola contra o torque da força magnética. Assim, o ângulo de deslocamento do ponteiro é uma medida da corrente que passa na bobina.

Considere que as leis físicas que regem o comportamento do instrumento de bobina móvel podem ser descritas por:

- A somatória dos torques sobre o corpo é igual ao momento de inércia J vezes a aceleração angular:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum \tau$$

- O torque devido ao atrito é proporcional à velocidade angular:

$$\tau_a = -k_a \frac{d\theta}{dt}$$

- O torque devido à mola é proporcional ao ângulo de deflexão:

$$\tau_m = -k_m \theta$$

- O torque causado pela interação da corrente elétrica na bobina com o campo magnético externo é proporcional à corrente:

$$\tau_b = k_b i$$

- Encontre a equação diferencial que modela o movimento do ponteiro do instrumento de bobina móvel.
- Encontre as três possíveis expressões que podem ocorrer (isto é, as três formas possíveis da solução da equação diferencial), para descrever o movimento do ponteiro, quando uma corrente constante $i(t) = I_o$ é aplicada na bobina, a partir de condições iniciais nulas ($\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$). Como a ocorrência dessas formas depende das constantes da equação?
- Suponha que uma corrente constante $i(t) = I_o$ é aplicada entre os terminais da bobina. Encontre a expressão do ângulo que o ponteiro do instrumento irá mostrar, no equilíbrio (ou seja, no momento em que o ponteiro “parar” mostrando o valor final da medida). De quais constantes essa expressão depende?

d) Suponha que um instrumento de bobina móvel foi quase todo projetado, faltando agora definir a constante de amortecimento (atrito) k_a . Ou seja, já encontram-se fixadas a constante da mola, k_m , o momento de inércia J , e a constante da bobina k_b . Como o instrumento irá se comportar, caso a constante de amortecimento seja escolhida muito pequena, no momento de medir uma corrente constante I_0 ? E no caso de a constante de amortecimento ser escolhida muito grande? Proponha um critério para se fazer uma “boa escolha” da constante de amortecimento.

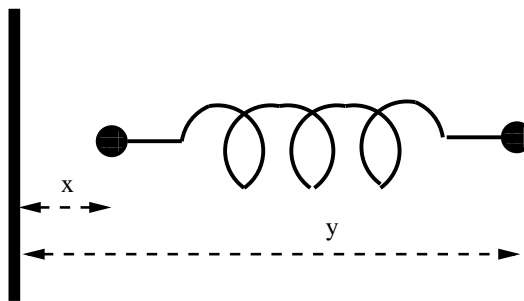
e) Suponha que a corrente que está sendo medida obedece à expressão:

$$i(t) = I_0 + I_1 \text{sen}(\omega t)$$

Determine a expressão do ângulo que o ponteiro do instrumento irá mostrar ao medir essa corrente a partir de condições iniciais nulas.

f) Na situação do item anterior, após algum tempo o ponteiro do instrumento passa a oscilar entre dois valores de ângulo. Estude como a amplitude dessa oscilação depende da frequência ω da corrente. Interprete esse resultado, extraindo conseqüências a respeito do significado da indicação do instrumento quando o sinal medido possui alguma oscilação.

Questão 2. Um modelo para a vibração de moléculas é construído da seguinte maneira: considere duas partículas de massas iguais a m , ligadas por uma mola (sem massa) que sempre fica na horizontal. A mola tem comprimento natural l e coeficiente de elasticidade k . Escolha como coordenadas para as partículas suas distâncias (x e y) a uma reta fixada, como no desenho ao lado.



(a) Justifique porque, nestas coordenadas, o movimento das partículas é dado pelas equações

$$x'' = \frac{k}{m} (y - x - l)$$

$$y'' = -\frac{k}{m} (y - x - l)$$

- (b) Tome $u = x + y$ e $v = x - y$. Como x e y são funções de t , u e v também são e podem ser derivadas. Mostre que, nestas novas coordenadas, as equações do movimento das partículas se transformam em

$$\begin{aligned}u'' &= 0 \\v'' + \frac{2k}{m}v &= \frac{2kl}{m}\end{aligned}$$

- (c) Resolva as equações em u e v .
- (d) O que estas soluções nos contam sobre o movimento do ponto médio entre as duas partículas?
- (e) Descreva os possíveis movimentos das partículas.

4 A Transformada de Laplace

4.1 Definição e Algumas Propriedades da Transformada de Laplace

Muitos problemas resultantes de oscilações mecânicas e elétricas estão sujeitos à forças resultantes que são descontínuas ou de impulsos. Para estes a teoria de equações diferenciais vista é muita complicada de se usar e, como veremos, o método que introduziremos a seguir é puramente algébrico e muito útil na resolução de equações diferenciais onde as equações homogêneas associadas têm coeficientes constantes.

A transformada de Laplace é definida a partir da seguinte integral imprópria

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Lembramos que uma integral imprópria $\int_a^{\infty} g(t) dt$ converge se para todo $A > a$, $\int_a^A g(t) dt$ estiver definida e $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A g(t) dt$ existir, neste caso, dizemos que

$$\int_a^{\infty} g(t) dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A g(t) dt.$$

Note que se f for uma função contínua e satisfizer $|f(t)| \leq Ke^{-at}$ para $t \geq M$, onde a, M, K são constantes reais com K, M positivas, então, a transformada de Laplace de f existirá para $s > a$. A hipótese de continuidade de f não é essencial, a Transformada de Laplace pode ser definida para funções muito mais gerais, como veremos.

Observação 4.1 *Note que em virtude da linearidade da integral, a transformada de Laplace é uma operação linear, ou seja, se as transformadas de f e g existirem para $s > a$, então, para quaisquer escalares c_1 e c_2 , a transformada de Laplace de $c_1 f(t) + c_2 g(t)$ existirá para $s > a$ e*

$$\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{g(t)\} \equiv c_1 F(s) + c_2 G(s).$$

O nosso objetivo será construir uma tabela de transformadas de Laplace e, uma vez tendo feito isso, iremos usá-la na resolução problemas de valores iniciais para equações diferenciais.

A seguir calcularemos as transformadas de Laplace de algumas funções.

Exemplo 4.1 Seja $f(t) = e^{at}$, para todo $t \geq 0$. Então, se $s > a$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt &= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt \\ &= \frac{1 - \lim_{A \rightarrow \infty} e^{-(s-a)A}}{s-a} = \frac{1}{s-a}. \end{aligned} \quad (97)$$

Exercício 4.1 Calcule a transformada de Laplace de $\sinh(bt)$.

Solução. Da linearidade da transformada de Laplace e de (97), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sinh(bt)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{bt} - e^{-bt}}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}\{e^{bt}\} - \mathcal{L}\{e^{-bt}\} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s+b} \right) \\ &= \frac{b}{s^2 - b^2}, \quad s > |b|. \end{aligned} \quad (98)$$

■

De maneira análoga, mostra-se que para $s > |a|$,

$$\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2 - a^2}. \quad (99)$$

Exemplo 4.2 Mostre que para $s > 0$,

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin(at) dt = \frac{a}{s^2 + a^2}. \quad (100)$$

Solução. Após duas integrações por partes temos

$$\int e^{-st} \sin(at) dt = -\frac{a^2}{s^2 + a^2} \left(\frac{\sin(at)}{a^2} + \frac{\cos(at)}{a} \right) e^{-st},$$

o que nos dá (100)

Exercício 4.2 Mostre que para todo $s > 0$,

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos(at) dt = \frac{s}{s^2 + a^2}. \quad (101)$$

Observação 4.2 Poderíamos ter obtido as transformadas de Laplace de $\sin(at)$ e de $\cos(at)$ a partir das transformadas de Laplace de $\sinh(at)$ e $\cosh(at)$, respectivamente, tendo em vistas as relações

$$\sin(at) = \frac{\sinh(ia t)}{i} \quad e \quad \cos(at) = \cosh(it), \quad i = \sqrt{-1}.$$

Exemplo 4.3 *A seguir mostraremos que para $s > 0$,*

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad (102)$$

onde n é um inteiro não-negativo.

Note que no Exemplo 4.1, se fizermos $a = 0$, teremos

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad (103)$$

o que mostra (102) para $n = 0$. Em geral, para $n \geq 1$, após uma integração por partes,

$$\int e^{-st} t^n dt = -\frac{t^n e^{-st}}{s} + \frac{n}{s} \int e^{-st} t^{n-1} dt,$$

logo,

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\}. \quad (104)$$

De (103) e (104), por indução em n , temos (102). ■

A seguir veremos qual é o efeito de multiplicarmos uma função $f(t)$ por uma exponencial.

Exemplo 4.4 *Dada uma função $f(t)$, definida para $t \geq 0$, então, para $s > a$,*

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s-a), \quad (105)$$

ou seja, ao multiplicarmos uma função por uma exponencial, o efeito é um deslocamento na sua transformada de Laplace.

De (105), segue-se que

$$\mathcal{L}\{e^{at} \operatorname{sen}(bt)\} = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2} \quad (106)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} \operatorname{cos}(bt)\} = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} \quad (107)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} \operatorname{senh}(bt)\} = \frac{b}{(s-a)^2 - b^2} \quad (108)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} \operatorname{cosh}(bt)\} = \frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2} \quad (109)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} t^n\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}. \quad (110)$$

Exercício 4.3 *Mostre que*

$$\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\} = F^{(n)}(s).$$

Exercício 4.4 *Seja f definida para $t \geq 0$ e c uma constante positiva. Mostre que para s tal que $F(s)$ exista,*

$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right). \quad (111)$$

As funções para as quais iremos considerar suas transformadas de Laplace não serão necessariamente contínuas, estaremos considerando funções mais gerais, as quais serão definidas a seguir.

Definição 4.1 *Dizemos que uma função é **seccionalmente contínua** em (α, β) se este intervalo puder ser subdividido em número finito subintervalos (t_{i-1}, t_i) , com $t_{i-1} < t_i$, $i = 1, \dots, n$, $t_0 = \alpha$ e $t_n = \beta$, de modo que*

1. *f é contínua em (t_{i-1}, t_i) e*
2. *em cada um dos subintervalos (t_{i-1}, t_i) , f tem um limite quando t se aproxima das extremidades do mesmo.*

Dizemos que f é seccionalmente contínua em (α, ∞) se for seccionalmente contínua em (α, β) para todo $\beta > \alpha$.

Teorema 4.1 *Suponha que f seja seccionalmente contínua no intervalo $0 \leq t \leq A$, para qualquer A positivo, que $|f(t)| \leq Ke^{at}$, quando $t \geq M$, onde K , α e M são constantes reais, com K e M necessariamente positivas. Então a transformada de Laplace de f existe para todo $s > a$.*

Teorema 4.2 *Suponha que f seja contínua e que f' seja seccionalmente contínua no intervalo $0 \leq t \leq A$, para qualquer A positivo; além disso, que existam constantes K , a e M , tais que $|f(t)| \leq Ke^{at}$, para $t \geq M$, onde K , α e M são constantes reais, com K e M necessariamente positivas. Então a transformada de Laplace de f' existe para todo $s > a$ e*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0). \quad (112)$$

Uma conseqüência deste teorema é o seguinte

Corolário 4.1 *Suponha que $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ sejam contínuas e que $f^{(n)}$ sejam seccionalmente contínua no intervalo $0 \leq t \leq A$, para qualquer A positivo; além disso, que existam constantes K , a e M , tais que $|f(t)|, \dots, |f^{(n-1)}| \leq Ke^{at}$, para $t \geq M$, onde K , a e M são constantes reais, com K e M necessariamente positivas. Então a transformada de Laplace de $f^{(n)}$ existe para todo $s > a$ e*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (113)$$

A seguir, veremos como resolver equações diferenciais usando a transformada de Laplace. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$ay'' + by' + cy = g(t), \quad y(0) = y_o, \quad y'(0) = y'_o.$$

Tomando-se a transformada de Laplace da equação diferencial, usando a propriedade de linearidade da mesma e o Corolário 4.1, temos

$$a\mathcal{L}\{y''(t)\} + b\mathcal{L}\{y'(t)\} + c\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

ou seja,

$$a(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + b(sY(s) - y(0)) + cY(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} \equiv G(s),$$

portanto, a transformada da solução do problema de valor inicial é

$$Y(s) = \frac{G(s) + (as + b)y_o + ay'_o}{as^2 + bs + c}.$$

Assim, caímos no problema inverso: dada a transformada de Laplace de uma função, $F(s)$, qual é a **função $f(t)$ cuja transformada é $F(s)$** ? A operação inversa é chamada de transformada inversa de Laplace e é denotada por \mathcal{L}^{-1} . Pode-se mostrar que se f for uma função contínua, cuja transformada é $F(s)$, então, não existe outra função contínua tendo a mesma transformada de Laplace. A transformada inversa de Laplace **herda a linearidade** de \mathcal{L} , ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 F(s) + c_2 G(s)\} = c_1 \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + c_2 \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

Exemplo 4.5 *Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{-3s}{s^2+2s+2}\right\}$.*

Solução. Da linearidade da transformada inversa de Laplace, temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{-3s}{s^2+2s+2}\right\} &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-3s}{s^2+2s+2}\right\} \\
 &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-3(s+1)+3}{(s+1)^2+1}\right\} \\
 &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)}{(s+1)^2+1}\right\} + \\
 &\quad + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\} \\
 &= 2t + e^{-t} - 3e^{-t}\cos t + 3e^{-t}\sin t,
 \end{aligned}$$

onde usamos que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\}$ e $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$, são $e^{-t}\cos t$, $e^{-t}\sin t$ e e^{-t} , respectivamente.

Exemplo 4.6 Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$y'' + y = t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Solução. Tomando-se a transformada de Laplace da equação e usando as condições iniciais dadas, temos

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2(s^2+1)}$$

logo,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}.$$

Vimos que a transformada de Laplace de $\cos t$ é $\frac{s}{s^2+1}$, logo, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos t$. A seguir vamos re-escrever $\frac{1}{s^2(s^2+1)}$ de modo que possamos encontrar a sua transformada inversa de Laplace. Note que temos a seguinte decomposição em frações parciais

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = A\frac{1}{s} + B\frac{1}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1},$$

ou seja, $Cs^3 + (A+B+D)s^2 + As + B = 1$, portanto, $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$ e $D = -1$. Logo,

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1},$$

como as transformadas de t e $\sin t$ são $\frac{1}{s^2}$ e $\frac{1}{s^2+1}$, respectivamente, temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right\} \\
 &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \\
 &= t - \sin t.
 \end{aligned}$$

Portanto, a solução do problema de valor inicial é $y(t) = \cos t - \sin t + t$. ■

4.2 A Função Degrau

Na representação de funções que apresentam saltos é muito útil a utilização da seguinte função, denominada **função degrau unitário**:

$$u_c(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq c \\ 0, & \text{se } t < c, \end{cases}$$

onde c é uma constante não-negativa.

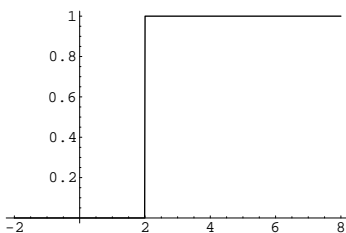


Figura 24: Gráfico da função $u_2(t)$.

Combinando-se funções degraus podemos, por exemplo, representar uma função $f(t)$ que é igual a um valor constante 1 no intervalo $[c_1, c_2)$ e zero fora deste intervalo, onde $c_1 < c_2$; tal função é dada por $u_{c_1}(t) - u_{c_2}(t)$.

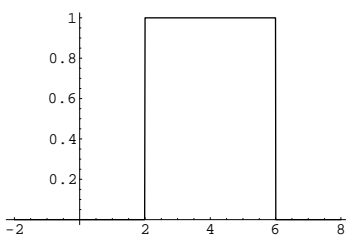


Figura 25: Gráfico da função $u_2(t) - u_6(t)$.

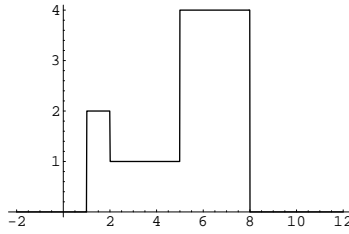


Figura 26: Gráfico de $f(t)$.

Exemplo 4.7 *Seja*

$$f(t) = \begin{cases} 2, & \text{se } 1 \leq t < 2 \\ 1, & \text{se } 2 \leq t < 5 \\ 4, & \text{se } 5 \leq t < 8 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

veja Figura 26. *Expresse f em termos da função degrau unitário e calcule a transformada de Laplace de $f(t)$.*

Solução. Note que

$$\begin{aligned} f(t) &= 2(u_1(t) - u_2(t)) + (u_2(t) - u_5(t)) + 4(u_5(t) - u_8(t)) \\ &= 2u_1(t) - u_2(t) + 3u_5(t) - 4u_8(t), \end{aligned}$$

portanto, $F(s) = 2 \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} + 3 \frac{e^{-5s}}{s} - 4 \frac{e^{-8s}}{s}$. ■

Note que para todo $s > 0$,

$$\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \int_c^\infty e^{-st} dt = \frac{e^{-cs}}{s}. \quad (114)$$

Dada uma função f cuja transformada de Laplace exista para $s > a \geq 0$, é muito comum considerarmos

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < c \\ f(t - c), & \text{se } t \geq c, \end{cases}$$

que pode ser representada da seguinte forma em termos da função degrau: $g(t) = u_c(t)f(t - c)$ (veja Figura 27),

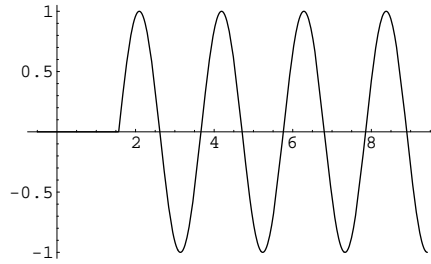


Figura 27: Gráfico de $u_{\frac{\pi}{2}}(t)f(t - \frac{\pi}{2})$, onde $f(t) = \text{sen}(3t)$.

cuja transformada de Laplace é

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{u_c(t)f(t - c)\} &= \int_c^\infty e^{-st} f(t - c) dt \\
 &= \int_0^\infty e^{-s(u+c)} f(u) du, \quad t - c \equiv u \\
 &= e^{-cs} \int_0^\infty e^{-su} f(u) du \\
 &= e^{-cs} F(s).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t - c)\} = e^{-cs} F(s) \quad \text{ou} \quad u_c(t)f(t - c) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs} F(s)\}. \quad (115)$$

Em geral, dada uma função $g(t)$, se quisermos definir uma nova função, f , tal que f coincida com g no intervalo $[c_1, c_2)$ e valha 0 fora deste intervalo, então, f tem uma representação simples em termos da função degrau: $f = (u_{c_1}(t) - u_{c_2}(t))g(t)$. Por exemplo, na Figura 28, temos o gráfico da função $(u_2(t) - u_4(t))(\text{sen}(8t) - \text{cos}(6t))$.

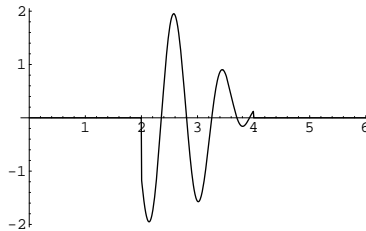


Figura 28: Gráfico de $(u_2(t) - u_4(t))(\text{sen}(8t) - \text{cos}(6t))$.

Exemplo 4.8 Calcule a transformada de Laplace de $t^2 u_1(t)$.

Solução. Se fizermos $t^2 = f(t-1)$, então, $\mathcal{L}\{u_1(t)t^2\} = \mathcal{L}\{u_1(t)f(t-1)\} = e^{-s}F(s)$. Resta-nos calcular $F(s)$. Note que se $f(t-1) = t^2$, então, $f(t) = (t+1)^2 = t^2 + 2t + 1$, logo, $F(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}$, ou seja, $\mathcal{L}\{u_1(t)t^2\} = e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right)$. ■

Exemplo 4.9 Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$y'' + 2y' + 2y = h(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

onde

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Solução. Note que $h(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$, logo, da linearidade da transformada de Laplace e de (114), temos $H(s) = \frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s}$. Tomando a transformada de Laplace da equação diferencial e usando as condições iniciais, temos

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2 + 2s + 2} + \frac{1}{s^2 + 2s + 2} H(s) \\ &= \frac{1}{s^2 + 2s + 2} + \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} e^{-\pi s} + \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} e^{-2\pi s} \\ &= F(s) + e^{-\pi s} G(s) + e^{-2\pi s} G(s), \end{aligned}$$

onde $F(s) = \frac{1}{(s+1)^2+1}$ e $G(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+2)}$.

Então, da linearidade da transformada inversa de Laplace e de (115),

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{e^{-\pi s} G(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{e^{-2\pi s} G(s)\} \\ &= f(t) + u_\pi(t)g(t-\pi) - u_{2\pi}(t)g(t-2\pi). \end{aligned}$$

Resta-nos calcular $f(t)$ e $g(t)$. Note que não vimos nenhuma função $g(t)$ cuja transformada de Laplace seja $G(s)$, contudo, podemos usar decomposição em frações parciais e decompor $G(s)$ em parcelas cujas que poderão ser identificadas com transformadas de Laplace de funções conhecidas.

De fato

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 2}$$

o que nos leva a $(A + B)s^2 + (2A + C)s + 2A = 1$, ou seja, $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ e $C = -1$, portanto,

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{s} + \frac{-\frac{s}{2} - 1}{s^2 + 2s + 2} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{s} + \frac{-\frac{s}{2} - 1}{(s + 1)^2 + 1} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{s} + \frac{-\frac{s+1}{2} - \frac{1}{2}}{(s + 1)^2 + 1} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \left(\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(s + 1)^2 + 1} \right),
 \end{aligned}$$

da linearidade de \mathcal{L}^{-1} e da propriedade (105), temos

$$g(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-t} \cos(t) - \frac{1}{2} e^{-t} \sin(t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-t} \cos(t) - e^{-t} \sin(t)).$$

Por outro lado, $f(t) = e^{-t} \sin t$. Portanto, a solução do problema é

$$\begin{aligned}
 y(t) &= e^{-t} \sin t + \frac{1}{2} (u_\pi(t) (1 - \sin(t - \pi) e^{-(t-\pi)} - \cos(t - \pi) e^{-(t-\pi)}) \\
 &\quad - \frac{1}{2} (u_{2\pi}(t) (1 - \sin(t - 2\pi) e^{-(t-2\pi)} - \cos(t - 2\pi) e^{-(t-2\pi)})) \\
 &= e^{-t} \sin t + \frac{1}{2} u_\pi(t) (1 + \sin(t) e^{-(t-\pi)} + \cos(t) e^{-(t-\pi)}) \\
 &\quad - \frac{1}{2} (u_{2\pi}(t) (1 - \sin(t) e^{-(t-2\pi)} - \cos(t) e^{-(t-2\pi)})),
 \end{aligned}$$

cujo gráfico é mostrado na Figura 29.

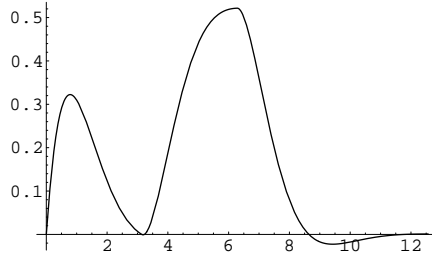


Figura 29: Gráfico de $e^{-t} \sin t + u_\pi(t)g(t - \pi) - u_{2\pi}(t)g(t - 2\pi)$.

■

Exemplo 4.10 Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$y'' + y = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

onde

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Solução. Note que $f(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$, portanto, $F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s}$. Logo,

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)}e^{-\pi s} - \frac{1}{s(s^2 + 1)}e^{-2\pi s} = e^{-\pi s}G(s) + e^{-2\pi s}G(s),$$

onde $G(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$ e temos

$$y(t) = u_\pi(t)g(t - \pi) - u_{2\pi}(t)g(t - 2\pi),$$

com $g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2+1)} \right\}$.

Usando decomposição em frações parciais encontramos $G(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$, portanto, $g(t) = 1 - \cos t$. Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$\begin{aligned} y(t) &= u_\pi(t)(1 + \cos t) - u_{2\pi}(t)(1 - \cos t) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < \pi \\ 1 + \cos t, & \text{se } \pi \leq t < 2\pi \\ 2\cos t, & \text{se } t \geq 2\pi, \end{cases} \end{aligned}$$

cujo gráfico é mostrado na Figura 30. ■

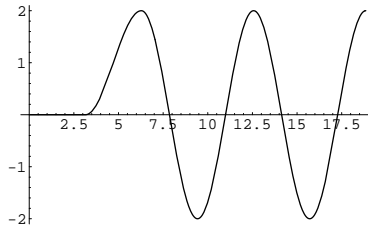


Figura 30: Gráfico de $u_\pi(t)(1 + \cos t) - u_{2\pi}(t)(1 - \cos t)$.

Exemplo 4.11 Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$y'' + 2y' = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

onde

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t - 2|, & \text{se } 1 \leq t < 3 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

cujo gráfico é mostrado na Figura 31.

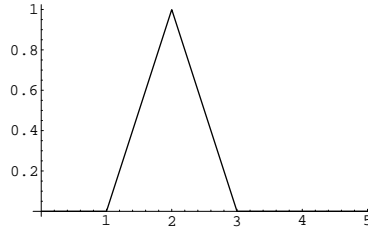


Figura 31: Gráfico de $f(t) = (u_1(t) - u_2(t))(1 - |t - 2|)$.

Solução. Note que f pode ser vista como a soma de funções: uma vale $t - 1$ no intervalo $[1, 2)$ e zero fora deste intervalo e a outra vale $3 - t$ no intervalo $[2, 3)$ e zero fora deste. Estas duas funções podem ser representadas como $(u_1(t) - u_2(t))(t - 1)$ e $(u_2(t) - u_3(t))(3 - t)$, respectivamente. Portanto,

$$\begin{aligned} f(t) &= (u_1(t) - u_2(t))(t - 1) + (u_2(t) - u_3(t))(3 - t) \\ &= u_1(t)(t - 1) - 2u_2(t)(t - 2) - u_3(t - 3), \end{aligned}$$

cuja transformada de Laplace é $F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2} - 2\frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} Y(s) &= e^{-s} \frac{1}{s^3(s+2)} - 2e^{-2s} \frac{1}{s^3(s+2)} - e^{-3s} \frac{1}{s^3(s+2)} \\ &= e^{-s}G(s) - 2e^{-2s}G(s) - e^{-3s}G(s), \end{aligned}$$

onde $G(s) = \frac{1}{s^3(s+2)}$; portanto,

$$y(t) = u_1(t)g(t - 1) - 2u_2(t)g(t - 2) - u_3(t)g(t - 3).$$

Resta-nos calcular $g(t)$. Usando decomposição em frações parciais, temos

$$G(s) = \frac{1}{8} \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s^3} - \frac{1}{8} \frac{1}{s+2},$$

portanto, $g(t) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}e^{-2t}$, cujo gráfico é mostrado na Figura 32. ■

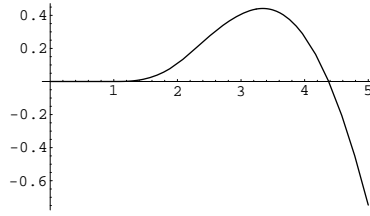


Figura 32: Gráfico de $u_1(t)g(t-1) - 2u_2(t)g(t-2) - u_3(t)g(t-3)$.

