

Notas de Aula

Geometria Diferencial

Rodney Josué Biezuner¹
Departamento de Matemática
Instituto de Ciências Exatas (ICEx)
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Notas de aula do curso *Geometria Diferencial* do Programa de Pós-Graduação em Matemática.

1 de agosto de 2019

¹E-mail: rodney@mat.ufmg.br; homepage: <http://www.mat.ufmg.br/~rodney>.

Sumário

1	Teoria Local das Curvas	4
1.1	Curvas Parametrizadas	4
1.1.1	Definição	4
1.1.2	Exemplos	4
1.1.3	Reparametrizações	7
1.2	Curvas Regulares e Comprimento de Arco	7
1.2.1	Curvas Regulares	7
1.2.2	Comprimento de uma Curva	8
1.2.3	O Parâmetro Comprimento de Arco	11
1.3	Curvatura	13
1.3.1	Definição	13
1.3.2	Exemplos	17
1.3.3	Fórmulas de Frenet para Curvas Planas	19
1.4	Derivada em \mathbb{R}^n	20
1.4.1	Definição	20
1.4.2	Propriedades	23
1.5	Isometrias de \mathbb{R}^n	24
1.6	Teorema Fundamental das Curvas no Plano	28
1.7	Torção e Triedro de Frenet	30
1.7.1	Definição	30
1.7.2	Fórmulas de Frenet para Curvas Espaciais	33
1.7.3	Cálculo da Curvatura e Torção para Parametrizações Arbitrárias	34
1.8	Teorema Fundamental das Curvas no Espaço	37
2	Teoria Global das Curvas	42
2.1	Número de Rotação de uma Curva Fechada	42
2.1.1	Número de Rotação e Curvatura Total	42
2.1.2	Número de Rotação de Curvas Fechadas Simples	46
2.2	Curvas Fechadas Simples Convexas	50
2.3	Teorema dos Quatro Vértices para Curvas Convexas	52
2.4	Teorema dos Quatro Vértices: Caso Geral	54
3	Superfícies Regulares	56
3.1	Superfícies Parametrizadas Regulares e Superfícies Regulares	56
3.1.1	Definição e Exemplos	56
3.1.2	Superfícies como Imagens Inversas de Valores Regulares	62
3.2	Mudança de Coordenadas e Funções Diferenciáveis em Superfícies	64
3.3	Plano Tangente, Vetor Normal e Diferencial	66
3.3.1	Plano Tangente e Vetor Normal	66

3.3.2	Diferencial de uma Aplicação Diferenciável entre Superfícies Regulares	67
3.4	Superfícies Orientáveis	69
4	As Formas Fundamentais e Curvaturas	74
4.1	A Primeira Forma Fundamental	74
4.1.1	Comprimento de Curvas em Superfícies	77
4.1.2	Área de Regiões de Superfícies	78
4.2	Segunda Forma Fundamental	79
4.2.1	A Aplicação de Gauss	79
4.2.2	A Segunda Forma Fundamental	81
4.2.3	Segunda Forma Fundamental e Operador Forma em Coordenadas	83
4.3	Curvaturas	86
4.3.1	Curvatura Normal	86
4.3.2	Curvaturas Principais	87
4.3.3	Curvatura Gaussiana	88
4.3.4	Curvatura Média	89
4.3.5	Classificação dos Pontos de uma Superfície	89
4.3.6	Exemplos	94
4.4	Superfícies de Curvatura Constante	99
4.4.1	Superfícies de Revolução com Curvatura Constante	100
4.5	Superfícies Mínicas	104
5	Geometria Intrínseca das Superfícies	110
5.1	Isometrias	110
5.2	Símbolos de Christoffel	113
5.3	Equações de Compatibilidade e Teorema Egrégio de Gauss	118
5.4	Teorema Fundamental Local das Superfícies	120
5.5	O Teorema de Rigidez da Esfera	125
5.5.1	Parametrizações Ortogonais	125
5.5.2	Curvas Principais	127
5.5.3	Existência de Parametrizações Ortogonais	130
5.5.4	O Teorema de Rigidez da Esfera	132
6	Geodésicas	135
6.1	Definição	135
6.2	Exemplos	137
6.3	Aplicação Exponencial	140
6.3.1	Definição	140
6.3.2	Coordenadas Normais	142
6.3.3	Coordenadas Geodésicas Polares	142
6.4	Propriedades Minimizantes das Geodésicas	148
6.5	Vizinhanças Totalmente Normais e Vizinhanças Convexas	149
6.6	Função Distância	152
6.7	Superfícies Completas e Teorema de Hopf-Rinow	153
7	Superfícies k-dimensionais em \mathbb{R}^n	157
7.1	Superfícies Parametrizadas e Superfícies Regulares	157
7.1.1	Definição	157
7.1.2	Exemplos	158
7.1.3	Superfícies Parametrizadas são Localmente Superfícies Regulares	160
7.2	Mudança de Coordenadas	161
7.3	Funções Diferenciáveis em Superfícies	162

7.4	Espaço Tangente e Derivada	163
7.4.1	Espaço Tangente	164
7.4.2	Derivada de uma Aplicação Diferenciável entre Superfícies Regulares	165

Capítulo 1

Teoria Local das Curvas

1.1 Curvas Parametrizadas

1.1.1 Definição

Denotaremos por I qualquer subconjunto conexo de \mathbb{R} , isto é, qualquer intervalo aberto, fechado, semiaberto, raio de \mathbb{R} ou o próprio \mathbb{R} ; chamaremos I simplesmente de *intervalo*. Diremos que uma função vetorial $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ *satisfaz localmente* uma certa propriedade, se para todo $t \in I$ existe um intervalo aberto $J_t \ni t$ tal que $f|_{J_t}$ satisfaz a propriedade.

1.1 Definição. Uma **curva parametrizada diferenciável** é uma função vetorial localmente injetiva, continuamente diferenciável, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Dizemos que α é uma **curva parametrizada de classe C^k** se α é k vezes continuamente diferenciável. Se α é de classe C^∞ também dizemos que α é uma **curva parametrizada suave**. \square

O **traço** de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é sua imagem $\alpha(I)$. Muitas vezes identificamos o traço de uma curva com a própria curva, abusando a linguagem, e nos referimos à *parametrização da curva* (ao invés de “a parametrização do traço da curva”).

A exigência de diferenciabilidade elimina exemplos patológicos, tais como o de curvas contínuas que preenchem um quadrado ou um cubo (*curvas de Hilbert*). Mas não evita o aparecimento de quinas (veja os Exemplos 1.8 e 1.9 a seguir). O requerimento de injetividade apenas local permite autointerseções: $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ser localmente injetiva significa que para todo $t \in I$ existe um intervalo $J_t \ni t$ tal que $\alpha|_{J_t}$ é injetiva, mas α não precisa ser *globalmente* injetiva, isto é, não precisa ser injetiva em todo o intervalo I . O requerimento de injetividade local proíbe no entanto que uma curva volte sobre si mesma (veja o Exemplo 1.7 a seguir).

1.1.2 Exemplos

1.2 Exemplo (Retas). $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t) = (x_0 + v_1t, y_0 + v_2t) = (x_0, y_0) + t(v_1, v_2) = p_0 + tv$$

é uma parametrização de uma reta no plano, enquanto que $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\beta(t) = (x_0 + v_1t, y_0 + v_2t, z_0 + v_3t) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) = p_0 + tv$$

é uma parametrização de uma reta no espaço. Em geral, $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\gamma(t) = (x_1 + v_1t, \dots, x_n + v_nt) = (x_1, \dots, x_n) + t(v_1, \dots, v_n) = p_0 + tv$$

é uma parametrização de uma reta em \mathbb{R}^n . Note que α é uma curva suave, globalmente injetiva. \square

1.3 Exemplo (Círculos). $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t) = (x_0 + R \cos t, y_0 + R \sin t) = (x_0, y_0) + R(\cos t, \sin t)$$

é uma parametrização do círculo de raio R e centro no ponto (x_0, y_0) . De fato,

$$\|\alpha(t) - (x_0, y_0)\| = R$$

para todo t . Note que α é uma curva suave, localmente injetiva. \square

1.4 Exemplo (Elipses). $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t) = (x_0 + a \cos t, y_0 + b \sin t) = (x_0, y_0) + (a \cos t, b \sin t)$$

é uma parametrização da elipse de semieixos a, b e centro no ponto (x_0, y_0) . De fato, se

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos t, \\ y(t) &= b \sin t, \end{aligned}$$

então

$$\frac{[x(t) - x_0]^2}{a^2} + \frac{[y(t) - y_0]^2}{b^2} = 1$$

para todo t . Note que α é uma curva suave, localmente injetiva. \square

1.5 Exemplo (Hipérboles). $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t) = (x_0 + a \cosh t, y_0 + b \sinh t) = (x_0, y_0) + (a \cosh t, b \sinh t)$$

é uma parametrização de um ramo de uma hipérbole centrada no ponto (x_0, y_0) . De fato, se

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cosh t, \\ y(t) &= b \sinh t, \end{aligned}$$

então

$$\frac{[x(t) - x_0]^2}{a^2} - \frac{[y(t) - y_0]^2}{b^2} = 1$$

para todo t ; como o cosseno hiperbólico é uma função positiva, a imagem de α corresponde apenas a um único ramo desta hipérbole. Note que α é uma curva suave, globalmente injetiva. \square

1.6 Exemplo (Gráficos de Funções). Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^k , então $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t) = (t, f(t))$$

é uma curva parametrizada de classe C^k . \square

1.7 Exemplo. $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (t, t), \\ \beta(t) &= (t^3, t^3), \end{aligned}$$

são curvas parametrizadas suaves, parametrizações da diagonal principal do plano cartesiano.

A função suave $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma(t) = (t^2, t^2)$$

tem como imagem a semidiagonal principal positiva do plano cartesiano, mas não é uma curva parametrizada porque não é localmente injetiva em $t = 0$. Se restringirmos o domínio de qualquer uma destas três funções ao intervalo $[0, +\infty)$, obtemos uma parametrização suave da semidiagonal principal positiva. \square

1.8 Exemplo (Parametrização Suave de uma Quina). $\alpha : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t) = (t, |t|)$$

é globalmente injetiva, mas não é uma curva porque não é diferenciável na origem. Note que sua imagem é uma quina. Por outro lado, $\beta : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\beta(t) = \begin{cases} (-t^2, t^2) & \text{se } t \leq 0, \\ (t^2, t^2) & \text{se } t \geq 0, \end{cases}$$

tem esta quina como imagem, mas é uma curva parametrizada de classe C^1 , globalmente injetiva. Observe que $\beta'(0) = 0$. $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma(t) = (t^3, |t|^3)$$

também é uma parametrização desta quina, mas de classe C^2 , globalmente injetiva, com $\gamma'(0) = \gamma''(0) = 0$. Em geral,

$$\alpha_k(t) = \begin{cases} (-t^k, t^k) & \text{se } t \in (-1, 0], \\ (t^k, t^k) & \text{se } t \in [0, 1), \end{cases}$$

se k é par, e

$$\alpha_k(t) = (t^k, |t|^k), \quad t \in (-1, 1)$$

se k é ímpar, é uma parametrização da quina de classe C^{k-1} , globalmente injetiva, com $\alpha'_k(0) = \dots = \alpha_k^{(k-1)}(0) = 0$. Podemos obter uma parametrização suave globalmente injetiva da quina definindo

$$\alpha_\infty(t) = \begin{cases} (-e^{-1/t^2}, e^{-1/t^2}) & \text{se } t < 0, \\ 0, & \text{se } t = 0, \\ (e^{-1/t^2}, e^{-1/t^2}) & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

Note que $\alpha_\infty^{(k)}(0) = 0$ para todo k . \square

1.9 Exemplo (Parametrização Suave de um Quadrado). Podemos parametrizar o quadrado unitário de cantos $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$ pela parametrização continuamente diferenciável $\alpha : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t) = \begin{cases} \left(-6 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right), 0 \right) & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \\ \left(1, -6 \left(2t - \frac{3}{2}t^2 + \frac{t^3}{3} \right) + 5 \right) & \text{se } 1 \leq t \leq 2, \\ \left(6 \left(6t - \frac{5}{2}t^2 + \frac{t^3}{3} \right) - 27, 1 \right) & \text{se } 2 \leq t \leq 3, \\ \left(0, 6 \left(12t - \frac{7}{2}t^2 + \frac{t^3}{3} \right) - 80 \right) & \text{se } 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

Note que

$$\alpha'(t) = \begin{cases} (-6t(t-1), 0) & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \\ (0, -6(t-1)(t-2)) & \text{se } 1 \leq t \leq 2, \\ (6(t-2)(t-3), 0) & \text{se } 2 \leq t \leq 3, \\ (0, 6(t-3)(t-4)) & \text{se } 3 \leq t \leq 4, \end{cases}$$

de modo que

$$\alpha'(0) = \alpha'(1) = \alpha'(2) = \alpha'(3) = \alpha'(4) = 0$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 1^-} \alpha'(t) &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \alpha'(t) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow 2^-} \alpha'(t) &= \lim_{t \rightarrow 2^+} \alpha'(t) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow 3^-} \alpha'(t) &= \lim_{t \rightarrow 3^+} \alpha'(t) = 0.\end{aligned}$$

De fato, é fácil ver que podemos definir uma parametrização de classe C^k para qualquer k ou até mesmo suave para o quadrado. \square

1.1.3 Reparametrizações

1.10 Definição. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada de classe C^k . Se J é um intervalo e $f : J \rightarrow I$ é um difeomorfismo de classe C^k , então $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\beta = \alpha \circ f$$

é uma curva parametrizada de classe C^k que tem o mesmo traço de α . Dizemos que β é uma **reparametrização** de α e a função f é chamada uma **mudança de parâmetro**. \square

Abusando a linguagem, dizemos que α e β são parametrizações da mesma curva (ao invés de parametrizações do mesmo traço).

