Notas de Aula

Equações Diferenciais Ordinárias Básicas

Rodney Josué Biezuner [1]
Departamento de Matemática
Instituto de Ciências Exatas (ICEx)
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Notas de aula do curso *Equações Diferenciais A* do Ciclo Básico do ICEx.

21 de julho de 2010

[1] E-mail: rodney@mat.ufmg.br; homepage: http://www.mat.ufmg.br/∼rodney.

Sumário

Capítulo 0

Introdução

Uma **equação diferencial ordinária** (EDO) é uma equação cuja incógnita é uma função de uma variável $y = y(x)$ envolvendo uma ou mais derivadas da função y, e possivelmente a variável x e a própria função y:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

A **ordem** da EDO é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação. Resolver a EDO é portanto encontrar a função y. EDOs aparecem freqüentemente como **modelos matemáticos** para descrever e prever fenômenos naturais. Nestes modelos matemáticos, a taxa de variação de alguma grandeza em função de uma única variável (ou as taxas de variação de várias ordens) obedece alguma lei hipotetizada ou verificada experimentalmente, que é expressa apenas em termos da variável ou da grandeza; esta é uma EDO. Quando a EDO é resolvida, obtém-se a função da grandeza em relação a esta variável, o que permite prever o valor da grandeza em valores específicos da variável, e assim entender melhor o fenômeno natural.

Exemplo 0.1. (Objeto em Queda Livre) Um objeto em queda livre satisfaz a segunda lei de Newton $F = ma$, onde $F = mg$ é a força gravitacional. Portanto, a função distância percorrida pelo objeto com o tempo $x = x(t)$ satisfaz a EDO de segunda ordem

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \tag{1}$$

e a função velocidade do objeto com o tempo $v = v(t)$ satisfaz a EDO de primeira ordem

$$\frac{dv}{dt} = g. \tag{2}$$

Ambas as equações podem ser resolvidas por integração direta. Integrando a segunda equação uma vez, obtemos

$$v(t) = gt + C$$

onde C é a constante de integração, arbitrária. A constante de integração fica determinada uma vez que o valor da velocidade do objeto em um determinado instante de tempo é conhecido. Por exemplo, se a velocidade inicial do objeto é conhecida, isto é, a velocidade $v_0 = v(0)$ no instante de tempo $t = 0$ é conhecida, então como

$$v(0) = g \cdot 0 + C$$

segue que $C = v_0$. A única solução do problema é

$$v(t) = gt + v_0. \tag{3}$$

Em geral esperamos que quando um fenômeno natural determinístico é bem compreendido, com todas as variáveis que possam influenciá-lo conhecidas, deve existir apenas uma única solução. Caso contrário, não há como prevê-lo e provavelmente o modelo não é suficientemente completo, se o fenômeno é do tipo determinístico.

Para resolver a equação de segunda ordem, precisamos integrá-la duas vezes, obtendo no processo duas constantes arbitrárias:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= gt + C_1, \\ x(t) &= \frac{g}{2}t^2 + C_1 t + C_2.\end{aligned}$$

Como $\dfrac{dx}{dt} = v$ a primeira constante C_1 é a velocidade inicial do objeto v_0. A segunda constante C_2 é a posição inicial do objeto $x_0 = x(0)$, pois

$$x(0) = \frac{g}{2}0^2 + C_1 0 + C_2 = C_2$$

Assim, a distância percorrida pelo objeto em queda livre com o tempo é dada por

$$x(t) = \frac{g}{2}t^2 + v_0 t + x_0. \tag{4}$$

□

Exemplo 0.2. (Crescimento Exponencial) O caso mais simples em que a taxa de variação de uma grandeza em relação a uma variável depende da própria grandeza é o caso do *crescimento exponencial*. Por exemplo, suponha que $p(t)$ representa o número de bactérias em uma placa de petri no minuto t. Assuma que a placa possui uma quantidade suficiente de açúcar, de modo que não falta comida para as bactérias. Espera-se que, nessas condições, cada bactéria se dividirá em duas a cada 20 minutos. Se nenhuma bactéria morre (não há predadores ou influências externas danosas), então a taxa de variação de p é igual a $\dfrac{1}{20}p = 0.05p$ por minuto. Portanto, a EDO que modela o crescimento da população de bactérias na placa de petri é

$$\frac{dp}{dt} = ap, \tag{5}$$

onde $a = 0.05$. Esta EDO de primeira ordem também pode ser resolvida por integração direta:

$$\int \frac{dp}{p} = \int a dt$$

donde

$$\ln p = at + C$$

ou

$$p(t) = Ce^{at}.$$

Mais uma vez, uma condição inicial determina o valor da constante C, $C = p(0) =: p_0$, de modo que a única solução da EDO é

$$p(t) = p_0 e^{at}. \tag{6}$$

Se o número de bactérias no instante inicial $t = 0$ não é conhecido, mas o número de bactérias em qualquer instante específico t_0 é conhecido, a constante C também pode ser determinada. Neste caso,

$$p(t) = p(t_0)\, e^{a(t-t_0)}. \tag{7}$$

É claro que a medida que o número de bactérias cresce, este modelo matemático começa a refletir menos e menos a situação real. A partir de um certo momento, o número de bactérias na placa de petri é tão grande que a competição por recursos começa a afetar a reprodução das bactérias e a taxa de crescimento cai. O modelo matemático original não assumia nenhuma interação entre as bactérias. É necessário modificar o modelo, obtendo uma EDO que descreva melhor o crescimento da população de bactérias depois de decorrido um certo tempo. Veremos as modificações necessárias na próxima seção e ao longo do curso. □

EDOs Lineares e Não-Lineares

Além da classificação das EDOs com relação a sua ordem, uma importante classificação é a de **EDOs lineares** e **EDOs não-lineares**. Uma EDO

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

é chamada **linear** se a função F for uma função linear, caso contrário ela é **não-linear**. Uma EDO linear pode ser escrita na forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y = f(x). \tag{8}$$

Uma das principais propriedades que distinguem as equação lineares das equações não-lineares é o fato de que a combinação linear de soluções de equações lineares homogêneas (isto é, quando $f(x) = 0$) é também uma solução. De fato, se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções da EDO linear (8) com $f(x) = 0$, isto é,

$$\begin{aligned}
a_n(x)\frac{d^n y_1}{dx^n} + \ldots + a_2(x)\frac{d^2y_1}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy_1}{dx} + a_0(x)\,y_1 = 0,\\
a_n(x)\frac{d^n y_2}{dx^n} + \ldots + a_2(x)\frac{d^2y_2}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy_2}{dx} + a_0(x)\,y_2 = 0,
\end{aligned}$$

e se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são dois escalares reais, então

$$\begin{aligned}
&a_n(x)\frac{d^n(\alpha y_1 + \beta y_2)}{dx^n} + \ldots + a_2(x)\frac{d^2(\alpha y_1 + \beta y_2)}{dx^2} + a_1(x)\frac{d(\alpha y_1 + \beta y_2)}{dx} + a_0(x)(\alpha y_1 + \beta y_2)\\
&= \alpha\left[a_n(x)\frac{d^n y_1}{dx^n} + \ldots + a_2(x)\frac{d^2y_1}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy_1}{dx} + a_0(x)\,y_1\right]\\
&+ \beta\left[a_n(x)\frac{d^n y_2}{dx^n} + \ldots + a_2(x)\frac{d^2y_2}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy_2}{dx} + a_0(x)\,y_2\right]\\
&= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,
\end{aligned}$$

de modo que $\alpha y_1 + \beta y_2$ também é uma solução de (8). Mais que isso, podemos dizer o seguinte:

Proposição 0.1. *Seja*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y = 0 \tag{9}$$

uma EDO linear homogênea. Então o conjunto de suas soluções definidas em um intervalo especificado forma um subespaço de dimensão n no espaço de funções.

No caso não-homogêneo, se uma solução particular pode ser obtida, todas as soluções são somas desta solução particular com as soluções do problema homogêneo (um espaço afim de dimensão n no espaço de funções). A teoria é semelhante à resolução de sistemas lineares em álgebra linear. Isso se deve ao fato que uma equação diferencial linear é um operador linear no espaço de funções diferenciáveis.

Outra diferença fundamental é que as EDOs lineares são muito mais fáceis de resolver do que as EDOs não-lineares e sua teoria, tanto analítica (qualitativa) quanto quantitativa (métodos de resolução) está bem desenvolvida. Já a teoria qualitativa das EDOs não-lineares ainda está em desenvolvimento e muitas vezes não existem métodos exatos para obter as suas soluções. Por outro lado, EDOs não-lineares aparecem na modelagem matemática de muitos fenômenos naturais. Soluções discretas aproximadas podem ser obtidas através de métodos numéricos com o auxílio de computadores. Um método também muito popular é aproximar EDOs não-lineares por EDOs lineares, através de um processo chamado *linearização*. O principal objetivo deste curso é o estudo de EDOs lineares.

Exemplo 0.3. (Equação Logística I) Vamos considerar um modelo matemático mais realista de crescimento populacional do que o do Exemplo 0.2. Por exemplo, considere uma população de peixes em um lago, sem a presença de predadores naturais. Se começarmos com um lago grande e uma população inicial pequena de peixes, esperamos que inicialmente o crescimento seja do tipo exponencial. A população de peixes não pode crescer para sempre sem limites; a quantidade limitada de recursos do lago (comida e espaço para depositar os ovos) impõe um limite natural à população máxima de peixes que o lago comporta. Esperamos que a população de peixes atinja um certo limite e sofra pequenas flutuações ao redor deste limite, salvo disastres naturais ou outras influências externas.

Se $p(t)$ denota a população de peixes em um certo instante de tempo t, é razoável postular que $p(t)$ satisfaça uma equação diferencial ordinária do tipo

$$\frac{dp}{dt} = h(p)\,p, \tag{10}$$

isto é, a taxa de crescimento da população em um determinado instante depende da população de peixes naquele momento, multiplicada por um fator $h(p)$ que desempenha o papel de uma *taxa de crescimento relativo* (taxa de natalidade menos taxa de mortalidade, isto é, número de nascimentos menos número de falecimento de peixes por unidade de tempo) para os peixes quando a população é p. A taxa de crescimento relativo não deve ser constante, pois quando há mais peixes há correspondentemente menos comida e portanto a taxa de mortalidade deve ser maior. Mais especificamente, quando p é pequeno, esperamos h ser aproximadamente constante, e quando p é muito grande, h deve ser negativa. Um modelo simples para h é o seguinte

$$h(p) = a - bp, \tag{11}$$

onde a e b são constantes a serem determinadas, dependentes do problema específico. Observe que quando p é pequeno, h é aproximadamente constante igual a a (isto é, $p \ll a/b$) e correspondentemente $\dfrac{dp}{dt} \sim ap$, o que significa um crescimento exponencial. Quando p é grande ($p > a/b$), então $h(p)$ é negativa. A equação resultante,

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2, \tag{12}$$

é chamada a **equação logística** (introduzida pelo biólogo belga Verhulst em 1838 para prever as populações da Bélgica e da França).

Apesar desta EDO ser uma equação não-linear, ela pode ser resolvida de maneira simples através de integração direta por frações parciais (isso será visto em detalhes posteriormente no curso). Ao invés de resolvê-la diretamente, gostaríamos de obter informações qualitativas. Neste caso em particular, em geral não interessa como a população de peixes evolui exatamente com o passar do tempo, mas sim o valor limite que ela atinge. Para fixar idéias, consideraremos $a = 0.5$ e $b = 0.001$, de modo que a equação se torna

$$\frac{dp}{dt} = 0.001\,(500 - p)\,p =: f(p)\,.$$

A função f é uma parábola com concavidade para baixo que tem zeros nos pontos $p = 0$ e $p = 500$. No primeiro caso, não há nenhum peixe no lago e a taxa de crescimento é obviamente nula. O segundo caso corresponde a um **valor de equilíbrio**: se começarmos com uma população inicial de 500 peixes, a taxa de crescimento é $\frac{dp}{dt} = 0$ e a população não deverá nem aumentar nem diminuir. Na prática isto é impossível, mas vemos que qualquer valor menor que 500 implicará numa taxa de crescimento positivo, tendendo a aumentar a população até 500, enquanto que qualquer valor maior que 500 implicará numa taxa de crescimento negativo, tendendo a diminuir a população de volta para 500. O que acontece na prática é que a população tende a flutuar em torno do valor 500, daí o nome "valor de equilíbrio". Portanto, devemos esperar que a população limite de peixes que o lago comporta para estes valores específicos das constantes a e b (que em geral dependem não só do lago, mas do tipo de peixe cultivado) é 500. $\square$

Exemplo 0.4. (Equação Logística II) No exemplo anterior, mais do que a população limite que o lago comporta, em geral estamos mais interessados em definir o limite de *pesca sustentável* do lago. Ou seja, uma certa quantidade de peixes é removida periodicamente do lago através de pesca e queremos determinar qual é o valor máximo de peixes que podemos pescar sem levar a população de peixes ao colapso, isto é, sem que ela caia eventualmente para zero através da pesca predatória. Se c é o número de peixes retirados do lago por unidade de tempo, então a EDO que passa a descrever a evolução da população de peixes com o passar do tempo é a equação logística modificada

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2 - c. \tag{13}$$

Para fixar idéias, suponha que o tempo t seja medido em anos e que sejam pescados exatamente 52 peixes por ano (limite de pesca permitido):

$$\frac{dp}{dt} = 0.001\,(500 - p)\,p - 52 =: g\,(p)\,.$$

O gráfico de g é a mesma parábola que representa o gráfico de f, exceto que a parábola é deslocada 52 unidades para baixo. Desta vez os zeros da parábola (isto é, os valores de p que correspondem a $\frac{dp}{dt} = 0$) ocorrem nos pontos $p = 148$ e $p = 352$. Temos $\frac{dp}{dt} < 0$ se $p < 148$ e se $p > 352$, enquanto que $\frac{dp}{dt} > 0$ se $148 < p < 352$. Isso significa que se começarmos a pescar no lago quando este atingiu o seu limite máximo $p = 500$ a uma taxa de 52 peixes por ano, a população deve cair até atingir o novo valor de equilíbrio $p = 352$. Portanto, esta taxa de pesca é sustentável. Para valores de p um pouco acima de 148, esta taxa também é sustentável e a população de peixes aumenta, apesar da pesca, até atingir o valor de equilíbrio $p = 352$. Observe porém, que o valor $p = 148$ não é um valor de equilíbrio: flutuações de p para baixo deste valor implicam numa taxa de crescimento negativo e a pesca eventualmente acabará com a população de peixes do lago, enquanto que valores de p acima deste valor aumentam a população de peixes no lago apesar da pesca. Logo, $p = 148$ não é um valor de equilíbrio, pois pequenas flutuações em torno deste valor fazem com que p afaste-se bastante deste valor, seja para baixo, seja para cima.

Qual seria o maior valor permitido para a pesca sustentável no lago? Este seria um valor próximo ao máximo da parábola da função f do exemplo anterior, $c = 62.5$. Um valor bem menor seria recomendável, para evitar acidentes e levar em conta flutuações naturais e a inexatidão do modelo. Além disso, em geral não dispomos de informações exatas sobre as constantes a, b, c na natureza (por exemplo, não é fácil fiscalizar a pesca para fixar o valor de c), e é preciso errar no lado da cautela para evitar o colapso das populações de peixes, o que vem ocorrendo com cada vez maior freqüência. $\square$

Capítulo 1

Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

1.1 Introdução

Definição. EDOs de primeira ordem são equações do tipo

$$F(t, y, y') = 0,$$

isto é, além da variável t e da função y, elas envolvem apenas a derivada primeira y'.

Neste curso, estudaremos principalmente equações de primeira ordem da forma

$$y' = f(t, y)$$

ou

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

Definição. Uma solução da EDO $y' = f(t, y)$ em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é uma função diferenciável $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz a EDO.

Definição. Um problema da forma

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

é chamado um **problema de valor inicial**.

Exemplo 1.1. Encontre a solução geral da EDO

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1 + t^2}.$$

A partir da solução geral, encontre a solução para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{1 + t^2} \\ y(1) = \pi \end{cases}$$

Solução: Através de uma integração simples, obtemos

$$y(t) = \int \frac{1}{1+t^2} = \arctan t + C.$$

Como $y(1) = 3$, devemos ter

$$\arctan 1 + C = \pi,$$

ou seja,

$$C = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4},$$

donde a solução para o problema de valor inicial é

$$y(t) = \arctan t + \frac{3\pi}{4}.$$

□

1.2 Equações Lineares de Primeira Ordem

Uma EDO linear de primeira ordem é da forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)\, y = q(t). \tag{1.1}$$

1.2.1 Caso $p(t) = 0$

Quando $p(t) \equiv 0$, a EDO (1.1) torna-se

$$\frac{dy}{dt} = q(t) \tag{1.2}$$

e pode ser resolvida diretamente por integração:

$$y(t) = \int q(t) + C. \tag{1.3}$$

1.2.2 Caso homogêneo $q(t) = 0$

Quando $q(t) \equiv 0$, a EDO (1.1) torna-se

$$\frac{dy}{dt} + p(t)\, y = 0 \tag{1.4}$$

que chamamos uma *EDO linear homogênea.* Esta também pode ser resolvida diretamente por integração uma vez que as variáveis sejam separadas: escrevemos

$$\frac{dy}{dt} = -p(t)\, y$$

e daí

$$\frac{dy}{y} = -p(t)\; dt,$$

donde

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(t)\; dt,$$

obtendo

$$\ln y = -\int p(t)\; dt + C$$

ou

$$y(t) = Ce^{-\int p(t)\, dt}. \tag{1.5}$$

Exemplo 1.2. Encontre a solução geral da EDO

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{1-t^2}.$$

A partir da solução geral, encontre a solução para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{1-t^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Solução: Através de separação da variáveis seguida da uma integração simples, obtemos

$$\ln y(t) = \int \frac{1}{1-t^2}.$$

A integral pode ser calculada através do método de frações parciais:

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} = \frac{A(1+t) + B(1-t)}{1-t^2}.$$

Devemos ter

$$A(1+t) + B(1-t) = 1.$$

Substituindo $t = 1$ e $t = -1$, obtemos

$$A = B = \frac{1}{2}.$$

Logo

$$\int \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t} = \frac{1}{2}\left(\ln|1+t| - \ln|1-t|\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| = \ln\sqrt{\left|\frac{1+t}{1-t}\right|}.$$

Daí,

$$y(t) = C\sqrt{\left|\frac{1+t}{1-t}\right|}$$

Como $y(0) = 2$, substituindo $t = 0$ obtemos

$$C = 2.$$

ou seja,

$$y(t) = 2\sqrt{\left|\frac{1+t}{1-t}\right|}$$

□

1.2.3 Caso Coeficientes Constantes

Quando a EDO linear possui coeficientes constantes, isto é, as funções $p(t), q(t)$ são constantes $a, b \in \mathbb{R}$, ainda podemos resolver a equação a EDO diretamente por integração:

$$\frac{dy}{dt} + ay = b. \tag{1.6}$$

De fato, escrevemos

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b,$$

separamos as variáveis
$$\frac{dy}{y-\frac{b}{a}}=-a\,dt,$$
e integramos
$$\int\frac{dy}{y-\frac{b}{a}}=-a\int dt$$
obtendo
$$\ln\left(y-\frac{b}{a}\right)=-at+C$$
ou
$$y\left(t\right)=Ce^{-at}+\frac{b}{a}. \tag{1.7}$$
Verificando:
$$\frac{dy}{dt}=-aCe^{-at},$$
de modo que
$$\frac{dy}{dt}+ay=-aCe^{-at}+a\left(Ce^{-at}+\frac{b}{a}\right)=b.$$

1.2.4 Caso Geral – Método do Fator Integrante

Para resolver a EDO linear de primeira ordem (1.1) de forma geral, usamos uma técnica chamada **resolução por fator integrante**. O fator integrante é uma função $r\left(t\right)$ pela qual multiplicamos a EDO, escolhido de tal modo que a expressão resultante pode ser resolvida por integração simples. Mais especificamente, quando multiplicamos (1.1) por uma função $r\left(t\right)$, obtemos
$$r\left(t\right)\frac{dy}{dt}+r\left(t\right)p\left(t\right)y=r\left(t\right)q\left(t\right).$$
Se a função $r\left(t\right)$ fosse tal que pudéssemos escrever
$$\frac{dr}{dt}=r\left(t\right)p\left(t\right),$$
teríamos então
$$r\left(t\right)\frac{dy}{dt}+\frac{dr}{dt}y=r\left(t\right)q\left(t\right),$$
que pode ser escrita na forma
$$\frac{d}{dt}\left(r\left(t\right)y\left(t\right)\right)=r\left(t\right)q\left(t\right).$$
Nesta forma, a EDO pode ser resolvida diretamente por integração:
$$r\left(t\right)y\left(t\right)=\int r\left(t\right)q\left(t\right)\,dt+C,$$
donde
$$y\left(t\right)=\frac{1}{r\left(t\right)}\left(\int r\left(t\right)q\left(t\right)\,dt+C\right) \tag{1.8}$$
Para descobrir o fator integrante de (1.1), precisamos resolver a EDO
$$\frac{dr}{dt}=r\left(t\right)p\left(t\right).$$

Esta pode ser resolvida de maneira simples se escrevermos

$$\frac{1}{r(t)}\frac{dr}{dt} = p(t)$$

e daí integrarmos, obtendo

$$\ln r(t) = \int p(t)\, dt,$$

donde o fator integrante é

$$r(t) = e^{\int p(t)\, dt}. \tag{1.9}$$

Esta função satisfaz de fato (apenas verificando)

$$\frac{dr}{dt} = p(t)\, e^{\int p(t)\, dt} = r(t)\, p(t).$$

Portanto, a solução geral da EDO linear de primeira ordem (1.1) é

$$y(t) = e^{-\int p(t)\, dt}\left(\int e^{\int p(t)\, dt} q(t)\, dt + C\right). \tag{1.10}$$

Exemplo 1.3. Encontre a solução geral da EDO linear de primeira ordem com coeficientes constantes

$$\frac{dy}{dt} + ay = b$$

e da EDO linear de primeira ordem

$$\frac{dy}{dt} + ay = q(t)$$

pelo método do fator integrante.