4.3 A Transformada de Laplace de Funções Periódicas

Suponha que exista um número positivo T , tal que $f(t+T) = f(t)$, para todo $t \geq 0$, neste caso, dizemos que f é periódica com período T em $[0, \infty)$.

Lembremos que se $s, T > 0$, a série geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-sT})^k$ converge para $\frac{1}{1-e^{-sT}}$. Então, dado f periódica com período T ,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{nT} e^{-st} f(t) dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st} f(t) dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_0^T e^{-s(u+kT)} f(u+kT) du, \quad u \equiv t - kT \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{-kTs} \int_0^T e^{-st} f(u) du \\
 &= \left(\int_0^T e^{-su} f(u) du \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{-kTs} \\
 &= \left(\int_0^T e^{-su} f(u) du \right) \frac{1}{1 - e^{-Ts}}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-Ts}}, \quad s > 0, \tag{116}$$

e o só temos que efetuar uma integração no intervalo $[0, T]$ para calcularmos a transformada de uma função periódica com período T .

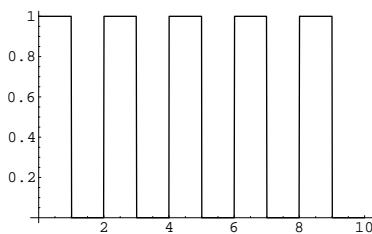


Figura 33: Gráfico da função f definida no Exemplo 4.12.

Exemplo 4.12 *Seja f uma função periódica com período 2, tal que*

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{se } 1 \leq t < 2. \end{cases}$$

Calcule a sua transformada de Laplace.

Solução. De (116), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{\int_0^2 e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-2s}} \\ &= \frac{\int_0^1 e^{-st} dt}{1 - e^{-2s}} \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - e^{-2s})} \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - e^{-s})(1 + e^{-s})} \\ &= \frac{1}{s(1 + e^{-s})}, \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade quebramos a integral de 0 a 2 numa soma de duas integrais: uma sobre o intervalo $[0, 1]$ e a outra sobre o intervalo $[1, 2]$, como f se anula neste intervalo só temos a contribuição da primeira integral. ■

Exercício 4.5 *Seja f a função periódica de período 1, definida como $f(t) = t$, para $0 \leq t < 1$. Esta função é chamada **onda dente de serra**. Calcule a sua transformada de Laplace.*

4.4 Funções de Impulso

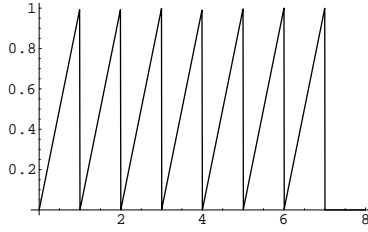


Figura 34: Gráfico da onda dente de serra.

Em muitas aplicações temos que tratar de fenômenos de natureza impulsiva, ou seja, voltagens ou forças, $g(t)$, de módulo grande que agem durante um intervalo de tempo muito curto. Por exemplo, $g(t)$ pode ser da forma

$$g(t) = d_\tau(t - t_o) = \begin{cases} 1/2\tau & t_o - \tau < t < t_o + \tau, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde τ é uma constante positiva e pequena. Neste caso, independente do valor de $\tau \neq 0$, o **impulso total** proporcionado por $d_\tau(t - t_o)$, definido por

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t - t_o) dt = \frac{1}{2\tau} \int_{t_o - \tau}^{t_o + \tau} dt = 1.$$

Logo, temos o seguinte resultado

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} d_\tau(t - t_o) = 0, \quad \forall t \neq t_o \quad e \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} I(\tau) = 1.$$

O que nos leva a definir uma **função impulso unitário em t_o** , $\delta(t - t_o)$, também chamada de **distribuição δ de Dirac** que é uma generalização de uma função que embora sendo zero em todos os pontos diferentes de $t = t_o$, seja capaz de produzir um impulso unitário. Ou seja, ela tem as seguintes propriedades

$$\delta(t - t_o) = 0, \quad \forall t \neq t_o \quad e \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_o) dt = 1.$$

A seguir iremos definir formalmente $\mathcal{L}\{\delta(t - t_o)\}$. Suponha que $t_o > 0$, definiremos

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_o)\} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{L}\{d_\tau(t - t_o)\}$$

Note que

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t - t_o)\} = \frac{1}{2\tau} \int_{t_o - \tau}^{t_o + \tau} e^{-st} dt = \frac{1}{2s\tau} e^{-st_o} (e^{s\tau} - e^{-s\tau}) = \frac{\text{senh}(s\tau)}{s\tau} e^{-st_o}. \quad (117)$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{senh}(x)}{x} = 1$, segue-se que

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_o)\} = e^{-st_o}, \quad t_o > 0. \quad (118)$$

Como o resultado acima vale para todo $t_o > 0$, definiremos

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1. \quad (119)$$

De maneira análoga, para uma função contínua $f(t)$, definiremos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_o) f(t) dt &\equiv \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d_{\tau}(t - t_o) f(t) dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\tau} \int_{t_o - \tau}^{t_o + \tau} f(t) dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\tau} 2\tau f(t^*), \quad t_o - \tau < t^* < t_o + \tau \\ &= f(t_o). \end{aligned} \quad (120)$$

Na passagem da segunda para a terceira linha usamos o Teorema do Valor Médio para integrais e na passagem da terceira para a quarta linha usamos a continuidade de f em t_o . Em particular, se f for uma função contínua, então,

$$\mathcal{L}\{f(t)\delta(t - t_o)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\delta(t - t_o) dt = e^{-st_o} f(t_o). \quad (121)$$

Exemplo 4.13 *Resolva o seguinte problema de valor inicial*

$$y'' + y = \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Solução. Se tomarmos a transformada de Laplace da equação acima e usarmos as condições iniciais, encontraremos

$$Y(s) = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 1} \equiv e^{-2\pi s} F(s),$$

onde $F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$, portanto, de (115), temos $y(t) = u_{2\pi}(t)f(t - 2\pi)$, onde $f(t) = \text{sen}(t)$, portanto, $y(t) = u_{2\pi}(t)\text{sen } t$.

Note que se não tivéssemos aplicado a força externa $\delta(t - 2\pi)$ a solução seria identicamente nula; contudo, a presença desta força faz com que a partir do instante $t = 2\pi$ a solução seja diferente de zero, embora ela só atue neste momento. ■

4.5 O Teorema da Convolução

Em muitos problemas de valores iniciais, na expressão de $Y(s)$ aparecem fatores do tipo $F(s)G(s)$, cuja transformada inversa de Laplace temos que calcular. A pergunta natural é a seguinte: qual a relação entre a transformada inversa de Laplace de $F(s)G(s)$ e as transformadas inversas de $F(s)$ e $G(s)$? Por exemplo, se fizermos $F(s) = \frac{1}{s}$ e $G(s) = \frac{1}{s^2}$, temos $F(s)G(s) = \frac{1}{s^3}$, mas transformadas inversas de Laplace de $\frac{1}{s}$, $\frac{1}{s^2}$ e $\frac{1}{s^3}$ são 1 , t e $\frac{t^2}{2}$, respectivamente, o que ilustra que $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} \neq \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$. Veremos que existe uma operação que sob muitos aspectos é parecida com a multiplicação usual, que leva um par de funções f e g numa nova função $h(t)$, denotada **convolução de f e g** e representada por $f * g$, a qual é definida como

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau,$$

que nos permitirá responder a pergunta acima.

Exercício 4.6 *Mostre que a convolução em as seguintes propriedades:*

1. $f * g = g * f$
2. $f * (g + h) = f * g + f * h$
3. $(f * g) * h = f * (g * h)$
4. $f * 0 = 0 * f = 0$.

Note que $f * 1 \neq f$, por exemplo, tomando $f(t) = t$, temos $(f * 1)(t) = \int_0^t (t - \tau) d\tau = \frac{t^2}{2}$.

Teorema 4.3 (*Teorema da Convolução*) *Se as transformadas de f e g , existirem para $s > a \geq 0$, então,*

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s) \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t). \quad (122)$$

Exercício 4.7 *Calcule a transformada inversa de Laplace de $H(s) = \frac{1}{(s^2+1)s}$.*

Solução. Note que se fizermos $F(s) = \frac{1}{s}$ e $G(s) = \frac{1}{s^2+1}$, então, $H(s) = F(s)G(s)$, $f(t) = 1$, $g(t) = \sin t$ e, pelo Teorema da Convolução,

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t \sin \tau d\tau = 1 - \cos t.$$

Exercício 4.8 Usando o Teorema da Convolução calcule a transformada inversa de Laplace de $\frac{1}{(s^2+2s+2)^2}$.

Observação 4.3 Nos problemas que estaremos considerando muitas vezes será preferível reescrevermos o produto $F(s)G(s)$ usando decomposição em frações parciais, visto que este é puramente algébrico, enquanto que a convolução envolve o cálculo de integrais que podem ser difíceis de ser calculadas. De qualquer forma, a convolução é muito importante sob o ponto de vista teórico.

4.6 Tabela de Transformadas de Laplace e de Transformadas Inversas de Laplace

Coletando as transformadas calculadas temos a seguinte tabela que deverá ser usada nos problemas que consideraremos:

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}, s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, s > a$
t^n, n inteiro positivo	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, s > 0$
$\text{cos}(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, s > 0$
$\text{senh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}, s > a $
$\text{cosh}(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}, s > a $
$e^{at}\text{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, s > a$
$e^{at}\text{cos}(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, s > a$
$t^n e^{at}, n$ inteiro positivo	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, s > a$
$u_c(t),$	$\frac{e^{-cs}}{s}, s > 0$
$u_c(t)f(t-c),$	$e^{-cs}F(s)$
$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), c > 0$
$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$
$\delta(t-c)$	e^{-cs}
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$

5 Revisão - Decomposição em frações parciais

Decomposição em frações parciais é um método que nos permite reescrever a razão de dois polinômios $P(s)/Q(s)$, onde o grau de $P(s)$ é menor do que o grau de $Q(s)$ em termos de uma soma de expressões mais simples:

1. Se $Q(s) = (s - s_1)^{k_1}(s - s_2)^{k_2} \dots (s - s_n)^{k_n}$, então,

$$\begin{aligned} \frac{P(s)}{Q(s)} &= \frac{P(s)}{(s - s_1)^{k_1}(s - s_2)^{k_2} \dots (s - s_n)^{k_n}} \\ &= \frac{A_{11}}{s - s_1} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(s - s_1)^{k_1}} + \frac{A_{21}}{s - s_2} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(s - s_2)^{k_2}} \\ &\quad \dots + \frac{A_{n1}}{s - s_n} + \dots + \frac{A_{nk_n}}{(s - s_n)^{k_n}}, \end{aligned}$$

onde A_{ij} são constantes a serem determinadas, resolvendo-se um sistema de $k_1 + \dots + k_n$ equações lineares. Como a transformada inversa de Laplace de $\frac{C}{(s-a)^n}$ é $\frac{C}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$, a decomposição acima nos permitirá calcular a transformada inversa de Laplace de $P(s)/Q(s)$. Por exemplo,

$$\frac{s^2 + 1}{s^2(s - 1)(s - 3)^4} = \frac{A}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{C}{s - 1} + \frac{D}{s - 3} + \frac{E}{(s - 3)^2} + \frac{F}{(s - 3)^3} + \frac{G}{(s - 3)^4}.$$

2. Se $Q(s) = (a_1s^2 + b_1s + c_1)^{k_1} \dots (a_ns^2 + b_ns + c_n)^{k_n}$, onde cada um dos n fatores quadráticos $a_is^2 + b_is + c_i$, não tem raiz real, então

$$\begin{aligned} \frac{P(s)}{Q(s)} &= \frac{P(s)}{(a_1s^2 + b_1s + c_1)^{k_1} \dots (a_ns^2 + b_ns + c_n)^{k_n}} \\ &= \frac{A_{11}s + B_{11}}{a_1s^2 + b_1s + c_1} + \dots + \frac{A_{1k_1}s + B_{1k_1}}{(a_1s^2 + b_1s + c_1)^{k_1}} \\ &\quad + \dots + \frac{A_{nk_n}s + B_{nk_n}}{(a_ns^2 + b_ns + c_n)^{k_n}}, \end{aligned}$$

onde A_{ij} são determinadas resolvendo-se um sistema de $2(k_1 + \dots + k_n)$ equações lineares. Por exemplo,

$$\frac{s^3 + 1}{(s^2 + 1)^2(s^2 + 2s + 2)} = \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{Cs + D}{(s^2 + 1)^2} + \frac{Es + F}{s^2 + 2s + 2}.$$

3. Se $Q(s) = Q_1(s)Q_2(s)$, onde Q_1 e Q_2 são das formas descritas nos itens 1 e 2, respectivamente, então Q terá um decomposição que será a soma das decomposições de Q_1 e Q_2 dadas nestes itens. Por exemplo,

$$\frac{s^2 - 1}{s^2(s - 1)(s^2 + 1)^2(s^2 + 2s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1} + \frac{Es + F}{(s^2 + 1)^2} + \frac{Gs + H}{s^2 + 2s + 2}.$$

5.1 Exercícios Adicionais

Série A

1. Determine as transformadas de Laplace das funções:

(a) $t^4 - 2 \operatorname{sen} 3t + e^{-3t} \cos 2t + 4t^2 e^{2t}$

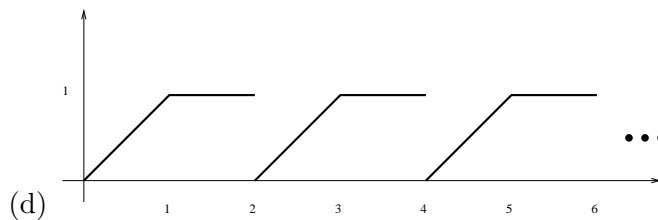
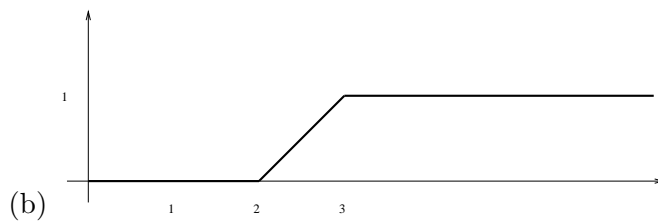
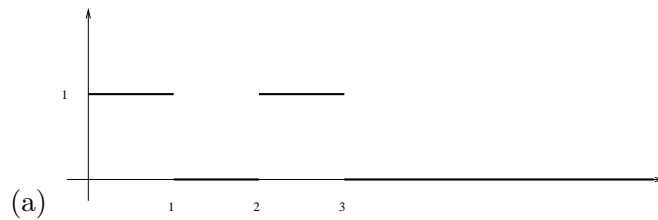
(b) $u_\pi(t) \operatorname{sen} t$

(c) $u_2(t) e^{3t}$

(d) $t \operatorname{sen} t$

(e) $t^2 \operatorname{sen} t$

2. Determine as transformadas de Laplace das funções representadas pelos gráficos abaixo:



3. Em cada problema, achar a transformada de Laplace inversa da função dada.

(a) $\frac{3s}{s^2 - s - 6}$

(e) $e^{-\pi s} \frac{s}{s^2 + 2s + 2}$

(b) $\frac{2s + 2}{s^2 + 2s + 5}$

(f) $e^{-\frac{\pi}{2}s} \frac{1}{s(s^2 + 6s + 13)}$

(c) $\frac{2s - 3}{s^2 - 4}$

(g) $e^{-2s} \frac{1}{s(s^2 - 4)}$

(d) $e^{-s} \frac{s^2}{s^2 - 1}$

(h) $e^{-s} \frac{1}{s^2 - 4s + 3}$

4. Em cada item, achar a solução do problema de valor inicial. Esboce os gráficos da função $y(t)$ e da função que se encontra do lado direito de cada equação.

(a) $y'' + y = t + \delta_\pi(t)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(b) $y'' + 4y = \delta_{\frac{\pi}{2}}(t) + U_\pi(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(c) $y'' - y = U_1(t) + U_2(t) + U_3(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

(d) $y'' - y = \begin{cases} 0 , & 0 \leq t < \pi \\ \text{sent} , & t \geq \pi \end{cases}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(e) $y'' - 4y' + 5y = \begin{cases} 2 , & 0 \leq t < \pi \\ -1 , & t \geq \pi \end{cases}$; $y(0) = y'(0) = 0$

(f) $y'' - 4y = 3 - U_1(t) - U_2(t) - U_3(t)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(g) $y'' + 4y = \text{sent} t + U_\pi(t)\text{sen}(t - \pi)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(h) $y'' - 6y' + 8y = 1 + \delta_2(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(i) $y'' + 2y' + 5y = \delta_\pi(t) - U_{2\pi}(t)$; $y(0) = y'(0) = 0$

(j) $y'' + 2y' + 2y = k \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \delta_{n\pi}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = b$

5. Interprete o problema (4j) acima como um modelo de uma mola com impulsos instantâneos periódicos.

(a) Fixando b , determine o valor de k para que a solução $y(t)$ seja uma oscilação periódica de período $T = 2\pi$.

(b) Determine o valor de b para que a amplitude seja igual a A .

Série B

1. Encontre a transformada inversa de Laplace das seguintes funções:

(a) $\frac{8s^2-4s+2}{s(s^2+4)}$

(b) $\frac{2s+1}{4s^2+4s+5}$

(c) $e^{-s} \frac{1}{s^2(s^2+2s+2)} + \frac{s^2+1}{(s+1)(s^2+4)}$

2. Seja

$$f(t) = \begin{cases} \text{sen}(\pi t), & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \\ t - 2, & 2 \leq t < 3 \\ 1, & t \geq 3. \end{cases}$$

(a) Expresse f em termos da função degrau.

(b) Calcule a transformada de f .

3. Calcule a transformada de Laplace das funções abaixo:

(a) $t^3 e^{-3t} + u_\pi(t) t^2$

(b) $-\text{sen}(2t) + e^t \delta(t-1)$

(c) $t^2 e^{-t} \cos t$

(d) f onde

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ t^2 - t + 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

4. Resolva os problemas de valores iniciais abaixo.

(a) $y'' - 2y' + 2y = e^{-t} + \cos t$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

(b) $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, onde

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{se } 1 \leq t < \infty \end{cases}$$

(c) $y'' - y = f(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, onde f é dada no segundo exercício.

(d) $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, onde $f(t)$ é periódica com período 2π e

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t < \pi \\ -1, & \text{se } \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

(e) $y^{(4)} - y = u_1(t) - u_2(t)$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

(f) $y'' + y = u_{\frac{\pi}{2}}(t) + 3\delta(t - \frac{3\pi}{2}) - u_{2\pi}(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$.

5. Expressar a solução do problema de valor inicial em termos de uma integral convolução:
 $y'' + 4y' + 4y = g(t)$, $y(0) = 2$ e $y'(0) = -3$.

6. Seja

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < \pi \\ \text{sen } t, & \text{se } t \geq \pi. \end{cases}$$

Resolva o problema de valor inicial $y'' - y = f(t)$, $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

7. Usando a propriedade da transformada de Laplace da convolução, obtenha $y(t)$, sabendo-se que esta função satisfaz à seguinte equação

$$y(t) = t + \int_0^t y(t - \tau) e^{-\tau} d\tau.$$

8. Consideremos a seguinte **equação integral**:

$$\phi(t) + \int_0^t (t - \xi)\phi(\xi)d\xi = \text{sen}(2t).$$

(a) Mostrar que se u for uma função tal que $u''(t) = \phi(t)$, então,

$$u''(t) + u(t) - tu'(0) - u(0) = \text{sen}(2t).$$

(b) Mostrar que a equação integral dada é equivalente ao problema de valor inicial

$$v''(t) + v(t) = \text{sen}(2t), \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 0.$$

(c) Resolver a equação integral dada mediante as transformadas de Laplace.

(d) Resolver o problema de valor inicial (b) e verificar que é a mesma solução que foi obtida em (c).

5.2 Trabalhos

5.2.1 Análise de Sistemas e o Princípio de Duhamel

Considere um sistema físico no qual o *output* ou *resposta* $x(t)$ ao *input* (entrada) $f(t)$ é descrito pela equação $a'' + bx' + cx = f(t)$, onde os coeficientes constantes a, b, c são determinados por parâmetros físicos do sistema e são independentes de $f(t)$. Exemplos deste tipo de sistema são um sistema massa-mola ou um circuito RLC.

Por simplicidade, vamos supor que o sistema está inicialmente em repouso, isto é, que $x(0) = x'(0) = 0$.

1) Sejam $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ e $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Mostre que

$$X(s) = W(s)F(s) \quad \text{onde} \quad W(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}.$$

A função $W(s)$ é chamada de função de transferência.

2) Seja $w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\}$. Mostre o Princípio de Duhamel, isto é, que

$$x(t) = \int_0^t w(\tau)f(t - \tau) d\tau$$

Observe que a função $w(t)$ está completamente determinada pelos parâmetros do sistema e assim, uma vez que w esteja calculada, a resposta $x(t)$ do sistema a um *input* $f(t)$ é dada pela integral.

3) Aplique o Princípio de Duhamel e escreva a solução em forma de integral dos seguintes sistemas, todos com $x(0) = x'(0) = 0$:

$$x'' + 4x = f(t), \quad x'' + 6x' + 9x = f(t), \quad x'' + 6x' + 8x = f(t), \quad x'' + 4x' + 8x = f(t).$$

4) Aplique o Princípio de Duhamel e escreva a solução em forma de integral do sistema $ax'' + bx' + cx = 1$, com $x(0) = x'(0) = 0$. Esta solução tem um nome especial (chama-se resposta ao degrau unitário) e é anotada por $h(t)$. Mostre que $h'(t) = w(t)$.

5) Mostre que a resposta $x(t)$ a um *input* $f(t)$ é dada por

$$x(t) = \int_0^t h'(\tau)f(t - \tau) d\tau$$

O que estes exercícios mostram é que para conhecer a resposta de um sistema a um *input* qualquer $f(t)$ não é preciso conhecer o sistema. Só é preciso conhecer sua resposta $h(t)$ a um *input* unitário. Esta idéia é usada em muitas aplicações, como mostra o próximo exercício.

6) Suponha que você tenha em mãos uma caixa preta contendo uma série complexa de circuitos elétricos, com muitos indutores, capacitores e resistências.

Quando submetido a um potencial $v(t)$ o sistema é descrito pela equação abaixo, onde $i(t)$ é a corrente e $q(t)$ é a carga:

$$a \frac{di}{dt} + bi + cq = v(t)$$

O coeficiente a depende dos indutores, b das resistências e c dos capacitores, mas não há como medi-los, a não ser que você abra a caixa.

Ao conectar o sistema a um potencial linearmente crescente $v(t) = t$, foi possível medir a resposta com um amperímetro e obteve-se

$$i(t) = 7e^{-3t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{9}.$$

Determine a corrente obtida ao se aplicar um potencial quadrático, ie, $v(t) = t^2$.

Dica: Se derivarmos a equação que rege o sistema obtemos

$$a \frac{d^2i}{dt^2} + b \frac{di}{dt} + ci = \frac{dv}{dt}$$

5.2.2 Controle Realimentado

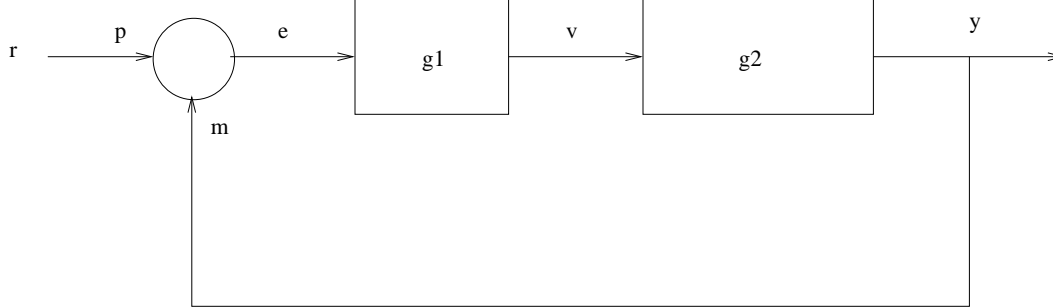
Um motor elétrico de corrente contínua pode ser representado, aproximadamente, pela equação diferencial:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \alpha \frac{d\theta}{dt} = \beta v(t)$$

As variáveis nessa equação representam:

- $\theta(t)$: a posição angular do rotor
- $v(t)$: a tensão aplicada nos terminais do motor
- α, β : constantes de proporcionalidade

Utilize os valores: $\alpha = 0.5$ e $\beta = 1$. Um esquema de controle do motor bastante utilizado em aplicações científicas ou industriais utiliza o “controle realimentado”. A idéia é criar uma tensão de entrada proporcional a um “erro” medido entre a posição atual do motor e a posição em que se deseja que ele fique. Dessa forma, obtém-se um mecanismo que faz com que o motor se aproxime de uma posição desejada. O esquema é mostrado na figura abaixo:



Nessa figura, o motor aparece representado pelo bloco $G(s)$, e a fonte de tensão que vai acioná-lo aparece representada pelo bloco K . O erro de posição (diferença entre a posição desejada θ_r e a posição atual $\theta(t)$) é representado pela variável $e(t)$, e a tensão aplicada pela fonte ao motor é representada por $v(t)$. A idéia é que a tensão $v(t)$ aplicada na entrada do motor seja proporcional à diferença entre a posição desejada θ_r e a posição atual $\theta(t)$ (ou seja, proporcional ao erro $e(t)$):

$$v(t) = K (\theta(t) - \theta_r)$$

O motor será ligado a partir de uma posição inicial $\theta(0) = 0$ com velocidade inicial nula, sendo que um degrau unitário $U_0(t)$ será introduzido na entrada θ_r .

- (a) Resolva a equação diferencial do motor com controle realimentado utilizando a técnica de transformada de Laplace. Estude como a equação diferencial que rege o movimento do motor nessas condições irá depender da constante K . Esboce o gráfico da solução da equação para diferentes valores de K . Verifique que de fato o motor se aproxima, assintoticamente, da posição $\theta = 1$.
- (b) Interprete o significado dessa estrutura: para quê se faz esse “controle realimentado”? Quais vantagens existem dessa estrutura em relação à possibilidade mais “óbvia”, de simplesmente aplicar na entrada do motor a tensão necessária para fazê-lo dirigir-se para a posição desejada?

6 Sistemas de Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

Nos restringiremos aos sistemas de duas equações lineares de primeira ordem da seguinte forma

$$x' = ax + by + f(t)$$

$$y' = cx + dy + g(t),$$

onde a , b , c e d são constantes e as funções $f(t)$ e $g(t)$ serão assumidas contínuas na reta real.