1.11 Exemplo. $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definidas por

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (\cos s, \sin s), \\ \beta(t) &= (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t),\end{aligned}$$

são duas parametrizações do círculo unitário centrado na origem. Cada uma é uma reparametrização da outra. Por exemplo, a mudança de parâmetro de t para s é a função $f : [0, 1] \rightarrow [0, 2\pi]$ definida por

$$f(t) = 2\pi t.$$

A mudança de parâmetro de s para t é a inversa de f . \square

1.2 Curvas Regulares e Comprimento de Arco

1.2.1 Curvas Regulares

Queremos estudar curvas onde a tangente está definida em todo ponto, pois elas possuem uma riqueza de propriedades geométricas. Certamente não é possível definir a reta tangente em quinas, pois há dois vetores tangentes com direções diferentes. Observe que nos Exemplos 1.8 e 1.9 a derivada se anulava nas quinas. Para evitar o aparecimento de quinas e consequentemente podermos definir o conceito de reta tangente, basta então considerar curvas parametrizadas em que a derivada nunca se anula.

1.12 Definição. Uma **curva regular** é uma curva parametrizada suave $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\alpha'(t) \neq 0$$

para todo $t \in I$. \square

Curvas regulares não podem ter cantos ou quinas, pois a tangente à curva está definida em todo ponto: a **reta tangente** à curva α no ponto $\alpha(t)$ é simplesmente a reta passando por $\alpha(t)$ com direção $\alpha'(t)$.

1.13 Proposição. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 tal que $\alpha'(t) \neq 0$ para todo t , então α é localmente injetiva. Em particular, α é uma curva regular de classe C^1 .

Prova: Escreva

$$\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Seja $t_0 \in I$. Como $\alpha'(t_0) \neq 0$, temos $x'_i(t_0) \neq 0$ para algum i . Se $x'_i(t_0) > 0$, como por hipótese a derivada x'_i é contínua, existe um intervalo aberto $J_{t_0} \subset I$ contendo t_0 tal que $x'_i(t) > 0$ para todo $t \in J_{t_0}$; segue que x_i é crescente neste intervalo, em particular injetiva, logo α também é. Se $x'_i(t_0) < 0$, o mesmo argumento implica a existência de um intervalo aberto $J_{t_0} \subset I$ contendo t_0 onde x_i é decrescente, em particular injetiva, logo α também é. ■

1.2.2 Comprimento de uma Curva

A primeira noção geométrica que definiremos é a de *comprimento* de uma curva.

1.14 Definição. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada e $t_0 \in I$. A **função comprimento de arco** de α a partir de t_0 é a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(r)\| dr$$

Dados $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$, o **comprimento do arco** da curva de t_0 a t_1 é o número não negativo (positivo se $t_0 < t_1$)

$$\ell(\alpha([t_0, t_1])) = \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt.$$

O **comprimento** da curva é simplesmente $\ell(\alpha(I))$ e será denotado simplesmente por $\ell(\alpha)$. □

1.15 Proposição. O comprimento de uma curva não depende da parametrização.

Prova: Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I = [a, b]$ e $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, $J = [c, d]$ parametrizações da mesma curva, com $f : J \rightarrow I$ a mudança de parâmetro, de modo que $\beta = \alpha \circ f$. Pela regra da cadeia,

$$\beta'(t) = \alpha'(f(t)) f'(t),$$

com $f' \neq 0$, pois f é um difeomorfismo. Consideraremos o caso $f' > 0$, já que o outro caso tem demonstração análoga. Segue da fórmula da mudança de coordenadas para integrais (i.e., integração por substituição) que

$$\begin{aligned} \ell(\beta) &= \ell(\beta([c, d])) = \int_c^d \|\beta'(t)\| dt \\ &= \int_c^d \|\alpha'(f(t))\| f'(t) dt \\ &= \int_a^b \|\alpha'(s)\| ds = \ell(\alpha([a, b])) = \ell(\alpha). \end{aligned}$$

■

1.16 Exemplo (Comprimento do Círculo). Utilizando a parametrização $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^n$ para o círculo de raio R

$$\alpha(t) = (x_0, y_0) + R(\cos t, \sin t),$$

de modo que

$$\alpha'(t) = R(\cos t, \sin t),$$

obtemos

$$\ell(\alpha) = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

□

1.17 Exemplo (Comprimento da Espiral de Arquimedes). A **espiral de Arquimedes** é a trajetória de um ponto que se move com velocidade constante em uma reta enquanto esta reta gira em torno de um de seus pontos fixado com velocidade angular constante. Uma parametrização para a espiral de Arquimedes, considerando o ponto em torno do qual a reta gira como sendo a origem, é

$$\alpha(t) = c(t \cos t, t \sin t),$$

$t \geq 0$, para alguma constante $c \neq 0$. Temos

$$\alpha'(t) = c(\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t),$$

de modo que

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\| &= c(\cos^2 t - 2t \sin t \cos t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t)^{1/2} \\ &= c\sqrt{1+t^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \ell(\alpha([0, t])) &= c \int_0^t \sqrt{1+s^2} ds \\ &= \frac{c}{2} \left[s\sqrt{1+s^2} + \ln \left(s + \sqrt{1+s^2} \right) \right]_0^t \\ &= \frac{c}{2} \left[t\sqrt{1+t^2} + \ln \left(t + \sqrt{1+t^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Evidentemente, a espiral toda tem comprimento infinito. \square

1.18 Exemplo (Comprimento da Espiral Logarítmica). A **espiral logarítmica** é a trajetória de um ponto que se move em uma reta com velocidade proporcional à distância já percorrida nesta reta enquanto esta reta gira em torno de um de seus pontos fixado com velocidade angular constante. Em coordenadas polares (r, θ) temos

$$\frac{dr}{d\theta} = kr,$$

de forma que

$$r(\theta) = ce^{k\theta}.$$

Assim, uma parametrização para a espiral logarítmica é

$$\alpha(t) = c(e^{kt} \cos t, e^{kt} \sin t),$$

$t \in \mathbb{R}$, para algumas constantes $c, k \neq 0$. Temos

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= c(ke^{kt} \cos t - e^{kt} \sin t, ke^{kt} \sin t + e^{kt} \cos t) \\ &= ce^{kt}(k \cos t - \sin t, k \sin t + \cos t), \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\| &= ce^{kt}(k^2 \cos^2 t - 2k \sin t \cos t + \sin^2 t + k^2 \sin^2 t + 2k \sin t \cos t + \cos^2 t)^{1/2} \\ &= ce^{kt}\sqrt{k^2+1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \ell(\alpha([t_1, t_2])) &= c\sqrt{k^2+1} \int_{t_1}^{t_2} e^{kt} dt \\ &= c\sqrt{k^2+1} \left[\frac{e^{kt}}{k} \right]_{t_1}^{t_2} \\ &= c\sqrt{\frac{k^2+1}{k^2}} (e^{kt_2} - e^{kt_1}). \end{aligned}$$

Em particular,

$$\ell(\alpha([-\infty, t])) = c\sqrt{\frac{k^2 + 1}{k^2}}e^{kt}.$$

Historicamente, a espiral logarítmica foi a primeira curva a ser *retificada*, isto é, uma construção geométrica precisa foi dada para produzir um segmento de reta cujo comprimento é igual ao comprimento de um arco da curva. Isto foi obtido por Torricelli (1608-1647). Veja [Borceux], p. 28, Proposition 1.7.3 para uma demonstração simples. \square

1.19 Exemplo (Comprimento da Ciclóide). A **ciclóide** é a trajetória de um ponto fixado em um círculo quando este círculo roda sem deslizar em cima de uma reta. Uma parametrização para a ciclóide escolhendo o ponto fixado de um círculo de raio R rodando sobre o eixo x como sendo o ponto inferior do círculo quando este coincide com a origem é

$$\alpha(t) = R(t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t).$$

Daí

$$\alpha'(t) = R(1 - \cos t, \operatorname{sen} t),$$

de modo que

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\| &= R(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)^{1/2} \\ &= \sqrt{2}R(1 - \cos t)^{1/2} \\ &= \sqrt{2}R\left(2\operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}\right)^{1/2} \\ &= 2R\operatorname{sen} \frac{t}{2} \end{aligned}$$

Consequentemente, o comprimento de um arco completo da ciclóide (quando o ponto que era o ponto inferior do círculo volta a ser o ponto inferior do círculo; em outras palavras, quando o círculo fez uma volta completa) é

$$\begin{aligned} \ell(\alpha([0, 2\pi])) &= 2R \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \frac{t}{2} dt = 2R \left[-2\cos \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 4R(-\cos \pi + \cos 0) \\ &= 8R. \end{aligned}$$

Este também é um resultado de retificação (veja o exemplo anterior para o significado deste conceito) obtido pela primeira vez por Torricelli usando outros argumentos. \square

1.20 Exemplo (Comprimento da Hélice Circular). Uma **hélice circular** é a trajetória de um ponto girando em um círculo com velocidade angular constante enquanto o centro deste círculo sobe (ou desce) com velocidade constante ao longo de uma reta perpendicular ao seu plano. Diferente de todas as curvas que consideramos até agora, que eram curvas *planas*, a hélice é uma curva *espacial*. Uma parametrização para a hélice é

$$\alpha(t) = (R\cos t, R\operatorname{sen} t, kt)$$

onde $R > 0$ é o raio do círculo e $k \neq 0$ é a velocidade do centro do círculo (que também é a componente vertical da velocidade da partícula, obviamente). Temos

$$\alpha'(t) = (-R\operatorname{sen} t, R\cos t, k),$$

de modo que

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{R^2 + k^2}.$$

Logo, o comprimento de um arco de hélice (quando o ponto chega em uma posição exatamente acima da sua posição inicial) é

$$\ell(\alpha([0, 2\pi])) = \sqrt{R^2 + k^2} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\sqrt{R^2 + k^2}.$$

Observe que este comprimento é maior que o do círculo de raio R . \square

1.2.3 O Parâmetro Comprimento de Arco

Muitas vezes é útil interpretar o parâmetro t da parametrização de uma curva como se referindo ao *tempo decorrido*. Em certas ocasiões especiais, o parâmetro t se refere à *distância percorrida*:

1.21 Definição. Dizemos que uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ está **parametrizada pelo comprimento de arco** se

$$\ell(\alpha[t_0, t_1]) = t_1 - t_0$$

para todos $t_0 \leq t_1 \in I$.

Dizemos que uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é **unitária** ou **normalizada** se

$$\|\alpha'(t)\| = 1$$

para todo $t \in I$. \square

1.22 Proposição. *Uma curva está parametrizada pelo comprimento de arco se e somente se ela é unitária.*

Prova: Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é unitária, então

$$\ell(\alpha[t_0, t_1]) = \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} 1 dt = t_1 - t_0.$$

Reciprocamente, se

$$\int_{t_0}^t \|\alpha'(r)\| dr = t - t_0$$

para todos $t_0, t \in I$, então

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \|\alpha'(r)\| dr = 1,$$

mas pelo teorema fundamental do Cálculo

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \|\alpha'(r)\| dr = \|\alpha'(t)\|.$$

■

1.23 Lema (Regra do Produto para o Produto Escalar). *Sejam $V, W : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções vetoriais diferenciáveis e considere a função escalar $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f(t) = \langle V(t), W(t) \rangle.$$

Então

$$f'(t) = \langle V'(t), W(t) \rangle + \langle V(t), W'(t) \rangle.$$

Prova: Denotando por $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de \mathbb{R}^n e escrevendo as funções V e W em coordenadas como

$$V(t) = \sum_{i=1}^n V_i(t) e_i,$$

$$W(t) = \sum_{i=1}^n W_i(t) e_i,$$

segue que

$$f(t) = \sum_{i=1}^n V_i(t) W_i(t).$$

Logo, pela regra do produto temos

$$f' = \sum_{i=1}^n V_i' W_i + \sum_{i=1}^n V_i W_i' = \langle V', W \rangle + \langle V, W' \rangle.$$

■

1.24 Proposição. *Toda curva regular pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco.*

Prova: Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma curva regular de classe C^k , considere a função comprimento de arco $s : I \rightarrow J$ de α a partir de t_0 com $J = s(I)$. Afirmamos que a sua inversa $s^{-1} : J \rightarrow I$ está bem definida e é uma função de classe C^k . De fato, como

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0,$$

a função s é estritamente crescente, logo a sua inversa está bem definida. Além disso, s é uma função de classe C^k , pois

$$\begin{aligned} s'(t) &= \|\alpha'(t)\| = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle^{1/2}, \\ s''(t) &= \frac{\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|}, \\ s'''(t) &= \frac{\langle \alpha'''(t), \alpha'(t) \rangle + \langle \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|} - \frac{\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle^2}{\|\alpha'(t)\|^3}, \\ &\vdots \\ s^{(k)}(t) &= \frac{F(\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{(k)}(t))}{\|\alpha'(t)\|^p}, \end{aligned}$$

para algum inteiro p e para uma função de classe $C^\infty F : (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$, combinação de produtos internos; segue também do teorema da função inversa que sua inversa s^{-1} também é uma função de classe C^k .