Solução: Temos $p(t) = a$, logo

$$\int p(t)\, dt = at.$$

No primeiro caso segue que

$$y(t) = e^{-at}\left(\int e^{at} b\, dt + C\right) = e^{-at}\int e^{at} b\, dt + e^{-at}C = \frac{b}{a} + e^{-at}C.$$

Verificando:

$$\frac{dy}{dt} = -ae^{-at}C$$

de modo que

$$\frac{dy}{dt} + ay = -ae^{-at}C + a\left(\frac{b}{a} + e^{-at}C\right) = -ae^{-at}C + b + ae^{-at}C = b.$$

No segundo caso temos

$$y(t) = e^{-at}\left(\int e^{at} q(t)\, dt + C\right) = e^{-at}\int e^{at} q(t)\, dt + Ce^{-at}.$$

Verificando:

$$\frac{dy}{dt} = -ae^{-at}\int e^{at} q(t)\, dt + e^{-at}\left[e^{at} q(t)\right] - aCe^{-at} = -ae^{-at}\int e^{at} q(t)\, dt + q(t) - aCe^{-at},$$

donde

$$\frac{dy}{dt} + ay = -ae^{-at}\int e^{at} q(t)\, dt + q(t) - aCe^{-at} + ae^{-at}\int e^{at} q(t)\, dt + aCe^{-at} = q(t).$$

□

Exemplo 1.4. Encontre a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + 2y = t^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Solução: Temos

$$y(t) = e^{-2t} \int e^{2t} t^2 \, dt + Ce^{-2t}.$$

Como, integrando por partes,

$$\int e^{2t} t^2 \, dt = \frac{1}{2} t^2 e^{2t} - \frac{1}{2} t e^{2t} + \frac{1}{4} e^{2t},$$

segue que

$$y(t) = \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} + Ce^{-2t}. \tag{1.11}$$

Verificando:

$$\frac{dy}{dt} = t - \frac{1}{2} - 2Ce^{-2t}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + 2y &= t - \frac{1}{2} - 2Ce^{-2t} + 2\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + Ce^{-2t}\right) \\ &= t - \frac{1}{2} - 2Ce^{-2t} + t^2 - t + \frac{1}{2} + 2Ce^{-2t} \\ &= t^2. \end{aligned}$$

A solução deve satisfazer a condição inicial $y(0) = 1$, logo

$$\frac{1}{4} + C = 1 \therefore C = \frac{3}{4}.$$

Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} e^{-2t} \tag{1.12}$$

definida para todo $t \in \mathbb{R}$. $\square$

1.2.5 Caso Geral – Método de Variação dos Parâmetros

Outra técnica para resolver EDOs que se aplica também ao caso geral das EDOs lineares é o **método de variação dos parâmetros**. Tendo resolvido o caso homogêneo $q(t) = 0$

$$\frac{dy}{dt} + p(t) y = 0$$

obtendo a solução

$$y(t) = Ce^{-\int p(t)\, dt}$$

onde C é uma constante, procura-se resolver o caso geral não-homogêneo

$$\frac{dy}{dt} + p(t) y = q(t)$$

buscando-se uma variação da solução obtida no caso homogêneo (a idéia é que a solução do caso não-homogêneo não deve ser tão diferente da solução do caso homogêneo), espeficamente tentando uma solução da forma

$$y(t) = C(t)\, e^{-\int p(t)\, dt}, \tag{1.13}$$

onde $C(t)$ é agora uma função a ser determinada. Para determiná-la, usamos a própria EDO: a solução deve satisfazer

$$\frac{d}{dt}\left(C(t)\, e^{-\int p(t)\, dt}\right) + p(t)\, C(t)\, e^{-\int p(t)\, dt} = q(t)\,,$$

ou seja,

$$\frac{dC}{dt} e^{-\int p(t)\, dt} - C(t)\, p(t)\, e^{-\int p(t)\, dt} + p(t)\, C(t)\, e^{-\int p(t)\, dt} = q(t)\,,$$

donde

$$\frac{dC}{dt} = e^{\int p(t)\, dt} q(t)\,.$$

Esta última EDO pode ser resolvida por integração direta e obtemos

$$C(t) = \int e^{\int p(t)\, dt} q(t)\ dt + C.$$

Assim a solução é

$$y(t) = e^{-\int p(t)\, dt} \left(\int e^{\int p(t)\, dt} q(t)\ dt + C\right). \tag{1.14}$$

1.3 Equações Separáveis

Para EDOs de primeira ordem em geral, não-lineares,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

não existe um método universal para obter a solução geral. Existem subclasses de EDOs de primeira ordem às quais certos métodos específicos podem ser aplicados para obter a solução geral.

Equações separáveis são uma subclasse importante de EDOs que podem ser escritas na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}. \tag{1.15}$$

Elas são chamadas *separáveis* porque na notação diferencial podemos escrevê-las na forma

$$f(x)\, dx = g(y)\, dy, \tag{1.16}$$

separando as variáveis. Esta EDO pode ser resolvida diretamente por integração, mas o resultado obtido é em geral uma expressão *implícita* para y em função de x. Temos

$$\int f(x)\, dx = \int g(y)\, dy + C. \tag{1.17}$$

Denotando

$$F(x) = \int f(x)\, dx,$$
$$G(y) = -\int g(y)\, dy,$$

fica claro que o que obtemos é uma expressão implícita

$$F(x) + G(y(x)) = C. \tag{1.18}$$

Entretanto, através desta expressão, muitas vezes é possível obter a solução $y(x)$ de forma explícita.

Exemplo 1.5. Encontre a solução geral da equação
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Solução: Escrevendo
$$y\,dy = -x\,dx,$$
segue que
$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C,$$
que pode ser escrito de maneira mais simples na forma implícita
$$x^2 + y^2 = C.$$
Em outras palavras, a solução $y = y(x)$ é um arco de círculo. □

Exemplo 1.6. Encontre a solução do problema de valor inicial
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y} \\ y(0) = 2. \end{cases}.$$

Solução: No exemplo anterior vimos que a solução geral é dada implicitamente por
$$x^2 + y^2 = C.$$
A constante C é determinada pela condição inicial $0^2 + 2^2 = C$, isto é, $C = 4$. Obtemos duas soluções explícitas distintas, ambas definidas no intervalo $[-2, 2]$:
$$y(x) = \pm\sqrt{4 - x^2},$$
Como a condição inicial é positiva, a solução do problema de valor inicial é
$$y(x) = \sqrt{4 - x^2}.$$
□

1.4 Equações Exatas

Outra subclasse importante de EDOs de primeira ordem são as **equações exatas**, que são as equações que podem ser escritas na forma
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$
ou
$$f(x,y) + g(x,y)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{1.19}$$
em que as funções $f(x,y)$ e $g(x,y)$ são contínuas e têm derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y), \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ contínuas que satisfazem
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}. \tag{1.20}$$

Teorema 1.1. (Existência do Potencial) *Sejam* $f, g : R \to \mathbb{R}$ *funções contínuas definidas no retângulo* $R = [a, b] \times [c, d]$ *que possuem derivadas parciais contínuas* $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial g}{\partial x}$ *que satisfazem a condição*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}. \tag{1.21}$$

Então existe uma função continuamente diferenciável $\psi : R \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= f, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= g. \end{aligned}$$

Prova. Para obter ψ que satisfaz estas condições (que é equivalente a resolver um sistema simples de duas equações diferenciais parciais não acopladas), em primeiro lugar resolvemos a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f$$

por integração direta, obtendo

$$\psi(x, y) = \int f(x, y)\, dx + h(y),$$

onde h é uma função a ser determinada. Para determinar h usamos o fato que ψ também deve satisfazer

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = g,$$

de modo que

$$g = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int f(x, y)\, dx\right) + \frac{dh}{dy} = \int \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx + \frac{dh}{dy}$$

e portanto h satisfaz a EDO

$$\frac{dh}{dy} = g - \int \frac{\partial f}{\partial y}\, dx. \tag{1.22}$$

h é uma função apenas de y, logo o lado direito não pode depender de x. E, de fato, a condição (1.21) garante que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(g - \int \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\right) = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\int \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\right) = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Obtemos h através de uma integração simples:

$$h(y) = \int g(x, y)\, dy - \int \left(\int \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx\right) dy. \tag{1.23}$$

Portanto, a função potencial ψ é dada por

$$\psi(x, y) = \int f(x, y)\, dx + \int g(x, y)\, dy - \iint \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dxdy. \tag{1.24}$$

■

A função ψ é chamada **função potencial** porque o campo vetorial $(f(x, y), g(x, y))$ é exatamente o gradiente do campo escalar $\psi(x, y)$:

$$\nabla \psi(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) \tag{1.25}$$

(conforme será visto no curso de Cálculo III).

Usando a função potencial ψ, podemos resolver (1.19). De fato, substituindo ψ em (1.19), obtemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1.26}$$

Pela regra da cadeia, isso é equivalente

$$\frac{d}{dx}\psi\left(x, y\left(x\right)\right) = 0. \tag{1.27}$$

Integrando, obtemos que a solução geral de (1.19) é dada implicitamente por

$$\psi\left(x, y\left(x\right)\right) = C. \tag{1.28}$$

Exemplo 1.7. Encontre a solução geral da equação

$$\frac{2y\left(1+x^2\right)}{1+2x^2}y' - \frac{2xy^2}{\left(1+2x^2\right)^2} = 1.$$

Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{2y\left(1+x^2\right)}{1+2x^2}y' - \dfrac{2xy^2}{\left(1+2x^2\right)^2} = 1 \\ y\left(0\right) = 1. \end{cases}.$$

Solução: Temos

$$f\left(x, y\right) = -\frac{2xy^2}{\left(1+2x^2\right)^2} - 1 \quad \text{e} \quad g\left(x, y\right) = \frac{2y\left(1+x^2\right)}{1+2x^2}.$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{4xy}{\left(1+2x^2\right)^2} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

ela é exata. Vamos encontrar a função potencial, que agora sabemos existir. Ela satisfaz

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{2xy^2}{\left(1+2x^2\right)^2} - 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{2y\left(1+x^2\right)}{1+2x^2}.$$

Integrando a segunda equação com respeito a y, obtemos

$$\begin{aligned} \psi\left(x, y\right) &= \int \frac{2y\left(1+x^2\right)}{1+2x^2}\,dy + h\left(x\right) = \frac{2\left(1+x^2\right)}{1+2x^2}\int y\,dy + h\left(x\right) \\ &= \frac{y^2\left(1+x^2\right)}{1+2x^2} + h\left(x\right). \end{aligned}$$

Temos também

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{2xy^2}{\left(1+2x^2\right)^2} = -\frac{2xy^2}{\left(1+2x^2\right)^2} - 1 + \frac{2xy^2}{\left(1+2x^2\right)^2} = -1$$

donde

$$h\left(x\right) = -x.$$

Assim, a solução geral é dada implicitamente por

$$\psi\left(x, y\right) = -x + \frac{y^2\left(1+x^2\right)}{1+2x^2} = C.$$

Para encontrar a solução ou as soluções para a condição inicial $y(0) = 1$, primeiro determinamos o valor da constante C:

$$C = -0 + \frac{1^2 \left(1 + 0^2\right)}{1 + 2 \cdot 0^2} = 1.$$

As soluções são dadas implicitamente por

$$-x + \frac{y^2 \left(1 + x^2\right)}{1 + 2x^2} = 1.$$

Logo,

$$\frac{y^2 \left(1 + x^2\right)}{1 + 2x^2} = x + 1 \therefore y^2 \left(1 + x^2\right) = (x + 1)\left(1 + 2x^2\right) = 2x^3 + 2x^2 + x + 1$$

donde obtemos a soluçào explícita (a condição inicial é positiva)

$$y(x) = \sqrt{\frac{2x^3 + 2x^2 + x + 1}{1 + x^2}}.$$

O intervalo de definição destas duas soluções é um intervalo contendo $x = 0$ onde o polinômio $2x^3 + 2x^2 + x + 1$ é não-negativo. Este é exatamente o intervalo $(-1, +\infty)$, já que as duas outras raízes do polinômio são complexas. $\square$

No caso geral de uma EDO não-exata na forma

$$f(x, y) + g(x, y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

podemos tentar multiplicá-la por um **fator integrante** $r(x, y)$ para torná-la exata. Isso significa que a equação se torna

$$r(x, y) f(x, y) + r(x, y) g(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

e a condição desta nova equação ser exata é satisfeita, isto é,

$$\frac{\partial (rf)}{\partial y} = \frac{\partial (rg)}{\partial x}. \tag{1.29}$$

Ou seja,

$$r\frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial r}{\partial y} = r\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial r}{\partial x} \therefore r\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right) = g\frac{\partial r}{\partial x} - f\frac{\partial r}{\partial y}$$

de modo que r deve satisfazer a EDP (equação diferencial parcial) linear homogênea:

$$g\frac{\partial r}{\partial x} - f\frac{\partial r}{\partial y} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right) r = 0. \tag{1.30}$$

Resolver esta EDP pode não ser fácil, ou mesmo ser mais difícil de resolver do que a EDO original. Ao invés de procurar um fator integrante dependendo de duas variáveis, podemos tentar achar um fator integrante mais simples que dependa de apenas uma variável, por exemplo $r(x, y) = r(x)$. Neste caso, r deverá satisfazer a EDO

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{dx} = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right). \tag{1.31}$$

Isso só fará sentido se

$$\frac{1}{g}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

for independente de y, o que pode acontecer. Caso contrário, podemos tentar encontrar um fator integrante $r(x,y) = r(y)$ e r satisfazerá a EDO

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{dy} = -\frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right), \tag{1.32}$$

que fará sentido somente se

$$\frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

independer de x. [Observe que quando a equação é exata isso sempre ocorre, pois a expressão entre parênteses é nula, e o fator integrante é uma constante, que obviamente tomamos igual a 1 (a equação já é exata).] Quando pelo menos uma destas situações ocorrer, o fator integrante r pode ser encontrado através de uma integração direta, como o próximo exemplo mostra.

Exemplo 1.8. Encontre a solução geral da equação

$$2y\left(1+x^2\right)y' - \frac{2xy^2}{1+2x^2} = 1 + 2x^2.$$

Solução: Temos

$$f(x,y) = -\frac{2xy^2}{1+2x^2} - 1 - 2x^2 \quad \text{e} \quad g(x,y) = 2y\left(1+x^2\right).$$

Como

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{4xy}{1+2x^2} \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= 4xy\end{aligned}$$

ela não é exata. Vamos procurar um fator integrante da forma $r(x)$. Ele deve satisfazer a EDO

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{dx} = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{-\dfrac{4xy}{1+2x^2} - 4xy}{2y\left(1+x^2\right)} = -\frac{4x}{1+2x^2}$$

que faz sentido e pode ser diretamente resolvida por integração:

$$\ln r = -\int \frac{4x}{1+2x^2}\,dx = -\ln\left(1+2x^2\right)$$

(tomamos a constante de integração $C = 0$ porque buscamos um fator integrante simples), donde

$$r(x) = \frac{1}{1+2x^2}.$$

Quando multiplicamos a EDO deste exemplo por este fator integrante, obtemos exatamente a EDO exata do exemplo anterior. $\square$

1.5 Método de Mudança de Variáveis

Mudar as variáveis para obter uma expressão mais simples é uma técnica bastante aplicada em várias áreas da Matemática, também na resolução de EDOs.

1.5.1 Equações Homogêneas

Equações homogêneas de primeira ordem são equações que podem ser escritas na forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.33}$$

Introduza a nova variável

$$v = \frac{y}{x}. \tag{1.34}$$

Então

$$y = vx$$

e pela regra da cadeia

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v.$$

Substituindo na equação original, obtemos

$$x\frac{dv}{dx} + v = f(v)$$

ou

$$x\frac{dv}{dx} = f(v) - v,$$

que é uma EDO separável que em princípio pode ser resolvida por integração direta:

$$\frac{dv}{f(v) - v} = \frac{dx}{x} \tag{1.35}$$

Exemplo 1.9. Encontre a solução geral da equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 4x}{2x - y}.$$

Solução: Escrevendo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\frac{y}{x} - 4}{2 - \frac{y}{x}},$$

vemos que ela é uma equação homogênea. Tomando $v = y/x$, segue que

$$\frac{dv}{\frac{2v - 4}{2 - v} - v} = \frac{dx}{x}$$

ou

$$-\frac{dv}{v + 2} = \frac{dx}{x}.$$

Logo,

$$\ln(v + 2) = -\ln x + C,$$

donde

$$v + 2 = \frac{C}{x}.$$

Substituindo de volta, segue que

$$\frac{y}{x} + 2 = \frac{C}{x},$$

donde a solução geral é

$$y(x) = -2x + C. \tag{1.36}$$

□

1.5.2 Equações de Bernoulli

Equações de Bernoulli são equações na forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)\,y^n. \tag{1.37}$$

Para resolvê-las, introduza a nova variável

$$v = y^{1-n}. \tag{1.38}$$

Pela regra da cadeia,

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

Multiplicando a equação de Bernoulli por y^{-n}, segue que

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)\,y^{1-n} = q(x)$$

ou

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + p(x)\,v = q(x) \tag{1.39}$$

que é uma equação linear.

Exemplo 1.10. Encontre a solução geral da equação

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2.$$

Solução: Fazendo a mudança de variável $v = y^{-1}$, obtemos a equação linear

$$-\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = x$$

que tem solução

$$v(x) = -x^2 + Cx.$$

Logo,

$$y = v^{-1} = \frac{1}{-x^2 + Cx}.$$

□

1.5.3 Outras Substituições

Exemplo 1.11. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-x}{y-x-1} \\ y(0) = -2. \end{cases}.$$

Solução: Substituímos

$$v = y - x,$$

de modo que

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1.$$

A equação original torna-se então
$$\frac{dv}{dx}+1=\frac{v}{v-1}$$
ou
$$\frac{dv}{dx}=\frac{1}{v-1},$$
que é uma equação separável:
$$(v-1)\ dv=dx.$$
Integrando:
$$\frac{v^2}{2}-v=x+C.$$
Substituindo de volta, obtemos que a solução y satisfaz a equação implícita
$$\frac{(y-x)^2}{2}-y=C.$$
No caso do problema de valor inicial, obtemos
$$C=\frac{(-2-0)^2}{2}-(-2)=4.$$
Para obter a solução explícita, escreva
$$y^2-2\,(x+1)\,y+x^2-8=0,$$
de modo que
$$y=\frac{2\,(x+1)\pm\sqrt{4\,(x+1)^2-4x^2+32}}{2}=x+1\pm\sqrt{2x+5}$$
e a solução correspondente a $y\,(0)=-2$ é
$$y\,(x)=x+1-\sqrt{2x+5}.$$
□

1.6 Aplicações

1.6.1 Equação Logística

Vamos resolver a equação logística que consideramos nos Exemplos 0.3 e 0.4 da Introdução:
$$\frac{dp}{dt}=ap-bp^2.$$
Os pontos fixos desta equação (isto é, os valores de p para os quais $\dfrac{dp}{dt}=0$, ou seja, a taxa de crescimento populacional é zero) são
$$p=0 \quad \text{e} \quad p=\frac{a}{b}.$$
O último ponto fixo é de fato um valor de equilíbrio para a população, como vimos no Exemplo 0.3: temos $\dfrac{dp}{dt}>0$ se $p<\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{dp}{dt}<0$ se $p>\dfrac{a}{b}$. Portanto, $M=\dfrac{a}{b}$ representa a população máxima sustentável. Escrevendo o lado direito da equação logística na forma
$$\frac{dp}{dt}=bp\left(\frac{a}{b}-p\right)=bp\,(M-p)\,, \tag{1.40}$$

vemos que ela simplesmente diz que a taxa de variação da população em cada instante de tempo é proporcional à população atual e também à diferença entre a população máxima sustentável e a população atual.

Vamos agora resolver a equação logística. Observe que ela é uma equação separável. Portanto separamos as variáveis e integramos
$$\int \frac{dp}{p\,(M-p)} = \int b\,dt.$$
A integral do lado esquerdo pode ser resolvida por separação de variáveis: precisamos encontrar constantes A e B tais que
$$\frac{1}{p\,(M-p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{M-p}.$$
Temos
$$\frac{1}{p\,(M-p)} = \frac{A\,(M-p)+Bp}{p\,(M-p)},$$
logo
$$A\,(M-p)+Bp = 1.$$
Escolhendo $p=0$ e $p=M$, obtemos
$$A = B = \frac{1}{M}.$$
Logo,
$$\int \frac{dp}{p\,(M-p)} = \frac{1}{M}\left(\int \frac{1}{p} + \int \frac{1}{M-p}\right) = \frac{1}{M}\left(\ln p - \ln|M-p|\right) = \frac{1}{M}\ln\left|\frac{p}{M-p}\right|.$$
Portanto,
$$\frac{1}{M}\ln\left|\frac{p}{M-p}\right| = bt + C,$$
donde a solução implícita é
$$\frac{p}{M-p} = Ce^{Mbt}.$$
Escrevendo
$$p = (M-p)\,Ce^{Mbt} = MCe^{Mbt} - pCe^{Mbt} \therefore p\left(1+Ce^{Mbt}\right) = MCe^{Mbt}$$
obtemos a solução geral para a equação logística de forma explícita:
$$p\,(t) = \frac{CMe^{Mbt}}{1+Ce^{Mbt}}. \tag{1.41}$$
Em um problema de valor inicial, a constante C pode ser determinada. Se a população inicial $p\,(0) = p_0$ é conhecida, por exemplo, temos
$$p_0 = \frac{CM}{1+C},$$
donde
$$p_0\,(1+C) = CM \therefore (M-p_0)\,C = p_0 \therefore C = \frac{p_0}{M-p_0}$$
e portanto
$$p\,(t) = \frac{p_0 M e^{Mbt}}{(M-p_0)+p_0 e^{Mbt}}. \tag{1.42}$$
Observe que
$$\lim_{t\to\infty} p\,(t) = \lim_{t\to\infty} e^{Mbt}\frac{p_0 M}{(M-p_0)\,e^{-Mbt}+p_0} = \frac{p_0 M}{p_0} = M,$$
como esperado.

1.6.2 Lei de Torricelli

Suponha que um tanque de água tenha um buraco de área a no seu fundo, por onde escoa água. Denote por $y(t)$ a profundidade da água no tanque e por $V(t)$ o volume de água restante no tanque no instante de tempo t. É possível derivar a partir da equação de Bernoulli da Mecânica dos Fluidos (ou seja, desprezando completamente os efeitos da viscosidade da água) a chamada *lei de Torricelli* que determina a velocidade de escoamento da água saindo pelo buraco:

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Em condições mais reais, a lei se escreve na forma

$$v = c\sqrt{2gy}$$

onde $0 < c < 1$ é uma constante empírica (em torno de 0.6 para um pequeno fluxo contínulo de água). Para simplificar a discussão, tomaremos $c = 1$. Como conseqüência da lei de Torricelli, segue que

$$\frac{dV}{dt} = -av = -a\sqrt{2gy} \tag{1.43}$$

(o sinal negativo deve-se ao fato que o volume de água no tanque está diminuindo com o passar do tempo). Se $A(y)$ denota a área da seção transversal do tanque na altura y, temos

$$V = \int_0^y A(y)\, dy,$$

logo o teorema fundamental do cálculo implica que

$$\frac{dV}{dy} = A(y).$$

Por outro lado, pela regra da cadeia temos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dt}.$$

Portanto, a taxa de variação da altura da água com o tempo é dada pela EDO não-linear (também chamada equação de Torricelli)

$$A(y)\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}. \tag{1.44}$$

Exemplo 1.12. Um tanque hemisférico tem raio de 4m e no instante $t = 0$ está cheio de água. Neste momento, um buraco circular com diâmetro de 4cm. Quanto tempo levará para que toda a água do tanque tenha escoado?

Solução. Temos

$$A(y) = \pi r^2(y) = \pi\left[16 - (4-y)^2\right] = \pi\left(8y - y^2\right).$$

Usando o valor $g = 10$ m/s^2, segue que a equação de Torricelli para este tanque é

$$\pi\left(8y - y^2\right)\frac{dy}{dt} = -\pi\left(2 \times 10^{-2}\right)^2\sqrt{20y}.$$

Separando as variáveis,

$$\left(8y^{1/2} - y^{3/2}\right)dy = -\left(8\sqrt{5} \times 10^{-4}\right)dt$$

e integrando, obtemos

$$\frac{16}{3}y^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2} = -\left(8\sqrt{5} \times 10^{-4}\right)t + C.$$

Como $y(0) = 4$, a constante de integração é

$$C = \frac{16}{3}8 - \frac{2}{5}32 = \frac{448}{15}.$$

Portanto, a solução da EDO de Torricelli para este caso é dada implicitamente por

$$\frac{16}{3}y^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2} = -\left(8\sqrt{5} \times 10^{-4}\right)t + \frac{448}{15}.$$

O tanque estará vazio quando $y = 0$, isto é, quando

$$t = \frac{448}{15\left(8\sqrt{5} \times 10^{-4}\right)} = 16696 \text{ s}$$

o que dá pouco mais que 4 horas e 40 minutos. □

1.6.3 Lei de Resfriamento de Newton

De acordo com a lei de resfriamento de Newton, a taxa de variação da temperatura $T(t)$ de um objeto em um ambiente de temperatura constante igual a A é diretamente proporcional à diferença de temperaturas $A - T$, isto é,

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T),$$

onde k é uma constante positiva dependendo do material de que é feito o objeto.

Exemplo 1.13. (CSI Belo Horizonte) Suponha que pouco antes do meio-dia o corpo de uma vítima de homicídio é encontrado numa sala ar condicionada mantida à temperatura constante de 21°C. Ao meio-dia a temperatura do corpo é 30°C, e uma hora mais tarde é 27°C. Assumindo que a temperatura do corpo na hora da morte era 36,5°C, qual foi a hora da morte?