Quando $f(t)$ e $g(t)$ forem identicamente a zero dizemos que o sistema é **homogêneo**.

Os mesmos argumentos usados no estudo de equações lineares de segunda ordem nos leva a concluir que o problema de valor inicial

$$x' = ax + by + f(t) \tag{123}$$

$$y' = cx + dy + g(t) \tag{124}$$

$x(t_o) = x_o$ e $y(t_o) = y_o$, tem no máximo uma solução.

Nos casos que consideraremos, calcularemos explicitamente as soluções, razão pela qual não estaremos preocupados com a existência, de qualquer forma, pode-se mostrar que o problema de valor inicial acima tem sempre solução.

A solução $(x(t), y(t))$ do sistema pode ser vista como uma parametrização de uma curva que descreve a trajetória de uma partícula no plano, na qual o parâmetro t é o tempo.

Embora exista uma relação íntima entre o problema de resolver sistemas lineares e álgebra linear, não iremos explorá-la.

Note que se $b = 0$, então, o sistema se transforma em

$$x' = ax + f(t)$$

$$y' = cx + dy + g(t),$$

em particular, a primeira equação não depende de y e é linear de primeira ordem na variável x , a qual podemos resolver. Uma vez tendo a resolvido, substituímos o valor de $x(t)$ encontrado na segunda equação e teremos uma equação de primeira ordem em y , a qual podemos resolver. Mesmo raciocínio se aplica se $c = 0$, neste caso, resolve-se a primeiro a segunda equação e substitui-se o resultado, $y(t)$, encontrado na primeira, com isso obtemos uma equação de primeira ordem em x .

6.1 Transformando o Sistema numa Equação Diferencial de Segunda Ordem

Vimos que se pelo menos um dos coeficientes b ou c for nulo, a resolução do sistema se reduz à resolução de duas equações lineares de primeira ordem. Por outro lado, se b e c não forem nulos, podemos transformar o sistema acima numa equação linear de segunda ordem, como será descrito em seguida.

De fato, como $b \neq 0$, de (123), temos

$$y = \frac{x' - ax - f(t)}{b}, \quad (125)$$

portanto, tomando-se a derivada de (125) equação em relação à t , temos

$$y' = \frac{x'' - ax' - f'(t)}{b}, \quad (126)$$

por outro lado, de (124) e de (126), temos

$$cx + dy + g(t) = \frac{x'' - ax' - f'(t)}{b}, \quad (127)$$

além disso, substituindo o valor de y dado em (125) nesta equação temos

$$cx + d \left(\frac{x' - ax - f(t)}{b} \right) + g(t) = \frac{x'' - ax' - f'(t)}{b}, \quad (128)$$

com isso eliminamos y e temos a seguinte equação linear de segunda ordem em x , temos

$$x'' - (a + d)x' + (ad - bc)x = -df(t) + bg(t) + f'(t), \quad (129)$$

com condições iniciais $x(t_0) = x_0$ e $x'(t_0) = ax_0 + by_0 + f(t_0)$.

Uma vez resolvida a equação (129), obtemos $x(t)$ e substituindo este valor na equação (125), obtemos $y(t)$.

Exemplo 6.1 *Resolva o seguinte problema*

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= x - y, \end{aligned}$$

com condições iniciais, $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$.

Solução. Em vista de (125) e de (129), temos

$$y = x' - x \quad (130)$$

e

$$x'' - 2x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2. \quad (131)$$

A equação característica de (131) é $\lambda^2 - 2 = 0$, logo, $\lambda_1 = \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, portanto, a solução geral da mesma é

$$x(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t}.$$

Como queremos que $x(0) = 1$ e $x'(0) = 2$, devemos tomar $c_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ e $c_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$, portanto,

$$x(t) = \frac{1+\sqrt{2}}{2} e^{\sqrt{2}t} + \frac{1-\sqrt{2}}{2} e^{-\sqrt{2}t}. \quad (132)$$

Tendo em vista (130), temos

$$y(t) = \frac{1}{2} e^{\sqrt{2}t} + \frac{1}{2} e^{-\sqrt{2}t}, \quad (133)$$

com isso obtemos a solução do sistema.

Note que quando t fica muito grande e negativo a curva solução descrita por (132) e (133) aproxima-se da reta $y = \frac{1}{1-\sqrt{2}} x$. Por outro lado, quando t fica muito grande e positivo a curva aproxima-se da reta $y = \frac{1}{1+\sqrt{2}} x$.

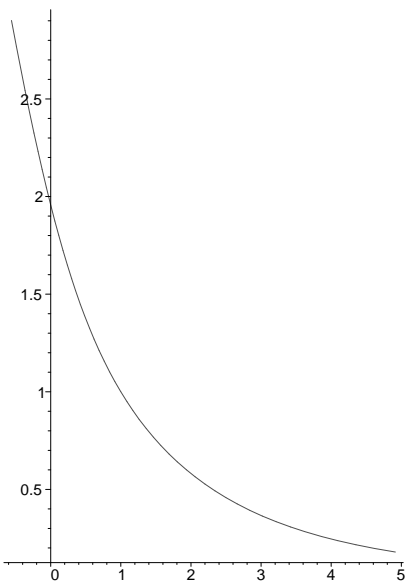


Figura 35: Gráfico da solução $(x(t), y(t))$, do Exemplo 6.1, com $-1 \leq t \leq 1$.

Exercício 6.1 Considere a Figura 36.

(a) Monte o sistema de equações diferenciais de primeira ordem que descreve as quantidades de sal $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$, nos tanques 1 e 2, respectivamente, sabendo-se que as quantidades iniciais de sal nestes tanques são 25oz e 15oz, respectivamente ($1 \text{ oz} \approx 28.35\text{g}$ e $1 \text{ gal} \approx 3.8 \text{ l}$).

(b) Resolva o sistema obtido no item (a) e encontre $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$.

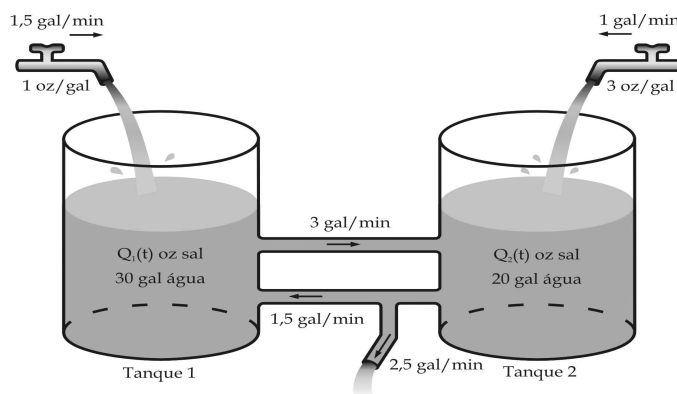


Figura 36: Soluções em dois tanques comunicantes.

Solução. Note os volumes dos dois tanques não mudam com o tempo, visto que a quantidade de solução que entra é igual à quantidade que sai nos mesmos. Portanto, a concentração de solução nos tanques 1 e 2 em cada instante são $\frac{Q_1(t)}{30}$ e $\frac{Q_2(t)}{20}$, respectivamente. A taxa de variação da quantidade de sal no tanque 1, $\frac{dQ_1(t)}{dt}$, é a taxa na qual o sal entra neste tanque, menos a taxa na qual ele sai do mesmo, ou seja,

$$\frac{dQ_1(t)}{dt} = 1,5 + 1,5 \frac{Q_2(t)}{20} - 3 \frac{Q_1(t)}{30}.$$

De maneira análoga, temos

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = 3 + 3 \frac{Q_1(t)}{30} - 4 \frac{Q_2(t)}{20}.$$

Assim, temos o seguinte sistema linear não-homogêneo

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix}, \quad Q_1(0) = 25, \quad Q_2(0) = 15.$$

Deixaremos para o leitor a resolução do item (b). ■

Exemplo 6.2 Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Solução. Note que podemos escrever o sistema acima como

$$x' = x + y + 1 \tag{134}$$

$$y' = x + y + e^t. \tag{135}$$

De (134), temos

$$y = x' - x - 1. \tag{136}$$

Derivando (136) em relação à t , temos

$$y' = x'' - x'. \tag{137}$$

Em vista de (135) e (137), temos

$$x'' - x' = x + y + e^t \tag{138}$$

de (138) e (136), temos

$$x'' - x' = x + (x' - x - 1) + e^t \implies x'' - 2x' = e^t - 1.$$

Assim, temos o seguinte problema de valor inicial

$$x'' - 2x' = e^t - 1, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1. \tag{139}$$

Uma vez resolvido o problema de valor inicial (139), obtemos $y(t)$ a partir de (136). A solução geral da equação acima é $x(t) = c_1 + c_2 e^{2t} - e^t + \frac{t}{2}$. Obtemos os seguintes resultados

$$x(t) = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} e^{2t} + \frac{t}{2} - e^t$$

e

$$y(t) = \frac{3}{4} e^{2t} - \frac{t}{2} - \frac{7}{4}.$$

■

6.2 Resolvendo o Sistema Através da Transformada de Laplace

Sejam $X(s)$, $Y(s)$, $F(s)$ e $G(s)$ as transformadas de Laplace de $x(t)$, $y(t)$, $f(t)$ e $g(t)$, respectivamente. Tomando-se as transformadas de Laplace das duas equações do sistema

$$\begin{aligned}x' &= ax + by + f(t) \\y' &= cx + dy + g(t),\end{aligned}$$

com condições iniciais $x(0) = x_o$ e $y(0) = y_o$, temos

$$\begin{aligned}sX(s) - x_o &= aX(s) + bY(s) + F(s) \\sY(s) - y_o &= cX(s) + dY(s) + G(s),\end{aligned}$$

o qual é equivalente a

$$\begin{pmatrix} s-a & -b \\ -c & s-d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o + F(s) \\ y_o + G(s) \end{pmatrix},$$

cuja solução é

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s-a & -b \\ -c & s-d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_o + F(s) \\ y_o + G(s) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(s-a)(s-d) - bc} \begin{pmatrix} s-d & b \\ c & s-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o + F(s) \\ y_o + G(s) \end{pmatrix}. \quad (140)\end{aligned}$$

As inversas das transformadas de Laplace de $X(s)$ e $Y(s)$ nos darão $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente.

Exemplo 6.3 Usando a transformada de Laplace, resolva o problema de valor inicial

$$x' = x + y + 1 \quad (141)$$

$$y' = x + y + e^t, \quad (142)$$

com condições iniciais $x(0) = 1$ e $y(0) = -1$.

Solução. De (140), temos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} &= \frac{1}{(s-1)(s-1)-1} \begin{pmatrix} s-1 & 1 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{s} \\ -1 + \frac{1}{s-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2-2s} \begin{pmatrix} s-1 & 1 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s} \\ \frac{2-s}{s-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{s^3-2s^2+s+1}{s^2(s-1)(s-2)} \\ \frac{-s^2+3s+1}{s^2(s-2)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$X(s) = \frac{s^3 - 2s^2 + s + 1}{s^2(s-1)(s-2)} = \frac{5}{4} \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s-1} + \frac{3}{4} \frac{1}{s-2}$$

e

$$Y(s) = \frac{-s^2 + 3s + 1}{s^2(s-2)} = -\frac{7}{4} \frac{1}{s} + -\frac{1}{2} \frac{1}{s^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{s-2},$$

logo,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{5}{4} + \frac{1}{2} t - e^t + \frac{3}{4} e^{2t} \\ y(t) &= -\frac{7}{4} - \frac{1}{2} t + \frac{3}{4} e^{2t}. \end{aligned}$$

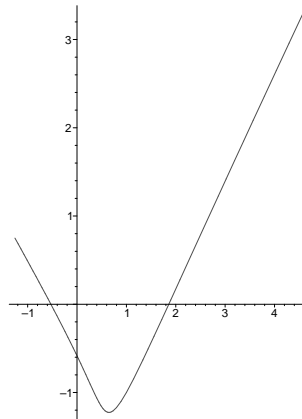


Figura 37: Gráfico da solução $(x(t), y(t))$, do Exemplo 6.3, com $-5 \leq t \leq 1$.

Exemplo 6.4 Usando a transformada de Laplace, resolva o seguinte problema

$$\begin{aligned}x' &= x + y \\y' &= x - y,\end{aligned}$$

com condições iniciais, $x(0) = 1$ e $y(0) = 1$.

Solução. De (140), temos

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} &= \frac{1}{(s-1)(s+1)-1} \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{s+2}{s^2-2} \\ \frac{s}{s^2-2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{s+2}{s^2-2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \frac{1}{s-\sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{2}}{2} \frac{1}{s+\sqrt{2}} \\Y(s) &= \frac{s}{s^2-2} = \frac{1}{2} \frac{1}{s-\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$x(t) = \frac{1+\sqrt{2}}{2} e^{\sqrt{2}t} + \frac{1-\sqrt{2}}{2} e^{-\sqrt{2}t}$$

e

$$y(t) = \frac{1}{2} e^{\sqrt{2}t} + \frac{1}{2} e^{-\sqrt{2}t}.$$

■

6.3 Exercícios

Para cada um dos sistemas de equações diferenciais abaixo, determine as soluções para as condições iniciais dadas e esboce, no mesmo plano de fase, as curvas solução encontradas.

$$1. \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$
$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

$$2. \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$
$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

$$3. \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$
$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

$$4. \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$
$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$$5. \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$
$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$$6. \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$$7. \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$8. \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$9. \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$10. \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

7 Séries de Fourier

Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **periódica de período** T , se $f(x + T) = f(x)$, para todo x .

Exemplo 7.1 As seguinte funções são periódicas:

(a) $\text{sen } x$ é periódica de período 2π .

(b) $f(x) = x - [x]$, onde $[x]$ representa o maior inteiro menor do que ou igual a x , é periódica de período 1. Veja o gráfico desta função na Figura 38.

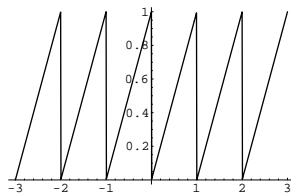


Figura 38: Gráfico da função $x - [x]$.

Se T é um período de f , kT , onde k é um inteiro também é um período. Todavia, quando nos referimos ao período de uma função estaremos considerando o seu período fundamental, ou seja, o menor valor de $T \neq 0$, tal que $f(x + T) = f(x)$, para todo x . Tal valor T é chamado de período fundamental de f .

Exercício 7.1 Mostre que se f é derivável e periódica, então, f' também é periódica.

Dizemos que uma função é **seccionalmente contínua** na reta se ela tiver um número finito de descontinuidades (todas de primeira espécie) em qualquer intervalo limitado. Em outras palavras, dados $a < b$, existem $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n = b$, tais que f é contínua em cada intervalo aberto (a_j, a_{j+1}) , $j = 1, 2, \dots, n - 1$ e existem os limites

$$f(a_j + 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x) \quad e \quad f(a_j - 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x).$$

Toda função contínua é seccionalmente contínua. A função $\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, não é seccionalmente contínua, pois, em $x = 0$ a sua descontinuidade não é de primeira espécie. A função definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 1, \\ 0, & \text{se } \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

não é seccionalmente contínua: apesar de todas as suas descontinuidades serem de primeira espécie, existem um número infinito das mesmas no intervalo $(0, 1)$.

Exemplo 7.2 *Alguns exemplos de funções seccionalmente contínuas.*

(a) *A função sinal, definida como*

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ -1, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

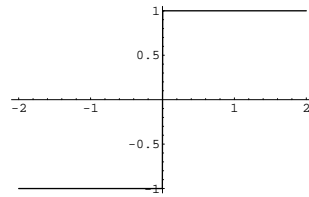


Figura 39: *Gráfico da função sinal.*

(b) $f(x) = x - [x]$.

(c)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < \pi, \\ 0, & \text{se } -\pi \leq x < 0, \end{cases}$$

$f(x + 2\pi) = f(x)$.

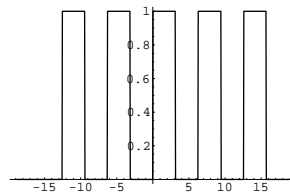


Figura 40: *Gráfico da função do item (c).*

(d) $f(x) = |x|$, se $|x| \leq 1$ e $f(x+2) = f(x)$.

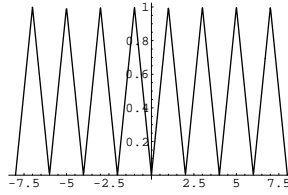


Figura 41: Gráfico da função do item (d).

Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **seccionalmente diferenciável** se ela e a sua derivada forem seccionalmente contínuas. Note que f' não existirá onde f for descontínua. Mesmo em pontos onde f for contínua, pode ser que f' não exista.

Dadas duas funções reais f e g definidas em $[-L, L]$, tais que os seus quadrados sejam integráveis neste intervalo, definimos o **produto interno ou escalar** delas como $\int_{-L}^L f(x)g(x)dx$. Se o produto escalar de f e g for zero dizemos que estas duas funções são **ortogonais**.

Exercício 7.2 *Mostre que*

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_{-L}^L \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx &= \delta_{nm} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx \\ \frac{1}{L} \int_{-L}^L \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx &= 0, \end{aligned}$$

onde

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ 1, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Logo o conjunto formado por $\left\{ \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right)}{\sqrt{L}}, \frac{\cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right)}{\sqrt{L}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ é ortonormal em $[-L, L]$.

Teorema 7.1 TEOREMA DE FOURIER. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então a série de Fourier de f definida por*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right),$$

onde

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

converge para $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$.

Observação 7.1 No Teorema de Fourier dizer que a série de Fourier converge para $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ significa que para cada x fixo, a seqüência numérica das somas parciais

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right),$$

converge para $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, quando N tende para infinito.

Exercício 7.3 Se f for contínua e periódica, o que podemos dizer sobre $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, ela é também é periódica? Precisamos fazer alguma hipótese adicional em f ? Qual?

Sugestão. Use o Teorema de Fourier.

Observação 7.2 Nesta e na próxima seção em várias situações teremos que calcular integrais de funções do tipo $\operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx$, $\operatorname{sen} ax \cos bx$, $\cos ax \cos bx$. Para calculá-las, usamos as seguintes identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx = \frac{\cos[(a-b)x] - \cos[(a+b)x]}{2}$$

$$\operatorname{sen} ax \cos bx = \frac{\operatorname{sen}[(a+b)x] + \operatorname{sen}[(a-b)x]}{2}$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{\cos[(a-b)x] + \cos[(a+b)x]}{2}.$$

Exercício 7.4 Calcular a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < \pi, \\ 0, & \text{se } -\pi \leq x < 0, \end{cases}$$

$$f(x+2\pi) = f(x).$$

Resolução.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} nx \Big|_0^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx dx = \frac{1 - \cos nx}{\pi n} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi} (1 - \cos n\pi),$$

ou ainda,

$$b_{2k} = 0, \quad e \quad b_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)\pi}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Portanto, a série de Fourier de $f(x)$ é

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen}((2k-1)x).$$

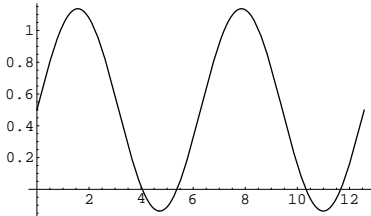


Figura 42: A soma dos dois primeiros termos da série de Fourier de $f(x)$.

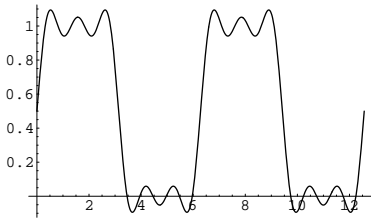


Figura 44: A soma dos quatro termos da série de Fourier de $f(x)$.

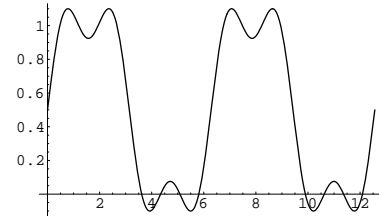


Figura 43: A soma dos três primeiros termos da série de Fourier de $f(x)$.

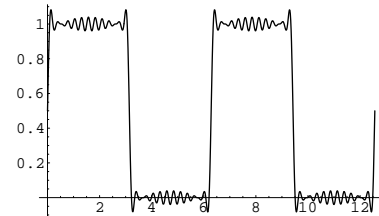


Figura 45: A soma dos quatorze primeiros termos da série de Fourier de $f(x)$.

Exercício 7.5 Use os resultados do exercício 7.4 e obtenha uma expressão em série para π .

Resolução. Segue-se do Teorema de Fourier que no ponto $x = \frac{\pi}{2}$, a série de Fourier é igual a 1.

Logo,

$$1 = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen} \left((2k-1) \frac{\pi}{2} \right),$$

ou seja,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \operatorname{sen} \left((2k-1) \frac{\pi}{2} \right) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1},$$

que é conhecida como a série de Leibniz.

Exercício 7.6 *Seja f uma função periódica de período $2L$, k -vezes derivável com derivada de ordem k absolutamente integrável. Mostre que existe uma constante positiva C tal que*

$$|a_n|, |b_n| \leq \frac{C}{n^k}, \forall n \geq 1.$$

Sugestão: *Use integração por partes k vezes e use o fato que f e suas derivadas até ordem $k - 1$ são periódicas, o que assegura que os termos de fronteira sejam nulos. Podemos tomar $C = \left(\frac{L}{\pi}\right)^k \int_{-L}^L |f^{(k)}(x)| dx$.*

7.1 Séries de Fourier de Funções Pares e Ímpares

Seja I um subconjunto da reta que é simétrico em relação à origem, ou seja, se $x \in I$, então, $-x \in I$. Seja função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função **par** se $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in I$. Se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in I$, dizemos que f é uma função **ímpar**.

Exemplo 7.3 *As funções $f(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}$, $f(x) = x^{2n}$, $n = 1, 2, \dots$, são pares. Por outro lado, as funções $f(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$, $f(x) = x^{2n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, são ímpares.*

Exercício 7.7 *Mostre que*

(i) *A soma ou diferença de duas funções pares é uma função par. A soma ou diferença de duas funções ímpares é uma função ímpar.*

(ii) *O produto ou razão de duas funções pares é uma função par.*

(iii) *O produto ou razão de duas funções ímpares é uma função par.*

(iv) *O produto ou razão de uma função par e uma função ímpar é uma função ímpar.*

(v) *Se f está definida num subconjunto da reta que é simétrico em relação à origem, então, podemos escrever f como a soma de uma função par e uma função ímpar.*

Exercício 7.8

(i) *Suponha que f seja uma função par, integrável em qualquer intervalo limitado. Então,*

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx.$$

(ii) *Suponha que f é uma função ímpar, integrável em qualquer intervalo limitado. Então,*

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0.$$

Demonstração. Basta observar que

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_{-L}^0 f(x)dx + \int_0^L f(x)dx$$

e

$$\int_{-L}^0 f(x)dx = - \int_L^0 f(-y)dy = \int_0^L f(-y)dy = \begin{cases} \int_0^L f(y)dy, & \text{se } f \text{ for par,} \\ - \int_0^L f(y)dy, & \text{se } f \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

7.2 Cálculo de Algumas Séries de Fourier

Seja f_1 periódica de período de $2L$ definida por $f_1(x) = x$, para $-L < x < L$. Como f_1 é ímpar, teremos uma série de senos, cujos os coeficientes são

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = \frac{n\pi x}{L}$, obtemos

$$b_n = \frac{2L}{n^2\pi^2} \int_0^{n\pi} y \operatorname{sen} y dy.$$

Integrando por partes,

$$\int_0^{n\pi} y \operatorname{sen} y dy = -y \cos y \Big|_0^{n\pi} + \int_0^{n\pi} \cos y dy = -n\pi \cos(n\pi).$$

Logo,

$$b_n = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}.$$

Portanto, a série de Fourier de f_1 é

$$f_1(x) \sim \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Seja f_2 periódica de período $2L$ e definida por

$$f_2(x) = \begin{cases} L - x, & \text{para } 0 \leq x \leq L, \\ L + x, & \text{para } -L \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Como f_2 é uma função par, temos uma série de co-senos, cujos os coeficientes são

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L (L - x) dx = \frac{2}{L} \frac{L^2}{2} = L,$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L (L - x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2L}{n^2\pi^2} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 2k, \\ \frac{4L}{(2k-1)^2\pi^2}, & \text{se } n = 2k - 1, \end{cases}$$

$k = 1, 2, \dots$. Portanto, a série de Fourier de f_2 é

$$f_2(x) \sim \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{L}.$$

No presente caso, podemos substituir o símbolo \sim por $=$. Usando o Teorema de Fourier para $x = 0$, obtemos

$$L = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$

ou seja,

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

Seja f_3 a função periódica de período $2L$ e definida por $f_3(x) = x^2$, para $-L \leq x \leq L$. Como f é par, teremos uma série de co-senos cujos coeficientes são

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{2L^2}{3}$$

e

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2L^2}{n^3 \pi^3} \int_0^{n\pi} y^2 \cos y dy = \frac{4L^2}{n^2 \pi^2} (-1)^n.$$

Portanto, a série de Fourier de f_3 é

$$f_3(x) \sim \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Como a função f_3 é contínua, a sua série converge em todos os pontos para a mesma. Usando o Teorema de Fourier para $x = L$, obtemos

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Uma função dada num intervalo $[0, L]$ pode ser representada por mais de uma série de Fourier. Em todas as séries calculadas anteriormente, a função era dada em toda a reta; de fato, dávamos uma expressão para f num intervalo fundamental $(-L, L]$ e dizíamos que ela era periódica de período $2L$. Se agora dermos a função num intervalo $[0, L]$, e nada dissermos sobre o período, teremos a liberdade de escolher um período qualquer, $T > L$, e definirmos a função de jeito que nos convier no intervalo (L, T) . Essa liberdade de escolha será utilizada em problemas de aplicação para atingir certos objetivos. Veja exemplos a seguir.

Exemplo 7.4 Dada $f(x) = x$, para $0 \leq x \leq \pi$, escreva f como uma série de senos.

Resolução. Para obter uma série de senos, devemos definir f para outros valores de x , de modo que ela seja uma função ímpar. Portanto, faremos $f(x) = x$, para $-\pi \leq x \leq \pi$, e periódica de período 2π . A série de Fourier desta função já foi calculada e encontramos,

$$f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx.$$

Conseqüentemente, do Teorema de Fourier, temos

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx, \quad 0 \leq x < \pi.$$

(Na verdade, para $-\pi \leq x \leq \pi$, mas isso não foi pedido no problema.)

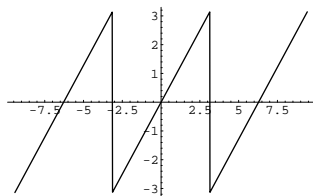


Figura 46: A extensão periódica ímpar de período 2π , da função $f(x) = x$, para $0 \leq x \leq \pi$.