Portanto podemos definir uma reparametrização de classe C^k

$$\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$$

de α por

$$\beta = \alpha \circ s^{-1}.$$

Segue da regra da cadeia que

$$\begin{aligned} \beta'(r) &= \alpha'(s^{-1}(r)) (s^{-1})'(r) \\ &= \alpha'(s^{-1}(r)) \frac{1}{s'(s^{-1}(r))} \\ &= \frac{\alpha'(s^{-1}(r))}{\|\alpha'(s^{-1}(r))\|}, \end{aligned}$$

donde

$$\|\beta'(r)\| = 1.$$

■

Em particular, as parametrizações de uma curva regular são reparametrizações uma da outra, já que qualquer parametrização pode ser reparametrizada por comprimento de arco. Note que, embora em tese é sempre possível reparametrizar uma curva por comprimento de arco, na prática isso nem sempre é factível porque a inversa de uma função complicada pode não ser obtível através de métodos analíticos.

1.3 Curvatura

1.3.1 Definição

A curvatura de uma curva em um ponto mede a taxa de variação da *direção* da tangente à curva no ponto; é uma medida de quanto a curva se *curva*, isto é, o quanto ela difere de uma reta. Para medir a taxa de variação da direção da tangente através do vetor tangente à curva, é necessário que o comprimento do vetor tangente seja sempre o mesmo (caso contrário, estaríamos medindo também a variação do comprimento do vetor; por exemplo, $\alpha(t) = p_0 + t^3V$ é uma parametrização de uma reta com velocidade variável, logo $\alpha' \neq 0$, apesar do vetor tangente da reta nunca mudar de direção). Por este motivo, para definir a curvatura precisamos que a curva esteja parametrizada por comprimento de arco, de modo que o vetor tangente tenha sempre comprimento igual a 1.

1.25 Definição. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, uma curva parametrizada por comprimento de arco. Denotando o **vetor tangente unitário** à curva no ponto $\alpha(s)$ por

$$T(s) = \alpha'(s), \quad (1.1)$$

definimos a **curvatura** de α no ponto $\alpha(s)$ por

$$\kappa(s) = \|T'(s)\|. \quad (1.2)$$

□

Em outras palavras,

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|,$$

isto é, a curvatura mede a aceleração de uma partícula que percorre a trajetória da curva com velocidade unitária. No caso especial $n = 2$ podemos definir o conceito de *curvatura com sinal*, como veremos daqui a pouco.

1.26 Proposição. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Então o vetor $T'(s)$ é ortogonal ao vetor tangente $T(s)$, isto é,

$$\langle T(s), T'(s) \rangle = 0 \quad (1.3)$$

para todo s .

Prova: Derivando

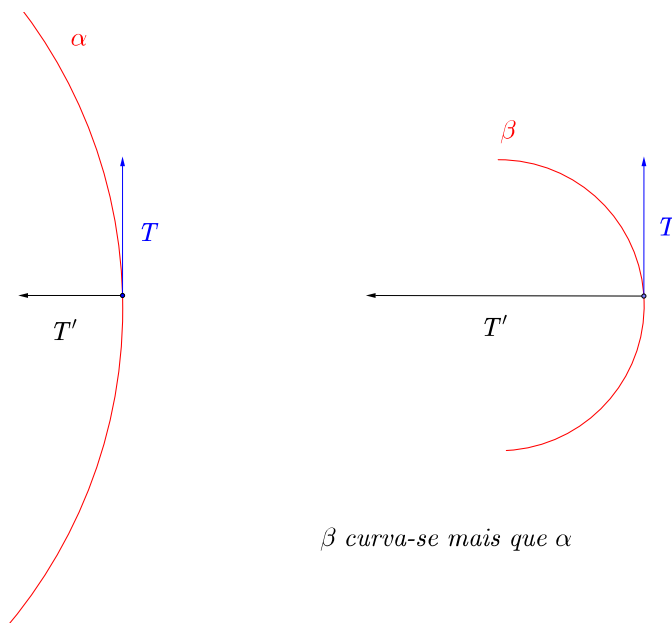
$$\langle T(s), T(s) \rangle = \|T(s)\|^2 = 1,$$

obtemos

$$2 \langle T'(s), T(s) \rangle = 0.$$

■

Observe que o vetor T' em um ponto *aponta para a direção em que a curva está se curvando naquele ponto*.



Dentre as infinitas direções possíveis para vetores ortogonais ao vetor tangente em \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, escolhemos privilegiar a direção do vetor $T'(s)$. Em \mathbb{R}^2 , onde existem apenas duas possibilidades distintas, escolhemos a direção compatível com a orientação da base canônica.

1.27 Definição. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Se $\kappa(s) \neq 0$, definimos o **vetor normal principal** $N(s)$ à curva α no ponto $\alpha(s)$ da seguinte forma:

(i) Se $n \geq 3$

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}. \quad (1.4)$$

(ii) Se $n = 2$, escrevendo em coordenadas

$$\alpha(s) = (x(s), y(s)),$$

de modo que

$$T(s) = (x'(s), y'(s)),$$

definimos

$$N(s) = (-y'(s), x'(s)). \quad (1.5)$$

□

O vetor normal principal é o vetor unitário na direção de $T'(s)$ no caso $n \geq 3$, ou seja,

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}.$$

No caso $n = 2$ escolhemos $N(s)$ de tal forma que $\{T(s), N(s)\}$ é uma base ortonormal que tem a mesma orientação da base canônica do plano \mathbb{R}^2 , isto é,

$$\det \begin{bmatrix} x'(s) & y'(s) \\ -y'(s) & x'(s) \end{bmatrix} = [x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 = \|T(s)\|^2 = +1.$$

A outra única escolha possível para $N(s)$, o vetor $(y'(s), -x'(s))$, implicaria em uma base ortonormal com a orientação oposta à orientação da base canônica do plano. Em \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, existem infinitas escolhas possíveis para $N(s)$ e nenhuma delas fixa uma orientação. Portanto em \mathbb{R}^2 podemos definir o conceito de curvatura com sinal: como $T'(s)$ é ortogonal ao vetor tangente $T(s)$, segue que ele é um múltiplo escalar do vetor normal principal $N(s)$; definimos este múltiplo escalar como sendo a curvatura da curva no ponto $\alpha(s)$.

1.28 Definição. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Definimos a **curvatura com sinal** de α no ponto $\alpha(s)$ por

$$T'(s) = \kappa(s) N(s). \quad (1.6)$$

□

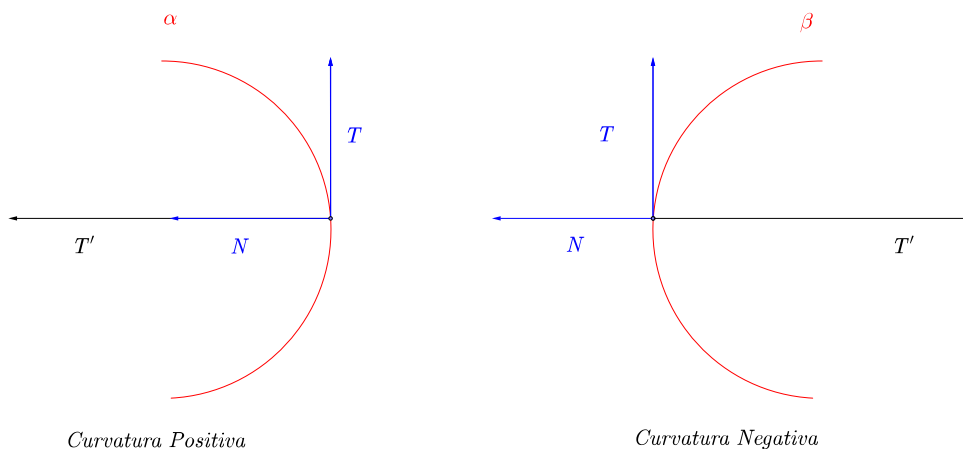
Em outras palavras,

$$\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle. \quad (1.7)$$

Note que

$$|\kappa(s)| = \|T'(s)\|. \quad (1.8)$$

A curvatura com sinal dá mais informação geométrica para curvas planas em \mathbb{R}^2 do que obteríamos se usássemos simplesmente a Definição 1.25: quando a curvatura é positiva, a curva está se curvando para a esquerda (vetor T' no mesmo sentido que N), enquanto que quando a curvatura é negativa, a curva está se curvando para a direita (vetor T' no sentido oposto a N ; veja o Exemplo 1.32 a seguir para uma ilustração concreta no caso do círculo).



1.29 Proposição. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Se

$$\alpha(s) = (x(s), y(s)),$$

então

$$|\kappa(s)| = \sqrt{[x''(s)]^2 + [y''(s)]^2} \quad (1.9)$$

e

$$\kappa(s) = x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s). \quad (1.10)$$

Prova: A primeira fórmula segue de

$$|\kappa| = \|T'\| = \|(x'', y'')\|$$

e a segunda fórmula de

$$\kappa = \langle T', N \rangle = \langle (x'', y''), (-y', x') \rangle = -x''y' + y''x'.$$

■

É extremamente útil ter fórmulas para o vetor tangente, o vetor normal e a curvatura, para curvas parametrizadas por um parâmetro arbitrário que não o comprimento de arco, já que, como observado anteriormente, nem sempre é fácil ou analiticamente possível reparametrizar uma curva por comprimento de arco, pois para isso é necessário encontrar a inversa de uma função (a inversa da função comprimento de arco). Abaixo fazemos isso para curvas em \mathbb{R}^2 ; o resultado correspondente para curvas em \mathbb{R}^3 é dado na Proposição 1.72.

1.30 Proposição. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada por um parâmetro qualquer. Se*

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)),$$

então

$$T(t) = \frac{(x'(t), y'(t))}{\left([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\right)^{1/2}} \quad (1.11)$$

$$N(t) = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\left([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\right)^{1/2}} \quad (1.12)$$

e

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{\left([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\right)^{3/2}}. \quad (1.13)$$

Prova: As primeiras duas fórmulas seguem imediatamente das definições de vetor tangente unitário e vetor normal unitário. Para obter a fórmula para a curvatura, seja $\beta(s(t)) = \alpha(t)$ uma reparametrização de α por comprimento de arco (ou seja, $\beta = \alpha \circ s^{-1}$). Pela definição da curvatura, temos

$$\kappa(t) = \kappa(s(t)) = \langle T'(s(t)), N(s(t)) \rangle = \langle \beta''(s(t)), N(s(t)) \rangle.$$

Pela regra da cadeia temos

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \beta'(s(t))s'(t) = \beta'(s(t))\|\alpha'(t)\|, \\ \alpha''(t) &= \beta''(s(t))\|\alpha'(t)\|^2 + \beta'(s(t))\frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|} \\ &= \beta''(s(t))\|\alpha'(t)\|^2 + \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^2}\alpha'(t). \end{aligned}$$

de modo que

$$\beta''(s(t)) = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|^2} - \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^4}\alpha'(t).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \left\langle \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|^2}, N(t) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^2}(x''(t), y''(t)), \frac{(-y'(t), x'(t))}{\|\alpha'(t)\|} \right\rangle \\ &= \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}. \end{aligned}$$



1.3.2 Exemplos

1.31 Exemplo (Curvatura da Reta). Se

$$\alpha(t) = (x_0 + v_1 t, y_0 + v_2 t)$$

é uma reta em \mathbb{R}^2 , segue de (1.13) que $\kappa \equiv 0$. O resultado também vale para retas em \mathbb{R}^n e de fato caracteriza as retas, no sentido de que as curvas com curvatura nula são retas (Proposição 1.38). \square

1.32 Exemplo (Curvatura do Círculo). Se

$$\alpha(t) = (x_0 + R \cos t, y_0 + R \sin t)$$

é um círculo de raio R , de modo que

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= R(-\sin t, \cos t), \\ \alpha''(t) &= R(-\cos t, -\sin t), \\ \|\alpha'(t)\| &= R,\end{aligned}$$

segue de (1.13) que

$$\kappa(t) = \frac{R^2 [(-\sin t)^2 + (-\cos t)^2]}{R^3} = \frac{1}{R}.$$

Portanto, o círculo tem curvatura constante e de fato isso caracteriza os círculos, como veremos mais adiante (Proposição 1.38). Vemos também que quanto maior é o seu raio, menor é a sua curvatura. De fato, quando $R \rightarrow \infty$, a curvatura tende a zero, de modo que neste sentido o círculo aproxima-se de uma reta.