Solução. Pela lei de resfriamento de Newton,

$$\frac{dT}{dt} = k(21 - T),$$

e ainda não sabemos o valor da constante k. Resolvendo por separação de variáveis,

$$\int \frac{dT}{21 - T} = k\int dt,$$

segue que

$$-\ln(21 - T) = kt + C$$

ou

$$T(t) = 21 - Ce^{-kt}. \tag{1.45}$$

$T(0) = 30$ implica que

$$C = 21 - 30 = -9,$$

logo

$$T(t) = 21 + 9e^{-kt}. \tag{1.46}$$

Substituindo $T(1) = 27$, segue que

$$e^{-k} = \frac{27 - 21}{9} = \frac{6}{9}$$

ou

$$k = -\ln\frac{6}{9} = 0,4.$$

Assim, a variação da temperatura do corpo com o tempo é estimada por

$$T(t) = 21 + 9e^{-0,4t}. \tag{1.47}$$

Para determinar o instante da morte t_0 usamos o fato que

$$36,5 = T(t_0) = 21 + 9e^{-0,4t_0}$$

de modo que

$$e^{-0,4t_0} = \frac{36,5 - 21}{9} = 1,72$$

donde

$$t_0 = -\frac{\ln 1,72}{0,4} = 1,36$$

o que dá aproximadamente uma hora e vinte minutos. Portanto, a hora da morte foi aproximadamente às 10:40 da manhã. □

1.6.4 O Problema da Braquistócrona

Em 1696, Johann Bernoulli propôs o seguinte problema: imagine que um ponto A é unido através de um fio, que pode assumir a forma de qualquer curva, a um ponto B mais abaixo em um plano vertical. Assuma que uma conta de colar é colocada no fio e pode deslizar sem atrito do ponto A até o ponto B. Dentre todas as curvas possíveis, qual é aquela que permite à conta de colar percorrer a trajetória de A a B no menor tempo possível? Tal curva foi batizada de braquistócrona (grego *brachistos* = mais curto e *chronos* = tempo).

A solução a seguir é a solução dada por Bernoulli. Comece considerando um problema à primeira vista não relacionado em ótica. Um raio de luz viaja de um ponto A até um ponto P em um meio com velocidade v_1 e aí entra em um meio com uma densidade maior viajando de P até outro ponto B com velocidade menor v_2. O tempo total requerido para a jornada de A até B é dado por

$$T = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}.$$

Assumindo que o raio de luz seleciona o caminho de A até B através de P de tal modo a minimizar o tempo total gasto, então

$$\frac{dT}{dx} = 0$$

e portanto

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$$

ou

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{v_2}$$

onde α_1, α_2 são os ângulos entre os segmentos de reta que a luz percorre em cada meio e o eixo vertical. Esta é a *lei da refração de Snell*. A hipótese de que a luz sempre viaja de um ponto a outro buscando a trajetória que requer o menor tempo é chamada o *princípio do tempo mínimo de Fermat*. Este princípio pode ser aplicado a um meio de densidade variável, que podemos pensar como sendo um meio estratificado, consistindo de várias camadas. Quando o número de camadas de densidade constante é finito, aplicando a lei de Snell sucessivamente obtemos

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{v_2} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_3}{v_3} = \ldots = \frac{\operatorname{sen}\alpha_n}{v_n}.$$

Se a densidade no meio varia continuamente verticalmente, podemos tomar o limite, imaginando uma infinidade de camadas de espessuras infinitamente pequenas, chegando à conclusão que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v} = \text{ constante.} \tag{1.48}$$

Em um tal meio, a luz percorrerá uma trajetória curva e o ângulo α representará o ângulo entre a reta tangente à curva e o eixo vertical.

Supondo que a conta de colar como o raio de luz também é capaz de selecionar o caminho de A até B que implicará no menor tempo gasto, segue que a equação acima continua válida. Pelo princípio de conservação de energia (isto é, conversão da energia potencial gravitacional da conta de colar em energia cinética), a velocidade da conta de colar em um ponto da trajetória a uma distância vertical y de A é dada por

$$v = \sqrt{2gy}$$

[observe que estamos orientando o eixo y apontando para baixo]. Além disso, pela geometria da situação, se β é o ângulo complementar de α, temos que

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sec\beta} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Combinando estes resultados na lei de Snell para a conta de colar, obtemos

$$\sqrt{2gy\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]} = c$$

ou

$$y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = c.$$

Esta é a EDO não-linear cuja solução é a braquistócrona. Escrevendo

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{c-y}{y}},$$

vemos que ela é uma equação separável e pode ser resolvida por integração direta:

$$\int \sqrt{\frac{y}{c-y}}dy = \int dx.$$

A integral

$$\int \sqrt{\frac{y}{c-y}}dy$$

pode ser resolvida por substituição. Definindo $y = c\operatorname{sen}^2\phi$, segue que $dy = 2c\operatorname{sen}\phi\cos\phi\,d\phi$ e

$$\sqrt{\frac{y}{c-y}} = \tan\phi,$$

de modo que

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{y}{c-y}}dy &= 2c\int \tan\phi\operatorname{sen}\phi\cos\phi\,d\phi = 2c\int \operatorname{sen}^2\phi\,d\phi \\ &= c\int \frac{1-\cos 2\phi}{2}\,d\phi = \frac{c}{2}\left(2\phi - \operatorname{sen}2\phi\right) + C.\end{aligned}$$

Portanto a solução é

$$x = \frac{c}{2}(2\phi - \operatorname{sen} 2\phi) + C$$

Colocando o ponto A na origem, segue que a curva passa pelo ponto $(0,0)$ nas coordenadas x, y que também corresponde ao ponto $(0,0)$ nas novas coordenadas x, ϕ. Concluímos que $C = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} x &= \frac{c}{2}(2\phi - \operatorname{sen} 2\phi), \\ y &= c \operatorname{sen}^2 \phi = \frac{c}{2}(1 - \cos 2\phi), \end{aligned}$$

que é uma parametrização para a braquistócrona em termos do parâmetro ϕ. Definindo $a = c/2$ e $\theta = 2\phi$, obtemos uma parametrização mais familiar:

$$\begin{aligned} x &= a(\theta - \operatorname{sen} \theta), \\ y &= a(1 - \cos \theta), \end{aligned}$$

que corresponde a um arco de ciclóide gerado por um ponto na circunferência de um círculo de raio a girando ao longo do eixo x. O valor de a é determinado pelo único arco de ciclóide gerado pelo círculo de raio a que passa pelo ponto B.

1.7 Equações Autônomas

Equações autônomas são equações da forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

em que não há dependência explícita da variável t. Exemplos de equações autônomas são a equação do crescimento exponencial e a equação logística. Importantes informações qualitativas podem ser obtidas para equações autônomas sem a necessidade de resolvê-las. Já tivemos a oportunidade de fazer uma tal análise qualitativa quando estudamos a equação logística na Introdução. Lembramos os conceitos usados e introduzimos alguns novos:

Definição. Um zero x_0 da função f é chamado um **ponto de equilíbrio** (ou *ponto fixo* ou *ponto crítico*) da EDO e a solução $x(t) = x_0$ é chamada uma **solução estacionária** (ou **solução de equilíbrio**).

Com efeito, se $f(x_0) = 0$, então

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

para todo t e $x(t) \equiv x_0$ é uma solução constante para qualquer condição inicial que passe pelo ponto x_0 em qualquer instante de tempo t dado.

Definição. Dizemos que um **ponto de equilíbrio** x_0 é **estável** se

$$\begin{aligned} &f(x) > 0 \text{ para todo } x < x_0 \text{ próximo de } x_0 \text{ e} \\ &f(x) < 0 \text{ para todo } x > x_0 \text{ próximo de } x_0. \end{aligned}$$

Dizemos que um **ponto de equilíbrio** x_0 é **instável** se

$$\begin{aligned} &f(x) < 0 \text{ para todo } x < x_0 \text{ próximo de } x_0 \text{ e} \\ &f(x) > 0 \text{ para todo } x > x_0 \text{ próximo de } x_0. \end{aligned}$$

De fato, se $f(x) > 0$, então

$$\frac{dx}{dt} > 0$$

e a tendência da solução é crescer, enquanto que se $f(x) < 0$, então

$$\frac{dx}{dt} < 0$$

e a tendência da solução é decrescer. Vimos nos exemplos da Introdução que a equação logística possui dois pontos de equilíbrio (já que f no caso é um polinômio do segundo grau): um ponto de equilíbrio instável em $x_0 = 0$ e um ponto de equilíbrio estável correspondente ao valor da população máxima sustentável. Ainda existe um outro tipo de ponto de equilíbrio:

Definição. Dizemos que um **ponto de equilíbrio** x_0 é um **ponto de sela** se

$$f(x) > 0 \text{ para todo } x \neq x_0 \text{ próximo de } x_0$$

ou se

$$f(x) < 0 \text{ para todo } x \neq x_0 \text{ próximo de } x_0.$$

1.8 Teorema de Existência e Unicidade de Soluções de EDOs

Teorema 1.2. (Teorema de Existência e Unicidade da Solução para Problemas de Valor Inicial de EDOs) *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Se f e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ são contínuas no retângulo

$$R = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : \alpha < t < \beta \quad e \quad a < x < b\right\}$$

que contém o ponto (t_0, x_0), então o problema possui uma única solução em um intervalo aberto contendo t_0.

Idéia da Prova: A demonstração clássica deste resultado é através do chamado *método iterativo de Picard* (ou *método das aproximações sucessivas*), que também pode ser usado como método numérico para obter a solução computacionalmente. Suponha que exista a solução $x(t)$. Então, ao integrarmos a EDO

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dx}{dt}\,dt = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$$

ela deve satisfazer

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds. \tag{1.49}$$

Como na verdade não sabemos se a solução $x(t)$ existe, tentamos aproximá-la sucessivamente através desta fórmula. Definimos como primeira aproximação a função constante

$$x_0(t) \equiv x_0$$

e obtemos teoricamente uma melhor aproximação

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))\,ds.$$

Em seguida, usamos esta nova função na fórmula para obter uma aproximação ainda melhor

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))\, ds.$$

E assim por diante, definimos uma seqüência de funções iterativamente:

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\, ds. \tag{1.50}$$

Pode-se provar, sob as condições estabelecidas no enunciado no teorema (e mesmo usando hipóteses um pouco mais fracas) que a seqüência de funções assim definida converge uniformemente para uma função continuamente diferenciável e que esta é de fato a solução do problema de valor inicial. Detalhes podem ser vistos em livros que tratam de EDOs, por exemplo no livro *Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias*, de Reginaldo J. Santos (seção 1.8) ou em *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, de Boyce e DiPrima (seção 2.9).

A demonstração da unicidade da solução é mais fácil. De fato, se existirem duas soluções $x_1(t), x_2(t)$, então elas satisfazem

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_1(s))\, ds, \\ x_2(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_2(s))\, ds, \end{aligned}$$

logo

$$x_2(t) - x_1(t) = \int_{t_0}^{t} \left[f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s)) \right] ds,$$

donde

$$|x_2(t) - x_1(t)| = \int_{t_0}^{t} |f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s))|\, ds. \tag{1.51}$$

Agora, se $(s, x_1(s))$ e $(s, x_2(s))$ estão dentro do retângulo R onde sabemos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua, podemos usar o Teorema do Valor Médio para concluir que existe $c = c(s)$ tal que $x_1(s) < c(s) < x_2(s)$ e

$$\frac{f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s))}{x_2(s) - x_1(s)} = \frac{\partial f}{\partial x}(s, c(s)).$$

Então

$$|f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s))| \leqslant \left| \frac{\partial f}{\partial x}(s, c(s)) \right| |x_2(s) - x_1(s)|.$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em R, ela assume o seu máximo

$$A := \max_{(s,x) \in R} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(s, x) \right|$$

aí e podemos escrever

$$|f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s))| \leqslant A\, |x_2(s) - x_1(s)|.$$

Portanto, segue que

$$|x_2(t) - x_1(t)| = A \int_{t_0}^{t} |x_2(s) - x_1(s)|\, ds. \tag{1.52}$$

Defina agora
$$y(t) = \int_{t_0}^{t} |x_2(s) - x_1(s)| \, ds.$$
Então
$$\begin{aligned} y(0) &= 0, \\ y(t) &\geqslant 0 \quad \text{para todo } t \geqslant t_0, \\ y'(t) &= |x_2(t) - x_1(t)| \,. \end{aligned}$$
Em particular, segue que
$$y'(t) - Ay(t) \leqslant 0.$$
Multiplicando esta desigualdade pelo fator integrante e^{-At}, segue que
$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}y(t)\right) \leqslant 0.$$
Integrando de 0 a t e lembrando que $y(0) = 0$, obtemos
$$e^{-At}y(t) \leqslant 0$$
para todo $t \geqslant 0$, o que implica
$$y(t) \leqslant 0 \quad \text{para todo } t \geqslant t_0.$$
Concluímos que $y(t) \equiv 0$ para todo $t \geqslant t_0$, o que significa que $x_2(t) = x_1(t)$ para todo $t \geqslant t_0$. Analogamente provamos o mesmo fato para todo $t \leqslant t_0$. ■

Se as hipóteses do teorema não são satisfeitas, a existência ou a unicidade da solução podem ser comprometidas:

Exemplo 1.14. Encontre todas as soluções do problema de valor inicial
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sqrt{x} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Solução. Esta é uma equação autônoma separável, logo:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int dt,$$
donde
$$2x^{1/2} = t + C.$$
Substituindo $x(0) = 0$, obtemos $C = 0$. Para obter a solução explicitamente, tomamos o quadrado:
$$x(t) = \frac{t^2}{4}.$$
Esta é uma solução. Outra solução é a solução identicamente nula
$$x(t) \equiv 0.$$
Observe que $f(t,x) = \sqrt{x}$ não possui derivada $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ em $(t,x) = (0,0)$. □

Teorema 1.3. (Teorema de Existência e Unicidade para EDOs Lineares) *Considere o problema de valor inicial linear*
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + p(t)\,x = q(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$
Se $p(t)$ e $q(t)$ são contínuas no intervalo I contendo t_0 então o problema possui uma única solução em I.

Capítulo 2

Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem

2.1 Introdução

Definição. EDOs de segunda ordem são equações do tipo

$$F(t, y, y', y'') = 0,$$

isto é, além da variável t e da função y, elas envolvem a derivada primeira y' e a derivada segunda y''.

Neste curso, estudaremos principalmente equações de segunda ordem da forma

$$y'' = f(t, y, y')$$

ou

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right).$$

Definição. Uma **solução** da EDO $y'' = f(t, y, y')$ em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é uma função duas vezes diferenciável $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz a EDO.

Definição. Um problema da forma

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \dfrac{dy}{dt}\right) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

é chamado um **problema de valor inicial**.

Duas condições iniciais são necessárias para determinar uma única solução para uma EDO de segunda ordem pois a sua solução envolve em um certo sentido duas integrações, que introduzem duas constantes de integração arbitrárias.

Exemplo 2.1. Encontre a solução geral da EDO

$$\frac{d^2y}{dt^2} = t^2.$$

A partir da solução geral, encontre a solução para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} = t^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Solução: Através de uma integração simples, obtemos

$$\frac{dy}{dt} = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + C_1.$$

Como $y'(0) = 2$, devemos ter

$$\frac{0^3}{3} + C_1 = 2 \Longrightarrow C_1 = 2,$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^3}{3} + 2.$$

Integrando uma segunda vez, obtemos

$$y(t) = \int \left(\frac{t^3}{3} + 2\right) dt = \frac{t^4}{12} + 2t + C_2$$

Como $y(0) = 1$, devemos ter

$$\frac{0^4}{12} + 2 \cdot 0 + C_2 = 1 \Longrightarrow C_2 = 1,$$

ou seja,

$$y(t) = \frac{t^4}{12} + 2t + 1.$$

$\square$

2.2 Equações Lineares de Segunda Ordem Homogêneas

Uma **EDO de segunda ordem** é **linear** se ela tiver a forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)\,y = f(t). \tag{2.1}$$

Ela é **homogênea** se $f(t) \equiv 0$, isto é, se ela for da forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)\,y = 0. \tag{2.2}$$

Para equações lineares de segunda ordem, um teorema de existência e unicidade de soluções para problemas de valor inicial também é válido:

Teorema 2.1. (Teorema de Existência e Unicidade) *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + p(t)\dfrac{dy}{dt} + q(t)\,y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0'. \end{cases}$$

Se p, q e f são contínuas em um intervalo aberto I que contém t_0, então o problema possui uma única solução neste intervalo.

Para uma equação linear e homogênea, combinações lineares de soluções são ainda soluções. De fato, se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são duas soluções de (2.2), isto é, se

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + p(t)\frac{dy_1}{dt} + q(t)y_1 = 0,$$
$$\frac{d^2y_2}{dt^2} + p(t)\frac{dy_2}{dt} + q(t)y_2 = 0,$$

e se $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ são dois escalares reais, então

$$\begin{aligned}&\frac{d^2(c_1y_1 + c_2y_2)}{dt^2} + p(t)\frac{d(c_1y_1 + c_2y_2)}{dt} + q(t)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1\left[\frac{d^2y_1}{dt^2} + p(t)\frac{dy_1}{dt} + q(t)y_1\right] + c_2\left[\frac{d^2y_2}{dt^2} + p(x)\frac{dy_2}{dt} + q(t)y_2\right] \\ &= c_1 \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

de modo que $c_1y_1 + c_2y_2$ também é uma solução de (2.2). Este fato é às vezes chamado de *princípio da superposição.*

2.2.1 Soluções Fundamentais

O princípio da superposição implica que o espaço solução de uma equação linear homogênea de segunda ordem é um subespaço vetorial do espaço das funções duas vezes diferenciáveis. Portanto, para encontrar todas as soluções de uma EDO linear de segunda ordem, ou seja, para encontrar a sua solução geral, basta encontrar uma base para este subespaço. Vamos agora provar que este subespaço tem dimensão 2, de modo que basta encontrar duas soluções linearmente independentes da equação para encontrar todas as suas soluções.

Teorema 2.2. *Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ duas soluções linearmente independentes da equação linear homogênea de segunda ordem*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

Então, para todo par de condições iniciais (y_0, y_0') o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

possui uma única solução da forma

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t). \tag{2.3}$$

Prova. Para quaisquer constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a função $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ é uma solução para a equação homogênea. Para provarmos o teorema, precisamos apenas mostrar que existem constantes únicas c_1, c_2 tais que $y(t)$ satisfaz as condições iniciais dadas, isto é,

$$\begin{cases} c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) = y_0 \\ c_1y_1'(t_0) + c_2y_2'(t_0) = y_0' \end{cases}.$$

Este sistema possui uma solução única quaisquer que sejam y_0, y_0' se e somente se

$$\det\begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Por sua vez, este determinante é não nulo se e somente se as soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são linearmente independentes. Isso decorre do Teorema de Existência e Unicidade. De fato,

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} = 0$$

se e somente se as colunas desta matriz são linearmente dependentes, isto é, se e somente se existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ não-nula tal que

$$\begin{aligned} y_1(t_0) &= cy_2(t_0), \\ y_1'(t_0) &= cy_2'(t_0). \end{aligned}$$

Como as condições iniciais determinam a solução de uma EDO linear de segunda ordem de maneira única, isso é verdade se e somente se

$$y_1(t) = cy_2(t)$$

para todo t, isto é, se e somente se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são linearmente dependentes. ■

Definição. Duas soluções linearmente independentes de uma equação linear homogênea de segunda ordem são chamadas **soluções fundamentais** desta equação.

Existe um número infinito de pares de soluções fundamentais para uma equação linear homogênea de segunda ordem, já que quaisquer duas soluções linearmente independentes são soluções fundamentais. Vimos na demonstração do Teorema 2.2 uma maneira simples de determinar se duas soluções de uma EDO linear homogênea de segunda ordem são soluções fundamentais. Basta verificar se o determinante (chamado **Wronskiano**)

$$W(y_1, y_2)(t) = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix}$$

é diferente de zero para algum valor de t; observe que se isso ocorrer, na verdade o Wronskiano será diferente de zero para qualquer valor de t. Reciprocamente, duas soluções serão linearmente dependentes se e somente se seu Wronskiano for igual a zero para todo valor de t.

Exemplo 2.2. Mostre que $y_1(t) = 1$ e $y_2(t) = t$ são soluções fundamentais da EDO

$$y'' = 0.$$

Encontre sua solução geral.

Solução: Temos $y_1'(t) = 0$ e $y_2(t) = 1$, de modo que o Wronskiano desta duas soluções em qualquer ponto $t \in \mathbb{R}$ é dado por

$$W(y_1, y_2)(t) = \det \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

A sua solução geral é, portanto,

$$y(t) = c_1 + c_2 t.$$

□

Exemplo 2.3. Mostre que se $a \neq 0$, então $y_1(t) = e^{at}$ e $y_2(t) = e^{-at}$ são soluções fundamentais da EDO

$$y'' = a^2 y.$$

Mostre que $z_1(t) = \operatorname{senh} at$ e $z_2(t) = \cosh at$ também são soluções fundamentais para a EDO. Encontre sua solução geral.

Solução: Temos $y_1'(t) = ae^{at}$ e $y_2(t) = -ae^{-at}$, de modo que o Wronskiano desta duas soluções em qualquer ponto $t \in \mathbb{R}$ é dado por

$$W(y_1, y_2)(t) = \det \begin{bmatrix} e^{at} & e^{-at} \\ ae^{at} & -ae^{-at} \end{bmatrix} = -2a \neq 0.$$

Também temos $z_1'(t) = a \cosh at$ e $z_2'(t) = a \operatorname{senh} at$, de modo que

$$W(y_1, y_2)(t) = \det \begin{bmatrix} \operatorname{senh} at & \cosh at \\ a \cosh at & a \operatorname{senh} at \end{bmatrix} = a\left(\operatorname{senh}^2 at - \cosh^2 at\right) = -a \neq 0.$$

A sua solução geral é, portanto,

$$y(t) = c_1 e^{at} + c_2 e^{-at},$$

ou também

$$y(t) = c_1 e^{at} + c_2 e^{-at}.$$

□

Exemplo 2.4. Mostre que se $a \neq 0$, então $y_1(t) = \operatorname{sen} at$ e $y_2(t) = \cos at$ são soluções fundamentais da EDO

$$y'' = -a^2 y.$$

Encontre sua solução geral.

Solução: Temos $y_1'(t) = a \cos at$ e $y_2(t) = -a \operatorname{sen} at$, de modo que o Wronskiano desta duas soluções em qualquer ponto $t \in \mathbb{R}$ é dado por

$$W(y_1, y_2)(t) = \det \begin{bmatrix} \operatorname{sen} at & \cos at \\ a \cos at & -a \operatorname{sen} at \end{bmatrix} = -a\left(\operatorname{sen}^2 at + \cos^2 at\right) = -a \neq 0$$

A sua solução geral é, portanto,

$$y(t) = c_1 \operatorname{sen} at + c_2 \cos at.$$

□

2.2.2 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Vamos resolver a equação linear homogênea de segunda ordem

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{2.4}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ são constantes e $a \neq 0$.

Baseados na experiência com a equação do Exemplo 2.3, tentaremos inicialmente obter soluções da forma

$$y(t) = e^{rt}$$

onde r é uma constante a ser determinada. Substituindo esta função na equação (2.4) obtemos

$$ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0.$$

Fatorando o termo positivo e^{rt}, obtemos a chamada **equação característica** de (2.4):

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{2.5}$$

Esta equação do segundo grau pode ter duas raízes reais distintas, uma raiz real ou duas raízes complexas distintas. De acordo com a situação, obtemos um diferente par de soluções fundamentais para (2.4).

Duas Raízes Reais Distintas

Se a equação característica tem duas raízes reais r_1 e r_2, então um par de soluções fundamentais para (2.4) é
$$y_1(t) = e^{r_1 t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{r_2 t} \tag{2.6}$$
e a sua solução geral é, portanto,
$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}. \tag{2.7}$$
De fato, para todo $t \in \mathbb{R}$ temos
$$W(y_1, y_2)(t) = \det \begin{bmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{bmatrix} = e^{r_1 t} e^{r_2 t} (r_2 - r_1) \neq 0.$$
Esta é a situação que encontramos no Exemplo 2.3, onde a equação característica tem duas raízes reais distintas $\pm a$.