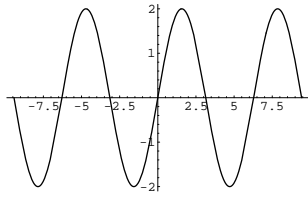


Figura 47: O primeiro termo da série de Fourier de f .

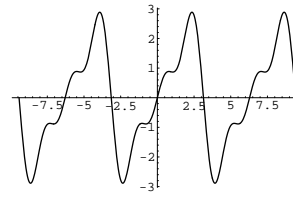


Figura 48: A soma dos três primeiros termos da série de Fourier de f .

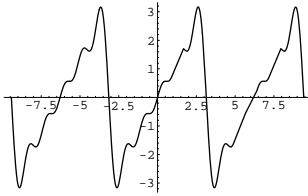


Figura 49: A soma dos cinco primeiros termos da série de Fourier de f .

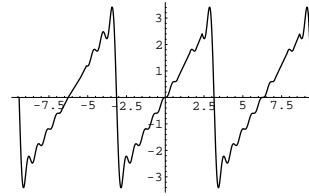


Figura 50: A soma dos dez primeiros termos da série de Fourier de f .

Exemplo 7.5 *No exemplo anterior, poderíamos ter escolhido um período maior do que 2π . Por exemplo, 4π . E aí teríamos também que definir f no intervalo $(\pi, 2\pi]$, além de dizer que ela é ímpar. Uma opção seria definirmos $f(x) = 2\pi - x$, para x em $(\pi, 2\pi]$. Na Figura 51 esboçamos para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.*

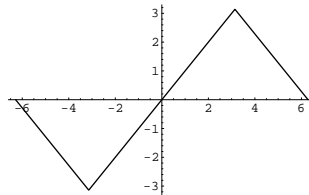


Figura 51:

Calculemos os coeficientes b_n , lembrando que $L = 2\pi$,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \operatorname{sen} \frac{nx}{2} dx + \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} (-x + 2\pi) \operatorname{sen} \frac{nx}{2} dx = \frac{8}{n^2\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}.$$

Portanto, a série de Fourier é

$$\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{nx}{2}.$$

Em virtude do Teorema de Fourier, temos

$$\begin{aligned} x &= \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{nx}{2}, \\ &= \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} \operatorname{sen} \frac{kx}{2}, \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Exemplo 7.6 Dada $f(x) = x$, para $0 \leq x \leq \pi$, escreva f como uma série de co-senos.

Resolução. Para obter uma série co-senos, devemos definir f para outros valores de f de modo que seja uma função par. Tomemos, então, a função $f(x) = |x|$ para $-\pi \leq x \leq \pi$ e periódica de período 2π . (Como no exemplo anterior, se tormarmos outros períodos, por exemplo 4π , por exemplo, teremos outra série de co-senos). Portanto, $b_n = 0$ e

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \begin{cases} \pi, & \text{se } n = 0, \\ \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2\pi}, & \text{se } n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Portanto, a série de Fourier de f é

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x,$$

logo, do Teorema de Fourier

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Exemplo 7.7 Dada $f(x) = x$, para $0 \leq x \leq \pi$, escreva f como uma série de senos e co-senos.

Resolução. Podemos definir f para outros valores de x , de modo que seja periódica de período 2π e $f(x) = 0$ para $-\pi \leq x \leq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} a_o &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{\pi}{2} \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{\pi}{2} \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Portanto, a série de Fourier de f é

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx.$$

Em particular, do Teorema de Fourier, temos

$$x = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Exercício 7.9 Seja $f(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq \pi$.

(a) Mostre que a série de Fourier de cossenos de f é

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

(b) Usando $x = \pi$, conclua que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

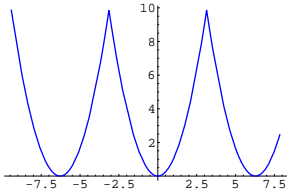


Figura 52: Gráfico da extensão periódica par de f .

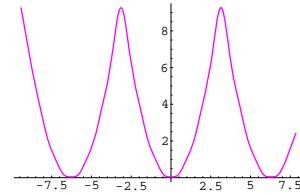


Figura 53: A soma dos sete primeiros termos da série de Fourier de cossenos de f .

Exemplo 7.8 Dada uma função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, mostre que ela possui a seguinte série de senos

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2L}, \quad (143)$$

onde

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2L} dx.$$

Resolução. Inicialmente, iremos estender f para uma função g definida em $[0, 2L]$, de modo que ela coincida com f no intervalo $[0, L]$ e $g(x) = f(2L - x)$, para x no intervalo $[\pi, 2L]$. Isto faz com que ela seja simétrica em relação ao eixo $x = L$. Feito isso, iremos estendê-la para todo x de forma

que ela seja uma função periódica ímpar de período $4L$, logo, os seus coeficientes de Fourier (de senos) serão dados por

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{2L} \int_0^{2L} g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L} dx \\ &= \frac{1}{L} \left(\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L} dx + \int_L^{2L} g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L} dx \right) \\ &= \frac{1}{L} \left(\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L} dx + \int_L^{2L} f(2L-x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L} dx \right). \end{aligned}$$

Note que fazendo a mudança de variáveis $y = 2L - x$ na segunda integral, temos

$$\begin{aligned} \int_L^{2L} f(2L-x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L} dx &= - \int_L^0 f(y) \operatorname{sen} \frac{n(2L-y)\pi}{2L} dy \\ &= \int_0^L f(y) \operatorname{sen} \frac{n(2L-y)\pi}{2L} dy \\ &= \int_0^L f(y) \operatorname{sen} \left(n\pi - \frac{n\pi y}{2L} \right) dy \\ &= -\cos n\pi \int_0^L f(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2L} dy \\ &= -(-1)^n \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi y}{2L} dx. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$c_n = \frac{1 - (-1)^n}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L} dx$$

o que é o resultado desejado. ■

Exercício 7.10 *Seja $f(x)$ definida como*

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

- (a) *Seja g o prolongamento periódico ímpar com período 2π de f . Esboce o gráfico de g .*
- (b) *Calcule a série de Fourier de g .*
- (c) *Qual o valor da série de Fourier de g no ponto $x = \frac{\pi}{2}$.*

7.3 Exercícios

1. Nos problemas a seguir, esboce o gráfico da função e encontre a sua série de Fourier.

- (a) $f(x) = -x$, $-L \leq x < L$, $f(x + 2L) = f(x)$
- (b) $f(x) = \begin{cases} 1 , & -L \leq x < 0 \\ 0 , & 0 \leq x < L \end{cases}$; $f(x + 2L) = f(x)$
- (c) $f(x) = \begin{cases} -L - x , & -L \leq x < 0 \\ L - x , & 0 \leq x < L \end{cases}$; $f(x + 2L) = f(x)$
- (d) $f(x) = \begin{cases} x + 1 , & -1 \leq x < 0 \\ x , & 0 \leq x < 1 \end{cases}$; $f(x + 2) = f(x)$
- (e) $f(x) = \begin{cases} 0 , & -1 \leq x < 0 \\ x^2 , & 0 \leq x < 1 \end{cases}$; $f(x + 2) = f(x)$
- (f) $f(x) = \begin{cases} 0 , & -\pi \leq x < 0 \\ \text{sen } x , & 0 \leq x < \pi \end{cases}$; $f(x + 2\pi) = f(x)$
- (g) $f(x) = |\text{sen } x|$
- (h) $f(x) = \text{sen}^2 x$

2. Nos problemas a seguir, determinar se cada função dada é par, ou ímpar, ou nem par nem ímpar. Esboce o gráfico da função em cada caso.

- | | |
|--------------------|----------------|
| (a) x^3 | (e) $\sec x$ |
| (b) $x^3 - 2x$ | (f) $ x^3 $ |
| (c) $x^3 - 2x + 1$ | (g) e^{-x} |
| (d) $\tan 2x$ | (h) $e^{- x }$ |

3. Considere a função $f(x) = x^2$, $0 \leq x < 1$.

- (a) Faça o desenvolvimento em séries de Fourier correspondente à *extensão periódica* dessa função, ou seja, o desenvolvimento da função como se ela fosse periódica fora do intervalo no qual ela se encontra definida, sendo seu período igual a 1. Esboce o gráfico da função resultante no intervalo $[-4, 4]$.
- (b) Faça o desenvolvimento em séries de Fourier correspondente à *extensão periódica par* dessa função, ou seja, o desenvolvimento utilizando apenas termos em cosseno, com período 2. Esboce o gráfico da função resultante no intervalo $[-4, 4]$.
- (c) Faça o desenvolvimento em séries de Fourier correspondente à *extensão periódica ímpar* dessa função, ou seja, o desenvolvimento utilizando apenas termos em seno, com período 2. Esboce o gráfico da função resultante no intervalo $[-4, 4]$.

4. Considere as funções:

$$(a) f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1 \\ x, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 1 - x, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x \leq 1 \\ -x, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Para cada uma das funções acima:

- (i) Esboce o gráfico da extensão periódica de período igual a 3 da função, no intervalo de -12 a 12. Determine a série de Fourier dessa extensão.
- (ii) Esboce o gráfico da extensão par de período igual a 6 da função, no intervalo de -12 a 12. Determine a série de Fourier dessa extensão.
- (iii) Esboce o gráfico da extensão ímpar de período igual a 6 da função, no intervalo de -12 a 12. Determine a série de Fourier dessa extensão.

7.4 Trabalhos

7.4.1 Ressonância

Suponha um sistema massa-mola sem atrito, com frequência natural $w_0 = 3$, originalmente em repouso e submetido a uma força externa periódica com frequência w . A pergunta que queremos responder é se o sistema pode entrar em ressonância mesmo se a frequência externa w for diferente da frequência natural do sistema w_0 .

Questão 1. Suponha inicialmente que a força externa é $g(t) = \sin t$. Observe que a frequência da força externa é $w = 1 \neq w_0 = 3$. Chamando de y a distância da massa ao ponto de equilíbrio do sistema massa-mola, o problema é modelado por: $y'' + 9y = \sin t$ com $y(0) = y'(0) = 0$. Ache a solução e, se possível, esboce o seu gráfico. Descreva o movimento da massa.

Questão 2. Considere o mesmo problema, mas com força externa $g(t) = \sin 3t$, ou seja, com frequência $w = 3 = w_0$. Ache a solução e, se possível, esboce o seu gráfico. Descreva o movimento da massa. O sistema entra em ressonância?

Questão 3.

a) Seja $y_1(t)$ uma solução particular de $y'' + w_0^2 y = g_1(t)$ e seja $y_2(t)$ uma solução particular de $y'' + w_0^2 y = g_2(t)$. Mostre que $y_p(t) = y_1(t) + y_2(t)$ é uma solução particular de $y'' + w_0^2 y =$

$g_1(t) + g_2(t)$.

b) Determine a solução $y'' + 9y = \sin t + \sin 3t$ com $y(0) = y'(0) = 0$. O sistema entra em ressonância? (observe que a força externa $g(t) = \sin t + \sin 3t$ tem período 2π e logo frequência $w = 1 \neq 3 = w_0$).

Questão 4. Considere de novo o mesmo problema $y'' + 9y = g(t)$ com $y(0) = y'(0) = 0$ mas com

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi \\ 0, & t = 0, \pi, 2\pi \\ -1, & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Mostre que a frequência de $g(t)$ é $1 \neq w_0$. O sistema entra em ressonância? Justifique sua resposta.

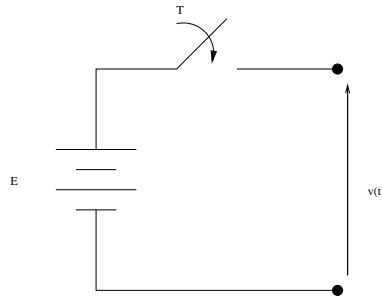
Questão 5. Considere agora um sistema massa massa-mola sem atrito, com frequência natural w_0 , originalmente em repouso e submetido a uma força externa periódica $g(t)$ com frequência w . O que é preciso observar para saber se o sistema entra em ressonância?

7.4.2 Filtragem

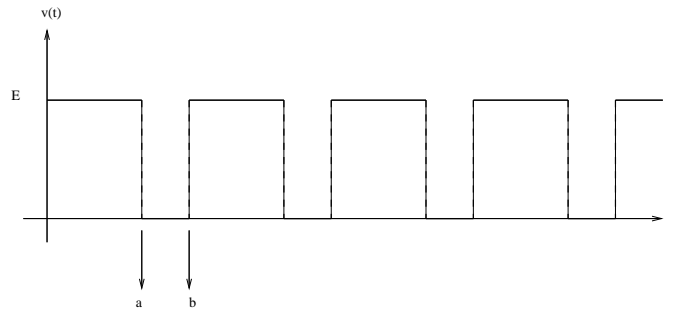
Existem sistemas que recebem um sinal em sua entrada, e têm por objetivo fornecer em sua saída um sinal que é composto das componentes da série de Fourier do sinal de entrada que estiverem dentro de determinada faixa de frequências. A ação desses sistemas pode ser interpretada como: “deixar passar uma certa faixa de frequências, e eliminar o restante das frequências presentes num sinal”. Esses sistemas são denominados *filtros*.

Os filtros têm larga aplicação em diversos dispositivos tecnológicos. Por exemplo, o seletor de canais de um aparelho de rádio ou de televisão é um filtro, que “deixa passar” apenas a faixa de frequências de uma determinada emissora que tiver sido selecionada, eliminando as demais frequências (correspondentes às outras emissoras) que também tiverem chegado na mesma antena receptora do aparelho.

Questão: Considere um sinal de tensão elétrica $v(t)$, que foi produzido através do processo de ligar e desligar periodicamente uma chave, com período T , assim conectando e desconectando uma bateria que fornece a tensão E , conforme mostrado na figura abaixo:

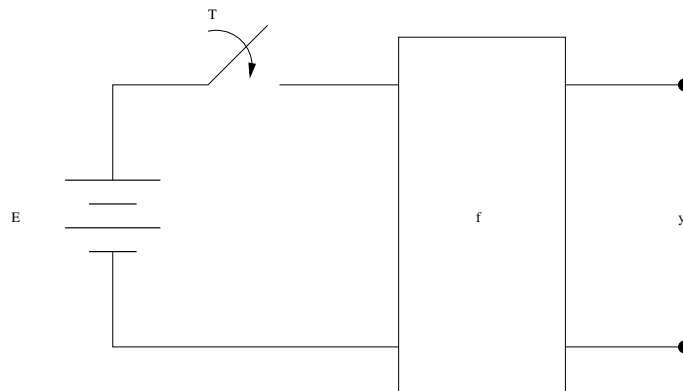


O sinal $v(t)$ resultante possui o formato mostrado na figura abaixo:



Observe que o intervalo de tempo θ , dentro de um período de duração T , no qual a chave fica ligada, não necessariamente é igual ao intervalo no qual a chave fica desligada, ou seja, o sinal não possui simetria entre a parte “ligada” e a parte “desligada”.

Suponha que encontra-se disponível um filtro que “deixa passar” sinais na faixa de 0 Hz a 10 Hz, e que elimina senóides com frequências fora dessa faixa, assim produzindo o sinal $y(t)$, conforme mostrado na figura abaixo.



(a) Calcule a série de Fourier do sinal $v(t)$.

- (b) Explique como esse esquema pode ser utilizado para gerar sinais de tensão $y(t)$ constantes, a partir de uma correta seleção do período T de chaveamento.
- (c) Explique como o valor da tensão $y(t)$ pode ser modificado a partir de uma correta seleção do intervalo θ .

Observação: Esse é o esquema básico de funcionamento das “fontes de tensão chaveadas”, existentes por exemplo em equipamentos eletrônicos como os computadores ou as televisões. Este circuito denomina-se “circuito com modulação PWM” (Pulse Width Modulation, ou Modulação por Largura de Pulso).

8 Equações Diferenciais Parciais

8.1 A equação de Calor

A equação de calor em uma dimensão espacial modela o fluxo de calor num fio que é isolado em toda parte, exceto, nas duas extremidades. Matematicamente, temos o seguinte problema: seja \mathcal{R} a região do plano (x, t) determinada por $0 < x < L$ e $t > 0$, e $\overline{\mathcal{R}}$ a união de \mathcal{R} com sua fronteira que é formada pelas semi-retas $\{x = 0, t > 0\}$ e $\{x = L, t > 0\}$ e pelo segmento $\{0 \leq x \leq L, t = 0\}$. O problema da condução do calor consiste em determinar uma função real $u(x, t)$ definida em $\overline{\mathcal{R}}$ que satisfaça à equação do calor

$$u_t = K u_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \quad (144)$$

que satisfaça à condição inicial

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (145)$$

onde $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada e, finalmente, que satisfaça às condições de fronteira que vamos descrever abaixo. A constante K é chamada de **difusividade térmica**, depende apenas do material de que é feita a barra, por exemplo, se o material for cobre, então, $K = 1.14 \text{cm}^2/\text{s}$.

8.1.1 Condições de Fronteira

Tipo I. Suponhamos que, por algum processo, as extremidades da barra sejam mantidas a temperaturas conhecidas. Por exemplo, constante em cada extremidade,

$$u(0, t) = T_1 \quad e \quad u(L, t) = T_2,$$

onde T_1 e T_2 são temperaturas dadas. Um caso mais complexo seria aquele em que se conhece a variação de temperatura em um das extremidades (ou em ambas), isto é

$$u(0, t) = h_o(t) \quad e \quad u(L, t) = h_1(t),$$

onde $h_o(t)$ e $h_1(t)$, para $t \geq 0$, são as temperaturas em cada uma das extremidades.

Tipo II. Suponhamos que as extremidades estejam isoladas termicamente. Isto quer dizer que os fluxos de calor através de $x = 0$ e $x = L$ são nulos, ou seja,

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0.$$

Tipo III. Suponhamos que meio ambiente tenha uma temperatura u_o e que haja transferência de calor, entre a barra e o meio ambiente, regidas pela lei

$$ku_x(0, t) = e(u(0, t) - u_o), \quad ku_x(L, t) = -e(u(L, t) - u_o),$$

onde e é uma constante, dita emissividade, característica do material da barra do meio ambiente.

Tipo IV. Uma combinação de duas quaisquer das condições acima, como, por exemplo,

$$u(0, t) = 0 \quad e \quad u_x(L, t) = 0.$$

8.1.2 Separação de Variáveis

O método de separação de variáveis reduz o problema de resolver uma equação diferencial parcial linear ao de resolver equações diferenciais ordinárias. Se u for uma função de duas variáveis, a idéia do método consiste em assumirmos que

$$u(x, t) = F(x)G(t). \tag{146}$$

Substituindo (146) em (154), temos

$$F(x)G'(t) = KF''(x)G(t) \tag{147}$$

ou

$$\frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}. \tag{148}$$

Como o lado esquerdo de (147) depende apenas de t e o direito depende apenas de x , ambos devem ser iguais a uma constante σ . Isto nos leva as equações

$$\frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = \sigma \quad e \quad \frac{F''(x)}{F(x)} = \sigma. \tag{149}$$

Em particular, temos

$$F''(x) - \sigma F(x) = 0, \quad \text{para } 0 < x < L. \tag{150}$$

8.1.3 Barra com extremidades mantidas à 0° C

Vamos assumir que a condição de contorno seja do Tipo I, com $u(0, t) = u(L, t) = 0$. Então devemos ter

$$F(0) = F(L) = 0, \quad (151)$$

pois, como $u(0, t) = F(0)G(t) = 0$, para todo $t > 0$, segue-se que se $F(0) \neq 0$, então, $G(t) \equiv 0$ e, portanto, $u \equiv 0$, o que não tem a chance de satisfazer à condição inicial $u(x, 0) = f(x)$, a menos que $f(x) \equiv 0$.

Há três possibilidades para σ .

i) Se $\sigma > 0$, então a solução geral é da forma

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}.$$

Portanto, se tal F satisfizer (151), o par (c_1, c_2) de constantes deverá satisfazer

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0, \\ c_1 e^{\sqrt{\sigma}L} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}L} &= 0. \end{aligned}$$

Mas a única solução desse sistema é $c_1 = c_2 = 0$. Isto implica $F \equiv 0$, o que não interessa.

ii) Se $\sigma = 0$, a solução geral de (150) é

$$F(x) = c_1 x + c_2,$$

e, para satisfazer (151) deveremos ter

$$c_2 = 0 \quad e \quad c_1 L + c_2 = 0,$$

o que implica $c_1 = c_2 = 0$ e, portanto, $F \equiv 0$.

iii) Se $\sigma < 0$, fazemos $\sigma = -\lambda^2$ e a solução geral é

$$F(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x.$$

Para que tal função satisfaça (151), deveremos ter

$$c_1 = 0 \quad e \quad c_2 \operatorname{sen} \lambda L = 0,$$

como não queremos $c_2 = 0$, devemos ter

$$\operatorname{sen} \lambda L = 0,$$

o que implica $\lambda L = n\pi$, onde n é um inteiro não-nulo ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$). Portanto,

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2},$$

chamados de autovalores do problema e as funções

$$F_n(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

são chamadas de autofunções associadas. Para cada n a solução da segunda equação diferencial de (149) é proporcional a

$$G_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt}.$$

Logo, para cada $n = 1, 2, \dots$, temos uma função

$$u_n(x, t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt} \text{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

que satisfaz a equação a equação de calor e as condições de fronteira dadas.

Exercício 8.1 *(A equação de calor é linear) Mostre que se $u_1(x, t)$ e $u_2(x, t)$ são soluções da equação de calor, o mesmo acontecerá com $u(x, t) = c_1u_1(x, t) + c_2u_2(x, t)$. Portanto, qualquer combinação linear finita de soluções da equação de calor também será solução da mesma.*

Segue-se do exercício acima que toda expressão da forma

$$\sum_{n=1}^N c_n u_n(x, t),$$

onde c_n são constantes é solução da equação de calor. Claramente ela satisfaz as equações de fronteira dadas. Conseqüentemente, se a condição inicial $f(x)$ for da forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^N c_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

então, nesse caso, a solução do problema é

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt} \text{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Se a distribuição inicial de temperatura for

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

então, o candidato a ser a solução do problema é

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{L}.$$

Os coeficientes c_n devem ser escolhidos de modo que $f(x) = u(x, 0) = \sum_n a_n \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right)$; ou seja, eles são os coeficientes da série de Fourier de senos da função f . Assim,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{L} dx.$$

Exercício 8.2 *Resolva o seguinte problema*

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \\ u(x, 0) &= \operatorname{sen}^3 x, \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Exercício 8.3 *Resolva o seguinte problema*

$$\begin{aligned} u_t &= 4u_{xx} + 4u, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \\ u(x, 0) &= 1, \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Sugestão. *Escreva $u(x, t) = e^{4t}v(x, t)$ e mostre que $v(x, t)$ satisfaz a equação de calor já estudada. Quanto vale $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)$?*

8.1.4 Barra isolada termicamente também nas extremidades

Procedendo como no caso anterior, podemos estudar o problema

$$\begin{aligned} u_t &= K u_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\ u_x(0, t) &= u_x(L, t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \text{para } 0 < x < L. \end{aligned}$$

Do método de separação de variáveis, temos

$$\begin{aligned} G'(t) &= \sigma G(t), \quad t \geq 0, \\ F''(x) - \sigma F(x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq L, \end{aligned}$$

onde σ é determinado pela condição de fronteira

$$F'(0) = F'(L) = 0.$$

Os autovalores são $\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ e as autofunções correspondentes são $F_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}$. Para a segunda equação temos $G_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}}$. Note que para cada n , a função $u_n(x, t) = e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} \cos \frac{n\pi x}{L}$ satisfaz a equação de calor e as condições de fronteira dadas e o mesmo vale para qualquer combinação finita destas funções. Vamos tomar a solução da forma

$$u(x, t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} \cos \frac{n\pi x}{L},$$

onde os coeficientes c_n deverão ser tomadas de modo que $f(x) = u(x, 0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L}$; ou seja,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Exemplo 8.1 *Resolva o seguinte problema*

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\ u_x(0, t) &= u_x(\pi, t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \\ u(x, 0) &= \cos^2 x + \cos 5x, \quad \text{para } 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

Solução. Vimos que a solução do problema acima é da forma

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos nx,$$

onde

$$\cos^2 x + \cos 5x = u(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

por outro lado, como $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, temos que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \cos 5x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

logo, $a_0 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_5 = 1$ e os demais coeficientes são nulos, portanto a solução do problema é

$$u(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-4t} \cos 2x + e^{-25t} \cos 5x.$$

Alternativamente, tendo em vista que $\cos ax \cos bx = \frac{1}{2} (\cos(a - b)x + \cos(a + b)x)$, poderíamos ter calculado os coeficientes acima usando as relações

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\cos^2 x + \cos 5x) \cos nx dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 x \cos nx + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos 5x \cos nx dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 x \cos nx + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos 5x \cos nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 + \cos 2x) \cos nx + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos 5x \cos nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos nx \cos 2x dx + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos 5x \cos nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos nx dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (\cos(n - 2)x + \cos(n + 2)x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(n - 5) + \cos(n + 5)x) dx \\
 &= \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq 0, 2, 5 \\ 1, & \text{se } n = 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{se } n = 2 \\ 1, & \text{se } n = 5, \end{cases}
 \end{aligned}$$

o que nos dá o mesmo resultado. ■

Exemplo 8.2 Considere o seguinte problema de condução de calor num fio com as extremidades isoladas.

$$\begin{aligned}
 u_t &= u_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0, \\
 u_x(0, t) &= 0, & u_x(\pi, t) = 0, t > 0, \\
 u(x, 0) &= \text{sen}^3 x, & 0 < x < \pi.
 \end{aligned}$$

- (a) Encontre a solução do problema acima.
 (b) Qual é a temperatura de equilíbrio do fio?