Observe agora que se usarmos a parametrização com orientação reversa para o círculo

$$\beta(t) = (x_0 + R \cos t, y_0 - R \sin t),$$

(isto é, na parametrização anterior um ponto percorre o círculo no sentido antihorário, enquanto que nesta parametrização um ponto percorre o círculo no sentido horário), de modo que

$$\begin{aligned}\beta'(t) &= R(-\sin t, -\cos t), \\ \beta''(t) &= R(-\cos t, \sin t), \\ \|\beta'(t)\| &= R,\end{aligned}$$

segue de (1.13) que

$$\kappa(t) = \frac{R^2 [-\sin^2 t - \cos^2 t]}{R^3} = -\frac{1}{R}.$$

Este exemplo mostra que o sinal da curvatura não é uma característica intrínseca da curva, pois depende da parametrização. Além disso, o sinal da curvatura não é um invariante geométrico, como veremos (Lema 1.63). \square

1.33 Exemplo (Curvatura da Parábola). Se

$$\alpha(t) = (t, t^2),$$

é a parábola $y = x^2$, de modo que

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (1, 2t), \\ \alpha''(t) &= (0, 2), \\ \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{1 + 4t^2},\end{aligned}$$

segue de (1.13) que

$$\kappa(t) = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}.$$

Quando $t \rightarrow \pm\infty$, temos $\kappa(t) \rightarrow 0$ e a parábola aproxima-se de uma reta. \square

1.34 Exemplo (Curvatura da Elipse). Se

$$\alpha(t) = (x_0 + a \cos t, y_0 + b \sin t),$$

é uma elipse, de modo que

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (-a \sin t, b \cos t), \\ \alpha''(t) &= (-a \cos t, -b \sin t), \\ \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t},\end{aligned}$$

segue de (1.13) que

$$\kappa(t) = \frac{ab(\sin^2 t + \cos^2 t)}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}.$$

Quando $ab \rightarrow \pm\infty$ (o que ocorre quando $a, b \rightarrow \infty$ ou mesmo quando um destes dois coeficientes é fixado e o outro tende a ∞) a curvatura tende a zero, aproximando-se de uma reta. \square

1.35 Exemplo (Curvatura da Hipérbole). Se

$$\alpha(t) = (x_0 + a \cosh t, y_0 + b \sinh t),$$

é um ramo de hipérbole, de modo que

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (a \sinh t, b \cosh t), \\ \alpha''(t) &= (a \cosh t, b \sinh t), \\ \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t},\end{aligned}$$

segue de (1.13) que

$$\kappa(t) = \frac{ab(\sinh^2 t - \cosh^2 t)}{(a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t)^{3/2}} = -\frac{ab}{(a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t)^{3/2}}.$$

Quando $t \rightarrow \pm\infty$, temos $\kappa(t) \rightarrow 0$ e a curva se aproxima de uma reta. \square

1.36 Exemplo (Curvatura da Hélice Circular). Se

$$\alpha(t) = \left(R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}, R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}, \frac{k}{\sqrt{R^2 + k^2}} s \right),$$

é uma parametrização por comprimento de arco da hélice circular, temos

$$\begin{aligned}T(s) &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + k^2}} \left(-R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}, R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}, k \right), \\ T'(s) &= -\frac{R}{R^2 + k^2} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}, 0 \right),\end{aligned}$$

de modo que

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| = \frac{R}{R^2 + k^2}.$$

Portanto, a hélice circular também tem curvatura constante. Note que a curvatura da hélice circular é menor que a curvatura do círculo de raio R . \square

1.3.3 Fórmulas de Frenet para Curvas Planas

1.37 Proposição (Fórmulas de Frenet para Curvas Planas). *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada por comprimento de arco com $\kappa \neq 0$. Então*

$$T'(s) = \kappa(s) N(s), \quad (1.14)$$

Se $n = 2$ temos

$$N'(s) = -\kappa(s) T(s). \quad (1.15)$$

Prova: A primeira fórmula é a definição de curvatura no caso $n = 2$ e no caso $n \geq 3$ segue da definição de curvatura e vetor normal:

$$T'(s) = \|T'(s)\| \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \kappa(s) N(s).$$

A segunda fórmula também vale para curvas planas em \mathbb{R}^3 (veja as Proposições 1.71 e 1.72), mas no momento daremos uma demonstração válida apenas para curvas em \mathbb{R}^2 . Como

$$\langle N, N \rangle = \|N\|^2 = 1,$$

segue que

$$\langle N, N' \rangle = 0,$$

ou seja, N' é ortogonal a N e portanto (em \mathbb{R}^2) está na direção de T , ou seja,

$$N' = \langle N', T \rangle T.$$

Da definição de N temos que

$$N'(s) = (-y''(s), x''(s)) \quad (1.16)$$

de modo que

$$\langle N', T \rangle = -x'y'' + y'x'' = -\kappa.$$

■

O próximo resultado mostra que a curvatura de fato mede o quanto uma curva deixa de ser uma reta.

1.38 Proposição. *Uma curva é uma reta se e somente se $\kappa = 0$.*

Uma curva em \mathbb{R}^2 está contida em um círculo de raio R se e somente se $|\kappa| = \frac{1}{R}$.

Prova: Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma reta parametrizada por comprimento de arco, então

$$\alpha(s) = p_0 + sv$$

com $\|v\| = 1$. Logo,

$$\alpha'' = 0,$$

donde

$$\kappa = 0.$$

Reciprocamente, $\kappa = 0$ implica $\alpha'' = 0$; integrando, obtemos $\alpha(s) = p_0 + sv$.

Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma curva parametrizada por comprimento de arco tal que $\alpha(I)$ está contida em um círculo de centro p_0 e raio R , então

$$\langle \alpha(s) - p_0, \alpha(s) - p_0 \rangle = \|\alpha(s) - p_0\|^2 = R^2.$$

Derivando esta expressão obtemos

$$\langle \alpha'(s), \alpha(s) - p_0 \rangle = 0;$$

em particular, $\alpha(s) - p_0$ está na direção de $N(s)$, que é a direção de $\alpha''(s)$. Derivando mais uma vez obtemos

$$\langle \alpha''(s), \alpha(s) - p_0 \rangle = -\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = -\|\alpha'(s)\|^2 = -1.$$

Concluimos que

$$\|\alpha''(s)\| \|\alpha(s) - p_0\| = 1,$$

donde

$$|\kappa| = \|\alpha''(s)\| = \frac{1}{\|\alpha(s) - p_0\|} = \frac{1}{R}.$$

Reciprocamente, suponha que $\kappa = \frac{1}{R}$ (a demonstração para $\kappa = -1/R$ é análoga). Considere a função vetorial $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(s) = \alpha(s) + RN(s).$$

Pelas fórmulas de Frenet temos

$$f'(s) = T(s) - R\kappa(s)T(s) = 0,$$

logo f é uma função constante, digamos

$$f(s) = p_0$$

para algum ponto fixado $p_0 \in \mathbb{R}^2$. Segue então da definição de f que

$$\|\alpha(s) - p_0\| = R.$$

■

1.4 Derivada em \mathbb{R}^n

1.4.1 Definição

1.39 Definição. Dizemos que uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, U aberto, é uma aplicação **diferenciável** em $x \in U$ se existe uma transformação linear $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$F(x+h) = F(x) + Lh + r(h)$$

com

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0,$$

para todo $h \in \mathbb{R}^m$ tal que $x+h \in U$.

Se F é diferenciável em todo ponto $x \in U$, dizemos simplesmente que F é uma **aplicação diferenciável**. □

Observe que como todas as normas de \mathbb{R}^n são equivalentes, não importa a norma usada na definição acima.

1.40 Proposição. Se F é diferenciável em x , então existe uma única transformação linear L tal que

$$F(x+h) = F(x) + Lh + r(h)$$

com

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Prova: Para todo t tal que $|t|$ é suficientemente pequeno, podemos escrever

$$\begin{aligned} F(x + te_i) &= F(x) + L(te_i) + r(te_i) \\ &= F(x) + tLe_i + r(te_i). \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} Le_i &= \frac{F(x + te_i) - F(x)}{t} - \frac{r(te_i)}{t} \\ &= \frac{F(x + te_i) - F(x)}{t} - \frac{r(te_i)}{\|te_i\|}. \end{aligned}$$

Portanto, tomando o limite de ambos os lados da equação quando $t \rightarrow 0$, concluímos que

$$Le_i = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + te_i) - F(x)}{t}.$$

O limite no lado direito depende apenas de F e como uma transformação linear é unicamente determinada pelos valores que ela toma nos vetores da base, segue que L é única. ■

1.41 Definição. Se $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, U aberto, é diferenciável no ponto $x \in U$, a única transformação linear $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$F(x + h) = F(x) + Lh + r(h)$$

com

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

é chamada a **derivada** (ou **diferencial**) de F em x , denotada por

$$dF_x.$$

□

1.42 Definição. Seja $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, U aberto, uma aplicação. A **derivada parcial** de F em x com relação à variável x_i é o limite

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + te_i) - F(x)}{t}.$$

quando ele existir.

Mais geralmente, dado um vetor $v \in \mathbb{R}^m$, a **derivada direcional** de F em x na direção v é o limite

$$\frac{\partial F}{\partial v}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + tv) - F(x)}{t}.$$

quando ele existir. □

1.43 Proposição. Se F é diferenciável em x , então

$$dF_x(e_i) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$$

e

$$dF_x(v) = \frac{\partial F}{\partial v}(x).$$

Prova: O primeiro fato segue da demonstração da Proposição 1.40 e o segundo pelo mesmo argumento. ■
Segue que a matriz da diferencial dF_x em relação à base canônica de \mathbb{R}^m é

$$dF_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_m}(x) \end{bmatrix}$$

e em relação às bases canônicas de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n é

$$dF_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m}(x) \end{bmatrix},$$

ou seja

$$dF_x = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \right).$$

Esta última é chamada a **matriz jacobiana** de F no ponto x . Se denotarmos as funções coordenadas F por

$$F(x_1, \dots, x_m) = (y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m)),$$

a matriz jacobiana de F é

$$dF_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m}(x) \end{bmatrix}.$$

1.44 Teorema. *Seja $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, U aberto, uma aplicação.*

Se F é diferenciável em x , então F é contínua em x .

Se as derivadas parciais das funções coordenadas $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ existem e são contínuas em x , então F é diferenciável em x .

Prova: Veja [Lima]. ■

1.45 Exemplo (Curvas Diferenciáveis e Vetor Tangente). Uma aplicação diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é simplesmente uma curva diferenciável. Sua derivada $d\alpha_{t_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ em um ponto $t_0 \in I$ tem como matriz jacobiana a matriz coluna

$$d\alpha_{t_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t}(t_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial \alpha_n}{\partial t}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha'_1(t_0) \\ \vdots \\ \alpha'_n(t_0) \end{bmatrix},$$

que age em vetores t de \mathbb{R} através de multiplicação por escalar é identificada com o vetor

$$\alpha'(t_0) = ((\alpha_1)'(t_0), \dots, (\alpha_n)'(t_0)).$$

Observe que a derivada direcional $\frac{\partial F}{\partial v}(x)$ de uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é simplesmente o *vetor tangente* à curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\alpha(t) = F(x + tv)$$

em $t = 0$. □

1.46 Exemplo (Vetor Gradiente). Uma aplicação diferenciável $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tem como derivada em cada ponto x um funcional linear $dF_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ cuja matriz jacobiana é a matriz linha

$$dF_x = \left[\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial x_m}(x) \right].$$

Se definirmos o **vetor gradiente** de F em x como sendo o vetor

$$\nabla F(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_m}(x) \right),$$

a ação do funcional linear dF_x em vetores v de \mathbb{R}^m é idêntica ao produto escalar do gradiente $\nabla F(x)$ com v , isto é,

$$dF_x(v) = \langle \nabla F(x), v \rangle.$$

Ou seja, usamos o produto interno canônico de \mathbb{R}^m para obter um isomorfismo entre o espaço dual $(\mathbb{R}^m)^*$ e \mathbb{R}^m e através dele identificar a derivada funcional linear dF_x com o vetor gradiente $\nabla F(x)$. \square

1.4.2 Propriedades

Derivadas parciais de ordem superior de uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, U aberto,

$$\frac{\partial^\alpha F}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x),$$

onde $\alpha = i_1 + \dots + i_k$ é a **ordem** da derivada parcial, são definidas indutivamente da maneira óbvia.

1.47 Definição. Seja $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, U aberto, uma aplicação diferenciável.

Dizemos que ela é uma **aplicação de classe C^k** se ela possui derivadas parciais contínuas até ordem k .