Uma Raiz Real

Se a equação característica tem apenas uma raíz real r, então uma solução para (2.4) é dada por
$$y_1(t) = e^{rt}. \tag{2.8}$$
Para encontrar uma segunda solução y_2 linearmente independente de y_1, vamos usar o método de d'Alembert. Ele consiste da seguinte idéia geral: dada uma solução y_1 de uma equação linear de segunda ordem, procuramos uma segunda solução y_2 na forma
$$y_2(t) = v(t) y_1(t). \tag{2.9}$$
Substituindo a expressão
$$y_2(t) = v(t) e^{rt}$$
em (2.4), obtemos
$$a\left[v''(t) e^{rt} + 2rv'(t) e^{rt} + r^2 v(t) e^{rt}\right] + b\left[v'(t) e^{rt} + rv(t) e^{rt}\right] + cv(t) e^{rt} = 0$$
ou
$$ae^{rt} v''(t) + [2ar + b] v'(t) + \left[ar^2 + br + c\right] v(t) e^{rt} = 0$$
Como
$$ar^2 + br + c = 0$$
e
$$r = -\frac{b}{2a}$$
pela fórmula do discriminante, segue que
$$ae^{rt} v''(t) = 0,$$
ou simplesmente
$$v''(t) = 0.$$
Portanto,
$$v(t) = c_1 + c_2 t$$
e
$$y_2(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}.$$

Observe que quando $c_2 = 0$, y_2 é exatamente y_1. Logo, se queremos uma segunda solução linearmente independente de y_1, tomamos simplesmente

$$y_2(t) = te^{rt}.$$

De fato,

$$W(y_1, y_2)(t) = \det \begin{bmatrix} e^{rt} & te^{rt} \\ re^{rt} & e^{rt} + rte^{rt} \end{bmatrix} = e^{2rt}(1 + rt - rt) = e^{2rt} \neq 0.$$

A solução geral é, portanto,

$$y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 te^{rt}. \tag{2.10}$$

Duas Raízes Complexas

Se a equação característica tem duas raízes complexas, então elas são conjugadas e podemos escrevê-las na forma

$$\begin{aligned} r_1 &= \alpha + \beta i, \\ r_2 &= \alpha - \beta i. \end{aligned}$$

Se definirmos a função exponencial complexa para qualquer número complexo $r = \alpha + \beta i$ pela fórmula de Euler

$$e^r = e^{\alpha + \beta i} = e^{\alpha}(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta), \tag{2.11}$$

segue que

$$e^{rt} = e^{(\alpha + \beta i)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t) \tag{2.12}$$

e a função exponencial complexa satisfaz

$$\frac{d}{dt}\left(e^{rt}\right) = re^{rt} \tag{2.13}$$

pois

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t)\right] &= \frac{de^{\alpha t}}{dt}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t) + e^{\alpha t}\frac{d}{dt}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t) \\ &= \alpha e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t) + e^{\alpha t}(-\beta \operatorname{sen}\beta t + i\beta\cos\beta t) \\ &= (\alpha + \beta i) e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t) \\ &= re^{rt}. \end{aligned}$$

Isso sugere escolher as funções

$$y_1(t) = e^{r_1 t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{r_2 t}$$

como soluções fundamentais para (2.4), isto é,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t), \\ y_2(t) &= e^{\alpha t}(\cos\beta t - i \operatorname{sen}\beta t). \end{aligned}$$

produzindo a solução geral complexa

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \\ &= (c_1 + c_2) e^{\alpha t}\cos\beta t + i(c_1 - c_2) e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t \end{aligned}$$

onde c_1 e c_2 são constantes complexas. O único problema é que estas funções são funções complexas e precisamos encontrar soluções fundamentais reais e uma solução geral real. Para isso, escolhemos as constantes na fórmula geral complexa de tal forma a produzir duas soluções reais linearmente independentes: escolhendo $c_1 = c_2 = 1/2$ obtemos

$$y_1(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t, \tag{2.14}$$

enquanto que se escolhermos $c_1 = 1/(2i)$ e $c_2 = -1/(2i)$ obtemos

$$y_2(t) = e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t. \tag{2.15}$$

Estas soluções fundamentais são de fato linearmente independentes, pois

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(t) &= \det\begin{bmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t \\ \alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - \beta e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t & \alpha e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t + \beta e^{\alpha t}\cos\beta t \end{bmatrix} \\ &= e^{2\alpha t}\left(\cos\beta t\operatorname{sen}\beta t + \beta\cos^2\beta t + \beta\operatorname{sen}^2\beta t - \operatorname{sen}\beta t\cos\beta t\right) \\ &= \beta e^{2\alpha t} \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, a solução real geral é

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t. \tag{2.16}$$

2.3 Equações Lineares de Segunda Ordem Não-Homogêneas

Uma EDO de segunda ordem linear é **não-homogênea** se ela tiver a forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = f(t) \tag{2.17}$$

onde $f \neq 0$. Sua solução geral pode ser obtida a partir das soluções fundamentais da correspondente equação homogênea:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0. \tag{2.18}$$

De fato, vale o seguinte resultado:

Teorema 2.3. *Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ duas soluções linearmente independentes da equação linear homogênea de segunda ordem*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

e $y_p(t)$ uma solução particular para a equação não-homogênea correspondente

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f.$$

Então a solução geral da equação não-homogênea tem a forma

$$y(t) = y_p(t) + c_1y_1(t) + c_2y_2(t). \tag{2.19}$$

Prova. Se $y(t)$ é uma solução qualquer da equação não-homogênea e $y_p(t)$ é uma solução particular dada para a mesma, então $Y(t) = y(t) - y_p(t)$ é uma solução para a equação homogênea, pois

$$\begin{aligned} Y'' + p(t)Y' + q(t)Y &= y'' + p(t)y' + q(t)y - \left(y_p'' + p(t)y_p' + q(t)y_p\right) \\ &= f(t) - f(t) \\ &= 0, \end{aligned}$$

logo

$$Y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t).$$

Reciprocamente, qualquer solução da forma $y(t) = y_p(t) + c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ é uma solução para a equação não-homogênea. ■

Assim, para encontrar a solução geral da equação não-homogênea, basta obter primeiro a solução geral para a equação homogênea e apenas uma solução particular para a equação não-homogênea. Um método para obter esta última a partir das soluções fundamentais da equação homogênea é o assunto da próxima subseção.

2.3.1 Método de Variação dos Parâmetros

Suponha que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sejam as soluções fundamentais da equação homogênea (2.18), de modo que a solução geral $y_0(t)$ desta é dada por

$$y_0(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

Para encontrar uma solução particular $y_p(t)$ para a equação não-homogênea correspondente (2.17), tentamos procurar uma solução da forma

$$y_p(t) = c_1(t) y_1(t) + c_2(t) y_2(t), \tag{2.20}$$

ou seja, consideramos os parâmetros c_1 e c_2 variáveis, não mais constantes. Entretanto, para não obtermos equações muito complicadas de resolver, impomos a condição extra

$$c_1'(t) y_1(t) + c_2'(t) y_2(t) = 0, \tag{2.21}$$

para que ao derivamos y obtenhamos simplesmente

$$y_p'(t) = c_1(t) y_1'(t) + c_2(t) y_2'(t), \tag{2.22}$$

e daí

$$y_p''(t) = c_1(t) y_1''(t) + c_1'(t) y_1'(t) + c_2(t) y_2''(t) + c_2'(t) y_2'(t). \tag{2.23}$$

Substituindo em (2.17), temos:

$$c_1(t) y_1'' + c_1'(t) y_1' + c_2(t) y_2'' + c_2'(t) y_2' + p(t)\left[c_1(t) y_1' + c_2(t) y_2'\right] + q(t)\left[c_1(t) y_1 + c_2(t) y_2\right] = f(t),$$

ou, agrupando termos,

$$c_1'(t) y_1' + c_2'(t) y_2' + c_1(t)\left[y_1'' + p(t) y_1' + q(t) y_1\right] + c_2(t)\left[y_2'' + p(t) y_2' + q(t) y_2\right] = f(t).$$

Como y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea

$$\begin{aligned} y_1'' + p(t) y_1' + q(t) y_1 &= 0, \\ y_2'' + p(t) y_2' + q(t) y_2 &= 0, \end{aligned}$$

segue que

$$c_1'(t) y_1'(t) + c_2'(t) y_2'(t) = f(t). \tag{2.24}$$

Assim, as funções $c_1(t)$ e $c_2(t)$ devem obedecer o seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_1'(t) y_1(t) + c_2'(t) y_2(t) & = & 0 \\ c_1'(t) y_1'(t) + c_2'(t) y_2'(t) & = & f(t) \end{array} \right. . \tag{2.25}$$

A solução de um sistema linear $AX = B$ onde

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é dada por

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} B.$$

Portanto, como no nosso caso

$$A = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix},$$

obtemos que $c_1(t)$ e $c_2(t)$ satisfazem as seguintes EDOs de primeira ordem:

$$\begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{W(y_1, y_2)(t)} \begin{bmatrix} y_2'(t) & -y_2(t) \\ -y_1'(t) & y_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix},$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{bmatrix} -y_2 f \\ y_1 f \end{bmatrix}. \tag{2.26}$$

Aplicando o Teorema de Existência e Unicidade a esta fórmula, podemos garantir a existência das funções $c_1(t)$ e $c_2(t)$ assumindo apenas a continuidade das funções p, q e f. O sistema 2×2 (2.25) pode ser resolvido de maneira usual sem o uso desta fórmula.

Exemplo 2.5. Encontre a solução geral da equação linear não-homogênea

$$y'' + y = \tan t.$$

Solução: A solução geral da equação homogênea correspondente $y'' + y = 0$ é

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t,$$

como vimos no Exemplo 2.4. Procurando uma solução particular do tipo

$$y_p(t) = c_1(t) \cos t + c_2(t) \operatorname{sen} t$$

através do método de variação de parâmetros, obtemos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_1' \cos t + c_2' \operatorname{sen} t & = & 0 \\ -c_1' \operatorname{sen} t + c_2' \cos t & = & \tan t \end{array} \right. .$$

Podemos resolver este sistema por eliminação Gaussiana. Por exemplo, multiplicando a primeira linha por $\operatorname{sen} t$, a segunda linha por $\cos t$ e somando, segue que

$$c_2' \left(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t \right) = \cos t \tan t$$

ou

$$c_2' = \operatorname{sen} t.$$

Isso implica que

$$c_2(t) = -\cos t. \tag{2.27}$$

Além disso, temos

$$c_1' = -\frac{c_2' \operatorname{sen} t}{\cos t} = -\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos t} = \frac{\cos^2 t - 1}{\cos t} = \cos t - \sec t.$$

Daí,

$$c_1(t) = \operatorname{sen} t - \ln(\sec t + \tan t). \tag{2.28}$$

A solução particular é

$$\begin{aligned} y_p(t) &= [\operatorname{sen} t - \ln(\sec t + \tan t)] \cos t + (-\cos t) \operatorname{sen} t \\ &= -\cos t \ln(\sec t + \tan t) \end{aligned}$$

e a solução geral da equação não-homogênea é

$$\begin{aligned} y(t) &= y_p(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \\ &= -\cos t \ln(\sec t + \tan t) + c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

□

2.3.2 Equações Não-Homogêneas com Coeficientes Constantes: Método dos Coeficientes a Determinar

A equação não-homogênea com coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = f(t), \tag{2.29}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ são constantes e $a \neq 0$, pode ser mais facilmente resolvida para casos especiais da função $f(t)$, freqüentemente encontrados em aplicações, do que uma equação não-homogênea mais geral. Para isso, utilizamos o **método dos coeficientes a determinar**:

Caso 1. Se $f(t) = a_0 + \ldots + a_n t^n$, com $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, procuramos uma solução particular da forma

$$y_p(t) = (A_0 + \ldots + A_n t^n)\, t^s$$

onde s é o menor inteiro não-negativo que garante que nenhum termo em $y_p(t)$ é uma solução da equação homogênea correspondente e $A_0, \ldots, A_n$ são coeficientes a serem determinados.

Exemplo 2.6. Encontre a solução geral para a equação linear não-homogênea

$$y'' - y' - 2y = 4t^2.$$

Solução: A equação característica é $r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1)$, cujas raízes são $r_1 = -1$ e $r_2 = 2$, de modo que a solução geral da correspondente equação homogênea é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}.$$

Como o lado direito da equação não-homogênea é um polinômio do segundo grau, tentamos uma solução particular da forma

$$y_p(t) = A + Bt + Ct^2.$$

Substituindo na equação, obtemos

$$2C - (B + 2Ct) - 2\left(A + Bt + Ct^2\right) = 4t^2$$

ou

$$-2Ct^2 - 2(B + C) - (2A + B - 2C) = 4t^2.$$

Daí obtemos o sistema

$$\begin{cases} -(2A + B - 2C) &= 0 \\ -2(B + C) &= 0 \\ -2C &= 4 \end{cases}$$

cuja solução é $A = -3, B = 2$ e $C = -2$, de modo que

$$y_p(t) = -3 + 2t - 2t^2.$$

A solução geral é, então,

$$y(t) = -3 + 2t - 2t^2 + c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}.$$

□

Caso 2. Se $f(t) = (a_0 + \ldots + a_n t^n)\, e^{\alpha t}$, com $\alpha, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, procuramos uma solução particular da forma

$$y_p(t) = (A_0 + \ldots + A_n t^n)\, t^s e^{\alpha t}$$

onde s é o menor inteiro não-negativo que garante que nenhum termo em $y_p(t)$ é uma solução da equação homogênea correspondente e $A_0, \ldots, A_n$ são coeficientes a serem determinados.

Exemplo 2.7. Encontre a solução geral para a equação linear não-homogênea

$$y'' + 2y' + y = (2+t)\, e^{-t}.$$

Solução: A equação característica é $r^2 + 2r + 1 = (r-1)^2$, cuja raiz é $r = 1$, de modo que a solução geral da equação homogênea correspondente é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$$

Assim, para garantir que nenhum termo em $y_p(t)$ é uma solução da equação homogênea, tentamos uma solução particular da forma

$$y_p(t) = (A + Bt)\, t^2 e^{-t} = \left(At^2 + Bt^3\right) e^{-t}.$$

Temos

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= \left(2At + 3Bt^2\right) e^{-t} - \left(At^2 + Bt^3\right) e^{-t} = \left[2At + (3B - A)\, t^2 - Bt^3\right] e^{-t}, \\ y_p''(t) &= \left[2A + 2(3B - A)\, t - 3Bt^2\right] e^{-t} - \left[2At + (3B - A)\, t^2 - Bt^3\right] e^{-t} \\ &= \left[2A + (6B - 4A)\, t + (A - 6B)\, t^2 + Bt^3\right] e^{-t}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação, obtemos

$$\begin{aligned} &\left[2A + (6B - 4A)\, t + (A - 6B)\, t^2 + Bt^3\right] e^{-t} + 2\left[2At + (3B - A)\, t^2 - Bt^3\right] e^{-t} + \left(At^2 + Bt^3\right) e^{-t} \\ &= (2+t)\, e^{-t}. \end{aligned}$$

ou

$$2A + 6Bt = 2 + t.$$

Daí obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2A &= 2 \\ 6B &= 1 \end{cases}$$

cuja solução é $A = 1$ e $B = 1/6$, de modo que

$$y_p(t) = \left(t^2 + \frac{1}{6}t^3\right) e^{-t}.$$

A solução geral é, então,

$$y(t) = \left(t^2 + \frac{1}{6}t^3\right) e^{-t} + c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$$

□

Caso 3. Se $f(t) = (a_0 + \ldots + a_n t^n)\, e^{\alpha t} \cos bt + (b_0 + \ldots + b_m t^m)\, e^{\alpha t} \operatorname{sen} bt$, com $\alpha, \beta, a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$, procuramos uma solução particular da forma

$$y_p(t) = (A_0 + \ldots + A_q t^q)\, t^s e^{\alpha t} \cos bt + (B_0 + \ldots + B_q t^q)\, t^s e^{\alpha t} \operatorname{sen} bt$$

onde $q = \max(m, n)$, s é o menor inteiro não-negativo que garante que nenhum termo em $y_p(t)$ é uma solução da equação homogênea correspondente e $A_0, \ldots, A_n, B_0, \ldots, B_m$ são coeficientes a serem determinados.

Exemplo 2.8. Encontre a solução geral para a equação linear não-homogênea

$$y'' + 2y' + 2y = e^t \cos t.$$

Solução: A equação característica é $r^2 + 2r + 2$, cuja raízes complexas são $r_1 = 1 + i, r_2 = -1 - i$, de modo que a solução geral da equação homogênea correspondente é

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \operatorname{sen} t.$$

Assim, como nenhum termo em $y_p(t)$ é solução da equação homogênea, tentamos uma solução particular da forma

$$y_p(t) = Ae^t \cos t + Be^t \operatorname{sen} t = (A \cos t + B \operatorname{sen} t) e^t.$$

Temos

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= (A \cos t + B \operatorname{sen} t) e^t + (-A \operatorname{sen} t + B \cos t) e^t = [(A + B) \cos t + (B - A) \operatorname{sen} t] e^t, \\ y_p''(t) &= [(A + B) \cos t + (B - A) \operatorname{sen} t] e^t + [-(A + B) \operatorname{sen} t + (B - A) \cos t] e^t \\ &= (2B \cos t - 2A \operatorname{sen} t) e^t. \end{aligned}$$

Substituindo na equação, obtemos

$$\begin{aligned} &(2B \cos t - 2A \operatorname{sen} t) e^t + 2 [(A + B) \cos t + (B - A) \operatorname{sen} t] e^t + 2 (A \cos t + B \operatorname{sen} t) e^t \\ &= e^t \cos t. \end{aligned}$$

ou

$$(4A + 4B) \cos t + (4B - 4A) \operatorname{sen} t = \cos t.$$

Daí obtemos o sistema

$$\begin{cases} 4A + 4B &= 1 \\ 4B - 4A &= 0 \end{cases}$$

cuja solução é $A = B = 1/8$, de modo que

$$y_p(t) = \frac{1}{8} (\cos t + \operatorname{sen} t) e^t.$$

A solução geral é, então,

$$y(t) = \frac{1}{8} (\cos t + \operatorname{sen} t) e^t + c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \operatorname{sen} t.$$

□

2.4 Aplicação: Estudo de Oscilações

A equação diferencial ordinária que descreve as oscilações ou vibrações de um sistema massa-mola é dada por

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = F_{\text{ext}}. \tag{2.30}$$

u é o deslocamento do corpo da posição de equilíbrio do sistema. As constantes têm o seguinte significado: m é massa do corpo conectado à mola, k é a constante da mola (devido à força exercida pela mola sobre o corpo dada pela Lei de Hooke) e γ é a constante de amortecimento devido à resistência do ar (assumida ser proporcional à velocidade do corpo). Esta equação descreve também vibrações em outros fenômenos físicos, por exemplo vibrações acústicas ou em circuitos elétricos; nesses casos, os significados de u e das constantes devem ser ajustados de acordo com cada fenômeno.

2.4.1 Oscilações Livres sem Amortecimento

No caso em que as oscilações são livres temos $F_{\text{ext}} = 0$, e se não há amortecimento temos também $\gamma = 0$. Portanto, a equação diferencial que descreve a oscilação é simplesmente

$$mu''(t) + ku(t) = 0. \tag{2.31}$$

A equação característica é

$$mr^2 + k = 0,$$

cujas raízes são números imaginários puros

$$r = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i.$$

Denotando

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{2.32}$$

segue que a solução geral desta equação é dada por

$$u(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t. \tag{2.33}$$

Escrevendo o vetor (c_1, c_2) em coordenadas polares

$$\begin{aligned} c_1 &= A\cos\phi, \\ c_2 &= A \operatorname{sen}\phi, \end{aligned}$$

onde

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \tag{2.34}$$

$$\phi = \arctan\frac{c_2}{c_1}, \tag{2.35}$$

podemos reescrever a solução na forma

$$u(t) = A\cos\phi\cos\omega_0 t + A\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\omega_0 t = A(\cos\phi\cos\omega_0 t + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\omega_0 t)$$

ou

$$u(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi). \tag{2.36}$$

A solução do movimento oscilatório livre, sem amortecimento, é portanto uma senóide de **período**

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

freqüência natural ω_0, **amplitude** A e **fase** ϕ. Este movimento é chamado **movimento harmônico simples**.

2.4.2 Oscilações Livres com Amortecimento

No caso em que as oscilações são livres mas há amortecimento, a equação diferencial que descreve a oscilação é a equação homogênea com coeficientes constantes

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = 0. \tag{2.37}$$

A equação característica é

$$mr^2 + \gamma r + k = 0,$$

cujo discriminante é

$$\Delta = \gamma^2 - 4km. \tag{2.38}$$

Há três casos a considerar:

Superamortecimento

Se $\Delta > 0$, isto é, se

$$\gamma > 2\sqrt{km}, \tag{2.39}$$

então existem duas raízes reais negativas

$$r_1 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m},$$

a solução é dada por

$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \tag{2.40}$$

e $u(t) \to 0$ a uma taxa exponencial.

Amortecimento Crítico

Se $\Delta = 0$, isto é, se

$$\gamma = 2\sqrt{km}, \tag{2.41}$$

então existe uma única raiz real

$$r = -\frac{\gamma}{2m},$$

a solução é dada por

$$u(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t}(c_1 + c_2 t) \tag{2.42}$$

e $u(t) \to 0$ também a uma taxa exponencial.

Subamortecimento

Se $\Delta < 0$, isto é, se

$$\gamma < 2\sqrt{km}, \tag{2.43}$$

então existem duas raízes complexas

$$r_1 = \frac{-\gamma - \mathbf{i}\sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-\gamma + \mathbf{i}\sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m}.$$

Denotando

$$\mu = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m},$$

a solução é dada por

$$u(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t}(c_1 \cos \mu t + c_2 \operatorname{sen} \mu t). \tag{2.44}$$

Ainda temos $u(t) \to 0$ a uma taxa exponencial, mas existem também oscilações cuja freqüência é dada por μ (às vezes chamado de **quase-freqüência**), cujas amplitudes vão diminuindo exponencialmente para 0.

2.4.3 Oscilações Forçadas sem Amortecimento – Ressonância

Agora assumiremos que uma força externa periódica da forma

$$F_{\text{ext}} = F_0 \cos \omega t$$

age sobre a massa. Inicialmente, suporemos também que não há amortecimento, de modo que a equação diferencial que descreve a oscilação é a equação não-homogênea

$$mu''(t) + ku(t) = F_0 \cos \omega t. \tag{2.45}$$

Há dois casos a considerar:

Caso $\omega \neq \omega_0$

Como a solução geral da equação homogênea (que corresponde ao movimento harmônico simples) é

$$c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t,$$

a solução particular dada pelo método dos coeficientes a determinar é

$$u_p(t) = A_0 \cos \omega t + B_0 \operatorname{sen} \omega t.$$

Para determinar os valores das constantes A_0, B_0, substituímos na equação, obtendo

$$-m\omega^2 (A_0 \cos \omega t + B_0 \operatorname{sen} \omega t) + k (A_0 \cos \omega t + B_0 \operatorname{sen} \omega t) = F_0 \cos \omega t$$

ou

$$A_0 \left(k - m\omega^2\right) \cos \omega t + B_0 \left(k - m\omega^2\right) \operatorname{sen} \omega t = F_0 \cos \omega t,$$

donde

$$\begin{aligned} A_0 \left(k - m\omega^2\right) &= F_0, \\ B_0 \left(k - m\omega^2\right) &= 0. \end{aligned}$$

Como

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

segue que $k - m\omega^2 = m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) \neq 0$, logo

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \\ B_0 &= 0. \end{aligned}$$

A solução geral é, portanto,

$$u(t) = A \cos(\omega_0 t - \phi) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t. \tag{2.46}$$

O movimento é limitado, mas pode não ser periódico. Ele somente será uma oscilação periódica se a razão ω/ω_0 for racional.