Solução. A solução do problema acima é da forma $u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-n^2 t} \cos nx$, onde

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \text{sen}^3 x \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Note que temos a seguinte identidade trigonométrica

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 \\
 &= \frac{(e^{-i3\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{i3\theta})}{-8i} \\
 &= -\frac{1}{4} \left(\frac{e^{i3\theta} - e^{-i3\theta}}{2i} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) \\
 &= -\frac{1}{4} \operatorname{sen} 3\theta + \frac{3}{4} \operatorname{sen} \theta.
 \end{aligned}$$

Portanto, lembrando que $\operatorname{sen} ax \cos bx = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a+b)x + \operatorname{sen}(a-b)x)$, temos

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(-\frac{1}{4} \operatorname{sen} 3x + \frac{3}{4} \operatorname{sen} x \right) \cos nx dx \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen} 3x \cos nx dx + \frac{3}{2\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen} x \cos nx dx \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi (\operatorname{sen}(n+3)x - \operatorname{sen}(n-3)x) dx + \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi (\operatorname{sen}(n+1)x - \operatorname{sen}(n-1)x) dx.
 \end{aligned}$$

Deixamos para o leitor o cálculo das integrais acima. A temperatura de equilíbrio é $\frac{a_0}{2} = \frac{4}{3\pi}$. ■

8.1.5 Barra com uma extremidade isolada e a outra mantida a 0°C

Temos o seguinte problema

$$\begin{aligned}
 u_t &= Ku_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\
 u(0, t) &= u_x(L, t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \\
 u(x, 0) &= f(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq L.
 \end{aligned}$$

Pelo método de separação de variáveis temos

$$\begin{aligned}
 F''(x) - \sigma F(x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq L, \\
 F(0) = F'(L) &= 0,
 \end{aligned}$$

o que nos leva a $\sigma_n = -\frac{(2n-1)\pi^2}{4L^2}$, $n = 1, 2, \dots$, e as respectivas autofunções $F_n(x) = \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2L}$. Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 K t}{4L^2}} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2L},$$

onde os coeficientes c_n devem ser tais que (veja Exemplo 7.8)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2L},$$

ou seja,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2L} dx.$$

Exercício 8.4

$$\begin{aligned} u_t &= 4u_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\ u(0, t) &= u_x(\pi, t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \\ u(x, 0) &= x^2, \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Exercício 8.5 Mostre que a solução de

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\ u_x(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq L \end{aligned}$$

é

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi\alpha}{2L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right),$$

onde

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} dx.$$

Sugestão. Temos duas alternativas:

(i) Repetir o que foi feito para o caso em que $u(0, t) = u_x(L, t) = 0$, neste caso, precisaremos representar uma função f definida no intervalo $[0, L]$ em termos de uma série de cossenos da forma $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$, o que corresponde fazermos uma extensão de f para uma função g definida no intervalo $[0, 2L]$ de modo que $g(x) = -f(2L - x)$ para x no intervalo de $(L, 2L]$, ou seja, g é anti-simétrica em relação à reta $x = L$, consideramos o prolongamento periódico para de g com período $4L$; ou ainda,

(ii) Podemos escrever $v(x, t) = u(L - x, t)$ e mostrar que $v(x, t)$ é solução do problema que já conhecemos:

$$\begin{aligned} v_t &= \alpha^2 v_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\ v(0, t) &= v_x(L, t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \\ v(x, 0) &= f(L - x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

8.1.6 Condições de fronteira não-homogêneas

Considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} u_t &= K u_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\ u(0, t) &= h_0(t), \quad u(L, t) = h_1(t), \quad \text{para } t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \text{para } 0 < x < L. \end{aligned} \tag{152}$$

A idéia é transformar este problema num de condições de fronteira homogêneas, através de uma mudança da variável dependente u . Assim, suponha que seja possível achar uma função $v(x, t)$ tal que

$$v(0, t) = h_0(t), \quad v(L, t) = h_1(t)$$

e que u seja a solução do problema de valor inicial (152), segue-se que a função $w = u - v$ satisfaz ao seguinte problema

$$\begin{aligned} w_t &= K w_{xx} + g(x, t) \quad \text{em } \mathcal{R}, \\ w(0, t) &= w(L, t) = 0, \quad \text{para } t > 0, \\ w(x, 0) &= f(x) - v(x, 0), \quad \text{para } 0 < x < L, \end{aligned} \tag{153}$$

onde $g(x, t) = K v_{xx} - v_t$. Se for possível determinar v tal que ela seja solução equação de calor em \mathcal{R} , então, $g \equiv 0$. Em muitos problemas, tomaremos $v(x, t) = U(x)$, portanto, $U(x) = ax + b$, onde a e b são determinados pelas condições de contorno.

Exemplo 8.3 Se $h_0(t) = \alpha$ e $h_1(t) = \beta$, onde α e β são constantes.

Neste caso, basta tomar $v(x, t) = \alpha + \frac{(\beta - \alpha)x}{L}$. Uma tal v é solução do calor. Portanto, w é solução do problema

$$\begin{aligned} w_t &= K w_{xx} \quad \text{em } \mathcal{R}, \\ w(0, t) &= w(L, t) = 0, \quad \text{para } t > 0, \\ w(x, 0) &= f(x) - \alpha - \frac{(\beta - \alpha)x}{L}, \quad \text{para } 0 < x < L, \end{aligned}$$

cuja solução é

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{L},$$

onde os c_n são os coeficientes de Fourier de seno da função $f(x) - \alpha - \frac{(\beta - \alpha)x}{L}$, ou seja,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left(f(x) - \alpha - \frac{(\beta - \alpha)x}{L} \right) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Logo, a solução do problema de valor inicial (152) com $h_0(t) = \alpha$ e $h_1(t) = \beta$ é

$$u(x, t) = \alpha + \frac{(\beta - \alpha)x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \text{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

A temperatura

$$U(x) = \alpha + \frac{(\beta - \alpha)x}{L}$$

é chamada de **temperatura de equilíbrio**. Note que quanto t tende a infinito, $u(x, t)$ tende a $U(x)$. Por outro lado, $u(x, t) - U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \text{sen} \frac{n\pi x}{L}$, a qual tende a zero quando t tende a infinito, é chamada de **temperatura transiente**.

Exemplo 8.4 Considere o seguinte problema de condução de calor num fio.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0, t) &= 0, & u(\pi, t) = 10, t > 0, \\ u(x, 0) &= 2 \text{sen} 5x - 0.1 \text{sen} 9x + \frac{10}{\pi} x, & 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

(a) Encontre a solução do problema acima.

(b) Qual é a temperatura de equilíbrio?

Solução. Note que para encontrarmos a temperatura de equilíbrio não precisamos resolver o problema. No caso considerado ela é determinada completamente a partir das condições de fronteira, não depende das condições iniciais: $U(x) = \frac{10x}{\pi}$. Portanto a solução do problema é

$$u(x, t) = \frac{10x}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \text{sen} nx.$$

Da condição inicial, temos

$$2 \text{sen} 5x - 0.1 \text{sen} 9x + \frac{10x}{\pi} = u(x, 0) = \frac{10x}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} nx.$$

Portanto,

$$2 \text{sen} 5x - 0.1 \text{sen} 9x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} nx,$$

e concluímos que $c_5 = 2$, $c_9 = -0.1$ e dos demais coeficientes são nulos. Logo, a solução desejada é

$$u(x, t) = \frac{10x}{\pi} + 2e^{-25t} \operatorname{sen} 5x - 0.1e^{-81t} \operatorname{sen} 9x.$$

Alternativamente, poderíamos ter calculados os coeficientes c_n a partir das relações

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (2 \operatorname{sen} 5x - 0.1 \operatorname{sen} 9x) \operatorname{sen} nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\cos(n-5)x - \cos(n+5)x) dx - \frac{0.1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(n-9)x - \cos(n+9)x) dx, \end{aligned}$$

o que nos dá o resultado acima. ■

Exercício 8.6 *Encontre a solução do seguinte problema*

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\ u(0, t) &= T, \quad u_x(L, t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Sugestão. *Note que a temperatura de equilíbrio é $U(x) = T$. Faça $u(x, t) = T + v(x, t)$ e mostre que $v(x, t)$ é solução do problema conhecido*

$$\begin{aligned} v_t &= \alpha^2 v_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\ v(0, t) &= 0, \quad v_x(L, t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \\ v(x, 0) &= f(x) - T, \quad \text{para } 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Exercício 8.7 *Encontre a solução do seguinte problema (veja sugestão do exercício anterior)*

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = T, \quad \text{para } t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Observação 8.1 *A temperatura de equilíbrio é uma função de x apenas e satisfaz a equação de calor considerada; em particular, a temperatura de equilíbrio da equação $u_t = \alpha^2 u_{xx}$, satisfaz $U''(x) = 0$, logo ela é da forma $U(x) = ax + b$, onde as constantes a e b são determinadas pelas condições de fronteira (e ou inicial quando as condições de fronteiras não forem suficientes para calcularmos a e b , por exemplo, quando as duas extremidades da barra estão isoladas). Para a*

condição de fronteira $u(0, t) - u_x(0, t) = 0$ e $u(L, t) = T$, devemos ter $U(0) - U'(0) = 0$ e $U(L) = T$, portanto, $U(x) = \frac{T}{1+L}(1+x)$. Já para a equação de calor $u_t = \alpha^2 u_{xx} + bu$, a temperatura de equilíbrio deve satisfazer $U'' + \frac{b}{\alpha^2}U = 0$, em particular, se $\frac{b}{\alpha^2} = 1$, $L = \pi$ e as extremidades foram mantidas à temperatura zero, devemos ter $U(0) = 0 = U(\pi)$, portanto, $U(x) = c_1 \text{sen } x$, onde c_1 é uma constante a ser determinada pela condição inicial: $c_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \text{sen } x dx$.

8.2 A Equação da Onda

Outra equação diferencial parcial muito importante que aparece em matemática aplicada é a equação de onda. Ela aparece na descrição de fenômenos envolvendo a propagação de ondas num meio contínuo, por exemplo, no estudo de ondas acústicas, ondas de água, ondas eletromagnéticas e ondas sísmicas. No apêndice 9 temos a dedução da equação da onda em uma dimensão espacial. Desprezando os efeitos de amortecimento, como a resistência do ar e se a amplitude do movimento não for muito grande, ela é dada por

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

8.2.1 A Corda finita

O problema de vibrações transversais de uma corda perfeitamente flexível, de comprimento L , ligeiramente esticada entre dois suportes no mesmo nível horizontal, de modo que o eixo dos x esteja ao longo da corda (veja Figura), consiste em determinar uma função real $u(x, t)$ (deslocamento da corda no ponto x no instante t) definida para $(x, t) \in [0, L] \times [0, \infty)$ que satisfaça à equação da onda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \quad (154)$$

que satisfaça às condições iniciais

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (155)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (156)$$

onde $f, g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas e, finalmente, que satisfaça às condições de fronteira que vamos descrever abaixo. Especificar as condições iniciais consiste em dizermos inicialmente qual a forma da corda, representada por $u(x, 0)$, e o modo que a corda é abandonada nesta posição, o que

é traduzido pela velocidade inicial $u_t(x, 0)$. A constante c é a velocidade de propagação da onda no meio.

8.2.2 Condições de fronteira

I - Corda finita com extremidades fixas. Suponhamos que a corda tenha comprimento L , e que, quando em sua posição de repouso, ela ocupe a porção do plano (x, u) entre 0 e L . Assim, a hipótese de extremidades fixas implica que

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \text{para } t \geq 0.$$

II - Corda finita com extremidades livres. Neste caso a corda de comprimento L , tem suas extremidades forçadas a não se afastarem de trilhos colocados perpendicularmente à corda, no plano (x, u) de vibração. Isso implica

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad \text{para } t \geq 0.$$

III - Outras condições de fronteira. Podemos ter o caso em que as extremidades se movem, transversalmente, de acordo com leis conhecidas. Por exemplo,

$$u(0, t) = a(t), \quad u(L, t) = b(t), \quad \text{para } t \geq 0.$$

8.2.3 A corda vibrante com extremidades fixas

Consideraremos o seguinte problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad \text{em } \mathcal{R}, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad \text{para } t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Vamos fazer separação de variáveis. Assumindo que a solução do problema é da forma $u(x, t) = F(x)G(t)$, ao substituirmos esta expressão na equação diferencial temos

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)}$$

o que nos leva as seguintes equações diferenciais ordinárias

$$F'' - \sigma F = 0, \quad (157)$$

$$G'' = \sigma c^2 G. \quad (158)$$

As condições de fronteira implicam $F(0) = F(L) = 0$, caso contrário, $G(t) \equiv 0$, o que não nos interessa. Assim, somos levados ao seguinte problema

$$\begin{aligned} F'' - \sigma F &= 0, \\ F(0) &= F(L) = 0, \end{aligned}$$

que já foi resolvido quando consideramos a equação do calor: $\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, para $n = 1, 2, \dots$, cujas autofunções são $F_n(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L}$. Para cada σ_n , a solução geral de (157) é

$$G_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi ct}{L},$$

onde a_n e b_n são constantes arbitrárias. Logo, as funções

$$u_n(x, t) = a_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{n\pi ct}{L}$$

satisfazem a equação de onda e as condições de fronteira. O passo seguinte é determinar os coeficientes a_n e b_n , de modo que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{n\pi ct}{L} \right), \quad (159)$$

satisfaça às condições iniciais. Isto implica que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

e é necessário que

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Para a determinação dos b_n , derivamos (formalmente) termo a termo a série que define $u(x, t)$, em relação a t . Usando a segunda condição inicial temos,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

logo, devemos ter

$$\frac{n\pi c}{L} b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,$$

de onde obtemos,

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Embora não tenhamos feito nenhuma hipótese em f e g , sob a hipótese que f, f', f'', g, g' serem contínuas e f''' e g'' serem seccionalmente contínuas em $[0, L]$ e, além disso, $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = g(0) = g(L) = 0$; então, os coeficientes a_n e b_n decairão pelo menos com $\frac{1}{n^3}$ e não teremos problemas de convergência, todo o procedimento acima é rigoroso, nos levando a solução do problema proposto.

Tendo em vistas as identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} a \cos b &= \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)], \\ \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)], \end{aligned}$$

a expressão (159) pode ser re-escrita como

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi(x+ct)}{L} + a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi(x-ct)}{L} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \cos \frac{n\pi(x-ct)}{L} - b_n \cos \frac{n\pi(x+ct)}{L} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi(x+ct)}{L} - b_n \cos \frac{n\pi(x+ct)}{L} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi(x-ct)}{L} + b_n \cos \frac{n\pi(x-ct)}{L} \right) \\ &= F(x+ct) + G(x-ct), \end{aligned}$$

onde

$$F(w) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi w}{L} - b_n \cos \frac{n\pi w}{L} \right)$$

e

$$G(w) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi w}{L} + b_n \cos \frac{n\pi w}{L} \right).$$

Portanto, podemos escrever

$$u(x, t) = F(x+ct) + G(x-ct),$$

ou seja, a solução do problema pode ser vista como a superposição de duas ondas $F(x-ct)$ e $G(x+ct)$, que se propagam para a direita e esquerda, respectivamente, com velocidade c .

Exercício 8.8 Mostre que a equação de onda é linear, ou seja, se $u_1(x, t)$ e $u_2(x, t)$ forem duas soluções de $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, então, para quaisquer constantes c_1 e c_2 , $u(x, t) = c_1 u_1(x, t) + c_2 u_2(x, t)$ também será solução da equação de calor.

Exercício 8.9 Mostre que se $u_1(x, t)$ for solução de

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad \text{para } t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad \text{para } 0 \leq x \leq L, \end{aligned}$$

e $u_2(x, t)$ for solução de

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad \text{para } t \geq 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq L, \end{aligned}$$

então, $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$ é solução de

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad \text{para } t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Exercício 8.10 Resolva o seguinte problema:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) &= 0 = u(\pi, t), \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) &= \text{sen } x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Esboce os gráficos de $u(x, t)$ nos instantes $t = 0$, $t = \pi/2$ e $t = \pi$.

Resolução. Como $g(x) \equiv 0$, segue-se que $b_n = 0$ para todo n . Por outro lado,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \text{sen } x \text{ sen}(nx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(n-1)x - \cos(n+1)x) \, dx \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}, \end{aligned}$$

logo,

$$u(x, t) = \text{sen } x \cos t = \frac{1}{2} \text{sen}(x - t) + \frac{1}{2} \text{sen}(x + t),$$

que a superposição de duas ondas que se propagam com velocidade $c = 1$, se propagando em direções opostas (veja Figuras 54 e 55, mostrando a solução, dada em azul, como a superposição de duas ondas, gráficos nas cores vermelho e verde, nos instantes $t = \pi/4$ e $t = \pi/2$. Note que quando $t = \pi/2$, as duas componentes estão completamente fora de fase e temos interferência destrutiva, $u(x, \pi/2) \equiv 0$. Note que embora em cada instante, cada uma das duas ondas componentes tenham amplitude variando nos pontos $x = 0$ e $x = \pi$, nestes a interferência é sempre destrutiva e $u(0, t) = 0 = u(\pi, t)$, para todo t e temos dois “nós” nestes pontos.) ■

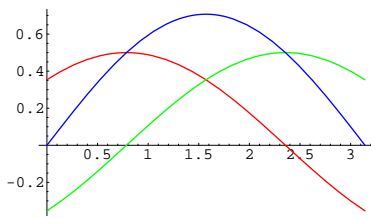


Figura 54: O gráfico de $u(x, \pi/4)$ em azul.

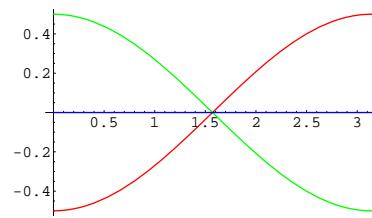


Figura 55: O gráfico de $u(x, \pi/2)$ em azul.

Exercício 8.11 Resolva o seguinte problema:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) &= 0 = u(\pi, t), & t \geq 0 \\ u(x, 0) &= 0 \quad u_t(x, 0) = \cos x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Mostre que se $t = k\pi/2$, onde $k \in \mathbb{Z}$, então a corda estará esticada horizontalmente, ou seja, $u(x, k\pi/2) = 0$ para todo x .

Resolução. Como $f(x) \equiv 0$, segue-se que $a_n = 0$, para todo n . Por outro lado,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos x \operatorname{sen}(nx) dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi (\operatorname{sen}(n+1)x + \operatorname{sen}(n-1)x) dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \begin{cases} 0, & \text{se } n = 1 \\ -\left(\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right) \Big|_0^\pi, & n \neq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } n = 1 \\ \frac{2}{\pi} \frac{1+(-1)^n}{n^2-1}, & n \neq 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Logo,

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2-1} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(nt) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \operatorname{sen}(2nx) \operatorname{sen}(2nt).$$

Em particular, $u(x, k\pi/2) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, para todo x . Além disso, a solução pode ser re-escrita como

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos[2n(x-t)] - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos[2n(x+t)] \equiv F(x-t) - F(x+t),$$

onde $F(w) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos(2nw)$. ■

Exercício 8.12 *Resolva o seguinte problema:*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, & 0 < x < \pi, & t > 0 \\ u(0, t) &= 0 = u(\pi, t), & t & \geq 0 \\ u(x, 0) &= \operatorname{sen} x, & u_t(x, 0) &= \cos x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Resolução. Temos duas alternativas: (i) usar o Exercício 8.9 que diz que a solução do problema acima é a soma das soluções dos Exercícios 8.10 e 8.11 ou (ii) calcular diretamente os coeficientes a_n 's e os b_n 's. ■

Exercício 8.13 *Resolva o seguinte problema:*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx}, & 0 < x < 30, & t > 0 \\ u(0, t) &= 0 = u(30, t), & t & \geq 0 \\ u(x, 0) &= \begin{cases} \frac{x}{10}, & 0 \leq x \leq 10 \\ \frac{30-x}{20}, & 10 \leq x \leq 30 \end{cases} \\ u_t(x, 0) &= 0, & 0 \leq x \leq 30. \end{aligned}$$

Resolução. Vimos que a solução deste problema é da forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{30} \right) \cos \left(\frac{n\pi t}{15} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{30} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi t}{15} \right) \right).$$

Como $u_t(x, 0) = 0$, segue-se que $b_n = 0$, para todo n . Por outro lado,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{15} \left(\int_0^{10} \frac{x}{10} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{30} \right) dx + \int_{10}^{30} \frac{30-x}{20} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{30} \right) dx \right) \\ &= \frac{9}{n^2 \pi^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$u(x, t) = \frac{9}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{3} \right)}{n^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{30} \right) \cos \left(\frac{n\pi t}{15} \right).$$

Note que a solução acima pode ser re-escrita como

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{3} \right)}{n^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi(x-2t)}{30} \right) + \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{3} \right)}{n^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi(x+2t)}{30} \right) \\ &\equiv F(x-2t) + F(x+2t), \end{aligned}$$

onde

$$F(w) = \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{3} \right)}{n^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi w}{30} \right).$$

■

Exercício 8.14 (*Corda com uma extremidade fixa e a outra livre.*) Suponha que uma corda elástica de comprimento L tenha a sua extremidade $x = 0$ fixa ($u(0, t) = 0, \forall t$) e a extremidade $x = L$ livre ($u_x(L, t) = 0, \forall t$) e que ela seja colocada em movimento sem velocidade inicial a partir da posição inicial $u(x, 0) = f(x)$. Mostre que o deslocamento da corda, $u(x, t)$, é dado

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right) \cos \left(\frac{(2n-1)\pi ct}{2L} \right),$$

onde

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right) dx.$$

Exercício 8.15 (*Corda com as extremidades fixas em alturas diferentes de zero.*) Resolva o seguinte problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & 0 < x < L, & t > 0 \\ u(0, t) &= \alpha, & u(L, t) &= \beta, & t \geq 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & u_t(x, 0) &= g(x), & 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Sugestão. Encontre a posição de equilíbrio da corda, ou seja, uma função $U = U(x)$ que satisfaz a equação de onda e as condições de contorno acima, ou seja, $U(x) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{L} x$. Escreva $u(x, t) = U(x) + v(x, t)$, como u e U satisfazem a equação de onda, segue da linearidade desta equação que $v(x, t)$ também é solução da mesma; ou seja v é solução de um problema conhecido:

$$\begin{aligned}v_{tt} &= c^2 v_{xx}, & 0 < x < L, t > 0 \\v(0, t) &= 0, & v(L, t) = 0, & t \geq 0 \\v(x, 0) &= f(x) - U(x), & v_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq L.\end{aligned}$$

Exercício 8.16 (Corda com ambas as extremidades livres.) Resolva o seguinte problema

$$\begin{aligned}u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & 0 < x < L, t > 0 \\u_x(0, t) &= 0, & u_x(L, t) = 0, & t \geq 0 \\u(x, 0) &= f(x), & u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq L.\end{aligned}$$

Sugestão. Se assumirmos que $u(x, t) = X(x)T(t)$, das condições de contorno $u_x(0, t) = 0 = u_x(L, t)$, para todo t , devemos ter $X'(0) = 0 = X'(L)$ e do método de separação de variáveis temos $X'' = \lambda X$, $X'(0) = 0 = X'(L)$, veja solução da equação de calor para um fio com extremidades isoladas. Temos $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ e

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A equação em T fica

$$T'' = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T,$$

a qual já foi resolvida, exceto, que agora, n pode ser zero e para este valor de n temos

$$T_0(t) = a_0 + b_0 t,$$

onde a_0 e b_0 são constantes arbitrárias. Para $n \geq 1$, vemos que

$$T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right).$$

Portanto, a solução da corda com as duas extremidades livres é da forma

$$u(x, t) = a_0 + b_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Observação 8.2 Note que no problema da corda com as extremidades livres, se

$$b_o = \frac{1}{L} \int_0^L g(x) dx \neq 0,$$

então a corda se moverá vertical e indefinidamente para baixo ou para cima, dependendo do sinal de b_o .

Exercício 8.17 Uma corda em movimento num meio elástico satisfaz a equação

$$c^2 u_{xx} - \alpha^2 u = u_{tt}$$

onde α^2 é proporcional ao coeficiente de elasticidade do meio. Supondo que a corda está fixa nas suas extremidades e seja colocada em movimento sem velocidade inicial a partir da posição inicial $u(x, 0) = f(x)$, $0 < x < L$, encontre o deslocamento $u(x, t)$.

Sugestão. Assuma que $u(x, t) = X(x)T(t)$, portanto, das condições de contorno, devemos ter $X(0) = 0 = X(L)$ e do método de separação de variáveis, temos

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} - \frac{\alpha^2}{c^2} = \mu$$

logo,

$$X'' = \left(\mu + \frac{\alpha^2}{c^2} \right) X \equiv \lambda X, \quad X(0) = 0 = X(L) \quad (160)$$

e

$$T'' = c^2 \mu T.$$

O problema de contorno (160) já apareceu no problema de condução de calor num fio com extremidades mantidas à temperatura 0; ou seja, $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ e

$$X_n(x) = \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Por outro lado, $\mu_n = -\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{c^2}\right)$, portanto,

$$T'' = -\left(\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 + \alpha^2\right) T,$$

ou seja,

$$T_n(t) = a_n \cos \left(\sqrt{\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 + \alpha^2} t \right) + b_n \text{sen} \left(\sqrt{\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 + \alpha^2} t \right).$$

8.2.4 A Corda infinita e a Fórmula de D'Alembert

Vamos agora estudar o problema de vibração de uma corda de comprimento infinito, a qual é uma idealização de uma corda muito longa. Neste caso, não há condições de fronteira a satisfazer, e, assim, o problema consiste em buscar uma função $u(x, t)$ definida no semi-plano fechado, $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$, tal que

$$\begin{aligned}u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, & t > 0, \\u(x, 0) &= f(x), & u_t(x, 0) &= g(x), & x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

onde f e g são condições iniciais.

Note que se $F(x)$ e $G(x)$ são duas funções com derivadas até segunda ordem contínuas, então, a função $u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$ satisfaz a equação da onda. A pergunta natural é a seguinte será que podemos escolher estas funções de modo a satisfazer as condições iniciais, ou seja,

$$f(x) = u(x, 0) = F(x) + G(x) \tag{161}$$

$$g(x) = u_t(x, 0) = cF'(x) - cG'(x)? \tag{162}$$

Tomando a derivada de (161) em relação a x e multiplicando a equação resultante por c , temos $cF'(x) + cG'(x) = cf'(x)$. Esta equação juntamente com (162) nos conduz ao seguinte sistema

$$cF'(x) + cG'(x) = cf'(x)$$

$$cF'(x) - cG'(x) = g(x).$$

Somando as duas equações do sistema acima e dividindo o resultado por $2c$, temos

$$F'(x) = \frac{f'(x)}{2} + \frac{g(x)}{2c}. \tag{163}$$

De maneira análoga, se subtrairmos a segunda equação da primeira no sistema acima e multiplicarmos o resultado por $2c$, encontramos

$$G'(x) = \frac{f'(x)}{2} - \frac{g(x)}{2c}. \tag{164}$$

Integrando as equações (163) e (164) de 0 a x , temos, respectivamente,

$$F(x) = F(0) - \frac{f(0)}{2} + \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds$$

e

$$G(x) = G(0) - \frac{f(0)}{2} + \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x + ct) + G(x - ct) \\ &= F(0) + G(0) - f(0) + \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(s) ds - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(s) ds \\ &= F(0) + G(0) - f(0) + \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \\ &= \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (\text{pois, } F(0) + G(0) = u(0, 0) = f(0)). \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$u(x, t) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds,$$

Conhecida como fórmula acima é conhecida como a **fórmula de D'Alembert**.

No caso particular em que $g(x) \equiv 0$, temos

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)],$$

ou seja, a solução é a superposição de duas ondas. A função $f(x + ct)$ é chamada uma onda regressiva (se move para a esquerda) e $f(x - ct)$ é chamada uma onda progressiva (se move para a direita).

No caso particular que $f(x) \equiv 0$, temos

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} h(x + ct) - \frac{1}{2c} h(x - ct),$$

onde $h(w) = \int_0^w g(s) ds$. Note que temos a superposição de uma onda regressiva e uma progressiva.