Dizemos que ela é uma **aplicação de classe C^∞** ou **suave** se ela possui derivadas parciais de todas as ordens. \square

1.48 Teorema (Regra da Cadeia). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos. Se $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em x , $F(x) \in V$ e $G : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é diferenciável em $F(x)$, então a composta $G \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ é diferenciável em x e*

$$d(G \circ F)_x = dG_{F(x)} \circ dF_x.$$

Prova: Veja [Lima]. \blacksquare

Em particular, a matriz jacobiana da composta é o produto das matrizes jacobianas das funções G e F nos pontos apropriados:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial (G \circ F)_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial (G \circ F)_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial (G \circ F)_p}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial (G \circ F)_p}{\partial x_m}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(F(x)) & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n}(F(x)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_p}{\partial x_1}(F(x)) & \dots & \frac{\partial G_p}{\partial x_n}(F(x)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m}(x) \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial (G \circ F)_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial G_i}{\partial x_k}(F(x)) \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(x),$$

de modo que, denotando

$$F(x_1, \dots, x_m) = (y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m)),$$

$$G(y_1, \dots, y_n) = (z_1(y_1, \dots, y_n), \dots, z_p(y_1, \dots, y_n)),$$

obtemos a familiar regra da cadeia

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}.$$

1.49 Corolário. *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos. Se $F : U \rightarrow V$ é diferenciável em x e $F^{-1} : V \rightarrow U$ é diferenciável em $F(x)$, então*

$$d(F^{-1})_{F(x)} = (dF_x)^{-1}.$$

Prova: Segue da regra da cadeia aplicada a

$$F \circ F^{-1} = \text{id}$$

e do fato da derivada de aplicação identidade ser a transformação linear identidade. ■

1.50 Definição. Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos. Uma aplicação $F : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo de classe C^k se F é um homeomorfismo (isto é, uma aplicação bijetiva contínua com inversa contínua) que é uma aplicação diferenciável de classe C^k e sua inversa também é uma aplicação diferenciável de classe C^k . □

Se $F : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo, segue do corolário anterior que dF_x é um isomorfismo. Localmente vale a recíproca (Lema 3.16), que efetivamente é a maneira de determinar quando uma aplicação diferenciável é um difeomorfismo.

1.5 Isometrias de \mathbb{R}^n

1.51 Definição. Uma **isometria** de \mathbb{R}^n é uma aplicação $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que *preserva distâncias*, isto é,

$$\|F(p) - F(q)\| = \|p - q\|$$

para todos $p, q \in \mathbb{R}^n$. □

O exemplo mais simples de isometria de \mathbb{R}^n é uma **translação**, isto é, uma aplicação $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$T(p) = p + c$$

para algum vetor fixo $c \in \mathbb{R}^n$.

1.52 Proposição. *Se F, G são isometrias de \mathbb{R}^n , então a sua composta $F \circ G$ também é uma isometria de \mathbb{R}^n .*

Prova: Pois

$$\begin{aligned} \|(F \circ G)(p) - (F \circ G)(q)\| &= \|F(G(p)) - F(G(q))\| \\ &= \|G(p) - G(q)\| \\ &= \|p - q\|. \end{aligned}$$

■

1.53 Definição. Uma **transformação ortogonal** é uma aplicação linear $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que *preserva o produto interno*, isto é,

$$\langle F(p), F(q) \rangle = \langle p, q \rangle$$

para todos $p, q \in \mathbb{R}^n$. □

1.54 Proposição. *Transformações ortogonais são isometrias.*

Prova: Se $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação ortogonal, então

$$\begin{aligned} \|F(p) - F(q)\|^2 &= \langle F(p) - F(q), F(p) - F(q) \rangle \\ &= \langle F(p), F(p) \rangle - 2\langle F(p), F(q) \rangle + \langle F(q), F(q) \rangle \\ &= \langle p, p \rangle - 2\langle p, q \rangle + \langle q, q \rangle \\ &= \langle p - q, p - q \rangle \\ &= \|p - q\|^2. \end{aligned}$$

■

1.55 Lema. *O produto interno pode ser obtido da norma através das fórmulas*

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} \left(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 \right)$$

e

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} \left(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 \right).$$

Prova: Pois

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle - \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle - \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle \\ &= 2\langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle - \langle v - w, v - w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle - [\langle v, v \rangle - 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle] \\ &= 4\langle v, w \rangle \end{aligned}$$

■

1.56 Proposição. *Isometrias $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que $F(0) = 0$ são transformações ortogonais.*

Prova: Passo 1. $\|F(p)\| = \|p\|$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$.

Pois

$$\|F(p)\| = \|F(p) - F(0)\| = \|p - 0\| = \|p\|.$$

Passo 2. F preserva o produto interno.

Pois

$$\begin{aligned} \langle F(p), F(q) \rangle &= \frac{1}{2} \left(\|F(p) - F(q)\|^2 - \|F(p)\|^2 - \|F(q)\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\|p - q\|^2 - \|p\|^2 - \|q\|^2 \right) \\ &= \langle p, q \rangle. \end{aligned}$$

Passo 3. F é linear.

Para todos $p, q \in \mathbb{R}^n$ e para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} &\|F(\alpha p + \beta q) - \alpha F(p) - \beta F(q)\|^2 \\ &= \langle F(\alpha p + \beta q) - \alpha F(p) - \beta F(q), F(\alpha p + \beta q) - \alpha F(p) - \beta F(q) \rangle \\ &= \langle F(\alpha p + \beta q), F(\alpha p + \beta q) \rangle - 2\alpha \langle F(\alpha p + \beta q), F(p) \rangle - 2\beta \langle F(\alpha p + \beta q), F(q) \rangle \\ &\quad + \alpha^2 \langle F(p), F(p) \rangle + \alpha\beta \langle F(q), F(q) \rangle + \beta^2 \langle F(q), F(q) \rangle \\ &= \langle \alpha p + \beta q, \alpha p + \beta q \rangle - 2\alpha \langle \alpha p + \beta q, p \rangle - 2\beta \langle \alpha p + \beta q, q \rangle + \alpha^2 \langle p, p \rangle + \alpha\beta \langle q, q \rangle + \beta^2 \langle q, q \rangle \\ &= \|\alpha p + \beta q - \alpha p - \beta q\|^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

logo

$$F(\alpha p + \beta q) = \alpha F(p) + \beta F(q).$$

■

1.57 Teorema. *Se $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isometria, então existe uma única transformação ortogonal L e uma única translação T tais que*

$$F = T \circ L.$$

Prova: (*Existência*) Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a translação

$$T(p) = p + F(0).$$

Então $T^{-1} \circ F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isometria tal que

$$(T^{-1} \circ F)(0) = T^{-1}(F(0)) = F(0) - F(0) = 0,$$

de modo que pelo resultado anterior

$$L := T^{-1} \circ F$$

é uma transformação ortogonal.

(*Unicidade*) Se L_1, L_2 são transformações ortogonais e T_1, T_2 são translações tais que

$$F = T_1 \circ L_1 = T_2 \circ L_2,$$

então

$$L_1 \circ L_2^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2.$$

Em particular, $T_1^{-1} \circ T_2$ é uma aplicação linear e como aplicações lineares deixam o vetor nulo fixo, segue que $T_1^{-1} \circ T_2$ é a translação nula, isto é, a identidade. Logo,

$$T_1^{-1} \circ T_2 = \text{id} \implies T_1 = T_2,$$

$$L_1 \circ L_2^{-1} = \text{id} \implies L_1 = L_2.$$

■

1.58 Corolário. *Se $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isometria com $F = T \circ L$, onde L é uma transformação ortogonal e T é uma translação, então*

$$dF_p = L.$$

Em particular, F é diferenciável de classe C^∞ , sua derivada é uma transformação ortogonal e

$$\langle dF_p(v), dF_p(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

para todos $v, w \in \mathbb{R}^n$.

Prova: Note que a derivada de uma transformação linear é ela própria e a derivada de uma translação é a identidade. Daí, pela regra da cadeia,

$$dF_p = d(T \circ L)_p = dT_{L(p)} \circ dL_p = \text{id} \circ L = L.$$

■

1.59 Teorema. *Sejam $p_0, q_0 \in \mathbb{R}^n$ e*

$$\mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \{f_1, \dots, f_n\}$$

bases ortonormais de \mathbb{R}^n . Então existe uma única isometria $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$F(p_0) = q_0$$

e

$$dF_p(e_i) = f_i \quad \text{para todo } i.$$

Prova: Sejam $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a única aplicação linear tal que

$$L(e_i) = f_i \quad \text{para todo } i$$

e $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a translação tal que $T(L(p_0)) = q_0$, ou seja,

$$T(p) = p + (q_0 - L(p_0)).$$

Pelo Teorema 1.57 e pelo corolário anterior $F = T \circ L$ é a única isometria que satisfaz as condições do enunciado. ■

1.60 Definição. Dizemos que duas bases de \mathbb{R}^n

$$\mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 = \{f_1, \dots, f_n\}$$

tem a mesma **orientação** se

$$\text{sign}(\det[e_1 \dots e_n]) = \text{sign}(\det[f_1 \dots f_n]).$$

Dizemos que uma isometria $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ **preserva orientação** se

$$\{e_1, \dots, e_n\}$$

e

$$\{dF_p(e_1), \dots, dF_p(e_n)\}$$

tem a mesma orientação para toda base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n . Caso contrário, dizemos que F **reverte orientação**. □

Como isometrias levam bases ortonormais em bases ortonormais, uma isometria preservar orientação é equivalente a exigir que

$$\det[dF_p(e_1) \dots dF_p(e_n)] = \det[e_1 \dots e_n]$$

para toda base *ortonormal* $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n . Note que uma isometria em \mathbb{R}^3 preserva orientação se e somente se

$$\langle dF_p(e_1) \times dF_p(e_2), dF_p(e_3) \rangle = \langle e_1 \times e_2, e_3 \rangle$$

para toda base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 .

1.61 Proposição. Se L é uma transformação ortogonal, então

$$L^{-1} = L^T.$$

Em particular,

$$\det L = \pm 1.$$

Portanto, L preserva orientação se e somente se

$$\det L = 1.$$

Prova: Seja

$$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$$

a base canônica de \mathbb{R}^n . Escreva a matriz de L em relação à \mathcal{B} no formato em colunas

$$L = [L_1 \dots L_n],$$

o que é equivalente a

$$L_i = Le_i.$$

Então a matriz de L^T em relação à \mathcal{B} no formato em linhas é

$$L^T = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}.$$

Por definição do produto matricial e pelo fato que L preserva o produto interno, temos

$$(L^T L)_{ij} = \langle L_i, L_j \rangle = \langle L e_i, L e_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},$$

isto é,

$$L L^T = \text{id}.$$

Daí,

$$1 = \det(\text{id}) = \det(L L^T) = \det L \det(L^T) = (\det L)(\det L) = (\det L)^2,$$

donde $\det L = \pm 1$. ■

1.6 Teorema Fundamental das Curvas no Plano

1.62 Definição. Dizemos que duas curvas $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ são **congruentes** se existe uma isometria F de \mathbb{R}^n tal que $\alpha = F(\beta)$. □

1.63 Lema. *Curvas congruentes em \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, possuem a mesma curvatura.*

Em \mathbb{R}^2 , curvas congruentes por uma isometria que preserva orientação possuem a mesma curvatura; curvas congruentes por uma isometria que reverte orientação possuem curvatura iguais, mas de sinais opostos.

Prova: Sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ curvas congruentes e F uma isometria de \mathbb{R}^n tal que $\alpha = F(\beta)$. Pela regra da cadeia e pela caracterização das isometrias de \mathbb{R}^n ,

$$\alpha'(t) = dF_{\beta(t)}\beta'(t) = L\beta'(t),$$

onde L é uma transformação ortogonal, donde

$$\|\alpha'(t)\| = \|\beta'(t)\|.$$

Portanto, uma reparametrização de β por comprimento de arco também implicará em uma reparametrização de α por comprimento de arco. Assim, sem perda de generalidade, podemos assumir que as duas curvas estão parametrizadas por comprimento de arco, de modo que

$$\|T_\alpha(s)\| = \|\alpha'(s)\| = \|\beta'(s)\| = \|T_\beta(s)\| = 1$$

para todo s . Além disso, derivando

$$T_\alpha(s) = \alpha'(s) = L\beta'(s) = L T_\beta(s),$$

obtemos

$$T'_\alpha(s) = L T'_\beta(s),$$

donde

$$\|T'_\alpha(s)\| = \|T'_\beta(s)\|$$

o que implica, se $n \geq 3$,

$$\kappa_\alpha(s) = \kappa_\beta(s).$$

No caso $n = 2$, se F preserva orientação, então

$$\kappa_\alpha = \langle T'_\alpha, N_\alpha \rangle = \langle LT'_\beta, LN_\beta \rangle = \langle T'_\beta, N_\beta \rangle = \kappa_\beta.$$

Se F reverte orientação, então

$$\kappa_\alpha = \langle T'_\alpha, N_\alpha \rangle = \langle LT'_\beta, -LN_\beta \rangle = -\langle T'_\beta, N_\beta \rangle = -\kappa_\beta.$$

■

No caso de curvas em \mathbb{R}^2 vale a recíproca: duas curvas que possuem a mesma curvatura são congruentes. Mais que isso, curvas parametrizadas por comprimento de arco que possuem os mesmos ponto inicial, vetor tangente inicial e curvatura são idênticas.

1.64 Teorema. *Dados uma função contínua $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$, um ponto $p \in \mathbb{R}^2$ e um vetor unitário $v \in \mathbb{R}^2$, e fixado $s_0 \in I$, existe uma única curva continuamente diferenciável parametrizada por comprimento de arco $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que a curvatura de α é κ , $\alpha(s_0) = p$ e $\alpha'(s_0) = v$.*

Dois curvas $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ que possuem a mesma curvatura são congruentes.