Exemplo 2.9. (Batimento) Considerando uma oscilação forçada sem amortecimento com as condições iniciais seguintes

$$\begin{cases} mu''(t) + ku(t) = F_0 \cos \omega t \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases}$$

obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= u'(0) = -A \operatorname{sen} \phi, \\ 0 &= u(0) = A \cos \phi + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \end{aligned}$$

donde $\phi = 0$ e

$$A = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

A solução é

$$u(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t). \tag{2.47}$$

Usando a identidade trigonométrica

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$

podemos escrever

$$u(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} t\right). \tag{2.48}$$

Se $|\omega_0 - \omega|$ é pequeno, isto é, se a freqüência da força externa é próxima à freqüência natural de vibração do sistema, então $\omega_0 + \omega \gg |\omega_0 - \omega|$ e podemos considerar o movimento como um movimento oscilatório

$$u(t) = \left[\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} t\right)$$

de freqüência rápida $\dfrac{\omega_0 + \omega}{2}$ próxima à freqüência natural de vibração e com amplitude variável senoidal lenta

$$\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t\right).$$

Este fenômeno, chamado **batimento**, ocorre em acústica quando dois diapasões de freqüência praticamente iguais são usados simultaneamente. □

Caso $\omega = \omega_0$: Ressonância

Quando a freqüência de oscilação da força é igual à freqüência natural de vibração do sistema, as amplitudes das oscilações tendem a ficar arbitrariamente grandes, ocorrendo o fenômeno da **ressonância**. De fato, neste caso a solução particular dada pelo método dos coeficientes a determinar é

$$u_p(t) = (A_0 \cos \omega_0 t + B_0 \operatorname{sen} \omega_0 t)\, t.$$

Para determinar os valores das constantes A_0, B_0, calculamos

$$\begin{aligned}
u_p'(t) &= (A_0 \cos \omega_0 t + B_0 \operatorname{sen} \omega_0 t) + \omega_0 (-A_0 \operatorname{sen} \omega_0 t + B_0 \cos \omega_0 t)\, t, \\
u_p''(t) &= \omega_0 (-A_0 \operatorname{sen} \omega_0 t + B_0 \cos \omega_0 t) + \omega_0 (-A_0 \operatorname{sen} \omega_0 t + B_0 \cos \omega_0 t) \\
&\quad - \omega_0^2 (A_0 \cos \omega_0 t + B_0 \operatorname{sen} \omega_0 t)\, t \\
&= 2\omega_0 (-A_0 \operatorname{sen} \omega_0 t + B_0 \cos \omega_0 t) - \omega_0^2 t (A_0 \cos \omega_0 t + B_0 \operatorname{sen} \omega_0 t),
\end{aligned}$$

e substituímos na equação, obtendo

$$m\left[2\omega_0 (-A_0 \operatorname{sen} \omega_0 t + B_0 \cos \omega_0 t) - \omega_0^2 t (A_0 \cos \omega_0 t + B_0 \operatorname{sen} \omega_0 t)\right] + kt (A_0 \cos \omega_0 t + B_0 \operatorname{sen} \omega_0 t) = F_0 \cos \omega_0 t$$

ou

$$2m\omega_0 B_0 \cos \omega_0 t - 2m\omega_0 A_0 \operatorname{sen} \omega_0 t + A_0 \left(k - m\omega_0^2\right) t \cos \omega_0 t + B_0 \left(k - m\omega_0^2\right) t \operatorname{sen} \omega_0 t = F_0 \cos \omega_0 t.$$

Usando $k = m\omega_0^2$, esta equação se reduz a

$$2m\omega_0 B_0 \cos \omega_0 t - 2m\omega_0 A_0 \operatorname{sen} \omega_0 t = F_0 \cos \omega_0 t.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
A_0 &= 0, \\
B_0 &= \frac{F_0}{2m\omega_0}.
\end{aligned}$$

A solução geral é, portanto,

$$u(t) = A \cos(\omega_0 t - \phi) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen} \omega_0 t. \tag{2.49}$$

Por causa do fator multiplicador t no último termo, temos que $u(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$.

Exemplo 2.10. Considerando uma oscilação forçada sem amortecimento com as condições iniciais seguintes

$$\begin{cases} mu''(t) + ku(t) = F_0 \cos \omega_0 t \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases}$$

obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= u'(0) = -A \operatorname{sen} \phi, \\ 0 &= u(0) = A \cos \phi, \end{aligned}$$

donde $\phi = 0$ e $A = 0$, logo a solução é simplesmente

$$u(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen} \omega_0 t. \tag{2.50}$$

□

2.4.4 Oscilações Forçadas com Amortecimento

Assumindo agora a existência de amortecimento, a equação diferencial que descreve a oscilação é a equação não-homogênea

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = F_0 \cos \omega t. \tag{2.51}$$

Denotando a solução geral da equação homogênea por

$$c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t),$$

onde as identidades de u_1 e u_2 dependerão do tipo de amortecimento (superamortecimento, amortecimento crítico e subamortecimento), de qualquer modo a solução particular dada pelo método dos coeficientes a determinar é

$$u_p(t) = A_0 \cos \omega t + B_0 \operatorname{sen} \omega t.$$

Para determinar os valores das constantes A_0, B_0, substituímos na equação, obtendo

$$-m\omega^2 (A_0 \cos \omega t + B_0 \operatorname{sen} \omega t) + \gamma \omega (-A_0 \operatorname{sen} \omega t + B_0 \cos \omega t) + k (A_0 \cos \omega t + B_0 \operatorname{sen} \omega t) = F_0 \cos \omega t$$

ou

$$\left[\left(k - m\omega^2 \right) A_0 + \gamma \omega B_0 \right] \cos \omega t + \left[\left(k - m\omega^2 \right) B_0 - \gamma \omega A_0 \right] \operatorname{sen} \omega t = F_0 \cos \omega t,$$

donde

$$\begin{aligned} \left(k - m\omega^2 \right) A_0 + \gamma \omega B_0 &= F_0, \\ -\gamma \omega A_0 + \left(k - m\omega^2 \right) B_0 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema e usando $k = m\omega_0^2$, obtemos

$$A_0 = \frac{F_0 m \left(\omega_0^2 - \omega^2 \right)}{m^2 \left(\omega_0^2 - \omega^2 \right)^2 + \gamma^2 \omega^2}, \quad B_0 = \frac{F_0 \gamma \omega}{m^2 \left(\omega_0^2 - \omega^2 \right)^2 + \gamma^2 \omega^2}.$$

Podemos escrever

$$u_p(t) = R \cos(\omega_0 t - \phi),$$

onde

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{A_0^2 + B_0^2} = \frac{F_0}{\sqrt{m^2 \left(\omega_0^2 - \omega^2 \right)^2 + \gamma^2 \omega^2}}, \\ \phi &= \arctan \frac{\gamma \omega}{m \left(\omega_0^2 - \omega^2 \right)}. \end{aligned}$$

A solução geral é, portanto,

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + R\cos(\omega_0 t - \phi). \tag{2.52}$$

A solução amortecida tende exponencialmente a 0 quando $t \to \infty$ e por isso é chamada **solução transiente**. A solução particular permanece e por isso é chamada **solução estacionária** e independe das condições iniciais. Depois de um curto intervalo de tempo (já que o decaimento da solução transiente é exponencial), a solução que interessa é a solução estacionária. A amplitude desta em função da freqüência da força externa é dada, como vimos acima, por

$$R(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}}.$$

A amplitude máxima ocorre quando $R'(\omega) = 0$, isto é, quando

$$-2\frac{F_0\omega\left[m^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + \gamma^2\right]}{\left[m^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2\right]^{3/2}} = 0.$$

ou seja, quando

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{m^2}}.$$

Se $\gamma \geqslant 2\sqrt{km}$ (superamortecimento ou amortecimento crítico), a amplitude máxima da solução estacionária ocorre quando $\omega = 0$, já que a expressão na raiz não é positiva.

2.5 Resolução por Séries de Potências

Para uma EDO linear de segunda ordem da forma

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0 \tag{2.53}$$

em que P, Q, R são polinômios sem fatores em comum (caso contrário, estes fatores podem ser eliminados da equação, produzindo três novos coeficientes polinomiais sem fatores em comum).

2.5.1 Pontos Ordinários

Se $P(0) \neq 0$, isto é, se 0 é um **ponto ordinário**, o teorema de existência e unicidade assegura a existência de uma única solução em uma vizinhança em torno de 0, dadas as condições iniciais. Mais que isso, é possível provar que a solução geral pode ser escrita como uma série de potências da forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n\right) + a_1\left(x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n\right) \tag{2.54}$$

onde

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n \quad \text{e} \quad y_2(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$$

são soluções fundamentais da equação que convergem pelo menos para todo $|x| < r$, onde r é o maior valor tal que $P(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}, |z| < r$ (em outras palavras, a raiz complexa de menor módulo de P está no círculo de raio r). O raio de convergência pode ser significativamente maior (até mesmo $r = \infty$; veja o Exemplo 2.12). Este resultado vale para qualquer ponto ordinário x_0 da equação, isto é, qualquer ponto x_0 tal que $P(x_0) \neq 0$: podemos obter uma solução geral em termos de série de potências em uma vizinhança de x_0.

Exemplo 2.11. **A equação de Legendre**

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\sigma y=0$$

possui uma solução em série de potências em torno de 0 que converge pelo menos para $|x|<1$, já que as raízes de $P\left(z\right)=1-z^2$ são $z=\pm 1$. $\square$

Soluções em séries de potências são muito convenientes do ponto de vista numérico, pois são facilmente programadas e calculadas em um computador. De fato, pode-se argumentar que é a melhor expressão para uma solução do ponto de vista numérico. Para encontrar a solução geral de uma equação diferencial em série de potências, escrevemos a solução como uma série de potências com coeficientes a determinar

$$y\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

e substituímos na equação diferencial para determinar os coeficientes a_n. Assumindo que podemos derivar termo a termo, segue que

$$\begin{aligned}
y'\left(x\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)a_{n+1}x^n,\\
y''\left(x\right)&=\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)\left(n+2\right)a_{n+2}x^n.
\end{aligned}$$

Em geral, obtemos **fórmulas de recorrência** (ou *fórmulas de recursão*) que expressam os coeficientes em termos dos coeficientes anteriores até os coeficientes a_0,a_1, que podem ser escolhidos de forma independente produzindo um subespaço solução de dimensão 2.

Exemplo 2.12. Resolva a equação de Legendre

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\sigma y=0$$

por série de potências.

Solução. Primeiro escrevemos

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

e substituímos na equação de Legendre para obter os coeficientes a_n:

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}-2x\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}+\sigma\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0,$$

donde

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^n-2\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^n+\sigma\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0.$$

Podemos escrever estes somatórios na forma

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nn(n-1)x^n-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nnx^n+\sigma\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0,$$

porque os termos adicionados aos dois somatórios intermediários são todos nulos e reindexando o primeiro somatório. Segue que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+\left(-n(n-1)-2n+\sigma\right)a_n\right]x^n=0.$$

Logo,

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n(n+1)-\sigma)\, a_n = 0,$$

donde obtemos a relação recursiva

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1)-\sigma}{(n+2)(n+1)} a_n. \tag{2.55}$$

As duas soluções linearmente independentes da equação de Legendre são obtidas escolhendo $a_0 = 0, a_1 = 1$ e $a_0 = 1, a_1 = 0$. No primeiro caso obtemos uma série consistindo apenas dos termos ímpares, enquanto que no segundo caso obtemos uma série consistindo apenas dos termos pares. Assim, estas duas soluções podem ser respectivamente escritas nas formas

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k+1)(2k+1)-\sigma}{2(k+1)(2k+3)} x^{2k+1} \tag{2.56}$$

e

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k(2k+1)-\sigma}{2(k+1)(2k+1)} x^{2k}. \tag{2.57}$$

Estas séries são chamadas **funções de Legendre**.

Se $\sigma = m(m+1) \geqslant 0$, então $a_{m+2} = 0$, logo uma das funções de Legendre é um polinômio de grau m (qual delas dependerá se m é par ou ímpar). Caso contrário, para qualquer outro valor de σ ambas as séries de Legendre são séries infinitas e qualquer série infinita de Legendre diverge em um ou ambos os pontos $x = \pm 1$, e portanto são ilimitadas na vizinhança deles. Como nas aplicações estamos interessados em geral apenas em soluções limitadas, costuma-se considerar apenas o caso $\sigma = m(m+1)$:

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + m(m+1)y(x) = 0 \tag{2.58}$$

e a sua solução polinomial. Para $\sigma = m(m+1)$, a relação recursiva torna-se

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1)-m(m+1)}{(n+2)(n+1)} a_n,$$

ou

$$a_{n+2} = -\frac{(m-n)(m+n+1)}{(n+2)(n+1)} a_n. \tag{2.59}$$

Daí obtemos

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{m(m+1)}{2} a_0, \\
a_4 &= \frac{(m-2)m(m+1)(m+3)}{4 \cdot 3 \cdot 2} a_0, \\
a_6 &= -\frac{(m-4)(m-2)m(m+1)(m+3)(m+5)}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} a_0, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
a_3 &= -\frac{(m-1)(m+2)}{3 \cdot 2} a_1, \\
a_5 &= \frac{(m-3)(m-1)(m+2)(m+4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} a_1, \\
a_7 &= \frac{(m-5)(m-3)(m-1)(m+2)(m+4)(m+6)}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} a_1, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Assim, a solução geral desta equação de Legendre é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

onde

$$\begin{aligned} y_1(x) = 1 &- \frac{m(m+1)}{2}x^2 + \frac{(m-2)m(m+1)(m+3)}{4!}x^4 \\ &- \frac{(m-4)(m-2)m(m+1)(m+3)(m+5)}{6!}x^6 + \dots \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_2(x) = x &- \frac{(m-1)(m+2)}{3!}x^3 + \frac{(m-3)(m-1)(m+2)(m+4)}{5!}x^5 \\ &- \frac{(m-5)(m-3)(m-1)(m+2)(m+4)(m+6)}{7!}x^7 + \dots \end{aligned}$$

Se m é par, então a série y_1 é na verdade o polinômio

$$\begin{aligned} y_1(x) = 1 &- \frac{m(m+1)}{2}x^2 + \frac{(m-2)m(m+1)(m+3)}{4!}x^4 \\ &- \frac{(m-4)(m-2)m(m+1)(m+3)(m+5)}{6!}x^6 \\ &+ \dots + \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \prod\limits_{k=0}^{\frac{m}{2}-1}(m-2k) \prod\limits_{k=0}^{\frac{m}{2}-1}(m+2k+1)}{m!}x^m. \end{aligned}$$

Se m é ímpar, então a série y_2 é na verdade o polinômio

$$\begin{aligned} y_2(x) = x &- \frac{(m-1)(m+2)}{3!}x^3 + \frac{(m-3)(m-1)(m+2)(m+4)}{5!}x^5 \\ &- \frac{(m-5)(m-3)(m-1)(m+2)(m+4)(m+6)}{7!}x^7 \\ &+ \dots + \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \prod\limits_{k=0}^{\frac{m-1}{2}-1}(m-2k-1) \prod\limits_{k=0}^{\frac{m-1}{2}}(m+2k)}{m!}x^m. \end{aligned}$$

No entanto, é costume normalizar as soluções, escolhendo

$$a_m = \frac{(2m)!}{2^m (m!)^2}. \tag{2.60}$$

Os outros coeficientes são então determinados por uma relação recursiva reversa. Temos

$$a_n = -\frac{(n+2)(n+1)}{(m-n)(m+n+1)}a_{n+2},$$

ou (trocando n por $n-2$)

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{(m-n+2)(m+n-1)}a_n. \tag{2.61}$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_{m-2} &= -\frac{m(m-1)}{2(2m-1)}a_m = -\frac{m(m-1)}{2(2m-1)}\frac{(2m)!}{2^m(m!)^2} = -\frac{(2m-2)!}{2^m(m-1)!(m-2)!}, \\ a_{m-4} &= -\frac{(m-2)(m-3)}{4(2m-3)}a_{m-2} = \frac{(2m-4)!}{2^m 2!(m-2)!(m-4)!}, \end{aligned}$$

e, em geral,

$$a_{m-2n} = (-1)^n \frac{(2m-2n)!}{2^m n!(m-n)!(m-2n)!}. \tag{2.62}$$

Tomando $M = \dfrac{m}{2}$, se m é par, e $M = \dfrac{m-1}{2}$, se m é ímpar, o m-ésimo polinômio de Legendre é

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m} \sum_{n=0}^{M} (-1)^n \frac{(2m-2n)!}{n!(m-n)!(m-2n)!} x^{m-2n}. \tag{2.63}$$

Por exemplo, os primeiros polinômios de Legendre são:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, \\
P_1(x) &= x, \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\
P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \\
P_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5), \\
P_7(x) &= \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x).
\end{aligned}$$

□

2.5.2 Pontos Singulares

Já se 0 é um **ponto singular** da equação, isto é, se $P(0) = 0$, a equação não possui uma solução em série de potências. Mas uma pequena modificação desta idéia funciona. Ao invés de considerar uma solução em série de potência, consideramos uma solução do tipo

$$y(x) = x^c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+c},$$

onde c é uma constante não necessariamente inteira a ser determinada, juntamente com os coeficientes a_n.

Exemplo 2.13. Resolva a **equação de Bessel**

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

por série de potências.

Solução. Diferenciando termo a termo e substituindo na equação diferencial, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+c)(n+c-1)a_n x^{n+c} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+c)a_n x^{n+c} + \sum_{n=0}^{\infty} (x^2 - p^2)a_n x^{n+c} = 0$$

que é a série

$$\begin{aligned}
&[c(c-1) + c - p^2]a_0 + [(1+c)(1+c-1) + (1+c) - p^2]a_1 x^{1+c} \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ [(n+c)(n+c-1) + (n+c) - p^2]a_n + a_{n-2} \right\} x^{n+c} = 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(c^2 - p^2)a_0 + [(1+c)^2 - p^2]a_1 x^{1+c} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ [(n+c)^2 - p^2]a_n + a_{n-2} \right\} x^{n+c} = 0.$$

Daí, obtemos as relações

$$(c^2 - p^2)a_0 = 0, \tag{2.64}$$
$$[(1+c)^2 - p^2]a_1 = 0, \tag{2.65}$$
$$[(n+c)^2 - p^2]a_n = a_{n-2}, \tag{2.66}$$

a última relação valendo para $n \geqslant 2$. Assumindo $a_0 \neq 0$, obtemos a chamada *equação indicial* $c^2 - p^2 = 0$, donde

$$c = p \quad \text{ou} \quad c = -p.$$

Isso implica que $a_1 = 0$ (exceto no caso $p = -1/2$). Escolhendo $c = p$, a relação (2.66) produz a fórmula recursiva

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2p)} \quad \text{se } n \geqslant 2. \tag{2.67}$$

Como $a_1 = 0$, todos os coeficientes com índices ímpares são iguais a 0:

$$a_{2k-1} = 0 \quad \text{para todo } k \geqslant 1. \tag{2.68}$$

Escrevendo $n = 2k$, encontramos os coeficientes com índices pares:

$$a_{2k} = -\frac{1}{2^2 k(k+p)} a_{2(k-1)},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{1}{2^2(1+p)} a_0, \\
a_4 &= -\frac{1}{2^2 2(2+p)} a_2 = \frac{1}{2^4 2(1+p)(2+p)} a_0, \\
a_6 &= -\frac{1}{2^2 3(3+p)} a_4 = -\frac{1}{2^6 3!(1+p)(2+p)(3+p)} a_0,
\end{aligned}$$

e assim por diante, de maneira que

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(1+p)(2+p)\cdots(k+p)} a_0. \tag{2.69}$$

Usando a função gama $\Gamma(x)$ definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \tag{2.70}$$

que extende o fatorial para números reais no sentido de que $\Gamma(n+1) = n!$, podemos simplificar a notação. Utilizando a propriedade $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, segue que

$$\begin{aligned}
\Gamma(1+p)[(1+p)(2+p)\cdots(k+p)] &= \Gamma(2+p)[(2+p)\cdots(k+p)] \\
&= \Gamma(3+p)[(4+p)\cdots(k+p)] \\
&= \ldots \\
&= \Gamma(k+p+1),
\end{aligned}$$

logo
$$(1+p)(2+p)\cdots(k+p) = \frac{\Gamma(k+p+1)}{\Gamma(1+p)}. \tag{2.71}$$
Escolhendo
$$a_0 = \frac{1}{2^p\Gamma(1+p)}, \tag{2.72}$$
temos que a primeira solução da equação de Bessel pode ser escrita na forma
$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} \tag{2.73}$$
desde que p não seja um inteiro negativo, pois se p for um inteiro negativo então $\Gamma(k+p+1)$ não está definido para $k = 0, \ldots, p-1$.

Se $p \in \mathbb{R}$ é um número real que não é um inteiro negativo, a função J_p definida por
$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} \tag{2.74}$$
em $[0,+\infty)$, se $p \geqslant 0$, e em $(0,+\infty)$ se $p < 0$, é chamada uma **função de Bessel do primeiro tipo de ordem** p.

Observe que se p é um inteiro não-negativo, temos simplesmente
$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} \tag{2.75}$$
e
$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{2.76}$$
Para obter a solução geral para a equação de Bessel, precisamos obter uma segunda solução linearmente independente de J_p. Quando p não é um inteiro positivo, basta fazer a segunda escolha possível para c, ou seja, $c = -p$. Neste caso obtemos
$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}. \tag{2.77}$$
É claro que esta definição é consistente com a anterior, no sentido que $J_{-(-p)} = J_p$. Além disso, J_p e J_{-p} são linearmente independentes se p não é um inteiro. Portanto, possuímos uma definição consistente para J_p e J_{-p} sempre que p não é um inteiro, e uma definição para J_p se p é um inteiro positivo ou nulo (obviamente igual a J_{-p} se p é um inteiro negativo). Falta definir J_{-p} se p é um inteiro positivo. Observe que se p é um inteiro positivo então $\Gamma(k-p+1)$ não está definido para $k = 0, \ldots, p-1$, porque $|\Gamma(x)| \to \infty$ quando $x \to k-p+1$ com estes valores de k. Mas, por este mesmo motivo, se na fórmula para J_p fizermos p tender a um valor inteiro negativo n, podemos desprezar os primeiros termos da série de $k = 0$ até $k = p-1$ e definir
$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}. \tag{2.78}$$
Contudo, com esta definição, as funções J_n e J_{-n} são linearmente dependentes, pois
$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+n}}{(l+n)!l!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \\ &= (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

A obtenção de uma segunda solução linearmente independente (chamada **função de Bessel do segundo tipo de ordem** p) é bem mais complicada neste caso e não trataremos dela aqui. □

2.6 Mudança de Variáveis

Através de uma mudança de variáveis, algumas EDOs de segunda ordem, inclusive *equações não-lineares*, podem ser transformadas em duas EDOs de primeira ordem. Outras podem ser transformadas em equações de segunda ordem mais fáceis de resolver.