Exercício 8.18 *Suponha que $f(x) \equiv 0$ e que o gráfico de $g(x)$ é aquele mostrado na Figura 56.*

(a) *Encontre $u(x, t)$.*

(b) *Esboce o gráfico de $u(x, 0)$ e $u(x, 1)$.*

Resolução. Da fórmula de D'Alembert, temos $u(x, t) = \frac{h(x+ct) - h(x-ct)}{2c}$, onde $h(w) = \int_0^w g(s) ds$. Claramente, $u(x, 0) \equiv 0$. Note que se $w < 0$, então, $h(w) = -\int_w^0 g(s) ds = 0$, pois, $g(s) = 0$ para $s \leq 0$. Por outro lado, se $w > 1$, então, $h(w) = \int_0^w g(s) ds = \int_0^1 g(s) ds = 1$. Finalmente, se $0 < w < 1$, então, $h(w) = \int_0^w g(s) ds = \int_0^w ds = w$. Logo, o gráfico de $h(w)$ é aquele que está mostrado na Figura 57. O gráfico de $u(x, 1)$ é mostrado na Figura 58, cada unidade no eixo vertical vale c .

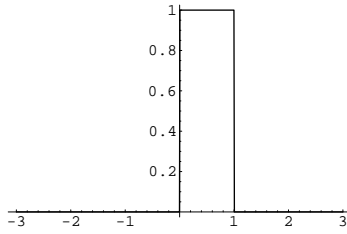


Figura 56: Gráfico de g .

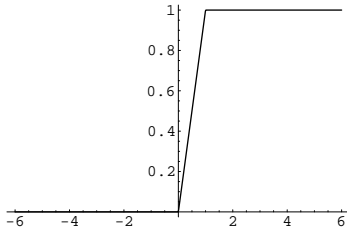


Figura 57: Gráfico de $h(x)$.

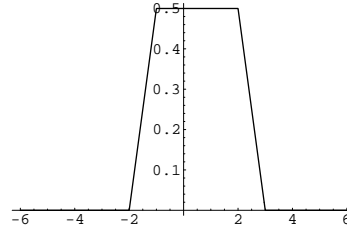


Figura 58: $u(x, 1) = \frac{h(x+1) - h(x-1)}{2}$, ($c = 1$).

Exercício 8.19 Considere uma corda infinita inicialmente esticada horizontalmente, com velocidade inicial $u_t(x, 0)$ dada pela função cujo gráfico aparece na Figura 61. Supondo que $c = 1$, mostre que $u(x, t) = h(x + t) - h(x - t)$, onde o gráfico de h é dado na Figura 59.

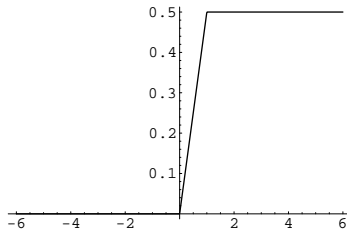


Figura 59: Gráfico de h .

Solução. Da fórmula de D'Alembert, $u(x, t) = \frac{h(x+ct) - h(x-ct)}{2c}$, onde $h(w) = \int_0^w g(s) ds$. Note que se $w < -1$, então, $h(w) = -\int_w^0 g(s) ds = -\int_{-1}^0 g(s) ds = -\int_{-1}^0 (1+s) ds = -\frac{1}{2}$. Se $w > 1$, então, $h(w) = \int_0^1 g(s) ds + \int_1^w g(s) ds = \int_0^1 (1-s) ds + \int_1^w (1-s) ds = \frac{1}{2} + w - \frac{w^2}{2}$. Se $0 < w < 1$, então, $h(w) = \int_0^w (1-s) ds = w - \frac{w^2}{2}$.

Finalmente, se $-1 < w < 0$, então, $h(w) = -\int_w^0(1+s)ds = w + w^2/2$. Portanto,

$$h(w) = \begin{cases} -0.5, & w \leq -1 \\ w + w^2/2, & -1 < w \leq 0 \\ w - w^2/2, & 0 < w \leq 1 \\ 0.5, & w > 1 \end{cases}.$$

Veja o gráfico de h na Figura 60.

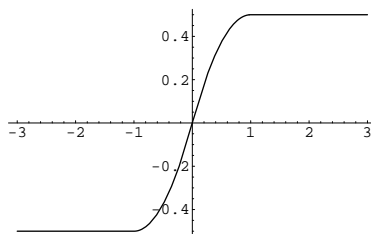


Figura 60: Gráfico de h .

Exemplo 8.5 *Suponha que $c = 1$ na equação da onda e que a forma inicial da corda seja dada na Figura 61. Esboce os gráficos de $u(x, t)$ para $t = 0.25, 0.5, 0.75, 1$ e 1.5 .*

Resolução. Os esboços seguem imediatamente da fórmula de D'Alembert e são mostrados nas Figuras 61-66. Note que no instante $t = 1$ uma onda acaba de passar pela outra e a partir deste instante elas se movem independentemente.

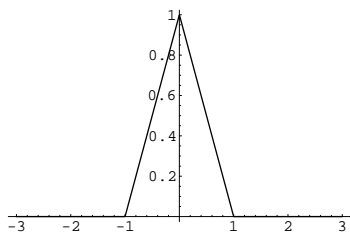


Figura 61: $u(x, 0) = f(x)$.

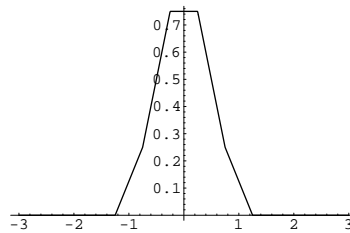


Figura 62: $u(x, 0.25) = \frac{f(x+0.25)+f(x-0.25)}{2}$.

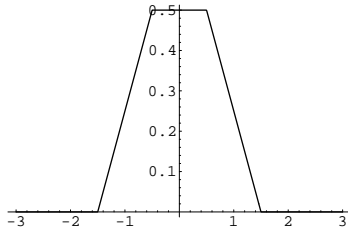


Figura 63: $u(x, 0.5) = \frac{f(x+0.5)+f(x-0.5)}{2}$.

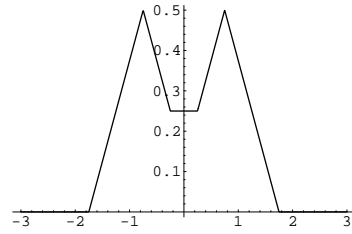


Figura 64: $u(x, 0.75) = \frac{f(x+0.75)+f(x-0.75)}{2}$.

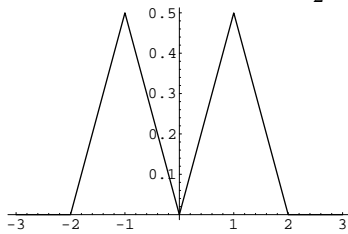


Figura 65: $u(x, 1) = \frac{f(x+1)+f(x-1)}{2}$.

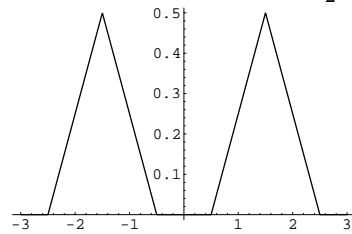


Figura 66: $u(x, 1.5) = \frac{f(x+1.5)+f(x-1.5)}{2}$.

8.3 Exercícios

- Em cada problema a seguir, determinar se o método de separação de variáveis pode ser usado para substituir a equação diferencial parcial dada por um par de equações diferenciais ordinárias. Se for possível, achar as equações.

(a) $xu_{xx} + u_t = 0$

(d) $tu_{xx} + xu_t = 0$

(b) $u_{xx} + u_{xt} + u_t = 0$

(e) $[p(x)u_x]_x - r(x)u_{tt} = 0$

(c) $u_{xx} + (x+y)u_{yy} = 0$

(f) $u_{xx} + u_{yy} + xu = 0$

- Considere o problema de condução de calor numa barra metálica de comprimento unitário, descrito pela equação:

$$100 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

Considere também as condições de contorno:

$$(I) \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} u(0, t) = 50 \\ u(1, t) = 80 \end{cases}$$

$$(III) \begin{cases} u_x(0, t) = 0 \\ u_x(1, t) = 0 \end{cases}$$

Considere por fim as distribuições iniciais de temperatura na barra dadas por:

- (A) $u(x, 0) = 10$
- (B) $u(x, 0) = \text{sen}^2 \pi x$
- (C) $u(x, 0) = x^2$

Determine a solução $u(x, t)$ do problema com:

- (a) Condições de contorno: I; condição inicial: A
 - (b) Condições de contorno: I; condição inicial: B
 - (c) Condições de contorno: I; condição inicial: C
 - (d) Condições de contorno: II; condição inicial: A
 - (e) Condições de contorno: II; condição inicial: B
 - (f) Condições de contorno: II; condição inicial: C
 - (g) Condições de contorno: III; condição inicial: A
 - (h) Condições de contorno: III; condição inicial: B
 - (i) Condições de contorno: III; condição inicial: C
3. Considere uma barra de comprimento igual a 2. A seguinte equação diferencial representa a propagação de calor nessa barra:

$$2u_{xx} = u_t$$

Essa barra possui, inicialmente, a temperatura em todos os seus pontos igual a 10, sendo que as extremidades da barra possuem temperaturas fixadas em 20, para $x = 0$, e em -20, para $x = 2$. A barra é mantida assim até entrar em equilíbrio térmico. Quando a barra atinge equilíbrio térmico nessas condições (considere que esse instante é convencionado como $t = 0$) suas extremidades são subitamente levadas novamente à temperatura de 10, sendo mantidas fixas nesse valor para todo tempo a partir desse instante.

- (a) Determine a função que descreve a distribuição de temperaturas na barra, em função de x , no instante $t = 0$.
 - (b) Calcule a função que descreve a distribuição de temperaturas na barra, em função de x , quando $t = 5$.
4. Considere uma barra de comprimento igual a 2. A seguinte equação diferencial representa a propagação de calor nessa barra:

$$2u_{xx} = u_t$$

Supõe-se que a barra esteja inicialmente com temperatura igual a 0 em toda sua extensão, e que no instante $t = 0$ as extremidades da barra sejam subitamente levadas à temperatura de 10, sendo mantidas nessa temperatura desse momento em diante.

- (a) Determine as equações diferenciais ordinárias que surgem quando se emprega o método de separação de variáveis para tratar esse problema.
- (b) Calcule a função que descreve a distribuição de temperaturas na barra em função de x quando $t = 5$.

5. Considere uma barra de comprimento igual a 2. A seguinte equação diferencial representa a propagação de calor nessa barra:

$$4u_{xx} = u_t$$

- (a) Essa barra encontra-se com as extremidades (pontos $x = 0$ e $x = 2$) termicamente isoladas, e possui, inicialmente, a temperatura em seus pontos dada por:

$$u(x, 0) = 5x^2$$

A barra é deixada assim por várias horas, até entrar em equilíbrio térmico. Determine a equação que descreve a distribuição de temperaturas na barra quando o equilíbrio é atingido.

- (b) Após entrar em equilíbrio térmico, a barra subitamente tem os isolamentos térmicos das extremidades retirados, sendo as temperaturas nas extremidades fixadas em $u(0, t) = 20$ e $u(2, t) = -20$ a partir desse instante (adote a convenção de que $t = 0$ no exato instante em que o isolamento térmico é retirado, e as temperaturas das extremidades são fixadas nesses valores). Determine a função que descreve a distribuição de temperaturas na barra, em função de x e t , após a barra ter as temperaturas de suas extremidades fixadas.

6. Considere uma barra de comprimento igual a 2. A seguinte equação diferencial representa a propagação de calor nessa barra:

$$4u_{xx} = u_t$$

Essa barra possui, inicialmente, a temperatura em todos os seus pontos igual a 10, sendo que as extremidades da barra possuem temperaturas fixadas em 20, para $x = 0$, e em -20, para $x = 2$. A barra é mantida assim por várias horas, até entrar em equilíbrio térmico.

Quando a barra atinge equilíbrio térmico nessas condições, suas extremidades são isoladas termicamente, sendo mantidas isoladas a partir desse instante. (Dica: adote a convenção de que $t = 0$ no exato instante em que a barra recebe isolamento térmico em suas extremidades).

- (a) Determine a distribuição de temperaturas na barra em função de x , no instante imediatamente anterior à colocação do isolante térmico nas extremidades da barra.
- (b) Calcule a função que descreve a distribuição de temperaturas na barra, em função de x e t , após a barra ter suas extremidades termicamente isoladas.

7. Considere o problema de vibração de uma corda elástica fixa nas duas extremidades, com comprimento $L = 2$, que obedece à equação:

$$9u_{xx} = u_{tt}$$

Considere as seguintes funções que descrevem a posição inicial da corda, em situações distintas:

$$(I) \quad u(x, 0) = 0$$

$$(II) \quad u(x, 0) = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}$$

$$(III) \quad u(x, 0) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 2(x - 2)^2 & , \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Considere também as seguintes funções que descrevem a velocidade inicial da corda em cada ponto, também em situações distintas:

$$(A) \quad u_t(x, 0) = 0$$

$$(B) \quad u_t(x, 0) = -\operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2}$$

$$(C) \quad u_t(x, 0) = (x - 1)^2 - 1$$

Determine a solução $u(x, t)$ do problema para:

- (a) Condições iniciais I e A.
- (b) Condições iniciais I e B.
- (c) Condições iniciais I e C.
- (d) Condições iniciais II e A.
- (e) Condições iniciais II e B.
- (f) Condições iniciais II e C.
- (g) Condições iniciais III e A.
- (h) Condições iniciais III e B.
- (i) Condições iniciais III e C.

8. Considere uma corda de comprimento igual a 5, fixa nas duas extremidades. A seguinte equação diferencial descreve o movimento oscilatório que ocorre na corda:

$$4u_{xx} = u_{tt}$$

A corda encontra-se inicialmente com deslocamento nulo em toda sua extensão, e a velocidade inicial de cada ponto da corda é dada pela expressão:

$$u_t(x, 0) = -\text{sen}(3\pi x)$$

- (a) Determine a função que descreve a **posição** da corda, em cada ponto, em função do tempo.
- (b) Determine a função que descreve a **velocidade** da corda, em cada ponto, em função do tempo.
- (c) Determine a expressão da **posição** da corda, em cada ponto, no instante $t = 10$.
- (d) Determine a expressão da **velocidade** do ponto $x = 2$, em função do tempo.
- (e) Supondo que o movimento da corda produza um sinal de som, que frequências estarão presentes nesse sinal de som?

8.4 Trabalhos

Questão 1. Considere a equação da propagação do calor em uma barra:

$$\alpha^2 u_{xx}(x, t) = u_t(x, t)$$

A barra, de comprimento L e extremidades $x = 0$ e $x = L$, é sujeita a dois experimentos distintos (situações **a** e **b**), com diferentes temperaturas nas extremidades e diferentes distribuições iniciais de temperatura, resultando em duas soluções distintas para a equação do calor. O relacionamento das condições iniciais e de contorno com as soluções da equação é mostrado na tabela abaixo.

	$u(0, t)$	$u(L, t)$	$u(x, 0)$	$u(x, t)$
(a)	θ_{0a}	θ_{La}	$\phi_a(x)$	$u_a(x, t)$
(b)	θ_{0b}	θ_{Lb}	$\phi_b(x)$	$u_b(x, t)$

As temperaturas das extremidades da barra são agora fixadas nos valores:

$$u(0, t) = \beta\theta_{0a} + \gamma\theta_{0b}$$

$$u(L, t) = \beta\theta_{La} + \gamma\theta_{Lb}$$

sendo dada a distribuição inicial de temperaturas na barra:

$$u(x, 0) = \beta\phi_a(x) + \gamma\phi_b(x)$$

Determine a função $u(x, t)$ para essas condições iniciais e de contorno. (Observação: o fato mostrado neste exercício é chamado de **linearidade** da equação do calor).

Questão 2. Deduza a expressão da solução da equação do calor em uma barra quando uma das extremidades tem temperatura fixa e a outra encontra-se termicamente isolada.

Questão 3. Modifique a solução da equação de Laplace, de tal forma que a mesma seja capaz de representar a distribuição em regime estacionário de temperaturas numa placa retangular quando a temperatura nas fronteiras da placa é dada por quatro funções arbitrárias: $h_1(x), h_2(x), h_3(y), h_4(y)$.

Questão 4. Considere uma barra de 2m de comprimento, na qual a propagação do calor obedece à equação:

$$9u_{xx} = u_t$$

Essa barra faz parte de um sistema de troca de calor entre um recipiente no qual ocorre uma reação de combustão, e que fica à temperatura de θ , e o meio ambiente, que se encontra à temperatura de 20° . Isso significa que, em uma das extremidades, a barra tem sua temperatura fixada em θ , e na outra em 20° . Um sensor de temperatura, de massa desprezível, está afixado bem no meio da barra, e nesse ponto ele mede a temperatura $h(t) = u(1, t)$.

- (a) Encontre a equação diferencial ordinária que relaciona a temperatura θ com a temperatura $h(t)$.
- (b) Suponha que o recipiente, após passar várias horas à temperatura $\theta = 80^\circ$, subitamente tem sua temperatura elevada para $\theta = 120^\circ$. Determinar a expressão de $h(t)$ nesse caso.

8.5 A Equação de Laplace

A equação de Laplace no plano é dada por

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

enquanto que a equação de Laplace no espaço é dada por

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

O operador Δ é conhecido como Laplaciano.

A equação de Laplace aparece no estudo de campos eletrostáticos, descrevendo a função potencial num meio dielétrico sem cargas elétricas.

Exercício 8.20 (*Linearidade da Equação de Laplace.*) *Mostre que se u_1 e u_2 satisfizerem a equação de Laplace, então, $c_1 u_1 + c_2 u_2$, também satisfará, para quaisquer escolhas das constantes c_1 e c_2 . Portanto, se u_1, \dots, u_n forem soluções da equação de Laplace, então, $c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$ também será, para quaisquer valores das constantes c_1, \dots, c_n .*

No que se segue Ω será uma região aberta e conexa do plano (ou do espaço). Denotaremos por $\partial\Omega$ a fronteira de Ω e $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Em muitas aplicações, Ω será, por exemplo, um disco, um retângulo, um semi-plano, um cubo ou uma esfera.

Uma função contínua $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ será **harmônica** se ela satisfizer à equação de Laplace em Ω .

Exemplo 8.6 *Alguns exemplos de funções harmônicas.*

(a) $u(x, y) = ax + by + c$, onde a , b e c são constantes arbitrárias.

(b) $u(x, y) = x^2 - y^2$.

(c) *Se f for uma função analítica complexa, então suas partes real e imaginárias serão funções harmônicas.*

Exercício 8.21 *Determine relações entre as constantes a , b e c de modo que $u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ seja harmônica.*

Exercício 8.22 *O Laplaciano em coordenadas polares. Usando as fórmulas de mudança de variáveis*

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

mostre que

$$\Delta v = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta},$$

onde $v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Resolução. Note que $r^2(x, y) = x^2 + y^2$ e $\tan(\theta(x, y)) = \frac{y}{x}$, logo, $r_x = \frac{x}{r} = \cos \theta$, $\theta_x = -\frac{\sin \theta}{r}$, $r_y = \sin \theta$ e $\theta_y = \frac{\cos \theta}{r}$, portanto, se $f = f(r, \theta)$, onde $r = r(x, y)$ e $\theta = \theta(x, y)$, pela regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned} f_x &= f_r r_x + f_\theta \theta_x = \cos \theta f_r - \frac{\sin \theta}{r} f_\theta \\ f_y &= f_r r_y + f_\theta \theta_y = \sin \theta f_r + \frac{\cos \theta}{r} f_\theta. \end{aligned}$$

Aplicando a regra da cadeia novamente a $f_x = f_x(r, \theta)$, $f_y = f_y(r, \theta)$, onde $r = r(x, y)$ e $\theta = \theta(x, y)$, temos

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (f_x)_r r_x + (f_x)_\theta \theta_x = \cos \theta \left(\cos \theta f_r - \frac{\sin \theta}{r} f_\theta \right)_r - \frac{\sin \theta}{r} \left(\cos \theta f_r - \frac{\sin \theta}{r} f_\theta \right)_\theta \\ &= \cos \theta \left(\cos \theta f_{rr} + \frac{\sin \theta}{r^2} f_\theta - \frac{\sin \theta}{r} f_{\theta r} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \left(-\sin \theta f_r + \cos \theta f_{r\theta} - \frac{\sin \theta}{r} f_{\theta\theta} - \frac{\cos \theta}{r} f_\theta \right) \\ &= \cos^2 \theta f_{rr} - 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} f_{\theta r} + 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} f_\theta + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} f_{\theta\theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} f_r \\ f_{yy} &= (f_y)_r r_y + (f_y)_\theta \theta_y = \sin \theta \left(\sin \theta f_r + \frac{\cos \theta}{r} f_\theta \right)_r + \frac{\cos \theta}{r} \left(\sin \theta f_r + \frac{\cos \theta}{r} f_\theta \right)_\theta \\ &= \sin \theta \left(\sin \theta f_{rr} - \frac{\cos \theta}{r^2} f_\theta + \frac{\cos \theta}{r} f_{\theta r} \right) + \frac{\cos \theta}{r} \left(\cos \theta f_r + \sin \theta f_{r\theta} + \frac{\cos \theta}{r} f_{\theta\theta} - \frac{\sin \theta}{r} f_\theta \right) \\ &= \sin^2 \theta f_{rr} - 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} f_\theta + 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} f_{\theta r} + \frac{\cos^2 \theta}{r} f_r + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} f_{\theta\theta}. \end{aligned}$$

Somando-se as expressões para f_{xx} e f_{yy} acima e supondo que f tenha derivadas até segunda ordem contínuas na variáveis r e θ , temos

$$f_{xx} + f_{yy} = f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta},$$

o que conclui a resolução do exercício. ■

Exemplo 8.7 Podemos fazer a seguinte pergunta: quais são as funções harmônicas $v(r, \theta)$ que só dependem da distância r à origem? Se $v(r, \theta) = f(r)$, então v será harmônica se e somente se

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) = 0,$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem redutível à uma equação de primeira ordem. Imediatamente, encontramos que $f(r) = 1$ e $f(r) = \ln r$ como duas soluções linearmente independentes da equação acima. A função $\ln r$ é, portanto, uma função harmônica na região $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, que é independente de θ .

O **problema de Dirichlet** para a equação de Laplace é formulado da seguinte forma: dada uma função contínua $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, determinar uma função $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

- (i) u seja contínua em $\bar{\Omega}$,
- (ii) u seja harmônica em Ω e
- (iii) $u = f$ em $\partial\Omega$ (condição de fronteira).

O problema acima é altamente não-trivial para uma região Ω arbitrária e nem sempre tem solução. Neste texto nos limitaremos a regiões retangulares ou discos, para as quais iremos obter as soluções através de séries de Fourier.

Caso o problema de Dirichlet seja solúvel, a sua **unicidade** pode ser mostrada utilizando-se o **Princípio de Máximo** que será enunciado a seguir.

Teorema 8.1 (*Princípio de Máximo*) *Sejam Ω uma região limitada do plano e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $\bar{\Omega}$ e harmônica em Ω . Então o máximo de u é atingido na fronteira.*

Corolário 8.1 *Seja u como no Teorema 8.1. Então u assume seu mínimo em $\partial\Omega$.*

Prova. Se u for harmônica em Ω , então, $-u$ também o será e, do Princípio de Máximo, o máximo de $-u$ também será atingido na fronteira, ou seja,

$$\max_{\partial\Omega} -u(x, y) \geq \max_{\Omega} -u(x, y) \implies -\min_{\partial\Omega} u(x, y) \geq -\min_{\Omega} u(x, y).$$

Multiplicando esta desigualdade por -1 , temos

$$\min_{\partial\Omega} u(x, y) \leq \min_{\Omega} u(x, y)$$

e concluímos que o mínimo de u também é atingido na fronteira. ■

Teorema 8.2 *Sejam u_1 e u_2 duas soluções do problema de Dirichlet para um mesmo f . Então, $u_1 = u_2$.*

Prova. A função $u = u_1 - u_2$ é harmônica em Ω e igual à zero em $\partial\Omega$, logo, pelo Princípio de Máximo, $u(x, y) \geq 0$ em $\bar{\Omega}$. Por outro lado, pelo Corolário 8.1, $u(x, y) \leq 0$ em $\bar{\Omega}$. Portanto, $u(x, y) = 0$ em $\bar{\Omega}$. ■

8.5.1 O Problema de Dirichlet no retângulo

Neste problema a região Ω é o retângulo $0 < x < a$ e $0 < y < b$. A sua fronteira consiste de quatro segmentos aos quais devemos especificar as condições de fronteira:

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= f_0(x), & u(x, b) &= f_1(x), \\u(0, y) &= g_0(y), & u(a, y) &= g_1(y).\end{aligned}$$

Note que se quisermos que a condição de fronteira seja contínua, devemos ter as seguintes condições de compatibilidade: $f_0(0) = g_0(0)$, $f_0(a) = g_1(0)$ e $g_1(b) = f_1(a)$ e $f_1(0) = g_0(b)$. Se essas condições não forem satisfeitas, pode-se ainda encontrar uma função harmônica, u , em Ω , a qual satisfaz às condições de fronteira num certo sentido, mas que não poderá ser contínua em $\overline{\Omega}$.