Prova: Observe que qualquer curva parametrizada por comprimento de arco $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, satisfaz pela primeira equação de Frenet $T' = \kappa N$

$$(x'', y'') = \kappa(-y', x'),$$

isto é, as funções x, y satisfazem o sistema de equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem

$$\begin{cases} x'' = -\kappa y', \\ y'' = \kappa x'. \end{cases}$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias Lineares, dados uma função contínua $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$, um ponto $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e um vetor $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, existe uma única solução continuamente diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ para o sistema acima satisfazendo

$$\begin{aligned} (x(s_0), y(s_0)) &= (x_0, y_0), \\ (x'(s_0), y'(s_0)) &= (v_1, v_2). \end{aligned}$$

No caso de curvas no plano, a solução para este sistema pode ser obtida de maneira explícita por integração simples, mostrando além disso de um modo mais simples que esta solução é parametrizada por comprimento de arco (compare a demonstração dada aqui com a demonstração do Teorema Fundamental das Curvas no Espaço (Teorema 1.76)). De fato, seja $p_0 = (x_0, y_0)$. Defina uma função $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\theta(s) = \theta_0 + \int_{s_0}^s \kappa(t) dt$$

onde $v = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$, e uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, por

$$\begin{aligned} x(s) &= x_0 + \int_{s_0}^s \cos \theta(t) dt, \\ y(s) &= y_0 + \int_{s_0}^s \sin \theta(t) dt. \end{aligned}$$

Como

$$\alpha'(s) = (x'(s), y'(s)) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)),$$

segue que

$$\alpha'(s_0) = (\cos \theta(s_0), \sin \theta(s_0)) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0) = v$$

e

$$\|\alpha'(s)\| = 1,$$

para todo s , ou seja, α é uma curva parametrizada por comprimento de arco; em particular, $T(s) = \alpha'(s)$. Logo,

$$N(s) = (-\operatorname{sen} \theta(s), \cos \theta(s)),$$

de modo que

$$\begin{aligned} N'(s) &= (-\cos \theta(s) \theta'(s), -\operatorname{sen} \theta(s) \theta'(s)) \\ &= -\kappa(s) (\cos \theta(s), \operatorname{sen} \theta(s)) \\ &= -\kappa(s) T(s) \end{aligned}$$

e portanto α tem curvatura κ . A unicidade desta solução está garantida pelo teorema de unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias lineares considerado acima.

Para terminar a demonstração do teorema, sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ duas curvas que possuem a mesma curvatura. Seja F uma isometria do plano tal que

$$\begin{aligned} (F \circ \beta)(s_0) &= F(\beta(s_0)) = \alpha(s_0), \\ (F \circ \beta)'(s_0) &= dF_{\beta(s_0)} \beta'(s_0) = \alpha'(s_0), \end{aligned}$$

Como a curvatura é invariante por isometria, a curva $\bar{\beta}(s) = (F \circ \beta)(s)$ é uma curva parametrizada por comprimento de arco com a mesma curvatura que β , e portanto com a mesma curvatura que α , que possui os mesmos pontos inicial e vetor tangente, logo pelo resultado anterior é α . ■

1.7 Torção e Triedro de Frenet

1.7.1 Definição

Curvas espaciais não podem ser caracterizadas apenas pela curvatura. Além da mudança de direção do vetor tangente, o plano formado pelos vetores tangente e normal também muda de direção. Para medir a mudança na direção deste plano consideramos o vetor normal a este plano:

1.65 Definição. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Definimos o **vetor binormal** à curva no ponto $\alpha(s)$ por

$$B(s) = T(s) \times N(s). \quad (1.17)$$

Desta forma, os vetores T, N, B formam um referencial ortonormal em \mathbb{R}^3 , chamado o **triedro de Frenet**. □

Segue imediatamente que

$$T(s) = N(s) \times B(s), \quad (1.18)$$

$$N(s) = B(s) \times T(s). \quad (1.19)$$

1.66 Lema (Regra do Produto para o Produto Vetorial). *Sejam $V, W : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ funções vetoriais diferenciáveis e considere a função vetorial $F : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por*

$$F(t) = V(t) \times W(t).$$

Então

$$F'(t) = V'(t) \times W(t) + V(t) \times W'(t).$$

Prova: Escrevendo as funções V e W em coordenadas como

$$\begin{aligned} V(t) &= (V_1(t), V_2(t), V_3(t)), \\ W(t) &= (W_1(t), W_2(t), W_3(t)), \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} V(t) \times W(t) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ V_1(t) & V_2(t) & V_3(t) \\ W_1(t) & W_2(t) & W_3(t) \end{vmatrix} \\ &= (V_2(t)W_3(t) - V_3(t)W_2(t), V_3(t)W_1(t) - V_1(t)W_3(t), V_1(t)W_2(t) - V_2(t)W_1(t)). \end{aligned}$$

Logo, pela regra do produto temos

$$\begin{aligned} F' &= (V_2'W_3 + V_2W_3' - V_3'W_2 - V_3W_2', V_3'W_1 + V_3W_1' - V_1'W_3 - V_1W_3', V_1'W_2 + V_1W_2' - V_2'W_1 - V_2W_1') \\ &= (V_2'W_3 - V_3'W_2, V_3'W_1 - V_1'W_3, V_1'W_2 - V_2'W_1) + (V_2W_3' - V_3W_2', V_3W_1' - V_1W_3', V_1W_2' - V_2W_1') \\ &= V' \times W + V \times W'. \end{aligned}$$

■

1.67 Proposição. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. O vetor $B'(s)$ é ortogonal ao vetor tangente $T(s)$ e ao vetor binormal $B(s)$, isto é,*

$$\langle T(s), B'(s) \rangle = 0, \quad (1.20)$$

$$\langle B(s), B'(s) \rangle = 0, \quad (1.21)$$

para todo s . Em particular, o vetor $B'(s)$ é paralelo ao vetor normal $N(s)$.

Prova: Pela regra do produto para o produto vetorial, temos

$$\begin{aligned} B'(s) &= T'(s) \times N(s) + T(s) \times N'(s) \\ &= \kappa(s) N(s) \times N(s) + T(s) \times N'(s) \\ &= T(s) \times N'(s), \end{aligned}$$

de modo que $B'(s) \perp T(s)$. Além disso, como

$$\langle B(s), B(s) \rangle = \|B(s)\|^2 = 1,$$

segue da regra do produto para o produto escalar que

$$\langle B(s), B'(s) \rangle = 0.$$

■

Em vista do resultado anterior, definimos o conceito de *torção*, que mede o quanto uma curva deixa de ser plana:

1.68 Definição. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Definimos a **torção** de α no ponto $\alpha(s)$ por*

$$B'(s) = \tau(s) N(s). \quad (1.22)$$

□

Em outras palavras,

$$\tau(s) = \langle B'(s), N(s) \rangle. \quad (1.23)$$

Observe que

$$|\tau(s)| = \|B'(s)\|, \quad (1.24)$$

mas a torção pode ser positiva, negativa ou nula.

1.69 Exemplo (Torção da Hélice Circular). Se

$$\alpha(s) = \left(R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}, R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}, \frac{k}{\sqrt{R^2 + k^2}} s \right),$$

é uma parametrização por comprimento de arco da hélice circular, temos

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + k^2}} \left(-R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}, R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}, k \right), \\ T'(s) &= \frac{R}{R^2 + k^2} \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}, 0 \right), \\ N(s) &= \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}, 0 \right), \\ B(s) &= T(s) \times N(s) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + k^2}} \left(k \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}, -k \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}, -R \right), \\ B'(s) &= \frac{k}{R^2 + k^2} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + k^2}}, 0 \right), \end{aligned}$$

de modo que

$$\tau(s) = \langle B'(s), N(s) \rangle = -\frac{k}{R^2 + k^2}.$$

Portanto, a hélice circular padrão tem torção positiva se $k < 0$ e negativa se $k > 0$; por este motivo, alguns autores preferem definir a torção com o sinal oposto da Definição 1.22: pela regra do parafuso, a hélice circular com $k > 0$ tem “orientação” positiva. Por outro lado, da mesma forma que o sinal da curvatura não é um invariante geométrico (Lema 1.63), o sinal da torção também não é um invariante geométrico (Lema 1.75): a hélice circular com k positivo é a imagem por uma reflexão da hélice circular com o mesmo k negativo. Diferentemente da curvatura, no entanto, a torção independe da parametrização da curva (veja Proposição 1.70 a seguir). \square

1.70 Proposição. *O sinal da curvatura não é uma propriedade intrínseca das curvas em \mathbb{R}^2 .*

O sinal da torção é uma propriedade intrínseca das curvas em \mathbb{R}^3 .

Prova: Se $\alpha(s)$ é uma parametrização por comprimento de arco de uma curva, então todas as parametrizações por comprimento de arco da curva são da forma

$$\alpha(\pm s + c)$$

onde c é uma constante. A escolha da constante c equivale a mudar o ponto inicial, enquanto que a mudança do sinal do parâmetro s , $\alpha(s)$ ou $\alpha(-s)$, equivale a mudar o sentido de percorrer a curva. Enquanto que em \mathbb{R}^2 mudar o sentido de percorrer a curva muda o sinal da curvatura, em \mathbb{R}^3 a torção continua a mesma.

De fato, seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma parametrização por comprimento de arco e considere a reparametrização da mesma curva por comprimento de arco $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\beta(s) = \alpha(-s + c).$$

Temos

$$T_\beta(s) = \beta'(s) = -\alpha'(-s + c) = -T_\alpha(-s + c).$$

Portanto, para preservar a orientação positiva da base ortonormal $\{T, N\}$ na definição do vetor normal principal em \mathbb{R}^2 , temos necessariamente

$$N_\beta(s) = -N_\alpha(-s + c).$$

Além disso, derivando a expressão acima pela regra da cadeia obtemos

$$T'_\beta(s) = T'_\alpha(-s + c).$$

Segue que

$$\kappa_\beta(s) = \langle T'_\beta(s), N_\beta(s) \rangle = \langle T'_\alpha(-s + c), -N_\alpha(-s + c) \rangle = -\kappa_\alpha(-s + c).$$

Agora seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização por comprimento de arco e considere a reparametrização da mesma curva por comprimento de arco $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\beta(s) = \alpha(-s + c).$$

Então, como acima,

$$\begin{aligned} T_\beta(s) &= -T_\alpha(-s + c), \\ T'_\beta(s) &= T'_\alpha(-s + c). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} N_\beta(s) &= \frac{T'_\beta(s)}{\|T'_\beta(s)\|} = \frac{T'_\alpha(-s + c)}{\|T'_\alpha(-s + c)\|} = N_\alpha(-s + c), \\ B_\beta(s) &= T_\beta(s) \times N_\beta(s) = -T_\alpha(-s + c) \times N_\alpha(-s + c) = -B_\alpha(-s + c), \\ B'_\beta(s) &= B'_\alpha(-s + c). \end{aligned}$$

Logo,

$$\tau_\beta(s) = \langle B'_\beta(s), N_\beta(s) \rangle = \langle B'_\alpha(-s + c), N_\alpha(-s + c) \rangle = \tau_\alpha(-s + c).$$

■

1.7.2 Fórmulas de Frenet para Curvas Espaciais

1.71 Proposição (Fórmulas de Frenet para Curvas Espaciais). *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco tal que κ nunca se anula. Então*

$$T'(s) = \kappa(s) N(s), \quad (1.25)$$

$$N'(s) = -\kappa(s) T(s) - \tau(s) B(s), \quad (1.26)$$

$$B'(s) = \tau(s) N(s). \quad (1.27)$$

Prova: A demonstração da primeira fórmula já foi vista e a terceira fórmula é a definição de torção. Para provar a segunda fórmula, usando a regra do produto para o produto vetorial obtemos

$$N'(s) = B'(s) \times T(s) + B(s) \times T'(s),$$

de modo que aplicando as primeira e terceira fórmulas obtemos

$$\begin{aligned} N'(s) &= \tau(s) [N(s) \times T(s)] + \kappa(s) [B(s) \times N(s)] \\ &= -\tau(s) B(s) - \kappa(s) T(s). \end{aligned}$$

■

As fórmulas de Frenet mostram de que forma os vetores T', N', B' se escrevem como combinações lineares dos vetores T, N, B do triedro de Frenet:

$$\begin{cases} T' = \kappa N, \\ N' = -\kappa T - \tau B, \\ B' = \tau N. \end{cases} \quad (1.28)$$

O próximo resultado mostra como a torção mede o quanto uma curva deixa de ser plana.

1.72 Proposição. *Uma curva é plana se e somente se $\tau \equiv 0$.*

Prova: Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva parametrizada por comprimento de arco plana, então a sua imagem $\alpha(I)$ está contida em um plano de \mathbb{R}^3 . Seja V um vetor ortogonal a este plano. Fixado $s_0 \in I$, temos

$$\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), V \rangle = 0$$

para todo s . Derivando obtemos

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(s), V \rangle &= 0, \\ \langle \alpha''(s), V \rangle &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, V é ortogonal aos vetores $T(s)$ e $N(s)$ para todo s . Isso implica que a direção de $B(s) = T(s) \times N(s)$ é constante. Como sua norma também é constante igual a 1, segue que B é um vetor constante; em particular,

$$B'(s) = 0$$

para todo s e portanto $\tau = 0$.