2.6.1 Equações que não contém y

Equações não-lineares do tipo

$$y'' = f(y', t) \tag{2.79}$$

podem ser transformadas em EDOs de primeira ordem através da substituição

$$v = y', \tag{2.80}$$

que é uma EDO de primeira ordem em y. Daí, derivando esta expressão obtemos

$$v' = y'' = f(y', t) = f(v, t),$$

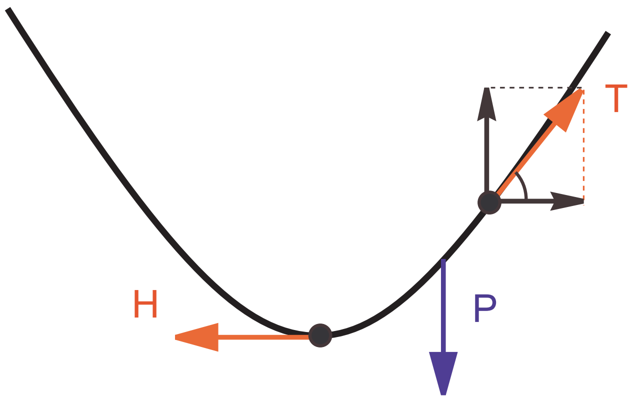
que é uma segunda EDO de primeira ordem em v:

$$v' = f(v, t). \tag{2.81}$$

Resolvendo esta EDO encontramos a função v e daí resolvemos a primeira EDO para obter y. Portanto, a EDO original de segunda ordem foi transformada no sistema não-linear

$$\begin{cases} y' = v \\ v' = f(v, t) \end{cases}.$$

Exemplo 2.14. (Cabo suspenso) Queremos encontrar a forma de um cabo suspenso. Observe a situação mostrada na figura abaixo:



Nela consideramos a porção de um cabo suspenso entre os dois pontos marcados na figura, onde um dos pontos é o ponto mais baixo do cabo e o outro ponto está situado à sua direita. Denote por H a força da tensão horizontal atuando no ponto mais baixo da curva e por T a tensão atuando no ponto à direita. Se entre estes dois pontos o comprimento do cabo for s e a sua densidade linear for ρ, de modo que o seu peso é $P = mg = (\rho s)g$, e a tensão T faz um ângulo θ com a horizontal, do equilíbrio das forças resultantes segue que:

$$\begin{aligned} T\cos\theta &= H, \\ T\operatorname{sen}\theta &= g\rho s. \end{aligned}$$

Daí,

$$y'(x) = \tan\theta = \frac{g\rho}{H}s.$$

Denotando a constante $a = g\rho/H$, e derivando esta expressão uma segunda vez, obtemos

$$y''(x) = as'(x).$$

Por outro lado, como $s = s(x)$ nada mais é que a função comprimento de arco, temos

$$s'(x) = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}.$$

Portanto, a EDO que modela a forma do cabo suspenso é

$$y''(x) = a\sqrt{1 + [y'(x)]^2}. \tag{2.82}$$

Note que esta é uma EDO não-linear. Fazendo a substituição

$$v = y',$$

obtemos a EDO de primeira ordem

$$v' = a\sqrt{1 + v^2},$$

que pode ser resolvida por separação de variáveis:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \int a\,dx$$

ou

$$\operatorname{senh}^{-1} v = ax + C,$$

donde

$$v = C\operatorname{senh} ax.$$

Resolvendo

$$y' = C\operatorname{senh} ax$$

por uma integração simples, segue que a solução geral da EDO original (isto é, a forma do cabo suspenso) é

$$y(x) = \frac{1}{a}\cosh\left(ax + c_1\right) + c_2. \tag{2.83}$$

Substituindo as condições $v(0) = 0$ e $v(L) = 0$, os valores das constantes c_1 e c_2 podem ser obtidos. A curva descrita por esta função é chamada *catenária*, por ser solução deste tipo de problema (*catena* é a palavra latina para cadeia). $\square$

2.6.2 Equações que não contém t

Equações não-lineares do tipo

$$y'' = f(y, y') \tag{2.84}$$

também podem ser transformadas em EDOs de primeira ordem através da substituição

$$v(t) = y'(t). \tag{2.85}$$

De fato, derivando esta expressão obtemos

$$v' = y'' = f(y, y') = f(y, v).$$

Como, se considerarmos $v = v(y)$,

$$v' = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy}y' = v\frac{dv}{dy},$$

obtemos uma EDO de primeira ordem em v e y

$$v\frac{dv}{dy} = f(y, v). \tag{2.86}$$

Resolvendo esta EDO, obtemos $v(y)$ e daí resolvemos a primeira EDO

$$y'(t) = v(y(t)). \tag{2.87}$$

Exemplo 2.15. Encontre a solução geral da EDO

$$yy'' + (y')^2 = 0.$$

Solução. Escrevendo

$$y'' = -\frac{(y')^2}{y},$$

Temos $f(y, y') = -\dfrac{(y')^2}{y}$. A substituição $vt = y'$ produz

$$v\frac{dv}{dy} = f(y, v) = -\frac{v^2}{y}.$$

Daí,

$$yv\frac{dv}{dy} + v^2 = 0.$$

que podemos fatorar:

$$v\left(y\frac{dv}{dy} + v\right) = 0.$$

Segue que ou $v = 0$ e portanto

$$y \equiv c_1 \tag{2.88}$$

ou

$$y\frac{dv}{dy} + v = 0,$$

que é uma equação separável:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y}.$$

Resolvendo esta última obtemos
$$\ln v = -\ln y + C,$$
que é equivalente a
$$\ln (vy) = C,$$
ou, simplesmente,
$$vy = c_2.$$
Como $v = y'$, segue que
$$yy' = c_2,$$
que pode ser escrito como
$$\left(\frac{y^2}{2}\right)' = c_2.$$
Então outra solução é dada implicitamente por
$$\frac{y^2}{2} = c_2 t + c_3. \tag{2.89}$$
Note que a primeira solução que obtivemos está incluída nesta (tomando $c_2 = 0$), logo esta é a solução geral implícita da equação não-linear. □

2.6.3 Equações de Euler

Equações de segunda ordem lineares da forma
$$x^2 y'' + bxy' + cy = 0 \tag{2.90}$$
em que $a, b, c \in \mathbb{R}$, são chamadas **equações de Euler**. Para $x > 0$, a mudança de variáveis $t = \ln x$ transforma a equação de Euler em uma equação linear com coeficientes constantes. De fato, temos
$$\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}, \\
y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx} \\
&= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2},
\end{aligned}$$
e substituindo estas expressões na equação de Euler obtemos
$$\frac{d^2y}{dt^2} + (b-1)\frac{dy}{dt} + cy = 0.$$
Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são as soluções fundamentais desta equação homogênea, segue que
$$y(x) = c_1 y_1 (\ln x) + c_2 y_2 (\ln x)$$
é a solução geral da equação de Euler.

Exemplo 2.16. Encontre a solução geral das seguintes equações de Euler

a) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$

b) $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$

c) $x^2 y'' - xy' + 5y = 0$

Solução. As equações homogêneas correspondentes são

$$\begin{aligned}
\text{a) } & y'' - 3y' + 2y = 0, \\
\text{b) } & y'' + 4y' + 4y = 0, \\
\text{c) } & y'' - 2y' + 5y = 0,
\end{aligned}$$

cujas soluções gerais são

$$\begin{aligned}
\text{a) } & y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}, \\
\text{b) } & y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}, \\
\text{c) } & y(t) = e^{t} \left(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t \right),
\end{aligned}$$

logo as soluções gerais da equação de Euler são

$$\begin{aligned}
\text{a) } & y(t) = c_1 e^{\ln x} + c_2 e^{2 \ln x} = c_1 x + c_2 x^2, \\
\text{b) } & y(t) = c_1 e^{-2 \ln x} + c_2 \ln x e^{-2 \ln x} = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-2} \ln x, \\
\text{c) } & y(t) = e^{\ln x} \left[c_1 \cos (2 \ln x) + c_2 \operatorname{sen} (2 \ln x) \right].
\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é essencialmente um método algébrico para resolver equações diferenciais ordinárias. Através da transformada de Laplace, a equação diferencial é primeiramente transformada em uma equação algébrica, que é então resolvida por métodos algébricos. Após a resolução desta, a transformada de Laplace inversa é aplicada sobre a solução algébrica para transformá-la na solução da equação diferencial ordinária.

3.1 Definição e Propriedades

Definição. A **transformada de Laplace** de uma função $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função $\mathcal{L}(f) = F$ definida por

$$\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt, \tag{3.1}$$

onde s é qualquer número real para o qual a integral está definida.

O operador transformada de Laplace $\mathcal{L}$ atua em funções, transformando funções em novas funções. O domínio da nova função consiste daqueles valores s para os quais a integral está definida.

Exemplo 3.1. Calcule a transformada de Laplace das seguintes funções:

a) $f(t) \equiv 1$.

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{t=0}^{t=\infty} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-st}}{-s} - \frac{1}{-s} = \frac{1}{s} \quad \text{se } s > 0.$$

Observe que neste caso a integral converge apenas quando $s > 0$.

b) $f(t) = e^{at}$.

$$F(s) = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\, dt = \left.\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right|_{t=0}^{t=\infty} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a} \quad \text{se } s > a.$$

Neste caso a integral converge somente se $s > a$.

c) $f(t) = \cos at$ e $g(t) = \operatorname{sen} at$.

Para obter a transformada de Laplace destas funções, vamos estender a definição da transformada de Laplace para incluir funções de valores complexos $h : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$. Escrevendo h em suas partes real e imaginária, digamos $h(t) = f(t) + ig(t)$ onde f e g são funções reais, temos

$$H(s) = \mathcal{L}(h)(s) = \int_0^\infty e^{-st} [f(t) + ig(t)]\, dt = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt + i \int_0^\infty e^{-st} g(t)\, dt = F(s) + iG(s),$$

onde F e G são as transformadas de Laplace de f e g, respectivamente. Assim, se em particular $f(t) = \cos at$ e $g(t) = \operatorname{sen} at$, temos

$$H(t) = \cos at + i \operatorname{sen} at = e^{iat}$$

e daí

$$\begin{aligned} H(s) &= \int_0^\infty e^{(ia-s)t}\,dt = \left.\frac{e^{(ia-s)t}}{ia-s}\right|_{t=0}^{t=\infty} = \lim_{t\to\infty}\frac{e^{(ia-s)t}}{ia-s} - \frac{1}{ia-s} = \frac{1}{ia-s}\lim_{t\to\infty} e^{-st}e^{iat} + \frac{1}{s-ia} \\ &= \frac{1}{s-ia}, \text{ se } s>0, \end{aligned}$$

já que $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-st}e^{iat} = 0$ porque $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-st} = 0$, se $s>0$, e $\left|e^{iat}\right| = 1$. Como

$$\frac{1}{s-ia} = \frac{1}{s-ia}\frac{s+ia}{s+ia} = \frac{s}{s^2+a^2} + i\frac{a}{s^2+a^2},$$

segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\cos at)(s) = F(s) &= \frac{s}{s^2+a^2}, \\ \mathcal{L}(\operatorname{sen} at)(s) = G(s) &= \frac{a}{s^2+a^2}, \end{aligned}$$

para $s>0$.

d) $f(t) = t^n$.

Denote $f_n(t) = t^n$. Obtemos a seguinte fórmula recursiva, através de integração por partes:

$$\begin{aligned} F_n(s) = \mathcal{L}(f_n)(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f_n(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}t^n\,dt \quad \left(\begin{array}{c} u = t^n \Rightarrow du = nt^{n-1}\,dt \\ dv = e^{-st}\,dt \Rightarrow v = -\dfrac{e^{-st}}{s} \end{array}\right) \\ &= -\left.\frac{e^{-st}t^n}{s}\right|_0^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^{n-1}\,dt = \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^{n-1}\,dt \\ &= \frac{n}{s}\mathcal{L}(f_{n-1})(s), \quad \text{se } s>0. \end{aligned}$$

Assim, como $F_0(s) = \mathcal{L}(1)(s) = \dfrac{1}{s}$, segue que

$$F_n(s) = \frac{n}{s}F_{n-1}(s) = \frac{n(n-1)}{s^2}F_{n-2}(s) = \ldots = \frac{n!}{s^n}F_0(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \text{se } s>0.$$

e) Função Degrau (ou *função de Heaviside*):

$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leqslant t < a, \\ 1 & \text{se } t \geqslant a. \end{cases}$$

$$F(s) = \int_a^\infty e^{-st}\,dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{t=a}^{t=\infty} = \lim_{t\to\infty}\frac{e^{-st}}{-s} - \frac{e^{-as}}{-s} = \frac{e^{-as}}{s} \quad \text{se } s>0.$$

□

Para calcular a transformada de Laplace de outras funções (por exemplo, combinações lineares das funções acima, translações, etc.), usamos as suas propriedades, enunciadas e provadas no teorema a seguir. Introduzimos antes a seguinte definição:

Definição. Dizemos que uma função $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é **admissível** se existirem $M, k > 0$ tais que

$$|f(t)| \leqslant Me^{kt} \tag{3.2}$$

para todo $t > 0$.

Teorema 3.1. *Se $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua por partes admissível, então a sua transformada de Laplace existe. Além disso, a transformada de Laplace satisfaz as seguintes propriedades (no que se segue, denotaremos sempre $F = \mathcal{L}(f)$):*

a) *(Linearidade)*

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(s) = \alpha \mathcal{L}(f)(s) + \beta \mathcal{L}(g)(s).$$

definida para $s > \max(a_f, a_g)$, se $F = \mathcal{L}(f)$ está definida para $s > a_f$ e $G = \mathcal{L}(g)$ está definida para $s > a_g$.

b) *(Deslocamento da Transformada de Laplace)*

$$\mathcal{L}\left(e^{at} f\right)(s) = F(s - a),$$

definida para $s > a + c$, se F está definida para $s > c$.

c) *(Dilatação)*

$$\mathcal{L}(f(at))(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right),$$

definida para $s > ac$, se F está definida para $s > c$.

d) *(Deslocamento vezes a Função Degrau)*

$$\mathcal{L}(f(t - a) u_a)(s) = e^{-as} F(s).$$

e) *(Transformada de Laplace da derivada primeira) Se f é uma função diferenciável admissível e f' é contínua por partes, então*

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = sF(s) - f(0).$$

f) *(Transformada de Laplace da derivada segunda) Se f é uma função duas vezes diferenciável admissível tal que f, f' são admissíveis e f', f'' são contínuas por partes, então*

$$\mathcal{L}(f''(t))(s) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0).$$

g) *(Transformada de Laplace da derivada de ordem n) Se f é uma função n vezes diferenciável admissível tal que $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ são admissíveis e $f', f'' \ldots, f^{(n)}$ são contínuas por partes, então*

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right)(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-(k+1)} f^{(k)}(0).$$

h) *(Transformada de Laplace Inversa da derivada) Se a transformada de Laplace de f é uma função n vezes diferenciável, então*

$$\mathcal{L}\left[(-t)^n f(t)\right](s) = F^{(n)}(s).$$

i) *(Transformada de Laplace da integral) Se f é uma função admissível, então*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\xi)\, d\xi\right](s) = \frac{F(s)}{s}.$$

Prova. Para provar a existência, basta provar que a integral que define a transformada de Laplace existe. E, de fato,

$$\left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt\right| \leqslant M \int_0^\infty e^{(k-s)t} f(t)\, dt = M \left.\frac{e^{(k-s)t}}{k-s}\right|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{M}{k-s}, \quad \text{para todo } s > k.$$

a)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(s) &= \int_0^\infty e^{-st} (\alpha f + \beta g)(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st} \alpha f(t)\, dt + \int_0^\infty e^{-st} \beta g(t)\, dt \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)\, dt = \alpha \mathcal{L}(f)(s) + \beta \mathcal{L}(g)(s).\end{aligned}$$

b)

$$\mathcal{L}\left(e^{at} f(t)\right)(s) = \int_0^\infty e^{(a-s)t} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\, dt = F(s-a).$$

c)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t-a)\, u_a)(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)\, u_a(t)\, dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s(\xi+a)} f(\xi)\, d\xi = e^{-as} \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi)\, d\xi = e^{-as} F(s).\end{aligned}$$

d)

$$\mathcal{L}(f(at))(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(at)\, dt = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}\xi} f(\xi)\, d\xi = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

e)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f')(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt \quad \left(\begin{array}{c} u = e^{-st} \Rightarrow du = -se^{-st}\, dt \\ dv = f'(t)\, dt \Rightarrow v = f(t) \end{array}\right) \\ &= f(s)\, e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=\infty} + s \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \quad = sF(s) - f(0),\end{aligned}$$

pois $\lim\limits_{t\to\infty} |f(s)|\, e^{-st} \leqslant M \lim\limits_{t\to\infty} e^{(k-s)t} = 0.$

f)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'')(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f''(t)\, dt \quad \left(\begin{array}{c} u = e^{-st} \Rightarrow du = -se^{-st}\, dt \\ dv = f''(t)\, dt \Rightarrow v = f'(t) \end{array}\right) \\ &= f'(s)\, e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=\infty} + s \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt \quad = sF'(s) - f'(0) = s(sF(s) - f(0)) - f'(0) \\ &= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0),\end{aligned}$$

pois $\lim\limits_{t\to\infty} |f'(s)|\, e^{-st} \leqslant M \lim\limits_{t\to\infty} e^{(k-s)t} = 0.$

g) Temos

$$\mathcal{L}[-tf(t)](s) = \int_0^\infty (-t)\, e^{-st} f(t)\, dt \quad = F'(s),$$

e, em geral,

$$\mathcal{L}[(-t)^n f(t)](s) = \int_0^\infty (-t)^n e^{-st} f(t)\, dt \quad = F^{(n)}(s).$$

i) Seja $g(t) = \int_0^t f(\xi)\, d\xi$. Então $g'(t) = f(t)$ e $g(0) = 0$, logo

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g'(t)] = s\mathcal{L}[g(t)] - g(0) = s\mathcal{L}[g(t)].$$

■

Exemplo 3.2. Calcule a transformada de Laplace das funções indicadas.

a) $f(t) = 5t^3 - 21t^2 + \sqrt{5}t + 100$.

$$\begin{aligned} F(s) &= 5\mathcal{L}\left(t^3\right) - 21\mathcal{L}\left(t^2\right) + \sqrt{5}\mathcal{L}(t) + 100\mathcal{L}(1) = \frac{5 \cdot 3!}{s^4} - \frac{21 \cdot 2!}{s^3} + \frac{\sqrt{5} \cdot 1!}{s^2} + \frac{100}{s} \\ &= \frac{30}{s^4} - \frac{42}{s^3} + \frac{\sqrt{5}}{s^2} + \frac{100}{s}. \end{aligned}$$

b) $f(t) = \operatorname{senh} at$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\left(\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\left(e^{at}\right) - \mathcal{L}\left(e^{-at}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) \\ &= \frac{a}{s^2 - a^2}. \end{aligned}$$

c) $f(t) = \cosh at$.

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\left(\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\left(e^{at}\right) + \mathcal{L}\left(e^{-at}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) \\ &= \frac{s}{s^2 - a^2}. \end{aligned}$$

d) $f(t) = e^{at} \operatorname{sen} bt$.

Aplicando a propriedade (b) do Teorema 3.1, temos

$$F(s) = \mathcal{L}\left(e^{at} \operatorname{sen} bt\right) = \mathcal{L}(\operatorname{sen} bt)(s-a) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}.$$

e) $f(t) = e^{at} \cos bt$.

Aplicando novamente a propriedade (b) do Teorema 3.1, temos

$$F(s) = \mathcal{L}\left(e^{at} \cos bt\right) = \mathcal{L}(\cos bt)(s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}.$$

f) $f(t) = t^n e^{at}$.

Mais uma vez aplicando a propriedade (b), temos

$$F(s) = \mathcal{L}\left(t^n e^{at}\right) = \mathcal{L}(t^n)(s-a) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

g) $f(t) = t \operatorname{sen} at$.

Temos

$$\begin{aligned} f'(t) &= \operatorname{sen} at + at \cos at, \\ f''(t) &= 2a \cos at - a^2 t \operatorname{sen} at = 2a \cos at - a^2 f(t). \end{aligned}$$

Aplicando a propriedade da transformada de Laplace da derivada segunda a esta última equação e a linearidade, temos

$$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) = 2a \frac{s}{s^2 + a^2} - a^2 F(s).$$

Como $f(0) = f'(0) = 0$, segue que

$$\left(s^2 + a^2\right) F(s) = \frac{2as}{s^2 + a^2}$$

Logo,

$$F(s) = \frac{2as}{\left(s^2 + a^2\right)^2}. \tag{3.3}$$

Outra maneira de obter este resultado é observar que

$$f(t) = -(-t) \operatorname{sen} at,$$

logo

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = -\mathcal{L}[-t \operatorname{sen} at](s) = -[\mathcal{L}(\operatorname{sen} at)]'(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right) = \frac{2as}{\left(s^2 + a^2\right)^2}.$$

h) $f(t) = t \cos at$.

Temos

$$\begin{aligned} f'(t) &= \cos at - at \operatorname{sen} at, \\ f''(t) &= -2a \operatorname{sen} at - a^2 t \cos at = -2a \operatorname{sen} at - a^2 f(t). \end{aligned}$$

Aplicando a propriedade da transformada de Laplace da derivada segunda a esta última equação e a linearidade, temos

$$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) = -2a \frac{a}{s^2 + a^2} - a^2 F(s).$$

Como $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$, segue que

$$\left(s^2 + a^2\right) F(s) = 1 - \frac{2a^2}{s^2 + a^2} = \frac{s^2 - a^2}{s^2 + a^2}.$$

Logo,

$$F(s) = \frac{2as}{\left(s^2 + a^2\right)^2}. \tag{3.4}$$

i) $f(t) = t^2 \operatorname{sen} at$.

Temos

$$f(t) = -(-t)\, t \operatorname{sen} at,$$

logo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)](s) &= -\mathcal{L}[(-t)\, t \operatorname{sen} at](s) = -[\mathcal{L}(t \operatorname{sen} at)]'(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{2as}{\left(s^2 + a^2\right)^2}\right) \\ &= \frac{2a}{\left(s^2 + a^2\right)^2} - \frac{8as^2}{\left(s^2 + a^2\right)^3}. \end{aligned}$$

$\square$

3.2 Tabela de Transformadas de Laplace

	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$
1.	1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0,$
2.	e^{at}	$\frac{1}{s-a} \quad s > a,$
3.	$t^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0,$
4.	$t^p, \quad p \in \mathbb{R}, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{n+1}} \quad s > 0,$
5.	$\operatorname{sen} at$	$\frac{a}{s^2 + a^2} \quad s > 0,$
6.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2} \quad s > 0,$
7.	$\operatorname{senh} at$	$\frac{a}{s^2 - a^2} \quad s > \|a\|,$
8.	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2} \quad s > \|a\|,$
9.	$e^{at} \operatorname{sen} bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2} \quad s > a,$
10.	$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} \quad s > a,$
11.	$t^n e^{at}, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad s > a,$
12.	$t \operatorname{sen} at, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2} \quad s > 0,$
13.	$t \cos at, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2} \quad s > 0,$
14.	$u_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s} \quad s > 0,$
15.	$f(t-a)\, u_a(t)$	$e^{-as} F(s)$
16.	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
17.	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0,$
18.	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
19.	$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
20.	$\int_0^t f(\xi)\, d\xi$	$\frac{F(s)}{s}$
21.	$(f * g)(t)$	$F(s)\, G(s)$
22.	$\delta(t-a)$	e^{-as}

3.3 Transformada de Laplace Inversa

Teorema 3.2. (Unicidade da Transformada de Laplace Inversa) *Se f, g são funções contínuas por partes admissíveis tais que $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$, então $f = g$ em qualquer ponto onde elas são contínuas.*

Como a inversa de uma função linear é linear, temos que a inversa da transformada de Laplace também é linear. Denotaremos a transformada de Laplace inversa por $\mathcal{L}^{-1}$.

Exemplo 3.3. Encontre a transformada de Laplace inversa das seguintes funções.

a) $F(s) = \dfrac{3}{s}$.

Usando a linearidade da transformada de Laplace inversa e olhando na tabela, vemos que

$$\mathcal{L}^{-1}(F) = 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 3 \cdot 1 = 3.$$

b) $F(s) = \dfrac{7}{s-2} + \dfrac{19}{s^6}$.

$$\mathcal{L}^{-1}(F) = 7\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) + \frac{19}{5!}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5!}{s^6}\right) = 7e^{-2t} + \frac{19}{120}t^5.$$

c) $F(s) = \dfrac{2}{s^2+9}$.

$$\mathcal{L}^{-1}(F) = \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) = \frac{2}{3}\operatorname{sen} 3t.$$

d) $F(s) = \dfrac{s+3}{s^2-3s+2}$.

Usando decomposição em frações parciais

$$\frac{s+3}{s^2-3s+2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} = \frac{(A+B)s - (2A+B)}{s^2-3s+2},$$

obtemos

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A + B = -3 \end{cases}$$

donde $A = -4$ e $B = 5$, ou seja,

$$\frac{s+3}{s^2-3s+2} = -\frac{4}{s-1} + \frac{5}{s-2}.$$

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+3}{s^2-3s+2}\right) = -4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + 5\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) = -4e^t + 5e^{2t}.$$

e) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s-a)}$.