Exercício 8.23 *Mostre que para se resolver problema acima, basta considerarmos as soluções de quatro problemas, cada um dos quais com condições de fronteira zero em três lados do retângulo e mantendo-se a condição de fronteira dada no quarto lado. A soma das quatro soluções obtidas nos dá a solução do problema original (veja Exercício 8.20).*

Observação 8.3 *No Exercício 8.23, se a condição de fronteira não for zero em algum dos vértices do retângulo, então cada uma das soluções com condições de fronteira não-nula nos lados que contêm estes vértices serão descontínuas nestes vértices, pois, nestes a solução em série converge para zero que não é o valor especificado pela condição de fronteira; contudo, sob a hipótese de continuidade da condição de fronteira do problema original, cada uma das soluções será contínua em todos os pontos da fronteira, exceto, naqueles vértices onde a condição não for zero e, por conseguinte, ao somarmos as quatro soluções teremos uma solução que será contínua em todos os pontos da fronteira, exceto, nos vértices onde a condição de fronteira não é zero e podemos definir a solução nestes por continuidade (de modo que ela seja contínua em todos os pontos da fronteira): nos vértices onde as condições de fronteira do problema original não forem zero, faça u igual ao valor das condições de fronteira nestes pontos; nos demais pontos, faça u igual à soma das quatro soluções obtidas no Exercício 8.23.*

Como os quatro problemas descritos no exercício acima são similares, iremos considerar apenas aquele correspondente às seguintes condições de fronteira:

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0.$$

Vamos assumir que $f(0) = f(a) = 0$ e que f seja contínua. Usaremos o método de separação de variáveis e assumiremos que $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Substituindo esta expressão na equação de Laplace, temos

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda,$$

onde λ é um parâmetro independente de x e y . Portanto, temos

$$X'' - \lambda X = 0, \quad (165)$$

$$Y'' + \lambda Y = 0. \quad (166)$$

Da condição de fronteira, $u(0, y) = 0 = u(a, y)$, como não queremos que Y seja identicamente nula, devemos ter $X(0) = 0 = X(a)$. Portanto, devemos ter $\lambda = -n^2\pi^2/a^2$. Portanto, para cada n , $X_n(x) = \text{sen } \frac{n\pi x}{a}$ será solução de (165) e a equação (166) fica

$$Y'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2}Y = 0, \quad (167)$$

cuja solução geral é

$$Y(y) = a_n e^{n\pi y/a} + b_n e^{-n\pi y/a}.$$

Da condição de fronteira $u(x, b) = 0$, como não queremos $X \equiv 0$, devemos ter $Y(b) = 0$, o que nos dá a seguinte relação: $b_n = -a_n e^{2n\pi b/a}$, portanto,

$$\begin{aligned} Y(y) &= a_n e^{n\pi y/a} - a_n e^{2n\pi b/a} e^{-n\pi y/a} \\ &= a_n e^{n\pi b/a} \left(e^{(n\pi/a)(y-b)} - e^{-(n\pi/a)(y-b)} \right) \\ &= 2a_n e^{n\pi b/a} \left(\frac{e^{(n\pi/a)(y-b)} - e^{-(n\pi/a)(y-b)}}{2} \right) \\ &\equiv 2a_n e^{n\pi b/a} \text{senh } \frac{n\pi(y-b)}{a} \\ &\propto \text{senh } \frac{n\pi(b-y)}{a} \equiv Y_n(y). \end{aligned}$$

Portanto, $u_n(x, y) = \text{sen } \frac{n\pi x}{a} \text{senh } \frac{n\pi(b-y)}{a}$ é harmônica e satisfaz as condições de fronteiras, exceto, $u(x, 0) = f(x)$. Tentaremos uma solução da forma

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen } \frac{n\pi x}{a} \text{senh } \frac{n\pi(b-y)}{a}.$$

Os coeficientes c_n 's têm que ser escolhidos de modo que

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi b}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a},$$

ou seja,

$$c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx \equiv f_n.$$

Portanto,

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\operatorname{senh} \frac{n\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{senh} \frac{n\pi b}{a}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a},$$

onde

$$f_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx.$$

Exercício 8.24 (O Problema de Dirichlet numa faixa semi-infinita) Encontre a solução da equação de Laplace na faixa $0 < x < a$, $y > 0$, que satisfaz as condições

$$u(0, y) = 0, u(a, y) = 0, y > 0, u(x, 0) = f(x), 0 \leq x \leq a.$$

Resolução. Por causa das condições de fronteira $u(0, y) = 0 = u(a, y) = 0$, vimos que $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ e $X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$, portanto, a solução geral da equação em y após a separação de variáveis é $Y_n(y) = a_n e^{n\pi y/a} + b_n e^{-n\pi y/a}$. Como queremos $u(x, y)$ tenda a zero quando $y \rightarrow \infty$, devemos fazer $a_n = 0$. Portanto a solução será

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} e^{-n\pi y/a},$$

onde

$$c_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx.$$

■

Exercício 8.25 Resolva o problema de Dirichlet no retângulo, satisfazendo às seguintes condições de fronteira:

$$u(x, 0) = 3 \operatorname{sen}(2x) - 0.5 \operatorname{sen}(9x), u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0.$$

Exercício 8.26 Resolva o problema de Dirichlet no retângulo, satisfazendo às seguintes condições de fronteira:

$$u(x, 0) = x(a - x), \quad u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0.$$

Exercício 8.27 Mostre que a solução do problema de Dirichlet com condições de contorno

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x), \quad u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0$$

é

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$

onde

$$f_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx.$$

Exercício 8.28 Mostre que a solução do problema de Dirichlet com condições de contorno

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = f(y)$$

é

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right),$$

onde

$$f_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy.$$

Exercício 8.29 Resolva o problema de Dirichlet no retângulo $0 < x < 3$ e $0 < y < 2$, $u(x, 0) = u(0, y) = u(x, 2) = 0$, $u(3, y) = f(y)$, onde

$$f(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y, & \text{se } 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

Exercício 8.30 Encontre a solução da equação de Laplace na faixa $0 < y < b$, $x > 0$, que satisfaz as condições

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0, \quad x > 0, \quad u(0, y) = f(y), \quad 0 \leq y \leq b.$$

Exercício 8.31 Resolva o problema de Dirichlet no quadrado $0 < x < \pi$ e $0 < y < \pi$, $u(x, 0) = 1 + \operatorname{sen} x$, $u(0, y) = u(x, \pi) = u(\pi, y) = 1$.

Sugestão. Veja este problema como a solução de dois problemas de Dirichlet no quadrado $0 < x < \pi$ e $0 < y < \pi$, sendo que para um deles a condição de fronteira é constante e igual a 1.

Exercício 8.32 Mostre que a solução do problema de Dirichlet com condições de contorno

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0, \quad u(0, y) = f(y), \quad u(a, y) = 0$$

é

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\operatorname{senh} \frac{n\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b}} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b},$$

onde

$$f_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy.$$

Exercício 8.33 (O problema de Neumann) Ao invés de especificarmos o valor de u na fronteira da região considerada, neste problema especificamos a componente do gradiente de u na direção do vetor normal unitário à fronteira em cada ponto. Mostre que a solução da equação de Laplace com condições de fronteira

$$u_y(x, 0) = 0, \quad u_y(x, b) = 0, \quad u_x(0, y) = 0, \quad u_x(a, y) = f(y),$$

onde $\int_0^b f(y) dy = 0$, é determinada a menos de uma constante e encontre esta solução.

Resolução. Das condições de fronteira, $u_y(x, 0) = 0 = u_y(x, b) = 0$, temos $Y(0) = 0 = Y(b)$, portanto, temos o seguinte problema:

$$Y'' = -\lambda Y, \quad Y(0) = 0 = Y(b).$$

Portanto, $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$ ($n = 0, 1, \dots$) e a solução é proporcional a $Y_n(y) = \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$. A outra equação fica $X'' = \frac{n^2\pi^2}{b^2} X$ e em virtude da condição de contorno $u_x(0, y) = 0$, temos que $X(x)$ será proporcional a $X_n(x) = \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)$. Portanto a solução será da forma

$$u(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Da condição de contorno, $u_x(a, y) = f(y)$, devemos ter

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{b} \right) \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi a}{b} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right),$$

que, por se tratar da série de cossenos de $f(y)$, a qual não possui o termo constante, só tem solução se $\int_0^b f(y) dy = 0$. Como a condição $\int_0^b f(y) dy = 0$ acontece por hipótese, devemos ter

$$\frac{n\pi a_n}{b} \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi a}{b} \right) = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) dy, \quad n = 1, 2, \dots$$

em particular, não sabemos quanto vale a_o , ou seja, a solução é determinada a menos desta constante. ■

Exercício 8.34 (Condições de fronteira mista) *Consiste em especificarmos o valor de u em parte da fronteira e no restante da mesma especificarmos a componente do gradiente de u na direção do vetor unitário normal à fronteira em cada ponto. Encontre da equação de Laplace com condições de fronteira*

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 < y < b, \quad u_y(x, 0) = 0, \quad u_y(x, b) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a.$$

Suponha que

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x \leq a/2 \\ a - x, & \text{se } a/2 \leq x \leq a. \end{cases}$$

Encontre $u(x, y)$.

Resolução. Das condições de fronteira $u(0, y) = 0 = u(a, y)$, temos o seguinte problema:

$$X'' = \lambda X, \quad X(0) = 0 = X(a),$$

portanto, $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}$ ($n = 1, 2, \dots$) e a solução é proporcional a $X_n(y) = \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right)$. A outra equação fica $Y'' = \frac{n^2\pi^2}{a^2} Y$ e em virtude da condição de contorno $u_y(x, 0) = 0$, temos que $Y(y)$ será proporcional a $Y_n(y) = \cosh \left(\frac{n\pi y}{a} \right)$. Portanto a solução será da forma

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cosh \left(\frac{n\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right).$$

Da condição de contorno, $u_y(x, b) = f(x)$, devemos ter

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{a} \right) \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi b}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right),$$

portanto,

$$\frac{n\pi a_n}{a} \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi b}{a} \right) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Resolva o problema para o caso particular do f dado. ■

Exercício 8.35 Resolva o seguinte problema de Dirichlet no quadrado:

$$u(x, 0) = \operatorname{sen} 3x, \quad u(\pi, y) = \operatorname{sen} y - 0.5 \operatorname{sen} 5y, \quad u(x, \pi) = 0 = u(0, y).$$

8.5.2 O Problema de Dirichlet no disco

Dada uma função contínua $f(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, determinar $v(r, \theta)$, para $0 \leq r \leq \rho$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, tal que

(i) v seja contínua e $v(r, 0) = v(r, 2\pi)$,

(ii) v seja de classe C^2 em $0 < r < \rho$ e satisfaça a equação de Laplace

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} = 0, \quad (168)$$

(iii) $v(\rho, \theta) = f(\theta)$.

Vamos buscar soluções da forma $v(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Substituindo esta expressão em (168), temos

$$r^2 R'' + rR' + \lambda R = 0, \quad (169)$$

$$\Theta'' - \lambda\Theta = 0. \quad (170)$$

Como Θ dever ser uma função periódica de período 2π , conclui-se que $\lambda = -n^2$, $n \geq 0$, e que a solução geral de (170) é

$$\Theta_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta.$$

A equação (169) fica

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0, \quad (171)$$

que é uma equação de Euler. Para resolvê-la podemos fazer a seguinte mudança na variável independente $r = e^t$ ou $t = \ln r$. Portanto, da regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} R &= \frac{d}{dt} R(r) \frac{dt}{dr} = e^{-t} \frac{d}{dt} R \\ \frac{d^2}{dr^2} R &= \frac{d}{dr} \left(\frac{dR}{dr} \right) = \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{dR}{dt} \right) \frac{dt}{dr} = e^{-2t} \left(\frac{d^2 R}{dt^2} - \frac{dR}{dt} \right), \end{aligned}$$

e temos a seguinte equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} - n^2 R = 0. \quad (172)$$

Note que para $n = 0$ esta equação fica $\frac{d^2 R}{dt^2} = 0$, cuja solução geral é $c_1 + c_2 t$, voltando à variável inicial, temos $c_1 + c_2 \ln r$; ou seja, para $n = 0$ temos 1 e $\ln r$ como soluções linearmente independentes de (171). Para $n \neq 0$, a solução geral de (172) é $c_1 e^{-nt} + c_2 e^{nt}$ e em termos da variável original, temos $c_1 r^n + c_2 r^{-n}$; portanto, temos r^n e r^{-n} como soluções linearmente independentes de (171). As soluções, r^{-n} e $\ln r$ serão descartadas no presente caso, pois, nos dariam soluções $v(r, \theta)$ ilimitadas na origem, portanto, descontínuas neste ponto, independentemente de como a definíssemos no mesmo. Logo, $R(r) = r^n$, para $n \geq 0$. Para cada n ,

$$v_n(r, \theta) = r^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta),$$

onde a_n e b_n são constantes arbitrárias, satisfazem (i) e (ii). Para satisfazer (iii), tentaremos

$$v(r, \theta) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta).$$

Da condição de fronteira, temos

$$f(\theta) = v(a, \theta) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta),$$

logo,

$$a_n \rho^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \quad e \quad b_n \rho^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta d\theta.$$

Exercício 8.36

(a) *Mostre que a solução da equação de Laplace na região semi-circular $r < a$, $0 < \theta < \pi$, que satisfaz as condições de contorno*

$$\begin{aligned} u(r, 0) &= 0, \quad u(r, \pi) = 0, \quad 0 \leq r < a \\ u(a, \theta) &= f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \end{aligned}$$

admitindo que ela está bem definida e é limitada na região dada é

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n \operatorname{sen}(n\theta),$$

onde

$$a^n b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) \operatorname{sen}(n\theta) d\theta.$$

(b) Supondo que $f(\theta) = \theta(\pi - \theta)$, encontre a solução u .

Sugestão. Veja o Exercício 8.39.

Exercício 8.37 Encontre a solução da equação de Laplace fora do círculo de raio a , que satisfaz as condições de contorno

$$u(a, \theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

que está bem definida e é limitada para $r > a$.

Resolução. Este problema é bastante parecido com o problema de Dirichlet no disco, as soluções deverão ser periódicas de período 2π . Na resolução da equação de Laplace no círculo, devemos descartar r^n e $\ln r$, pois estas não são finitas fora do disco. Portanto, a solução será da forma

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta),$$

onde

$$a_n \rho^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \quad e \quad b_n \rho^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta d\theta.$$

■

Exercício 8.38 Encontre a solução da equação de Laplace na região anular $a < r < b$, que seja independente de θ e satisfaça as seguintes condições de fronteiras $u(a, \theta) = V_a$ e $u(b, \theta) = V_b$, para $0 \leq \theta < 2\pi$.

Resolução. Como a solução deve ser independente de θ , do Exemplo 8.7, ela é da forma $u(r) = c_1 + c_2 \ln r$. Das condições de fronteiras, temos $c_1 = \frac{\ln\left(\frac{bV_a}{aV_b}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$ e $c_2 = \frac{V_a - c_1}{\ln a}$. ■

Exercício 8.39 Seja $0 < \alpha < 2\pi$. Mostre que a solução da equação de Laplace no setor circular $0 < r < a$ e $0 \leq \theta < \alpha$, com condições de fronteira $u(r, 0) = 0 = u(r, \alpha)$, $0 \leq r < a$ e $u(a, \theta) = f(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \alpha$ é

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi\theta}{\alpha} \right),$$

onde

$$b_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}} = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} f(\theta) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi\theta}{\alpha} \right) d\theta.$$

Sugestão. Neste caso ao invés da hipótese de u ser periódica de período 2π , devemos usar as condições de fronteira $u(r, 0) = 0 = u(r, \alpha)$ as quais implicam que $\Theta(0) = 0 = \Theta(\alpha)$, portanto, $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2}$ ($n = 1, 2, \dots$) e $\Theta(\theta)$ será proporcional a $\Theta_n(\theta) = \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi\theta}{\alpha} \right)$. Como não temos autovalor $\lambda = 0$, as soluções radiais são $r^{-\frac{n\pi}{\alpha}}$ e $r^{\frac{n\pi}{\alpha}}$. A hipótese de $u(r, \theta)$ ser limitada nos força a descartar as soluções radiais $r^{-\frac{n\pi}{\alpha}}$.

9 Apêndice - Dedução das Equações de Calor e da Onda

9.1 Equação da Onda

A seguir, aplicaremos a Segunda Lei de Newton a uma corda elástica e concluiremos que pequenas amplitudes transversais de uma corda vibrante obedece à equação da onda. Considere um pequeno elemento da corda, mostrado na Figura 67.

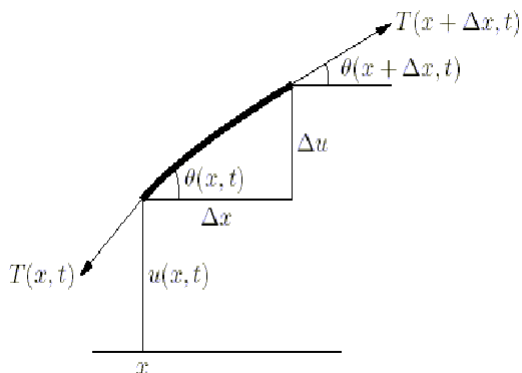


Figura 67: Um elemento da corda.

Usaremos as seguintes notações:

$u(x, t)$ = deslocamento vertical da corda do eixo x no posição x e no instante t

$\theta(x, t)$ = ângulo entre a corda e uma linha horizontal na posição x e no instante t

$T(x, t)$ = tensão na corda na posição x e no instante t

$\rho(x)$ = densidade de massa da corda na posição x .

As forças atuando no pequeno elemento de corda são

(a) a tensão puxando no lado direito, a qual tem magnitude $T(x + \Delta x, t)$ e atua segundo um ângulo $\theta(x + \Delta, t)$ acima da horizontal,

(b) a tensão puxando no lado esquerdo, a qual tem magnitude $T(x, t)$ e atua segundo uma ângulo $\theta(x, t)$, abaixo da horizontal e, possivelmente,

(c) várias forças externas, como gravidade. Assumiremos que todas as forças atuam verticalmente e denotaremos por $F(x, t)\Delta x$ a magnitude total das forças externas atuando no elemento de corda.

A massa do elemento de corda é essencialmente $\rho(x)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta u^2}$, assim, a componente vertical da força, dada pela Lei de Newton, é

$$\rho(x) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = T(x + \Delta x, t) \text{sen } \theta(x + \Delta, t) - T(x, t) \text{sen } \theta(x, t) + F(x, t) \Delta x.$$

Dividindo por Δx e tomando o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, temos

$$\begin{aligned} \rho(x) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} [T(x, t) \text{sen } \theta(x, t)] + F(x, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} T(x, t) \text{sen } \theta(x, t) + T(x, t) \cos \theta(x, t) \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) + \\ &\quad + F(x, t). \end{aligned} \tag{173}$$

Note que

$$\text{tg } \theta(x, t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t),$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta(x, t) &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right)^2}}, \quad \cos \theta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right)^2}} \\ \theta(x, t) &= \text{tg}^{-1} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)}{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right)^2}. \end{aligned}$$

Para pequenas vibrações, $|\theta(x, t)| \ll 1$, para todo x e t , isto implica que $\text{tg } \theta(x, t) \ll 1$, logo, $|\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)| \ll 1$, portanto,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \approx 1, \quad \text{sen } \theta(x, t) \approx \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), \quad \cos \theta(x, t) \approx 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t).$$

Substituindo os valores acima na equação (173), temos

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + T(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + F(x, t). \tag{174}$$

Como o nosso pequeno elemento da corda move-se apenas verticalmente, então, a componente da força na direção horizontal é zero. Portanto, da Segunda Lei de Newton, temos

$$T(x + \Delta x, t) \cos \theta(x + \Delta x, t) - T(x, t) \cos \theta(x, t) = 0.$$

Dividindo esta equação por Δx e tomando o limite quando Δx tende a zero, temos

$$\frac{\partial}{\partial x} [T(x, t) \cos(x, t)] = 0.$$

Para pequenas amplitudes de vibrações, $\cos \theta$ é muito próximo de um e $\frac{\partial T}{\partial x}(x, t)$ é muito próximo de zero. Em outras palavras, T é uma função apenas de t , a qual é determinada pela maneira de quão forte estamos puxando as extremidades da corda no instante t . Logo, para pequenas amplitudes de vibrações verticais, (174) pode ser re-escrita como

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = T(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + F(x, t).$$

Se a densidade da corda, ρ , é constante, independente de x , e a tensão $T(t)$ é uma constante independente de t e não existe forças externas, F , obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t),$$

onde

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

9.2 Equação de Calor

Consideramos um fio de material condutor, de comprimento L , cujas laterais estão perfeitamente isoladas, tal que não haja nenhuma perda de calor através das mesmas. Assumiremos que a temperatura u no fio dependa apenas da posição x e do instante t , e não dependa das coordenadas y e z , de modo que a temperatura ao longo de qualquer seção transversal seja uniforme.

De acordo com a Lei de Fourier, a quantidade de calor fluindo através de uma seção transversal de área unitária por unidade de tempo da barra, chamado de fluxo, Q , é dado por

$$Q(x, t) = -K \frac{\partial u}{\partial x}(x, t),$$

onde K é a constante de difusão de calor e depende apenas do material do fio, e $u(x, t)$ é temperatura na posição x e tempo t .

Considere uma porção infinitesimal do fio de comprimento Δx , localizado entre os pontos x e $x + \Delta x$. A quantidade de calor fluindo no ponto x é $Q(x, t)$. Da mesma forma, a quantidade de calor fluindo no ponto $x + \Delta x$ é $-Q(x + \Delta x, t)$. O aumento total de calor no elemento diferencial (por unidade de seção transversal de área) num intervalo de tempo Δt , é dado como

$$\text{o aumento de calor no elemento no tempo } \Delta t = [Q(x, t) - Q(x + \Delta x, t)]\Delta t.$$

A quantidade de calor por unidade de seção transversal na seção selecionada no fio, isto é, de elemento de massa ΔM (e comprimento Δx) no instante t é

$$\sigma \Delta M u \equiv \sigma \rho \Delta x u \approx \sigma \rho \Delta x \Delta t u_t(x, t),$$

onde σ é o calor específico do material, ρ é a densidade linear da material e u é a temperatura média no elemento no instante t . Tomaremos $u = u(x + \frac{\Delta x}{2}, t)$, ou seja, u é a temperatura no centro de elemento. Portanto, temos

$$\text{o aumento de calor no elemento no tempo } \Delta t = \sigma \rho \Delta x \Delta t u_t(x + \frac{\Delta x}{2}, t).$$

Combinando as equações acima,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{Q(x, t) - Q(x + \Delta x, t)}{\Delta x} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma \rho u_t(x + \frac{\Delta}{2}, t),$$

ou seja,

$$-Q_x(x, t) = \sigma \rho u_t(x, t),$$

ou ainda,

$$K u_{xx} = \sigma \rho u_t(x, t) \iff u_t = \alpha^2 u_{xx},$$

onde a constante $\alpha^2 = \frac{K}{\sigma \rho}$ é chamada de difusividade térmica.

10 Solução dos Exercícios

Seção 2

1. Se dividirmos a equação por $1 - t^2$, ela se tornará

$$y' - \frac{2t}{1-t^2} y = \frac{1}{1-t^2}, \quad (175)$$

logo, $p(t) = -\frac{2t}{1-t^2}$, portanto, o fator integrante será

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2t}{1-t^2} dt} = e^{\ln|1-t^2|+k}.$$

Fazendo $k = 0$, teremos $\mu(t) = |1 - t^2|$. Tomaremos $\mu(t) = 1 - t^2$. Ao multiplicarmos (175) por $1 - t^2$, teremos

$$((1 - t^2)y)' = 1$$

portanto, $(1 - t^2)y = \int 1 dt = t + c$, logo, a solução geral é

$$y = \frac{t + c}{1 - t^2}.$$

2. Se dividirmos a equação por t , teremos

$$y' + \frac{2}{t} y = \frac{\text{sen } t}{t},$$

portanto, $p(t) = \frac{2}{t}$ e $\mu(t) = t^2$ é fator integrante da equação. Ao multiplicarmos a equação pelo fator integrante teremos

$$(t^2 y)' = t \text{sen } t,$$

ou seja,

$$t^2 y = \int t \text{sen } t dt = -t \cos t + \text{sen } t + c,$$

portanto, a solução geral é

$$y = \frac{-t \cos t + \text{sen } t + c}{t^2}.$$

3. Note que $p(t) = t g t = \frac{\text{sen } t}{\cos t}$, como $\int \frac{\text{sen } t}{\cos t} dt = -\ln|\cos t| + k$, podemos tomar $\mu(t) = \frac{1}{\cos t}$. Portanto, ao multiplicarmos a equação por $\frac{1}{\cos t}$, ela pode ser re-escrita como

$$\left(y \frac{1}{\cos t} \right)' = \frac{t \text{sen } (2t)}{\cos t} = 2t \text{sen } t,$$

usamos que $\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$. Portanto,

$$\frac{y}{\cos t} = 2 \int t \operatorname{sen} t dt = 2(-t \cos t + \operatorname{sen} t) + C$$

Logo, a solução geral é

$$y = 2 \operatorname{sen} t \cos t - 2t \cos^2 t + C \cos t = \operatorname{sen}(2t) - 2t \cos^2 t + C \cos t.$$

4. A equação é de variáveis separáveis e é equivalente a

$$\frac{dy}{\cos^2(2y)} = \cos^2 x dx = \frac{1}{2} (1 + \cos(2x)) dx,$$

como $\int \frac{1}{\cos^2 w} dw = tg w + k$, segue-se que $\frac{1}{2} tg(2y) = \frac{1}{2} (x + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x)) + \frac{c}{2}$, portanto, a solução geral é

$$y = tg^{-1} \left(x + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} + c \right).$$

5. A equação é de variáveis separáveis e é equivalente a $(y + e^y)dy = (x - e^{-x})dx$, que após integração nos dá $y + e^y = \frac{x^2}{2} + e^{-x} + c$, que é a solução geral da equação dada implicitamente.

6. Note que esta equação é de Bernoulli, com $n = 3$, portanto, se fizermos a mudança de variáveis $u = y^{1-n} = y^{-2}$, ela será transformada na seguinte equação linear de primeira ordem

$$u' + 2\epsilon u = 2\sigma,$$

cuja solução geral é $u = \frac{\sigma}{\epsilon} + C e^{-2\epsilon t}$. Voltando à variável antiga temos $y^{-2} = \frac{\sigma}{\epsilon} + C e^{-2\epsilon t}$, como queremos que $y(0) = 1$, devemos tomar $C = 1 - \frac{\sigma}{\epsilon}$. Além disso, como $y(0) = 1 > 0$, teremos $y = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon} + (1 - \frac{\sigma}{\epsilon})e^{-2\epsilon t}}}$.

7. A equação é de variáveis separáveis e é equivalente a $y^{-3}dy = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$, a qual integrada nos conduz a $-\frac{y^{-2}}{2} = \sqrt{1+x^2} + k$, como queremos que $y(0) = 1$, temos $k = -\frac{3}{2}$. Portanto, $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$. Devemos tomar o sinal +, pois, $y(0) = 1$.

8. A equação é de variáveis separáveis e é equivalente a $(3y^2 - 4)dy = 3x^2 dx$, que uma vez integrada nos dá $y^3 - 4y = x^3 + c$. Como queremos que $y(1) = 0$, temos $c = -1$, portanto, a solução desejada é dada implicitamente pela equação $y^3 - 4y - x^3 + 1 = 0$, cujo gráfico é mostrado na Figura 68.

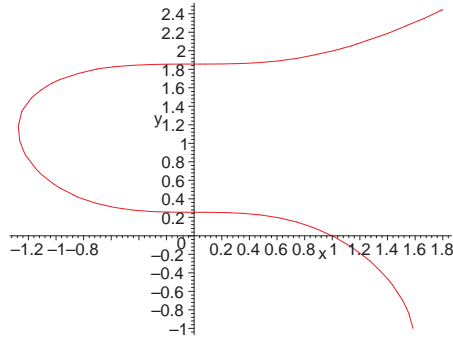


Figura 68: Gráfico da curva $y^3 - 4y - x^3 + 1 = 0$.

Note que quando $3y^2 - 4 = 0$, ou seja, $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx \pm 1.16$, as tangentes à curva são verticais, logo, o domínio da solução que passa por $(1, 0)$ é o intervalo

$$\left(\left(1 - \frac{16\sqrt{3}}{3} \right)^{\frac{1}{3}}, \left(1 + \frac{16\sqrt{3}}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \right).$$

9. Note que esta equação é de variáveis separáveis e é equivalente a

$$\frac{dy}{y} = \frac{x^2 dx}{1 + x^3},$$

que é facilmente integrável e nos leva a $\ln |y| = \frac{1}{3} \ln |1 + x^3| + c$. Como queremos $y(0) = 1$, devemos tomar $c = 0$. Logo, a solução é $y = (1 + x^3)^{\frac{1}{3}}$, definida para todo x real.