Reciprocamente, se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva parametrizada por comprimento de arco com torção nula, então

$$B'(s) = 0,$$

para todo s , donde

$$B(s) \equiv B$$

para algum vetor $B \in \mathbb{R}^3$. Afirmamos que α está contida em um plano ortogonal a B . De fato, fixando $s_0 \in I$, considere a função

$$f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), B \rangle.$$

Temos

$$\begin{aligned} f'(s) &= \langle \alpha'(s), B \rangle = \langle T(s), B \rangle = 0, \\ f(s_0) &= 0, \end{aligned}$$

logo f é a função constante identicamente nula, o que implica que o vetor $\alpha(s) - \alpha(s_0)$ é ortogonal a B para todo s , logo $\alpha(s)$ está no plano ortogonal a B que contém o ponto $\alpha(s_0)$. ■

1.7.3 Cálculo da Curvatura e Torção para Parametrizações Arbitrárias

1.73 Proposição. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por um parâmetro t . Então*

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} \quad (1.29)$$

e

$$\tau(t) = \frac{\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \times \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2} \quad (1.30)$$

Prova: Seja $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização de α por comprimento de arco, isto é,

$$\alpha(t) = \beta(s(t)).$$

Cálculo da Curvatura. Por definição,

$$\kappa(t) := \kappa(s(t)) = \|\beta''(s(t))\|.$$

Como

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\|,$$

segue da regra da cadeia que

$$\alpha'(t) = \beta'(s) s'(t) = \|\alpha'(t)\| \beta'(s), \quad (1.31)$$

e

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= \beta''(s) [s'(t)]^2 + \beta'(s) s''(t) \\ &= \|\alpha'(t)\|^2 \beta''(s) + s''(t) \beta'(s). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Logo,

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \|\alpha'(t)\|^3 \beta'(s) \times \beta''(s).$$

Como $\langle \beta'(s), \beta''(s) \rangle = 0$ e $\|\beta'(s)\| = 1$, segue que

$$\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = \|\alpha'(t)\|^3 \|\beta''(s)\|$$

donde

$$\|\beta''(s(t))\| = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

Cálculo da Torção. Por definição,

$$\tau(t) := \tau(s(t)) = \langle B'(s(t)), N(s(t)) \rangle.$$

Temos

$$\begin{aligned} N(s) &= \frac{1}{\kappa(s)} T'(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \beta''(s), \\ B(s) &= T(s) \times N(s) = \beta'(s) \times N(s). \end{aligned}$$

De (1.31) e (1.32) obtemos

$$\beta'(s) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \quad (1.33)$$

e

$$\begin{aligned} \beta''(s) &= \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^2} [\alpha''(t) - s''(t) \beta'(s)] \\ &= \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^2} \alpha''(t) - \frac{s''(t)}{\|\alpha'(t)\|^3} \alpha'(t). \end{aligned}$$

Como

$$s'(t) = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle^{1/2},$$

segue que

$$s''(t) = \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|},$$

logo

$$\beta''(s(t)) = \frac{\|\alpha'(t)\|^2 \alpha''(t) - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle \alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^4}. \quad (1.34)$$

Usando (1.33), (1.34) e a fórmula da curvatura obtida anteriormente, temos

$$\begin{aligned} N(s(t)) &= \frac{1}{\kappa(s(t))} \beta''(s(t)) \\ &= \frac{\|\alpha'\|^3}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \frac{\|\alpha'\|^2 \alpha'' - \langle \alpha', \alpha'' \rangle \alpha'}{\|\alpha'\|^4} \\ &= \frac{\|\alpha'\|^2 \alpha'' - \langle \alpha', \alpha'' \rangle \alpha'}{\|\alpha'\| \|\alpha' \times \alpha''\|} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B(s(t)) &= \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \times \frac{\|\alpha'\|^2 \alpha'' - \langle \alpha', \alpha'' \rangle \alpha'}{\|\alpha'\| \|\alpha' \times \alpha''\|} \\ &= \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}. \end{aligned}$$

Para calcular $B'(s(t))$, primeiramente derivamos a expressão para $B(s(t))$ usando a regra da cadeia, obtendo

$$B'(s(t)) s'(t) = \frac{d}{dt} \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|},$$

de modo que

$$B'(s(t)) = \frac{1}{\|\alpha'\|} \frac{d}{dt} \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}.$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\alpha' \times \alpha''] &= \alpha'' \times \alpha''' + \alpha' \times \alpha'''' \\ &= \alpha' \times \alpha'''' \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{\|\alpha' \times \alpha''\|} &= \frac{d}{dt} \langle \alpha' \times \alpha'', \alpha' \times \alpha'' \rangle^{-1/2} \\ &= -\frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha' \times \alpha'''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^3} \end{aligned}$$

segue que

$$B'(s(t)) = \frac{1}{\|\alpha'\|} \left[\frac{\alpha' \times \alpha''''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} - \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha' \times \alpha'''' \rangle \alpha' \times \alpha''}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^3} \right].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \langle B'(s(t)), N(s(t)) \rangle \\ &= \frac{1}{\|\alpha'\|} \left\langle \frac{\alpha' \times \alpha''''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} - \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha' \times \alpha'''' \rangle \alpha' \times \alpha''}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^3}, \frac{\|\alpha'\|^2 \alpha'' - \langle \alpha', \alpha'' \rangle \alpha'}{\|\alpha'\| \|\alpha' \times \alpha''\|} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|\alpha'\|} \left\langle \frac{\alpha' \times \alpha''''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}, \frac{\|\alpha'\|^2 \alpha''}{\|\alpha'\| \|\alpha' \times \alpha''\|} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \langle \alpha' \times \alpha''', \alpha'' \rangle. \end{aligned}$$

■

1.8 Teorema Fundamental das Curvas no Espaço

1.74 Lema. Se $v, w \in \mathbb{R}^3$ são vetores quaisquer e $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação ortogonal, então

$$L(v \times w) = \begin{cases} Lv \times Lw & \text{se } L \text{ preserva orientação,} \\ -Lv \times Lw & \text{se } L \text{ reverte orientação.} \end{cases}$$

Prova: Temos, para qualquer vetor $u \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \langle Lv \times Lw, Lu \rangle &= \det \begin{bmatrix} Lv & Lw & Lu \end{bmatrix} \\ &= \det (L \begin{bmatrix} v & w & u \end{bmatrix}) \\ &= (\det L) \det \begin{bmatrix} v & w & u \end{bmatrix} \\ &= (\det L) \langle v \times w, u \rangle \\ &= \langle (\det L) v \times w, u \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\langle Lv \times Lw, Lu \rangle = \langle L^T (Lv \times Lw), u \rangle.$$

Concluimos que

$$\langle (\det L) v \times w, u \rangle = \langle L^T (Lv \times Lw), u \rangle$$

para todo vetor $u \in \mathbb{R}^3$, donde

$$(\det L) v \times w = L^T (Lv \times Lw).$$

Em particular,

$$Lv \times Lw = (\det L) (L^T)^{-1} (v \times w).$$

Como L é ortogonal, $(L^T)^{-1} = L$ e $\det L = \pm 1$ se L preserva ou reverte orientação, respectivamente. ■
Observe que da demonstração fica claro que o resultado não vale para uma transformação linear arbitrária A ; neste caso temos

$$A(v \times w) = (\det A)^{-1} \left[(A^T)^{-1} v \times (A^T)^{-1} w \right].$$

1.75 Lema. *Curvas congruentes em \mathbb{R}^3 possuem a mesma curvatura. Se elas são congruentes por uma isometria que preserva orientação, então elas possuem a mesma torção; se elas são congruentes por uma isometria que reverte orientação, então elas possuem torções iguais, mas de sinais opostos.*

Prova: A afirmação relativa à curvatura já foi provada. Sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ curvas congruentes e F uma isometria de \mathbb{R}^3 tal que $\alpha = F(\beta)$. Já vimos que podemos assumir que elas estão parametrizadas por comprimento de arco e que

$$T_\alpha(s) = \alpha'(s) = dF_{\beta(s)}\beta'(s) = L\beta'(s) = LT_\beta(s),$$

donde

$$T'_\alpha(s) = LT'_\beta(s).$$

Pela primeira fórmula de Frenet, como $\kappa_\alpha = \kappa_\beta$, segue que

$$N_\alpha(s) = LN_\beta(s).$$

Se F preserva orientação, então pelo lema anterior

$$\begin{aligned} B_\alpha(s) &= T_\alpha(s) \times N_\alpha(s) \\ &= LT_\beta(s) \times LN_\beta(s) \\ &= L(T_\beta(s) \times N_\beta(s)) \\ &= LB_\beta(s), \end{aligned}$$

donde, derivando,

$$B'_\alpha(s) = LB'_\beta(s)$$

e

$$\tau_\alpha = \langle B'_\alpha, N_\alpha \rangle = \langle LB'_\beta, LN_\beta \rangle = \langle B'_\beta, N_\beta \rangle = \tau_\beta.$$

Se F reverte orientação, então pelo lema anterior

$$\begin{aligned} B_\alpha(s) &= T_\alpha(s) \times N_\alpha(s) \\ &= LT_\beta(s) \times LN_\beta(s) \\ &= -L(T_\beta(s) \times N_\beta(s)) \\ &= -LB_\beta(s), \end{aligned}$$

$$B_\alpha(s) = -LB_\beta(s),$$

donde, derivando,

$$B'_\alpha(s) = -LB'_\beta(s)$$

e

$$\tau_\alpha = \langle B'_\alpha, N_\alpha \rangle = \langle -LB'_\beta, LN_\beta \rangle = -\langle B'_\beta, N_\beta \rangle = -\tau_\beta.$$

■

A recíproca não é inteiramente válida: duas curvas em \mathbb{R}^3 que possuem a mesma curvatura, *desde que ela nunca se anule*, e a mesma torção em módulo são congruentes. Além disso, curvas parametrizadas por comprimento de arco que possuem os mesmos ponto inicial, vetor tangente e vetor normal iniciais e as mesmas curvatura positiva e torção, são idênticas.

1.76 Teorema. *Dadas funções contínuas $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\kappa > 0$, um ponto $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e vetores ortonormais $V_0, W_0 \in \mathbb{R}^3$, e fixado $s_0 \in I$, existe uma única curva continuamente diferenciável parametrizada por comprimento de arco $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que a curvatura de α é κ , a torção de α é τ , $\alpha(s_0) = p_0$, $\alpha'(s_0) = V_0$ e $\alpha''(s_0) = \kappa(s_0)W_0$.*

Dois curvas $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ que possuem a mesma curvatura $\kappa > 0$ e torção (a menos de sinal) são congruentes.

Prova: Pelo Teorema de Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Lineares, dadas funções contínuas $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ e vetores ortonormais $v, w \in \mathbb{R}^3$, existe uma única solução continuamente diferenciável

$$(T(s), N(s), B(s))$$

para o sistema de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem

$$\begin{cases} T' = \kappa N, \\ N' = -\kappa T - \tau B, \\ B' = \tau N, \end{cases} \quad (1.35)$$

satisfazendo as condições iniciais

$$\begin{aligned} T(s_0) &= V_0, \\ N(s_0) &= W_0, \\ B(s_0) &= V_0 \times W_0. \end{aligned}$$

[Observe que como cada vetor tem 3 coordenadas, este sistema possui nove equações.] Para que esta solução corresponda ao triedro de Frenet de uma curva no espaço, é necessário mostrar que o triedro solução $(T(s), N(s), B(s))$ é ortonormal e $B(s) = T(s) \times N(s)$ para todo s (isto é, o triedro é positivamente orientado).