Podemos escrever a propriedade da transformada de Laplace de uma integral na forma

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s}\right) = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}(F(s))(\xi)\, d\xi.$$

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-a)}\right)=\int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right)(\xi)\,d\xi=\int_0^t e^{a\xi}\,d\xi=\frac{1}{a}\left(e^{at}-1\right).$$

Usando novamente esta propriedade, segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s-a)}\right)&=\int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-a)}\right)(\xi)\,d\xi=\int_0^t \frac{1}{a}\left(e^{a\xi}-1\right)d\xi=\frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}e^{a\xi}-\xi\right]_{\xi=0}^{\xi=t}\\&=\frac{1}{a^2}\left(e^{at}-at-1\right).\end{aligned}$$

□

3.4 Aplicação à Resolução de Problemas de Valor Inicial

A transformada de Laplace é apropriada para resolver EDOs de segunda ordem com coeficientes constantes, sem distinção entre homogêneas ou não-homogêneas:

$$ay''+by'+cy=f(t).$$

Aplicando a transformada de Laplace a esta equação, denotando $Y(s)=\mathcal{L}(y(t))$ usando as suas propriedades obtemos

$$a\left[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right]+b\left[sY(s)-y(0)\right]+cY(s)=\mathcal{L}(f(t))=F(s),$$

que é uma equação algébrica em $Y(s)$. Denotando as condições iniciais por

$$\begin{aligned}y(0)&=y_0,\\y'(0)&=y_0',\end{aligned}$$

e resolvendo para $Y(s)$ temos

$$Y(s)=\frac{[ay_0]\,s+[ay_0'+by_0]}{as^2+bs+c}+\frac{F(s)}{as^2+bs+c}.$$

Então, aplicando a transformada de Laplace inversa, obtemos a solução $y(t)$ desejada:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{[ay_0]\,s+[ay_0'+by_0]}{as^2+bs+c}+\frac{F(s)}{as^2+bs+c}\right). \tag{3.5}$$

Note que, escrevendo

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{[ay_0]\,s+[ay_0'+by_0]}{as^2+bs+c}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{as^2+bs+c}\right)$$

e definindo

$$\begin{aligned}y_1(t)&=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{[ay_0]\,s+[ay_0'+by_0]}{as^2+bs+c}\right),\\y_2(t)&=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{as^2+bs+c}\right),\end{aligned}$$

então $y_1(t)$ é a solução do problema homogêneo com as mesmas condições iniciais

$$\begin{cases}ay''+by'+cy=0\\y(0)=y_0,\\y'(0)=y_0',\end{cases}$$

enquanto que $y_2(t)$ é a solução do problema não-homogêneo com condições iniciais homogêneas:

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(t) \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

A maior dificuldade do método é encontrar a transformada inversa de uma dada função que não esteja na tabela.

Exemplo 3.4. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 4y = \operatorname{sen} 3t \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Solução. Aplicamos a transformada de Laplace à equação, isto é,

$$\mathcal{L}(y'' + 4y) = \mathcal{L}(\operatorname{sen} 3t).$$

Denotando $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$, obtemos no lado esquerdo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y'' + 4y) &= \mathcal{L}(y'') + 4\mathcal{L}(y) \\ &= s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) \\ &= \left(s^2 + 4\right) Y(s), \end{aligned}$$

enquanto no lado direito temos

$$\mathcal{L}(\operatorname{sen} 3t) = \frac{3}{s^2 + 9}.$$

Portanto,

$$Y(s) = \frac{3}{(s^2 + 4)(s^2 + 9)}.$$

Usando frações parciais,

$$\frac{3}{(s^2 + 4)(s^2 + 9)} = \frac{As + B}{s^2 + 4} + \frac{Cs + D}{s^2 + 9}.$$

Na verdade, devemos ter $A = C = 0$, porque não há termos de grau ímpar no numerador do lado esquerdo (em outras palavras, $(A + C)s^3 = 0$ e $(9A + 4C)s = 0$ implicam $A = C = 0$). Assim, precisamos resolver

$$\frac{3}{(s^2 + 4)(s^2 + 9)} = \frac{B}{s^2 + 4} + \frac{D}{s^2 + 9} = \frac{(B + D)s^2 + (9B + 4D)}{(s^2 + 4)(s^2 + 9)},$$

donde

$$\begin{cases} B + D = 0 \\ 9B + 4D = 3 \end{cases}$$

e obtemos $B = 3/5$ e $D = -3/5$. Aplicando a transformada de Laplace inversa, temos

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 4}\right) - \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 9}\right) = \frac{3}{10}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2 + 4}\right) - \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2 + 9}\right) \\ &= \frac{3}{10}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{5}\operatorname{sen} 3t. \end{aligned}$$

□

Exemplo 3.5. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t}\cos 2t \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Solução. Aplicamos a transformada de Laplace à equação, isto é,

$$\mathcal{L}(y'' + 2y' + 5y) = \mathcal{L}\left(4e^{-t}\cos 2t\right).$$

Denotando $\mathcal{L}(y(t)) = Y(s)$, obtemos no lado esquerdo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y'' + 2y' + 5y) &= \mathcal{L}(y'') + 2\mathcal{L}(y') + 5\mathcal{L}(y) \\ &= s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2(sY(s) - y(0)) + 5Y(s) \\ &= \left(s^2 + 2s + 5\right) Y(s) - s - 2 \end{aligned}$$

enquanto no lado direito, usando as propriedades segue que

$$4\mathcal{L}\left(e^{-t}\cos 2t\right) = 4\mathcal{L}(\cos 2t)(s+1) = \frac{4(s+1)}{(s+1)^2 + 4} = \frac{4(s+1)}{s^2 + 2s + 5}.$$

Portanto,

$$\left(s^2 + 2s + 5\right) Y(s) = \frac{4(s+1)}{s^2 + 2s + 5} + s + 2,$$

donde

$$Y(s) = \frac{4(s+1)}{\left[(s+1)^2 + 4\right]^2} + \frac{s+2}{(s+1)^2 + 4} = \frac{2 \cdot 2(s+1)}{\left[(s+1)^2 + 4\right]^2} + \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2 + 4}.$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa, temos

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4(s+1)}{\left[(s+1)^2 + 4\right]^2} + \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2 + 4}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4(s+1)}{\left[(s+1)^2 + 4\right]^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2 + 4}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2 + 4}\right) \end{aligned}$$

Olhando a tabela da transformada de Laplace, vemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4(s+1)}{\left[(s+1)^2 + 4\right]^2}\right) &= te^{-t}\,\mathrm{sen}\,2t, \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2 + 4}\right) &= e^{-t}\cos 2t, \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2 + 4}\right) &= e^{-t}\,\mathrm{sen}\,2t. \end{aligned}$$

Portanto,

$$y(t) = te^{-t}\,\mathrm{sen}\,2t + e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\,\mathrm{sen}\,2t = e^{-t}\left[\cos 2t + \left(t + \frac{1}{2}\right)\mathrm{sen}\,2t\right].$$

□

3.5 Convolução

Embora a transformada de Laplace não comute com o produto usual de funções, isto é, a transformada de Laplace de um produto de funções não é o produto das transformadas de Laplace destas funções (em geral $\mathcal{L}(fg) \neq \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$), a propriedade vale para um certo "produto generalizado" de funções, chamado *convolução*. Isso facilitará o cálculo de transformadas de Laplace inversa de produtos de funções.

Definição. A convolução de duas funções $f, g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função denotada $f * g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \xi)\, g(\xi)\, d\xi. \tag{3.6}$$

A convolução pode ser visto como um produto generalizado de funções, não por ser a integral de um produto de funções, mas por satisfazer várias das propriedades do produto:

$$\begin{aligned} f * g &= g * f, \\ f * (g + h) &= f * g + f * h, \\ f * (g * h) &= (f * g) * h, \\ f * 0 &= 0 * f = 0, \end{aligned}$$

como é fácil verificar. No entanto, a convolução não satisfaz a propriedade do elemento neutro:

$$(f * 1)(t) = \int_0^t f(t - \xi)\, d\xi \neq f(t),$$

em geral.

Teorema 3.3. (Transformada de Laplace da Convolução) *Se f, g são funções que possuem transformadas de Laplace, então sua convolução $f * g$ também possui transformada de Laplace e*

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\,\mathcal{L}(g). \tag{3.7}$$

Prova. Temos

$$\mathcal{L}(f)(s)\,\mathcal{L}(g)(s) = \int_0^\infty e^{-su} f(u)\, du \int_0^\infty e^{-sv} g(v)\, dv = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(u)\, g(v)\, du\, dv.$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} t &= u + v, \\ \xi &= v, \end{aligned}$$

obtemos

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(u)\, g(v)\, du\, dv = \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(t - \xi)\, g(\xi)\, dt\, d\xi,$$

porque a mudança de coordenadas escolhida transforma o quadrante infinito $Q = \{(t, \xi) \in [0, \infty) \times [0, \infty)\}$ no triângulo infinito $T = \{(t, \xi) \in [0, \infty) \times [0, \infty) : \xi \leqslant t\}$, pois $\xi - t = u \geqslant 0$. Daí,

$$\mathcal{L}(f)(s)\,\mathcal{L}(g)(s) = \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(t - \xi)\, g(\xi)\, d\xi \right) dt = \int_0^\infty e^{-st} (f * g)(t)\, dt = \mathcal{L}(f * g)(s).$$

■

Em particular,

$$\mathcal{L}^{-1}(FG) = \mathcal{L}^{-1}(F) * \mathcal{L}^{-1}(G). \tag{3.8}$$

Exemplo 3.6. Encontre a transformada de Laplace inversa de

$$H(s) = \frac{1}{(s-3)(s+2)}.$$

Solução. Sejam

$$F(s) = \frac{1}{s-3} \quad \text{e} \quad G(s) = \frac{1}{s+2},$$

de modo que

$$H(s) = F(s)\,G(s).$$

Então

$$\mathcal{L}^{-1}(H) = \mathcal{L}^{-1}(FG) = \mathcal{L}^{-1}(F) * \mathcal{L}^{-1}(G).$$

Como

$$\mathcal{L}^{-1}(F) = e^{3t} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{-1}(G) = e^{-2t},$$

segue que

$$\mathcal{L}^{-1}(H) = \int_0^t e^{3(t-\xi)} e^{-2\xi}\,d\xi = e^{3t}\int_0^t e^{-5\xi}\,d\xi = e^{3t}\left[\frac{e^{-5\xi}}{-5}\right]_{\xi=0}^{\xi=t} = \frac{e^{3t}}{5}\left(1-e^{-5t}\right).$$

□

Exemplo 3.7. Encontre a transformada de Laplace inversa de

$$H(s) = \frac{1}{s^2(s-a)}.$$

Solução. Sejam

$$F(s) = \frac{1}{s^2} \quad \text{e} \quad G(s) = \frac{1}{s-a},$$

de modo que

$$\mathcal{L}^{-1}(H) = \mathcal{L}^{-1}(F) * \mathcal{L}^{-1}(G).$$

Como

$$\mathcal{L}^{-1}(F) = t \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{-1}(G) = e^{at},$$

segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}(H) &= \int_0^t (t-\xi)\,e^{a\xi}\,d\xi = t\int_0^t e^{a\xi}\,d\xi - \int_0^t \xi e^{a\xi}\,d\xi = \frac{t}{a}\left(e^{at}-1\right) - \left[\left(\frac{\xi e^{a\xi}}{a}\right)_{\xi=0}^{\xi=t} - \frac{1}{a}\int_0^t e^{a\xi}\,d\xi\right] \\
&= \frac{te^{-at}}{a} - \frac{t}{a} - \frac{te^{-at}}{a} + \frac{e^{-at}}{a^2} - \frac{1}{a} = -\frac{t}{a} + \frac{e^{-at}}{a^2} - \frac{1}{a^2} \\
&= \frac{1}{a^2}\left(e^{at} - at - 1\right).
\end{aligned}$$

Compare com o Exemplo 3.3 (e). □

Exemplo 3.8. Encontre a transformada de Laplace inversa de

$$H(s) = \frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}.$$

Solução. Sejam
$$F(s) = \frac{1}{s^2+4} \quad \text{e} \quad G(s) = \frac{1}{s^2+9},$$
de modo que
$$\mathcal{L}^{-1}(H) = 3\mathcal{L}^{-1}(F) * \mathcal{L}^{-1}(G).$$
Como
$$\mathcal{L}^{-1}(F) = \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{-1}(G) = \frac{\operatorname{sen} 3t}{3},$$
segue que
$$\mathcal{L}^{-1}(H) = \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{sen} 2(t-\xi)\operatorname{sen} 3\xi \, d\xi = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t \int_0^t \cos 2\xi \operatorname{sen} 3\xi \, d\xi - \frac{1}{2}\cos 2t \int_0^t \operatorname{sen} 2\xi \operatorname{sen} 3\xi \, d\xi.$$
Usando as identidades trigonométricas
$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2},$$
$$\cos a \operatorname{sen} b = \frac{\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b)}{2},$$
segue que
$$\int_0^t \cos 2\xi \operatorname{sen} 3\xi \, d\xi = \int_0^t \frac{\operatorname{sen} 5\xi + \operatorname{sen} \xi}{2} d\xi = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 5t}{5} + \cos t - \frac{6}{5}\right),$$
$$\int_0^t \operatorname{sen} 2\xi \operatorname{sen} 3\xi \, d\xi = \int_0^t \frac{\cos \xi - \cos 5\xi}{2} d\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} 5t}{5} + \operatorname{sen} t\right),$$
logo
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}(H) &= -\frac{1}{20}\operatorname{sen} 2t \cos 5t - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t \cos t + \frac{3}{10}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{20}\cos 2t \operatorname{sen} 5t - \frac{1}{4}\cos 2t \operatorname{sen} t \\
&= \frac{3}{10}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{20}\operatorname{sen}(2t-5t) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t+t) \\
&= \frac{3}{10}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{5}\operatorname{sen} 3t.
\end{aligned}$$
Compare com o Exemplo 3.4. □

3.6 Aplicação à Resolução de Problemas de Valor Inicial com Termo Não-Homogêneo Especial

Em muitos problemas de circuitos elétricos ou vibrações mecânicas modelados por equações diferenciais de segunda ordem com coeficientes constantes, o termo não-homogêneo é uma função descontínua, uma função impulso ou uma função periódica (o que não exclui uma função com todas estas três características).

3.6.1 Funções Impulso

Considere um sistema de vibração mecânico agindo sob uma força externa $f(t)$ do tipo *impulso*, isto é, uma força que age apenas por um determinado período de tempo:
$$ay'' + by' + cy = f(t),$$

com $f(t) = 0$ para todo $t \notin (t_0 - \tau, t_0 + \tau)$ e podemos ter $f(t) \neq 0$ apenas para $t \in (t_0 - \tau, t_0 + \tau)$. A medida da intensidade desta força e sua influência sobre o sistema mecânico é então dada pela integral

$$I = \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} f(t)\, dt \tag{3.9}$$

que é chamada o **impulso** total da força f sobre o intervalo de tempo $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$. O impulso pode ser uma função contínua, se $f(t_0 - \tau) = f(t_0 + \tau) = 0$ ou descontínua, quando a força age de modo abrupto e/ou é interrompida de modo abrupto. Outro caso interessante a estudar é quando o sistema inicialmente não está sujeito a nenhuma força externa e subitamente uma força externa é imposta sobre ele. Para estudar sistemas em que a força externa age como um impulso ou começa a agir a partir de um instante de tempo, precisamos obter a transformada de Laplace de funções impulsos e de funções descontínuas em geral.

Já calculamos a transformada de Laplace para a função degrau (ou de Heaviside)

$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leqslant t < a, \\ 1 & \text{se } t \geqslant a, \end{cases} \tag{3.10}$$

obtendo

$$\mathcal{L}(u_a) = \frac{e^{-as}}{s} \quad \text{se } s > 0. \tag{3.11}$$

Também verificamos a seguinte propriedade de deslocamento:

$$\mathcal{L}(f(t-a)\, u_a)(s) = e^{-as} F(s). \tag{3.12}$$

Muitos impulsos contínuos ou descontínuos podem ser escritas em termos da função degrau:

Exemplo 3.9. Encontre as transformadas de Laplace das seguintes funções:

a) (Impulso descontínuo)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leqslant t < 1, \\ 10 & \text{se } 1 \leqslant t \leqslant 2, \\ 0 & \text{se } t > 2, \end{cases}$$

Observe que

$$f(t) = 10u_1(t) - 10u_2(t),$$

logo

$$F(s) = 10\mathcal{L}(u_1) - 10\mathcal{L}(u_2) = 10\frac{e^{-s}}{s} - 10\frac{e^{-2s}}{s}.$$

b) (Impulso contínuo)

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \pi, \\ 0 & \text{se } t \geqslant \pi, \end{cases}$$

Observe que

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t\, u_\pi(t) \\ &= \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}(t-\pi)\, u_\pi(t), \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}(\operatorname{sen} t) + \mathcal{L}[\operatorname{sen}(t-\pi)\, u_\pi(t)] = \mathcal{L}(\operatorname{sen} t) + e^{-\pi s}\mathcal{L}(\operatorname{sen} t) \\ &= \frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}. \end{aligned}$$

c) (Força contínua atuando a partir de um instante de tempo)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leqslant t < 5, \\ (t-5)^2 & \text{se } t \geqslant 5, \end{cases}$$

Temos

$$f(t) = (t-5)^2 u_5(t),$$

logo

$$F(s) = \mathcal{L}\left[(t-5)^2 \, u_5(t)\right] = e^{-5s}\mathcal{L}\left(t^2\right) = \frac{2e^{-5s}}{s^3}.$$

□

Exemplo 3.10. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = f(t) \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

onde

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leqslant t < 1, \\ 1 & \text{se } 1 \leqslant t \leqslant 2, \\ 0 & \text{se } t > 2, \end{cases}$$

(Este problema equivale a um impulso unitário agindo durante o intervalo de tempo $(1, 2)$.)

Solução. Aplicando a transformada de Laplace à equação, obtemos

$$\left(s^2 + 2s + 1\right) Y(s) = \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s},$$

logo

$$Y(s) = \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s(s+1)^2}.$$

Olhando na tabela, vemos que

$$\mathcal{L}\left(te^{-t}\right) = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Usando a propriedade

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s}\right) = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right)(\xi) \, d\xi.$$

segue que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s+1)^2}\right) = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right)(\xi) \, d\xi = \int_0^t \xi e^{-\xi} \, d\xi = 1 - (t+1)\, e^{-t}.$$

Portanto, usando a propriedade

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-as}F(s)\right] = f(t-a)\, u_a(s),$$

temos

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s(s+1)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s(s+1)^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s(s+1)^2}\right] \\ &= \left[1 - te^{-(t-1)}\right] u_1(t) - \left[1 - (t-1)\, e^{-(t-2)}\right] u_2(t), \end{aligned}$$

ou seja,

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leqslant t < 1, \\ 1 - te^{-(t-1)} & \text{se } 1 \leqslant t \leqslant 2, \\ (t-1)\, e^{-(t-2)} - te^{-(t-1)} & \text{se } t > 2, \end{cases}$$

Esta solução pode ser pensada como composta de três soluções:

$$y_1(t) \equiv 0 \quad \text{solução do problema homogêneo} \begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases} \quad \text{no intervalo } 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$y_2(t) \equiv 1 - te^{-(t-1)} \quad \text{solução do problema} \begin{cases} y'' + 2y' + y = 1 \\ y(1) = 0, \\ y'(1) = 0. \end{cases} \quad \text{no intervalo } 1 \leqslant t \leqslant 2,$$

$$y_3(t) \equiv (t-1)\, e^{-(t-2)} - te^{-(t-1)} \quad \text{solução do problema homogêneo} \begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(2) = 1 - 2e^{-1}, \\ y'(2) = e^{-1}. \end{cases} \quad \text{no intervalo } t \geqslant 2,$$

Compare também a solução obtida com a do Exemplo 3.11 na próxima subseção. ■

3.6.2 Função Delta de Dirac

Às vezes, o impulso é de duração tão curta ou concentrado em um intervalo de tempo tão pequeno, que para todos os efeitos pode ser considerado um impulso instantâneo. Como modelar matematicamente um impulso instantâneo?

Para responder essa pergunta, considere a seguinte seqüência de impulsos unitários:

$$g_n(t) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } -\dfrac{1}{n} < t < \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Estes impulsos são unitários porque

$$I_n = \int_{-1/n}^{1/n} g_n(t)\, dt = 1$$

para todo n. Observe que $g_n(0) \to \infty$, enquanto que $g_n(t) \to 0$ para todo $t \neq 0$. Além disso, se $f(t)$ é uma função contínua qualquer, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g_n(t - t_0)\, dt = \frac{n}{2} \int_{t_0 - 1/n}^{t_0 + 1/n} f(t)\, dt.$$

Pelo teorema do valor médio para integrais, vale

$$\frac{1}{\frac{2}{n}} \int_{t_0 - 1/n}^{t_0 + 1/n} f(t)\, dt = f(\xi_n)$$

para algum $\xi_n \in \left(t_0 - \dfrac{1}{n}, t_0 + \dfrac{1}{n} \right)$, de modo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g_n(t - t_0)\, dt = f(\xi_n).$$

Mas, $\xi_n \to t_0$ quando $n \to \infty$. Tomando o limite da integral, segue portanto que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g_n(t - t_0)\, dt = f(t_0).$$

No entanto, observe que não podemos passar o limite para dentro da integral, porque $\lim_{n\to\infty} g_n(t)$ não existe.

Essas observações sugerem definir um impulso unitário δ de tamanho 1 em $t=0$, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1. \tag{3.13}$$

mas que vale 0 em todos os pontos $t \neq 0$:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq 0, \\ \infty & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

δ seria o limite dos impulsos unitários g_n, isto é,

$$\delta(t) = \lim_{n\to\infty} g_n(t)$$

e poderíamos passar o limite para dentro da integral. Obviamente, não existe uma função com estas características. No entanto, é possível definir matematicamente de maneira rigorosa um conceito de *função generalizada* que se comporta formalmente deste jeito. O **delta de Dirac** $\delta(t)$ é uma função generalizada definida pela seguinte propriedade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \delta(t-t_0)\, dt = f(t_0) \tag{3.14}$$

para toda função $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua por partes. Podemos operar formalmente com a função delta de Dirac em muitas situações como operamos com funções reais, o que torna o seu uso muito conveniente nas aplicações. A função $\delta(t-t_0)$ é um modelo matemático para um impulso unitário instantâneo no instante de tempo t_0 e podemos usá-la para estudar sistemas em que a força externa age através de um impulso instantâneo em um certo instante de tempo. Antes de fazer isso, precisamos encontrar a transformada de Laplace do delta de Dirac:

Teorema 3.4. (Transformada de Laplace do Delta de Dirac) *Se* $a > 0$, *então*

$$\mathcal{L}(\delta(t-a)) = e^{-as}. \tag{3.15}$$

Prova. Por definição, para n suficientemente grande vale

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\delta(t-a))(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \lim_{n\to\infty} g_n(t-a)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-st} g_n(t-a)\, dt = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \int_{a-1/n}^{a+1/n} e^{-st}\, dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{-2s} \left[e^{-st}\right]_{t=a-1/n}^{t=a+1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2s} e^{-as} \left(e^{s/n} - e^{-s/n}\right) = e^{-as} \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{senh} \frac{s}{n}}{\frac{s}{n}} \\ &= e^{-as}, \end{aligned}$$

pois, pela regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x}{1} = 1.$$

■

Exemplo 3.11. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = \delta(t-2) \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

(Este problema equivale a um impulso unitário concentrado no tempo $t=2$.)

Solução. Aplicando a transformada de Laplace à equação, obtemos

$$\left(s^2 + 2s + 1\right) Y(s) = e^{-2s},$$

logo

$$Y(s) = \frac{e^{-2s}}{(s+1)^2}.$$

Olhando na tabela, vemos que

$$\mathcal{L}\left(te^{-t}\right) = \frac{1}{(s+1)^2},$$

logo, também pela tabela, segue que

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{(s+1)^2}\right] = (t-2)\, e^{-(t-2)} u_2(t),$$

ou seja,

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 2, \\ (t-2)\, e^{-(t-2)} & \text{se } t \geqslant 2. \end{cases}$$

Observe que a equação homogênea correspondente deste problema é a do amortecimento crítico, o que se reflete na solução. O que acontece é que o impulso produz uma perturbação instantânea de curta duração no sistema ; após o impulso de curta duração, o sistema volta a comportar-se de seu modo natural, quando não sujeito a nenhuma força externa. ■

3.6.3 Transformadas de Funções Periódicas

Se a força externa f é uma função contínua por partes, periódica de período T, isto é,

$$f(t+T) = f(t) \quad \text{para todo } t,$$

a transformada de Laplace de f sempre existe e pode ser facilmente calculada:

Teorema 3.5. (Transformada de Laplace de uma Função Periódica) *Se f é uma função periódica de período T, então a sua tranformada de Laplace existe para todo $s > 0$ e é dada por*

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt. \tag{3.16}$$

Prova. Temos

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)\, dt.$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\xi = t - nT,$$

segue que

$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^T e^{-s(\xi + nT)} f(\xi + nT)\, d\xi = e^{-snT} \int_0^T e^{-s\xi} f(\xi)\, d\xi.$$

Logo,

$$F(s) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT}\right) \int_0^T e^{-s\xi} f(\xi)\, d\xi = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt.$$

■

Capítulo 4

Sistemas de EDOs Lineares de Primeira Ordem

Neste capítulo, consideraremos a resolução de sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem da forma

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & a_{11}(t)\,x_1(t) + \ldots + a_{1n}(t)\,x_n(t) + f_1(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n'(t) & = & a_{n1}(t)\,x_1(t) + \ldots + a_{nn}(t)\,x_n(t) + f_n(t) \end{array}\right. \tag{4.1}$$

que pode ser escrito em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

ou

$$X'(t) = A(t)\,X(t) + F(t)\,. \tag{4.2}$$

Teorema 4.1. (Teorema de Existência e Unicidade) *Considere o problema de valor inicial*

$$\left\{\begin{array}{l} X'(t) = A(t)\,X(t) + F(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{array}\right. .$$

Se a_{ij}, f_i são funções contínuas no intervalo $I = (a,b)$ contendo t_0, então o problema tem uma única solução no intervalo I.