10. Esta equação é linear e seu fator integrante é $e^{x+2\ln|x|+k}$, fazendo-se $k = 0$, teremos $\mu(x) = x^2 e^x$. Logo, o multiplicamos a equação por este fator integrante e se torna $(x^2 e^x y)' = x^5$, logo, a solução geral é $y = \left(\frac{x^4}{6} + cx^{-2} \right) e^{-x}$. Como queremos que $y(1) = 2$, devemos tomar $c = 2e - \frac{1}{6}$. Portanto a solução é $y = \left(\frac{x^4}{6} + (2e - \frac{1}{6})x^{-2} \right) e^{-x}$, a qual está definida para todo x positivo.

11. A população satisfaz à seguinte equação diferencial $P' = kP$, cuja solução geral é da forma $P(t) = Ce^{kt}$. São dados $P(1650) = 6 \times 10^8$ e $P(2000) = 6 \times 10^9$, portanto, temos

$$10 = \frac{P(2000)}{P(1650)} = e^{(2000-1650)k} = e^{350k},$$

portanto, $k = \frac{\ln 10}{350}$. Temos que $P(2000) = 6 \times 10^9 = Ce^{2000k}$, logo, $C = 6 \times 10^9 e^{-2000k}$, então,

$$P(t) = 6 \times 10^9 e^{-2000k} e^{kt} = 6 \times 10^9 e^{(t-2000)k}.$$

Queremos encontrar t tal que $P(t) = 30 \times 10^9$, portanto, $e^{(t-2000)k} = 5$, ou seja, $t = \frac{\ln 5}{k} + 2000 = \frac{350 \ln 5}{\ln 10} + 2000 \approx 2244,64$.

12. A equação que descreve o processo de decaimento é $Q'(t) = -kQ$, portanto, $Q(t) = Ce^{-kt}$, como $Q(0) = 100$ gramas, segue-se que $Q(t) = 100e^{-kt}$, com t dado em horas. Por outro lado, $Q(1) = \frac{Q(0)}{2}$; portanto, $e^{-k} = \frac{Q(1)}{Q(0)} = \frac{1}{2}$, donde se conclui que $k = \ln 2$. Assim, $Q(t) = 100e^{-\ln 2 t}$. Queremos encontrar t tal que $Q(t) = 20$ gramas, ou seja, $20 = 100e^{-\ln 2 t}$, donde se conclui que $t = \frac{\ln 5}{\ln 2}$ horas que é aproximadamente 2 horas e 20 minutos.

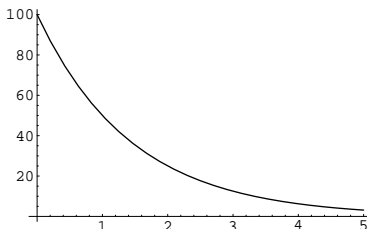


Figura 69: Gráfico de $Q(t) = 100e^{-(\ln 2)t}$.

13. A equação $y' + \frac{2}{3}y = 1 - \frac{1}{2}t$, $y(0) = y_0$, é linear de primeira ordem. O seu fator integrante é $\mu(t) = e^{\frac{2}{3}t}$. Portanto, a solução geral da mesma é

$$y(t) = \frac{\int (1 - \frac{1}{2}t)e^{\frac{2}{3}t} dt}{e^{\frac{2}{3}t}} = \frac{(\frac{21}{8} - \frac{3}{4}t)e^{\frac{2}{3}t} + C}{e^{\frac{2}{3}t}}.$$

Em vista da condição inicial, devemos tomar $C = y_0 - \frac{21}{8}$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é $y(t) = \frac{21}{8} - \frac{3}{4}t + (y_0 - \frac{21}{8})e^{-\frac{2}{3}t}$. A fim de que o gráfico de y toque o eixo dos t 's sem atravessá-lo, é necessário que haja um instante t_o , tal que $y(t_o) = 0$ e $y'(t_o) = 0$; portanto, temos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} 0 &= y(t_o) = \frac{21}{8} - \frac{3}{4}t_o + \left(y_0 - \frac{21}{8}\right)e^{-\frac{2}{3}t_o} \\ 0 &= y'(t_o) = -\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\left(y_0 - \frac{21}{8}\right)e^{-\frac{2}{3}t_o} \end{aligned}$$

cuja solução é $t_o = 2$ e $y_o = \frac{21}{8} - \frac{9}{8}e^{\frac{4}{3}}$, veja Figura 70.

Seção 3

1. A equação característica é $\lambda^2 + 2b\lambda + 1 = 0$, cujas raízes são $\lambda = -b \pm \sqrt{b^2 - 1}$. Casos possíveis:

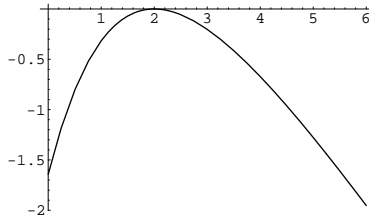


Figura 70: Gráfico de $\frac{21}{8} - \frac{3}{4}t - \frac{9}{8}e^{\frac{4-2t}{3}}$.

(i) Se $|b| > 1$, teremos duas raízes reais distintas. A solução geral é

$$y = c_1 e^{(-b - \sqrt{b^2 - 1})t} + c_2 e^{(-b + \sqrt{b^2 - 1})t},$$

a qual tende para zero quando t tende a infinito, independente dos valores de c_1 e c_2 , somente se $b > 1$, pois, neste caso, $-b \pm \sqrt{b^2 - 1} < 0$.

(ii) Se $b = \pm 1$, a solução geral será

$$y = (c_1 + c_2 t) e^{-bt},$$

a qual tenderá a zero quando t tende a infinito independente de c_1 e c_2 apenas se $b = 1$.

(iii) Se $|b| < 1$, a solução geral será

$$y = e^{-bt} \left(c_1 \cos \left(\sqrt{1 - b^2} t \right) + c_2 \operatorname{sen} \left(\sqrt{1 - b^2} t \right) \right),$$

a qual tende à zero quando t tende a infinito independente de c_1 e c_2 somente se $0 < b < 1$.

Resumindo, se $b > 0$, as soluções tenderão a zero quando t tende a infinito, independente dos valores de c_1 e de c_2 .

2. Note que a equação característica é $4\lambda^2 + a\lambda + (a - 4) = 0$, cujas raízes são $\lambda = \frac{-a \pm |a - 8|}{8}$. Temos as seguintes possibilidades:

(i) Se $a = 8$, neste caso $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Portanto, a solução geral é $y = (c_1 + c_2 t) e^{-t}$, que tende a zero quando t tende a infinito independente de c_1 e de c_2 .

(ii) Se $a > 8$, temos duas raízes reais distintas $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \frac{a-4}{4} > 0$.

(iii) Se $a < 8$, temos duas raízes reais distintas $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = \frac{4-a}{4}$ a qual será negativa se $4 < a < 8$.

Nos casos (ii) e (iii), como temos duas raízes reais distintas, a solução geral tenderá a zero quando t tende a infinito, independente dos valores de c_1 e c_2 , somente se λ_1 e λ_2 forem negativos, ou seja se a pertencer ao intervalo $(4, 8]$.

Portanto, a solução vai para zero quando t tende a infinito independente de c_1 e c_2 , somente se a pertencer ao intervalo $(4, 8]$.

3. Neste caso a equação característica da equação homogênea associada é $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$. Como $g(t) = 3e^{-t}$, segue-se que $\alpha = -1$, $\beta = 0$ e $n = 0$. Como $\alpha + i\beta = -1$ não é raiz da equação característica, segue-se que $s = 0$, portanto, a solução particular da equação é da forma $Y = Ae^{-t}$. Substituindo esta expressão na equação diferencial, temos $A = -\frac{3}{4}$. Portanto, $Y = -\frac{3}{4}e^{-t}$ é uma solução particular da equação diferencial. Assim, a solução geral é

$$y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t} - \frac{3}{4} e^{-t}.$$

Como queremos a solução que satisfaz às condições $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$, temos que $c_1 + c_2 = \frac{3}{4}$ e $3c_1 - 2c_2 = -\frac{3}{4}$; portanto, $c_1 = \frac{3}{20}$ e $c_2 = \frac{3}{5}$ e a solução desejada é

$$y = \frac{3}{20} e^{3t} + \frac{3}{5} e^{-2t} - \frac{3}{4} e^{-t}.$$

4. A equação característica da equação homogênea associada é $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$, cujas raízes são $\lambda = 2 \pm i$. Como $g(t) = \text{sen}(2t)$, segue-se que $\alpha = 0$, $\beta = 2$ e $n = 0$. Visto que $\alpha + i\beta = 2i$ não é raiz da equação característica, segue-se que $s = 0$; portanto, a solução particular é da seguinte forma: $Y = A \cos(2t) + B \text{sen}(2t)$. Substituindo esta expressão na equação diferencial temos $(A - 8B) \cos(2t) = +8A + B \text{sen}(2t) = \text{sen}(2t)$. Logo, devemos ter $A - 8B = 0$ e $8A + B = 1$; ou seja, $A = \frac{8}{65}$ e $B = \frac{1}{65}$. Disso, concluímos que a solução geral é

$$y = (c_1 \cos t + c_2 \text{sen } t) e^{2t} + \frac{8}{65} \cos(2t) + \frac{1}{65} \text{sen}(2t).$$

Como queremos $y(0) = 0 = y'(0)$, segue-se que $c_1 = -\frac{8}{65}$ e $c_2 = \frac{3}{65}$. Portanto, a solução é

$$y = \left(-\frac{8}{65} \cos t + \frac{3}{65} \text{sen } t \right) e^{2t} + \frac{8}{65} \cos(2t) + \frac{1}{65} \text{sen}(2t).$$

5. A equação característica da equação homogênea associada é $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -3$. Como $g(t) = 3t$, segue-se que $\alpha = 0 = \beta$ e $n = 1$. Como que $\alpha + i\beta = 0$ não é raiz da equação característica, segue-se que $s = 0$; portanto, a solução particular é da seguinte forma: $Y = A + Bt$. Substituindo esta expressão na equação diferencial, temos, $6A + 5B = 0$ e $6B = 3$; portanto, $B = \frac{1}{2}$ e $A = -\frac{5}{12}$. Logo a solução geral é

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} - \frac{5}{12} + \frac{t}{2}.$$

Como queremos $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$, temos que $c_1 + c_2 = \frac{5}{12}$ e $2c_1 + 3c_2 = -\frac{3}{2}$; portanto, $c_1 = \frac{11}{4}$ e $c_2 = -\frac{7}{3}$.

$$y = \frac{11}{4} e^{-2t} - \frac{7}{3} e^{-3t} + \frac{t}{2} - \frac{5}{12}.$$

6. A equação característica da equação homogênea associada é $\lambda^2 + 4 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = \pm 2i$. Neste problema vamos chamar de $g_1 = t^2$ e $g_2 = 3e^t$ e consideraremos as seguintes equações $y'' + 4y = g_i$, $i = 1, 2$. Para g_1 , temos $\alpha = 0 = \beta$ e $n = 2$, como $\alpha + i\beta = 0$ não é raiz da equação característica, segue-se que $s = 0$; portanto, a solução particular de $y'' + 4y = g_1$ será da forma $Y_1 = At^2 + Bt + C$, substituindo esta expressão na equação $y'' + 4y = g_1$, encontramos $A = \frac{1}{4}$, $B = 0$ e $C = -\frac{1}{8}$; logo, $Y_1 = \frac{t^2}{4} - \frac{1}{8}$.

Para g_2 , temos $\alpha = 1$, $\beta = 0$ e $n = 0$, como $\alpha + i\beta = 1$ não é raiz da equação característica, segue-se que $s = 0$; portanto, a solução particular de $y'' + 4y = g_2$ será da forma $Y_2 = De^t$, substituindo esta expressão na equação $y'' + 4y = g_2$, encontramos $D = \frac{3}{5}$. Logo, $Y_2 = \frac{3}{5} e^t$. Pelo Princípio da Superposição, segue-se que $Y = \frac{3}{5} e^t + \frac{t^2}{4} - \frac{1}{8}$ é uma solução particular da equação $y'' + 4y = 3e^t + t^2$. Portanto, a solução geral da equação será

$$y = c_1 \cos(2t) + c_2 \operatorname{sen}(2t) + \frac{3}{5} e^t + \frac{t^2}{4} - \frac{1}{8}.$$

Como queremos que $y(0) = 0 = y'(0)$, segue-se que $c_1 = -\frac{19}{40}$ e $c_2 = -\frac{3}{10}$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = -\frac{19}{40} \cos(2t) - \frac{3}{10} \operatorname{sen}(2t) + \frac{3}{5} e^t + \frac{t^2}{4} - \frac{1}{8}.$$

7. Vamos considerar as seguintes equações: $y'' + 3y' + 2y = g_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, onde $g_1 = e^t(t^2 + 1) \operatorname{sen}(2t)$, $g_2 = 3e^{-t} \cos t$ e $g_3 = 4te^{-t}$ e $g_4 = t^2$. Sejam Y_i soluções particulares de $y'' + 3y' + 2y = g_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Do método dos coeficientes a determinar, temos as seguintes formas para as soluções particulares:

$$Y_1 = e^t ((At^2 + Bt + C)) \cos(2t) + (Dt^2 + Et + F)$$

$$Y_2 = e^{-t} (G \cos t + H \operatorname{sen} t)$$

$$Y_3 = te^{-t} (It + J)$$

$$Y_4 = Ht^2 + Lt + M.$$

Segue-se do Princípio da Superposição que $Y = Y_1 + y_2 + Y_3 + Y_4$ é uma solução particular da equação $y'' + 3y' + 2y = e^t(t^2 + 1) \operatorname{sen}(2t) + 3e^{-t} \cos(t) + 4te^{-t} + t^2$.

8.

9.

10.

11. Note que $p(x) = \frac{1}{x}$, portanto, do Teorema de Abel, $W(y_1, y_2)(x) = e^{\int p(x)dx} = Cx$.

12. Note que $W(y_1, y_2)(t_o) = y_1(t_o)y_2'(t_o) - y_1'(t_o)y_2(t_o) = y_1(t_o)0 - 0y_2(t_o) = 0$, logo, as duas soluções são linearmente dependentes.

13. No que se segue usaremos o sistema de unidades *MKS* e omitiremos as unidades. Vimos que $k = \frac{mg}{L} = \frac{9.8}{0.15} \approx 65,33$. Logo, o problema de valor inicial que descreve o movimento é $y'' + ky = 0$, $y(0) = 0.075$ e $y'(0) = 0$. A solução geral da equação é $y = c_1 \cos \sqrt{k} + c_2 \sen \sqrt{k}$. Tendo em vista as condições iniciais, temos $c_1 = y(0) = 0.075$ e $c_2 = \frac{y'(0)}{\sqrt{k}} = 0$. Portanto, a solução desejada é $y = 0.075 \cos \left(\sqrt{\frac{9.8}{0.15}} t \right)$. Freqüência é $\omega_o = \sqrt{\frac{9.8}{0.15}} \approx 8.08$, veja Figura 71. O Período é $T = 2\pi \sqrt{\frac{0.15}{9.8}} \approx 0.718$.

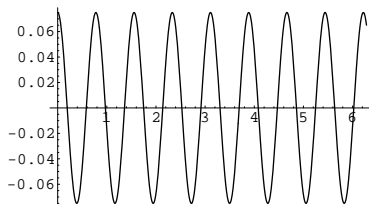


Figura 71: Gráfico de $y = 0.075 \cos \left(\sqrt{\frac{9.8}{0.15}} t \right)$.

14. A constante elástica da mola é $k = 30$ (Newtons por metro). Quando uma força de 3 N é aplicada no corpo ela imprime nesse uma velocidade constante de 5 metros por segundo, isto significa que a força de atrito, que estamos proporcional à velocidade, nestas condições vale 5γ e ela é igual à força aplicada; portanto, $\gamma = 0.6$ unidades. Como a massa é de 2 kg, o problema de valor inicial que descreve o problema é $2y'' + 0.6y' + 30y = 0$, $y(0) = 0.05$ e $y'(0) = 0.1$. A solução geral da equação é $y = e^{-0.15t} (c_1 \cos(\sqrt{59.91} t) + c_2 \sen(\sqrt{59.91} t))$. Tendo em vistas as condições iniciais, temos que $c_1 = 0.05$ metros e $c_2 = \frac{0.1075}{\sqrt{59.91}} \approx 0.014$ metros.

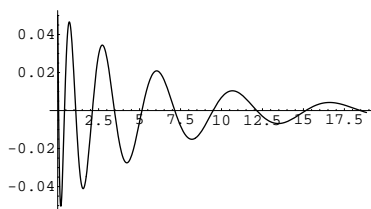


Figura 72: Gráfico de $y = e^{-0.15t} \left(0.05 \cos(\sqrt{59.91} t) + \frac{0.1075}{\sqrt{59.91}} \text{sen}(\sqrt{59.91} t) \right)$.

Seção 4

1.(a) Note que após decomposição em frações parciais temos

$$\frac{8s^2 - 4s + 2}{s(s^2 + 4)} = \frac{1}{2} \frac{1}{s} + \frac{15}{2} \frac{s}{s^2 + 4} - 2 \frac{2}{s^2 + 4},$$

cuja transformada inversa é $\frac{1}{2} + \frac{15}{2} \cos(2t) - 2 \text{sen}(2t)$.

1.(b) Após uma manipulação simples podemos escrever

$$\frac{2s + 1}{4s^2 + 4s + 5} = \frac{1}{2} \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1},$$

cuja transformada inversa é $\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \cos t$.

1.(c) Escreveremos $H(s) = e^{-s}F(s) + G(s)$, onde $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+2s+2)}$ e $G(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)(s^2+4)}$; portanto, $h(t) = u_1(t)f(t-1) + g(t)$.

Após decomposição em frações parciais, temos

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s^2(s^2 + 2s + 2)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2} \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1}, \\ G(s) &= \frac{s^2 + 1}{(s + 1)(s^2 + 4)} = \frac{2}{5} \frac{1}{s + 1} + \frac{3}{5} \frac{s}{s^2 + 4} - \frac{3}{10} \frac{2}{s^2 + 4}, \end{aligned}$$

e concluímos que $f(t) = -\frac{1}{2} + \frac{t}{2} + \frac{e^t}{2} \cos t$ e $g(t) = \frac{2}{5}e^{-t} + \frac{3}{5} \cos(2t) - \frac{3}{10} \text{sen}(2t)$.

2. Podemos escrever $f(t) = \text{sen}(\pi t) + u_1(t) \text{sen} \pi(t-1) + u_2(t)(t-2) - u_3(t)(t-3)$, cuja transformada de Laplace é $F(s) = \frac{\pi}{s^2 + \pi^2} + e^{-s} \frac{\pi}{s^2 + \pi^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^2}$.

3.(a) $\frac{3}{(s+3)^4} + e^{-\pi s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2\pi}{s^2} + \frac{\pi^2}{s} \right)$.

3.(b) $-\frac{2}{s^2+4} + e^{-(s-1)}$.

3.(c) Se fizermos $f(t) = \cos t$, então, a transformada de Laplace de $e^{-t}t^2 f(t)$ é igual a $F''(s+1)$, onde $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Portanto, a transformada desejada é $\frac{-2(s+1)^3+2(s+1)}{((s+1)^2+1)^3}$.

3.(d) Podemos escrever $f(t) = u_1(t)(t^2 - t + 1) = u_1(t)((t-1)^2 + (t-1) - 1)$, cuja transformada de Laplace é $F(s) = e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} \right)$.

4.(a) Temos

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2-s}{(s-1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)(s^2-2s+2)} + \frac{s}{(s^2+1)(s^2-2s+2)} \\ &= -\frac{(s-1)}{(s-1)^2+1} + \frac{1}{(s-1)^2+1} + F(s) + G(s), \end{aligned}$$

onde $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2-2s+2)}$ e $G(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2-2s+2)}$. Logo, $y(t) = -e^t \cos t + e^t \sen t + f(t) + g(t)$.

Após decomposição em frações parciais temos $F(s) = -\frac{1}{5} \frac{1}{(s+1)} + \frac{\frac{1}{5}s + \frac{7}{5}}{s^2-2s+2} = -\frac{1}{5} \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{5} \frac{(s-1)}{(s-1)^2+1} + \frac{8}{5} \frac{1}{(s-1)^2+1}$; logo, $f(t) = -\frac{1}{5}e^{-t} + \frac{1}{5}e^t \cos t + \frac{8}{5}e^t \sen t$. Também temos $G(s) = \frac{\frac{1}{5}s - \frac{2}{5}}{s^2+1} + \frac{-\frac{1}{5}s + \frac{4}{5}}{s^2-2s+2} = \frac{1}{5} \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{5} \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{5} \frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{3}{5} \frac{1}{(s-1)^2+1}$; logo, $g(t) = \frac{1}{5} \cos t - \frac{2}{5} \sen t - \frac{1}{5}e^t \cos t + \frac{3}{5}e^t \sen t$.

4.(b) Note que $f(t) = t - u_1(t) - u_1(t)(t-1)$, portanto, $F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2}$. Note que

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} - e^{-s} \frac{s+1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + e^{-s} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{s+1}{s^2+1} \right).$$

Portanto,

$$y(t) = t - \sen t - u_1(t) (\cos(t-1) + \sen(t-1) - t).$$

4.(c) Note que $f(t) = \sen(\pi t) + u_1(t)\sen \pi(t-1) + u_2(t)(t-2) - u_3(t) - u_3(t)(t-3)$. Logo,

$F(s) = \frac{\pi}{s^2+\pi^2} + e^{-s} \frac{\pi}{s^2+\pi^2} + e^{-2s} \frac{1}{s^2} - e^{-3s} \frac{s+1}{s^2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\pi}{s(s-1)(s^2+\pi^2)} + e^{-s} \frac{\pi}{s(s-1)(s^2+\pi^2)} + e^{-2s} \frac{1}{s^3(s-1)} - e^{-3s} \frac{s+1}{s^3(s-1)} \\ &\equiv G(s) + e^{-s}G(s) + e^{-2s}H(s) - e^{-3s}M(s), \end{aligned}$$

onde $G(s) = \frac{\pi}{s(s-1)(s^2+\pi^2)}$, $H(s) = \frac{1}{s^3(s-1)}$ e $M(s) = \frac{s+1}{s^3(s-1)}$. Logo,

$$y(t) = g(t) + u_1(t)g(t-1) + u_2(t)h(t-2) - u_3(t)m(t-3),$$

onde

$$\begin{aligned} g(t) &= -\frac{1}{\pi} + \frac{\pi}{1+\pi^2} e^t + \frac{1}{1+\pi^2} (\cos(\pi t) - \pi \sen(\pi t)), \\ h(t) &= 1 + e^t - t - \frac{t^2}{2}, \\ m(t) &= e^t - 2 - 2t - \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

4.(d) A transformada de Laplace de f é $F(s) = \frac{1}{s(1+e^{-\pi s})} - \frac{e^{-\pi s}}{s(1+e^{-\pi s})}$. Seja $G(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$, então,

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-n\pi s} G(s) - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)\pi s} G(s),$$

e

$$y(t) = \cos t + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_{n\pi}(t) g(t - n\pi) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_{(n+1)\pi}(t) g(t - (n+1)\pi),$$

onde $g(t) = 1 - \cos t$.

4.(e) Neste caso, $Y(s) = e^{-s}G(s) - e^{-2s}G(s)$, onde $G(s) = \frac{1}{s(s^4-1)} = \frac{1}{s(s-1)(s+1)(s^2+1)}$. Portanto, $y(t) = u_1(t)g(t-1) - u_2(t)g(t-2)$, onde

$$g(t) = -1 + \frac{e^t}{4} + \frac{e^{-t}}{4} + \frac{1}{2} \cos t.$$

4.(f) $Y(s) = e^{-\frac{\pi}{2}}G(s) + 3e^{-\frac{3\pi}{2}}H(s)$, onde $G(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$ e $H(s) = \frac{1}{(s^2+1)}$. Portanto,

$$y(t) = u_{\frac{\pi}{2}}(t)g\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - u_{\frac{3\pi}{2}}(t)g\left(t - \frac{3\pi}{2}\right),$$

onde $g(t) = 1 - \cos t$.

5. $Y(s) = \frac{2}{(s+2)} + \frac{1}{(s+2)^2} + G(s)H(s)$, onde $H(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$. Portanto,

$$y(t) = 2e^{-2t} + te^{-2t} + (g * h)(t) = 2e^{-2t} + te^{-2t} + \int_0^t g(t-\tau)\tau e^{2\tau} d\tau.$$

6. Note que $f(t) = -u_{\pi}(t) \operatorname{sen}(t-\pi)$, portanto, $F(s) = -e^{-\pi s} \frac{1}{s^2+1}$. Logo, $Y(s) = \frac{s}{s^2-1} - e^{-\pi s}G(s)$, onde $G(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2-1)}$. Portanto,

$$y(t) = \operatorname{cosh} t - u_{\pi}(t)g(t-\pi),$$

onde $g(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{senh} t - \operatorname{sent})$.

7. Note que $y = t + y * e^{-t}$, portanto, do Teorema da Convolução, $Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}$, logo, $y(t) = t + \frac{t^2}{2}$.

8. Se substituirmos $\phi = u''$ na equação integral e fizermos uma integração por partes e uma integração simples, obtemos imediatamente o item (a). Resolvendo a equação integral, segue-se do Teorema da Convolução que $\Phi(s) = \frac{2s^2}{(s^2+1)(s^2+4)}$, logo, $\phi(t) = -\frac{2}{3}\operatorname{sent} + \frac{4}{3}\operatorname{sen}(2t)$. Se resolvermos o problema de valor inicial dado em (b), segue-se que $v(t) = \frac{2}{3}\operatorname{sent} - \frac{1}{3}\operatorname{sen}(2t)$; portanto, $\phi(t) = u''(t) = v''(t) = -\frac{2}{3}\operatorname{sent} + \frac{4}{3}\operatorname{sen}(2t)$, que o resultado que havíamos encontrado anteriormente.

Referências

- [1] Earl A. Coddington e Norman Levinson, em *Theory of Ordinary Differential Equations*, Krieger Publishing Company, 1983.
- [2] William E. Boyce e Richard C. DiPrima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Sétima Edição.
- [3] C. H. Edwards e D. E. Penney, *Differential Equations, computing and modeling*, Prentice Hall, 2000.
- [4] Djairo Guedes de Figueiredo, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides, 1997.
- [5] Joel Feldman, *Derivation of the Wave Equation*, encontrado no endereço www.math.ubc.ca/~feldman/apps/wave.pdf.
- [6] Ali R Ansari, *The One-Dimensional Heat Equation*, encontrado no endereço <http://www.ul.ie/~aransari/MS4007Notes4.pdf>