Teorema 4.2. *Considere o sistema linear homogêneo*

$$X'(t) = A(t)\,X(t)$$

onde a_{ij} são funções contínuas no intervalo $I = (a,b)$ contendo t_0. Então o espaço-solução do sistema é um subespaço vetorial de dimensão n de $C^1(a,b)$. Além disso, se $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ são soluções do sistema tais que

$$\det\left[X_1(t_0) \ldots X_n(t_0)\right] \neq 0,$$

a única solução do problema com condição inicial $X(t_0) = X_0$ é da forma

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \ldots + c_n X_n(t)$$

para algumas constantes $c_1, \ldots, c_n$.

Prova. As constantes $c_1, \ldots, c_n$ são determinadas como sendo a única solução do sistema

$$c_1 X_1 (t_0) + \ldots + c_n X_n (t_0) = X_0.$$

■

Exemplo 4.1. Obtenha a solução geral dos sistemas abaixo:

a)

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

Este sistema possui a forma matricial

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

isto é, a sua matriz de coeficientes é diagonal. Como neste caso o sistema é desacoplado (isto é, as variáveis y_1, y_2 independem uma da outra), podemos resolver cada equação separadamente, obtendo $y_1 (t) = e^{\lambda_1 t}$ e $y_2 (t) = e^{\lambda_2 t}$. Portanto, a solução geral é

$$Y (t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}.$$

b)

$$\begin{cases} y_1' = \lambda y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda y_2 \end{cases}$$

Este sistema possui a forma matricial

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

Neste caso o sistema é acoplado, mas a segunda equação pode ser resolvida separadamente, produzindo a solução geral $y_2 (t) = c_2 e^{\lambda t}$. A partir desta, podemos obter a solução da primeira equação que se torna $y_1' (t) = \lambda y_1 (t) + c_2 e^{\lambda t}$; sua solução geral é $y_1 (t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$. A solução geral do sistema é

$$Y (t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} \\ c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \end{bmatrix}.$$

□

Em geral, para resolver problemas mais complicados, é melhor efetuar antes uma mudança de coordenadas de tal forma que a matriz de coeficientes do sistema assuma a forma mais simples possível, como veremos nas próximas seções. Por simplicidade, trabalharemos com matrizes de coeficientes constantes.

No restante do capítulo restringiremos nossa atenção a sistemas lineares em que a matriz possui coeficientes constantes, isto é, a sistemas da forma

$$X' (t) = AX (t) + F (t) \tag{4.3}$$

onde $A = (a_{ij})_{n \times n}$ com $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

4.1 Sistemas Homogêneos com Matrizes de Coeficientes Constantes

Nesta seção consideraremos apenas sistemas homogêneos, isto é, sistemas da forma

$$X' (t) = AX (t) . \tag{4.4}$$

4.1.1 Matrizes Diagonalizáveis em $\mathbb{R}$

A forma mais simples que uma matriz pode assumir é a forma diagonal. Assim, se o sistema possui uma matriz de coeficientes diagonalizável sobre o corpo dos reais $\mathbb{R}$, existe um sistema de coordenadas em que as equações do sistema são completamente desacopladas e a sua solução pode então ser facilmente obtida resolvendo cada equação individualmente.

Lembramos que uma matriz A é diagonalizável se existem uma matriz diagonal D e uma matriz invertível P tais que

$$A = PDP^{-1}, \tag{4.5}$$

onde

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

sendo que os elementos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ que aparecem na diagonal principal de D são exatamente os autovalores de A, e

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & \dots & P_n \end{bmatrix}$$

com as colunas $P_1, \dots, P_n$ da matriz P sendo precisamente os autovetores correspondentes a estes autovalores, respectivamente. Substituindo esta expressão para A no sistema, segue que

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t),$$

donde

$$P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t).$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$Y(t) = P^{-1}X(t), \tag{4.6}$$

temos que, já que a matriz P^{-1} é uma matriz constante,

$$Y'(t) = P^{-1}X'(t),$$

logo $Y(t)$ é a solução do sistema diagonal

$$Y'(t) = DY(t). \tag{4.7}$$

Assim, $Y(t)$ satisfaz

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{cases},$$

cuja solução geral é

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

Para voltar ao sistema original, basta fazer a operação

$$X(t) = PY(t). \tag{4.9}$$

Exemplo 4.2. Resolva o sistema
$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 \\ x_2' = -2x_1 + 2x_2 \end{cases}.$$

Exemplo 4.3. Resolva o sistema
$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_2' = 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ x_3' = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{cases}.$$

4.1.2 Matrizes Diagonalizáveis em $\mathbb{C}$

Se o sistema possui uma matriz de coeficientes diagonalizável sobre o corpo dos complexos $\mathbb{C}$, a situação é um pouco mais complicada, porque estamos interessados apenas em soluções reais.

Quando uma matriz real A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, existem uma matriz diagonal complexa D e uma matriz complexa invertível P tais que
$$A = PDP^{-1}, \tag{4.10}$$
com
$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \overline{\lambda}_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \lambda_k & & & & \\ & & & & \overline{\lambda}_k & & & \\ & & & & & \lambda_{2k+1} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$
sendo que $\lambda_1, \overline{\lambda}_1, \ldots, \lambda_k, \overline{\lambda}_k$ são os autovalores complexos (lembre-se que se λ é um autovalor complexo de uma matriz real, então o seu conjugado $\overline{\lambda}$ também é um autovalor para a matriz, porque o seu polinômio característico possui apenas coeficientes reais) e $\lambda_{2k+1}, \ldots, \lambda_n$ os autovalores reais, e
$$P = \begin{bmatrix} P_1 & \overline{P}_1 & \ldots & P_k & \overline{P}_k & P_{2k+1} & \ldots & P_n \end{bmatrix}$$
onde as colunas $P_1, \overline{P}_1, \ldots, P_k, \overline{P}_k, P_{2k+1}, \ldots, P_n$ de P são os autovetores associados a estes autovalores, respectivamente (lembre-se que se v é um autovetor associado ao autovalor complexo λ de uma matriz real, então o vetor conjugado $\overline{v}$ é um autovetor associado ao correspondente autovalor conjugado $\overline{\lambda}$; isso ocorre porque se A é real e $Av = \lambda v$ então $A\overline{v} = \overline{A}\overline{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \overline{\lambda}\overline{v}$).

Consideremos primeiro o caso em que A é uma matriz 2×2, de modo que podemos escrever
$$D = \begin{bmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{bmatrix}$$
e
$$P = \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 & v_1 - iw_1 \\ v_2 + iw_2 & v_2 - iw_2 \end{bmatrix}.$$
Como no caso diagonalizável real, substituindo a expressão para A no sistema, segue que
$$X'(t) = PDP^{-1}X(t),$$
donde
$$P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t).$$
Fazendo a mudança de variáveis
$$Y(t) = P^{-1}X(t), \tag{4.11}$$

temos que, já que a matriz P^{-1} é uma matriz constante,

$$Y'(t) = P^{-1}X'(t),$$

logo $Y(t)$ é a solução do sistema diagonal

$$Y'(t) = DY(t). \tag{4.12}$$

Assim, $Y(t)$ satisfaz

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} y_1'(t) = (\alpha + i\beta) y_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = (\alpha - i\beta) y_n(t) \end{cases},$$

cuja solução geral é

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{(\alpha+i\beta)t} \\ c_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t) \\ c_2 e^{\alpha t}(\cos\beta t - i \operatorname{sen}\beta t) \end{bmatrix}. \tag{4.13}$$

Para voltar ao sistema original, primeiro fazemos a operação

$$X(t) = PY(t), \tag{4.14}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&X(t) \\
&= \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 & v_1 - iw_1 \\ v_2 + iw_2 & v_2 - iw_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t) \\ c_2 e^{\alpha t}(\cos\beta t - i \operatorname{sen}\beta t) \end{bmatrix} \\
&= e^{\alpha t} \begin{bmatrix} c_1 (v_1 + iw_1)(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t) + c_2 (v_1 - iw_1)(\cos\beta t - i \operatorname{sen}\beta t) \\ c_1 (v_2 + iw_2)(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t) + c_2 (v_2 - iw_2)(\cos\beta t - i \operatorname{sen}\beta t) \end{bmatrix} \\
&= e^{\alpha t} \begin{bmatrix} c_1 [v_1 \cos\beta t - w_1 \operatorname{sen}\beta t + i(v_1 \operatorname{sen}\beta t + w_1 \cos\beta t)] + c_2 [v_1 \cos\beta t - w_1 \operatorname{sen}\beta t - i(v_1 \operatorname{sen}\beta t + w_1 \cos\beta t)] \\ c_1 [v_2 \cos\beta t - w_2 \operatorname{sen}\beta t + i(v_2 \operatorname{sen}\beta t + w_2 \cos\beta t)] + c_2 [v_2 \cos\beta t - w_2 \operatorname{sen}\beta t - i(v_2 \operatorname{sen}\beta t + w_2 \cos\beta t)] \end{bmatrix} \\
&= c_1 \left\{ e^{\alpha t} \left(\begin{bmatrix} v_1 \cos\beta t - w_1 \operatorname{sen}\beta t \\ v_2 \cos\beta t - w_2 \operatorname{sen}\beta t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} v_1 \operatorname{sen}\beta t + w_1 \cos\beta t \\ v_2 \operatorname{sen}\beta t + w_2 \cos\beta t \end{bmatrix} \right) \right\} \\
&+ c_2 \left\{ e^{\alpha t} \left(\begin{bmatrix} v_1 \cos\beta t - w_1 \operatorname{sen}\beta t \\ v_2 \cos\beta t - w_2 \operatorname{sen}\beta t \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} v_1 \operatorname{sen}\beta t + w_1 \cos\beta t \\ v_2 \operatorname{sen}\beta t + w_2 \cos\beta t \end{bmatrix} \right) \right\} \\
&= c_1 \left\{ e^{\alpha t} \left(\cos\beta t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \operatorname{sen}\beta t \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right) + i e^{\alpha t} \left(\operatorname{sen}\beta t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \cos\beta t \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right) \right\} \\
&+ c_2 \left\{ e^{\alpha t} \left(\cos\beta t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \operatorname{sen}\beta t \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right) - i e^{\alpha t} \left(\operatorname{sen}\beta t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \cos\beta t \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right) \right\},
\end{aligned}$$

de modo que a solução geral complexa é

$$X(t) = c_1 Z(t) + c_2 \overline{Z}(t),$$

onde

$$Z(t) = e^{\alpha t} \left(\cos\beta t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \operatorname{sen}\beta t \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right) + i e^{\alpha t} \left(\operatorname{sen}\beta t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \cos\beta t \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right)$$

e $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Para obter soluções reais $X_1(t)$ e $X_2(t)$ linearmente independentes, escolhemos primeiro $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ e depois $c_1 = -c_2 = \frac{1}{2i}$, de modo que

$$X_1(t) = \operatorname{Re} Z(t) = e^{\alpha t}\left(\cos\beta t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \operatorname{sen}\beta t \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}\right),$$
$$X_2(t) = \operatorname{Im} Z(t) = e^{\alpha t}\left(\operatorname{sen}\beta t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \cos\beta t \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}\right).$$

Assim, a solução geral real do sistema no sistema de coordenadas original é

$$X(t) = d_1 X_1(t) + d_2 X_2(t),$$

onde $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$.

O caso geral é análogo: cada par de autovalor complexo e seu conjugado é lidado como fizemos acima e os autovalores reais são lidados como no caso de uma matriz diagonalizável real.

Exemplo 4.4. Resolva o sistema

$$\begin{cases} x_1' = -3x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -4x_1 + x_2 \end{cases}.$$

Exemplo 4.5. Resolva o sistema

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2' = -x_2 + x_3 \\ x_3' = -x_2 - x_3 \end{cases}.$$

4.1.3 Matrizes Não Diagonalizáveis; caso bidimensional

No caso de matrizes quaisquer, a forma mais simples que a matriz de coeficientes pode assumir é a **forma canônica de Jordan** que denotaremos por J. Consideraremos a forma canônica de Jordan *complexa* para matrizes reais e apenas o caso 2×2. O caso geral, bem como a *forma canônica de Jordan real* é considerada no fim do capítulo.

Para matrizes 2×2, as únicas formas de Jordan possíveis são

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

e já examinamos as duas primeiras. No caso da última, temos que existem uma matriz na forma canônica de Jordan J e uma matriz invertível P tais que

$$A = PJP^{-1}, \tag{4.15}$$

com

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

sendo que λ é o único autovalor real de A e

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar as colunas de P escrevemos, como nos casos diagonalizáveis,

$$AP = PJ,$$

de modo que

$$A \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

ou

$$\begin{bmatrix} AP_1 & AP_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda P_1 & P_1 + \lambda P_2 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} AP_1 &= \lambda P_1, \\ AP_2 &= P_1 + \lambda P_2, \end{aligned}$$

isto é, P_1 é um autovetor associado ao único autovalor λ da matriz, enquanto que P_2 pode ser obtido como uma solução do sistema linear não-homogêneo

$$(A - \lambda I) P_2 = P_1.$$

A alternativa de Fredholm garante que este sistema sempre possui solução.

Exemplo 4.6. Resolva o sistema

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2 \\ x_2' = -x_1 - 3x_2 \end{cases}.$$

4.2 Sistemas Não-Homogêneos com Matrizes de Coeficientes Constantes

A mesma técnica pode ser usada para resolver sistemas não-homogêneos da forma

$$X'(t) = AX(t) + F(t).$$

Por simplicidade, examinaremos em detalhes apenas o caso em que A é uma matriz diagonalizável em $\mathbb{R}$, ou seja, assumimos que existem uma matriz diagonal real D e uma matriz real invertível P tais que

$$A = PDP^{-1}, \tag{4.16}$$

Substituindo esta expressão para A no sistema, segue que

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t) + F(t),$$

donde

$$P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t) + P^{-1}F(t).$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$Y(t) = P^{-1}X(t), \tag{4.17}$$

temos que, já que a matriz P^{-1} é uma matriz constante,

$$Y'(t) = P^{-1}X'(t),$$

Denotando

$$G(t) = P^{-1}F(t), \tag{4.18}$$

segue que $Y(t)$ é a solução do sistema

$$Y'(t) = DY(t) + G(t). \tag{4.19}$$

Assim, $Y(t)$ satisfaz

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) + g_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) + g_n(t) \end{cases}.$$

Cada equação pode ser resolvida isoladamente, usando as técnicas desenvolvidas para resolver EDOs lineares de primeira ordem. Para voltar ao sistema original, basta fazer a operação

$$X(t) = PY(t). \tag{4.20}$$

4.2.1 Resolução de sistemas via transformada de Laplace

Outra técnica bastante útil é a transformada de Laplace e aqui não precisamos nos preocupar se a matriz é diagonalizável ou não, ou qual é a sua forma canônica de Jordan. Apesar desta técnica ser consideravelmente mais simples para resolver sistemas, a análise qualitativa dos problemas que aparecem nas aplicações práticas requer o domínio de ambas as técnicas.

A transformada de Laplace é aplicada a cada equação do sistema, transformando o sistema linear de EDOs em um sistema linear algébrico (com coeficientes não constantes). Resolve-se este sistema algébrico e aplica-se a transformada de Laplace inversa para obter a solução do sistema de EDOs.

Exemplo 4.6. Use a transformada de Laplace para resolver o sistema

$$\begin{cases} x_1' = -3x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -4x_1 + x_2 \end{cases}.$$

Exemplo 4.7. Use a transformada de Laplace para resolver o sistema

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2' = -x_2 + x_3 \\ x_3' = -x_2 - x_3 \end{cases}.$$

4.3 Diagramas de Fase

Vamos estudar alguns diagramas de fase no caso bidimensional.

4.3.1 Matriz diagonalizável em $\mathbb{R}$

A solução no sistema de coordenadas Y é dada por

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}.$$

Temos três situações principais a considerar:

Nó repulsor ou fonte: $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

Como a solução satisfaz

$$\lim_{t\to\infty} |y_1(t)| = \infty,$$
$$\lim_{t\to\infty} |y_2(t)| = \infty,$$

a origem é um *nó instável* ou *fonte*.

Nó atrator ou sorvedouro: $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

Como a solução satisfaz

$$\lim_{t\to\infty} |y_1(t)| = 0,$$
$$\lim_{t\to\infty} |y_2(t)| = 0,$$

a origem é um *nó atrator.*

Ponto de Sela: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$

Como a solução satisfaz

$$\lim_{t\to\infty} |y_1(t)| = \infty,$$
$$\lim_{t\to\infty} |y_2(t)| = 0,$$

a origem é um *ponto de sela.*

No caso de um dos autovalores ser nulo, temos uma solução degenerada:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix}.$$

4.3.2 Matriz diagonalizável em $\mathbb{C}$

A solução geral real em um sistema de coordenadas adequado (veja a seção sobre a forma canônica de Jordan real no final do capítulo e especialmente o Exemplo 4.9) é dada por

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t - c_2 \operatorname{sen} \beta t) \\ e^{\alpha t}(c_1 \operatorname{sen} \beta t + c_2 \cos \beta t) \end{bmatrix}.$$

Observe que

$$y_1(t)^2 + y_2(t)^2 = e^{2\alpha t}\left(c_1^2 + c_2^2\right)$$

é a equação de uma espiral se $\alpha \neq 0$ e de um círculo se $\alpha = 0$. Temos três situações principais a considerar:

Espiral Atratora: $\alpha < 0$

Como a solução satisfaz

$$\lim_{t\to\infty} |Y(t)| = 0,$$

a origem é uma *espiral atratora* e é um ponto de estabilidade.

Espiral Repulsora: $\alpha > 0$

Como a solução satisfaz

$$\lim_{t\to\infty} |Y(t)| = \infty,$$

a origem é uma *espiral repulsora* e é um ponto instável.

Centro: $\alpha = 0$

Como a solução satisfaz

$$Y(t) = Y\left(t + \frac{2\pi}{\beta}\right),$$

ela é periódica (descreve um círculo neste sistema de coordenadas e uma elipse no sistema de coordenadas original); a origem é então um *centro* das órbitas periódicas.

4.4 Forma Canônica de Jordan Real

Quando uma matriz A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, existem uma matriz real invertível P e uma matriz *diagonal em blocos* 2×2 D tais que

$$A = PDP^{-1}, \tag{4.21}$$

com

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_m & & & & & \\ & & & \alpha_{m+1} & \beta_{m+1} & & & \\ & & & -\beta_{m+1} & \alpha_{m+1} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \alpha_k & \beta_k \\ & & & & & & -\beta_k & \alpha_k \end{bmatrix}$$

e

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & \dots & P_n \end{bmatrix}.$$

Os elementos $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ são os autovalores reais de A, enquanto que um bloco da forma

$$D_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}$$

corresponde a um autovalor complexo de A e seu conjugado: se λ_j é um autovalor complexo de A, então

$$\alpha_j = \operatorname{Re} \lambda_j,$$
$$\beta_j = \operatorname{Im} \lambda_j.$$

O número destes blocos para um dado autovalor complexo λ de A corresponde à multiplicidade deste autovalor e seu conjugado (se a multiplicidade deles é 1, aparecerá apenas um bloco 2×2 na matriz, enquanto que a se a sua multiplicidade for 2 teremos dois blocos e assim por diante). As colunas da matriz P são os autovetores correspondentes aos autovalores reais e às partes real e imaginária dos autovetores complexos na complexificação do espaço vetorial. Como no caso anterior, fazendo a mudança de variáveis

$$Y(t) = P^{-1} X(t), \tag{4.22}$$

obtemos que $Y(t)$ é a solução do sistema

$$Y'(t) = DY(t) \tag{4.23}$$

e neste caso satisfaz

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_m & & & & & \\ & & & \alpha_{m+1} & \beta_{m+1} & & & \\ & & & -\beta_{m+1} & \alpha_{m+1} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \alpha_k & \beta_k \\ & & & & & & -\beta_k & \alpha_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}.$$

Assim para as linhas correspondentes a autovalores reais temos

$$y_j' = \lambda_j y_j$$

cuja solução geral é

$$y_j(t) = c_j e^{\lambda_j t} \tag{4.24}$$

enquanto que para as linhas correspondentes a um autovalor complexo e seu conjugado temos

$$\begin{aligned} y_p' &= \alpha_j y_p + \beta_j y_{p+1} \\ y_{p+1}' &= -\beta_j y_p + \alpha_j y_{p+1} \end{aligned}$$

cuja solução é (veja Exemplo 4.2 a seguir):

$$\begin{array}{l} y_p(t) = e^{\alpha_j t}\left(c_j \cos\beta_j t - d_j \operatorname{sen}\beta_j t\right) \\ y_{p+1}(t) = e^{\alpha_j t}\left(d_j \cos\beta_j t + c_j \operatorname{sen}\beta_j t\right) \end{array}. \tag{4.25}$$

Para voltar ao sistema original, basta fazer como anteriormente a operação

$$X(t) = PY(t). \tag{4.26}$$

Exemplo 4.9. Resolva o sistema

$$\begin{cases} x_1' = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_2' = -\beta x_1 + \alpha x_2 \end{cases}.$$

Solução. A forma matricial deste sistema é

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

A matriz de coeficientes tem como autovalores

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha + i\beta, \\ \overline{\lambda} &= \alpha - i\beta. \end{aligned}$$

Para obter um autovetor complexo, por exemplo o autovetor correspondente ao autovalor $\lambda = \alpha - i\beta$ resolvemos o sistema $A - \overline{\lambda} I = 0$, isto é,

$$\begin{bmatrix} i\beta & \beta \\ -\beta & i\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

obtendo

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a solução complexa seria

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(\alpha - i\beta)t} = \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t) = \frac{e^{\alpha t}}{\beta} \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\beta t + i\cos\beta t \\ \cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t \end{bmatrix} \\ &= \frac{e^{\alpha t}}{\beta} \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\beta t \\ \cos\beta t \end{bmatrix} + i \frac{e^{\alpha t}}{\beta} \begin{bmatrix} \cos\beta t \\ \operatorname{sen}\beta t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

As partes real e imaginária da solução complexa são as soluções reais linearmente independentes:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \frac{e^{\alpha t}}{\beta} \begin{bmatrix} \cos\beta t \\ \operatorname{sen}\beta t \end{bmatrix}, \\ X_2(t) &= \frac{e^{\alpha t}}{\beta} \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\beta t \\ \cos\beta t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A solução geral é a combinação linear destas duas soluções:

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) = \begin{bmatrix} e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t - c_2 \operatorname{sen} \beta t) \\ e^{\alpha t}(c_1 \operatorname{sen} \beta t + c_2 \cos \beta t) \end{bmatrix},$$

ou

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t - c_2 \operatorname{sen} \beta t), \\ x_2(t) &= e^{\alpha t}(c_1 \operatorname{sen} \beta t + c_2 \cos \beta t). \end{aligned}$$

□

Teorema 4.3. (Forma de Jordan Real) *Seja A uma matriz real. Então existem uma matriz invertível P tal que*

$$A = P^{-1} J P$$

onde J é uma matriz diagonal em blocos: os autovalores reais de A dão origem a blocos da forma

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

enquanto que os autovalores complexos de A dão origem a blocos da forma

$$\begin{bmatrix} D_{a,b} & I_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & D_{a,b} & I_2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D_{a,b} & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & D_{a,b} & I_2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & D_{a,b} \end{bmatrix},$$

onde

$$D_{a,b} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad e \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

sendo que $a + ib$ é um autovalor complexo de A. Esta matriz é única a menos da ordem dos blocos.