Para provar a ortonormalidade, observe que as funções

$$\begin{aligned} f_1(s) &= \langle T(s), T(s) \rangle, \\ f_2(s) &= \langle N(s), N(s) \rangle, \\ f_3(s) &= \langle B(s), B(s) \rangle, \\ f_4(s) &= \langle T(s), N(s) \rangle, \\ f_5(s) &= \langle T(s), B(s) \rangle, \\ f_6(s) &= \langle N(s), B(s) \rangle, \end{aligned}$$

construídas a partir das soluções $T(s), N(s), B(s)$ do sistema (1.35) satisfazem o sistema de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem

$$\begin{cases} f_1' = 2\kappa f_4, \\ f_2' = -2\kappa f_4 - 2\tau f_6, \\ f_3' = 2\tau f_6, \\ f_4' = \kappa f_2 - \kappa f_1 - \tau f_5, \\ f_5' = \kappa f_6 + \tau f_4, \\ f_6' = \tau f_2 - \kappa f_5 - \tau f_3, \end{cases} \quad (1.36)$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned} f_1(s_0) &= f_2(s_0) = f_3(s_0) = 1, \\ f_4(s_0) &= f_5(s_0) = f_6(s_0) = 0. \end{aligned}$$

Para ver isso, basta derivar as expressões para f_i e usar as fórmulas de Frenet. Como o sistema (1.36) com as condições iniciais dadas tem solução única e as funções

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(s) &= \bar{f}_2(s) = \bar{f}_3(s) \equiv 1, \\ \bar{f}_4(s) &= \bar{f}_5(s) = \bar{f}_6(s) \equiv 0, \end{aligned}$$

também são soluções para o sistema segue que

$$\begin{aligned} f_1 &= \bar{f}_1 = 1, \\ f_2 &= \bar{f}_2 = 1, \\ f_3 &= \bar{f}_3 = 1, \\ f_4 &= \bar{f}_4 = 0, \\ f_5 &= \bar{f}_5 = 0, \\ f_6 &= \bar{f}_6 = 0. \end{aligned}$$

A orientação positiva do triedro decorre da continuidade da solução. De fato, como $(T(s), N(s), B(s))$ é ortonormal, temos duas possibilidades: ou $B(s) = T(s) \times N(s)$ ou $B(s) = -T(s) \times N(s)$. A primeira possibilidade corresponde ao produto misto

$$\det [T(s) \quad N(s) \quad B(s)] > 0$$

enquanto que a segunda possibilidade corresponde ao produto misto

$$\det [T(s) \quad N(s) \quad B(s)] < 0.$$

Como a condição inicial é

$$\det [T(s_0) \quad N(s_0) \quad B(s_0)] = \det [V_0 \quad W_0 \quad V_0 \times W_0] > 0$$

por continuidade, temos $\det [T(s) \ N(s) \ B(s)] > 0$ para todo s .

Resta definir a curva α . A curva α tal que $\alpha(s_0) = p_0$ e $\alpha'(s) = T(s)$ é definida de forma única (integrando esta última relação) por

$$\alpha(s) = p_0 + \int_{s_0}^s T(t) dt. \quad (1.37)$$

Se a curvatura de α é positiva, então o triedro de Frenet de α está definido e satisfaz as fórmulas de Frenet. Da definição de α temos $\alpha(s_0) = p_0$ e

$$T_\alpha(s) = \alpha'(s) = T(s),$$

$$T_\alpha(s_0) = \alpha'(s_0) = V_0.$$

Das definições de curvatura e de vetor normal, e da primeira equação de (1.35), temos

$$\alpha''(s) = T'_\alpha(s) = T'(s) = \kappa(s) N(s),$$

donde

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha(s) &= \|T'_\alpha(s)\| = \kappa(s), \\ N_\alpha(s) &= \frac{T'_\alpha(s)}{\kappa_\alpha(s)} = \frac{T'(s)}{\kappa(s)} = N(s), \end{aligned}$$

em particular, vale também $\alpha''(s_0) = \kappa(s_0) N(s_0) = \kappa(s_0) W_0$. Finalmente, das definições de vetor binormal e do fato de $(T(s), N(s), B(s))$ ser um referencial ortonormal positivo, como vimos acima, segue que

$$B_\alpha(s) = T_\alpha(s) \times N_\alpha(s) = T(s) N_\alpha(s) = B(s),$$

donde

$$B'_\alpha(s) = B(s)$$

e, da definição de torção e da terceira equação de (1.35),

$$\tau_\alpha(s) = \langle B'_\alpha(s), N_\alpha(s) \rangle = \langle B'(s), N(s) \rangle = \tau(s).$$

Para terminar a demonstração do teorema, seja $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ outra curva tal que $\kappa_\beta = \kappa_\alpha$ e $\tau_\beta = \tau_\alpha$ [resp. $\tau_\beta = -\tau_\alpha$]. Seja F uma isometria do espaço tal que

$$\begin{aligned} F(\beta(s_0)) &= \alpha(s_0), \\ dF_{\beta(s_0)} T_\beta(s_0) &= T_\alpha(s_0) = V_0, \\ dF_{\beta(s_0)} N_\beta(s_0) &= N_\alpha(s_0) = W_0, \\ dF_{\beta(s_0)} B_\beta(s_0) &= B_\alpha(s_0) = V_0 \times W_0, \end{aligned}$$

[resp. $dF_{\beta(s_0)} B_\beta(s_0) = -B_\alpha(s_0)$]. Segue do lema anterior que a curva $\bar{\beta}(s) = (F \circ \beta)(s)$ é uma curva parametrizada por comprimento de arco com a mesma curvatura e torção que β , e portanto com a mesma curvatura e torção que α ; logo, $\bar{\beta}$ satisfaz as mesmas equações de (1.35). Como $\bar{\beta}$ também possui os mesmos pontos inicial, vetor tangente, vetor normal e vetor binormal iniciais de α , pela unicidade da solução de (1.35) $\bar{\beta}$ possui o mesmo triedro de Frenet de α . Em particular, $\bar{\beta}$ possui o mesmo vetor tangente de α e portanto $\bar{\beta}$ também é dada por (1.37), logo é α . ■

1.77 Exemplo (Curvas com a mesma curvatura e torção que não são congruentes). Se removermos a hipótese $\kappa > 0$, a conclusão do teorema anterior deixa de ser válida. O principal obstáculo é que onde a curvatura se anula, a derivada segunda é zero e o vetor normal N não está definido, conseqüentemente o vetor binormal B e a torção τ também não estão definidas. Mesmo assim, seria em princípio razoável definir a torção de uma curva onde a torção é nula em todo ponto exceto em um ponto onde ela não está definida

como sendo zero também aí. O exemplo a seguir mostra que isso não é realmente razoável ou, se aceitarmos tal definição, o teorema fundamental das curvas no espaço não se aplica. As curvas

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t = 0, \\ (t, 0, e^{-1/t^2}) & \text{se } t \neq 0, \end{cases}$$

e

$$\beta(t) = \begin{cases} (t, e^{-1/t^2}, 0) & \text{se } t < 0, \\ 0 & \text{se } t = 0, \\ (t, 0, e^{-1/t^2}) & \text{se } t > 0, \end{cases}$$

são curvas regulares suaves que possuem a mesma curvatura e torção, mas não são congruentes. De fato, denotando $f(t) = e^{-1/t^2}$, $f(0) = 0$, temos $f^{(k)}(0) = 0$ para todo k . Se $t > 0$ temos

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\|(1, 0, f'(t)) \times (0, 0, f''(t))\|}{(1 + [f'(t)]^2)^{3/2}} = \frac{|f''(t)|}{(1 + [f'(t)]^2)^{3/2}} = \kappa_\beta(t),$$

e se $t < 0$, temos

$$\kappa_\beta(t) = \frac{\|\beta'(t) \times \beta''(t)\|}{\|\beta'(t)\|^3} = \frac{\|(1, f'(t), 0) \times (0, f''(t), 0)\|}{(1 + [f'(t)]^2)^{3/2}} = \frac{|f''(t)|}{(1 + [f'(t)]^2)^{3/2}} = \kappa_\alpha(t),$$

enquanto que

$$\kappa_\alpha(0) = \kappa_\beta(0) = 0.$$

Ambas as curvas tem torção nula, já que a primeira é plana e a segunda tem um pedaço plano para $t < 0$ e outro pedaço plano para $t > 0$. Como a segunda curva não é plana, pois o seu pedaço no intervalo de parâmetros $t < 0$ está contido no plano $z = 0$ enquanto que o outro pedaço no intervalo de parâmetros $t > 0$ está contido no plano $y = 0$, elas não podem ser congruentes. O mais natural, no entanto, é dizer que a curva β não possui torção definida no ponto $t = 0$, onde ela passa de um plano para outro, do que dizer que sua torção é zero ali (o que de qualquer modo entraria em conflito com a Proposição 1.72, em que provamos que todas as curvas com torção nula são planas). \square

Capítulo 2

Teoria Global das Curvas

2.1 Número de Rotação de uma Curva Fechada

2.1.1 Número de Rotação e Curvatura Total

2.1 Definição. Uma **curva fechada** de classe C^k é uma curva parametrizada $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k tal que α e suas derivadas até ordem k coincidem em a e b , isto é,

$$\alpha(a) = \alpha(b)$$

e

$$\begin{aligned}\alpha'(a) &= \alpha'(b), \\ \alpha''(a) &= \alpha''(b), \\ &\vdots \\ \alpha^{(k)}(a) &= \alpha^{(k)}(b).\end{aligned}$$

Uma curva fechada é **simples** se ela não possui outras autointerseções. \square

Equivalentemente, uma curva fechada é uma curva parametrizada *periódica* $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k , isto é, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha(t) = \alpha(t + c)$$

para todo t . Se $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma curva simples parametrizada pelo comprimento de arco, então L é exatamente o comprimento da curva do ponto de vista geométrico.

Medir o número de voltas que o vetor tangente dá quando se percorre uma curva fechada uma vez é uma *propriedade global* da curva. Uma maneira de medir a quantidade de voltas que o vetor tangente dá ao percorrer a curva é através da aplicação $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$ (\mathbb{S}^1 denota o círculo centrado na origem de raio 1) definida por

$$\phi(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Claramente, quando t varia de a até b dando uma volta completa na curva, $\phi(t)$ percorre o círculo um número inteiro de vezes. Se pararmos em certo instante $t_0 < b$, teremos medido o número de voltas que o vetor tangente dá até este instante, e em geral este não será um número inteiro. Para uma definição mais precisa deste conceito, precisaremos considerar antes algumas definições e resultados.

2.2 Proposição. Dada uma função contínua $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$ existe uma função contínua $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\phi(t) = (\cos \theta(t), \text{sen } \theta(t)). \quad (2.1)$$

Se $\phi(a) = \phi(b)$, então

$$\frac{1}{2\pi} [\theta(b) - \theta(a)]$$

é um número inteiro que independe da escolha de θ .

Prova: Uma função contínua $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz (2.1) pode ser definida como sendo o ângulo que o vetor $\phi(t)$ faz com o eixo x positivo. A escolha de $\theta(t)$ não é única, já que $\theta(t) + 2\pi k$ satisfaz (2.1) para qualquer inteiro k .

Para mostrar que podemos escolher θ contínua, proceda da seguinte maneira. Note que em cada semiplano o valor contínuo do ângulo $\theta(t)$ que o vetor unitário $\phi(t)$ faz com o semieixo x positivo é determinado de forma única uma vez que o valor foi fixado para algum t . Porque ϕ é uniformemente contínua em $[a, b]$, existe uma partição

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

do intervalo $[a, b]$ tal que para cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$ a imagem $\phi([t_i, t_{i+1}])$ está inteiramente contida em um semiplano. Fixe o valor do ângulo inicial $\theta(t_0)$. Isso determina de forma única o valor contínuo de $\theta(t)$ no subintervalo $[t_0, t_1]$. Como o valor $\theta(t_1)$ está fixado, o valor contínuo de $\theta(t)$ está agora determinado de forma única no subintervalo $[t_1, t_2]$. Procedendo desta forma, definimos o valor contínuo de $\theta(t)$ em todo o intervalo $[a, b]$.

Se $\phi(a) = \phi(b)$, então

$$\begin{aligned} \cos \theta(a) &= \cos \theta(b), \\ \text{sen } \theta(a) &= \text{sen } \theta(b), \end{aligned}$$

logo

$$\theta(b) = \theta(a) + 2\pi k$$

para algum inteiro k .

Se $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é outra função contínua que satisfaz

$$\phi(t) = (\cos \omega(t), \text{sen } \omega(t)),$$

então

$$\begin{aligned} \cos \theta(t) &= \cos \omega(t), \\ \text{sen } \theta(t) &= \text{sen } \omega(t), \end{aligned}$$

logo

$$\omega(t) = \theta(t) + 2\pi k(t),$$

onde $k(t)$ é uma função tomando valores inteiros. Mas

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} [\omega(t) - \theta(t)],$$

logo é uma função contínua assumindo valores inteiros, portanto é uma função constante. Em particular,

$$\omega(b) - \theta(b) = \omega(a) - \theta(a),$$

donde

$$\omega(b) - \omega(a) = \theta(b) - \theta(a).$$

■

2.3 Definição. Dada uma função contínua $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$, uma função contínua $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\phi(t) = (\cos \theta(t), \operatorname{sen} \theta(t))$$

é chamada uma **função ângulo polar** para ϕ .

Se $\phi(a) = \phi(b)$, o número inteiro

$$\frac{1}{2\pi} [\theta(b) - \theta(a)] \quad (2.2)$$

é chamado o **grau** da função ϕ .

Se $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva fechada, o grau da função $\phi_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida por

$$\phi_0(t) = \frac{\alpha(t)}{\|\alpha(t)\|}$$

é chamada o **número de voltas** da curva α [conhecido como *winding number* em inglês], enquanto que o grau da *função tangente unitária* $\phi_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida por

$$\phi_1(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

é chamado o **número de rotação** da curva α [*turning number*, também conhecido como *rotation index*, em inglês]. \square

O *número de voltas* mede o número efetivo de voltas que uma curva dá em torno de um ponto; este conceito é intensa e extensivamente estudado em livros de Análise Complexa (lá conhecido como o *índice de um caminho fechado*) e não nos ocuparemos com ele aqui.

2.4 Exemplo. Se $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definida por

$$\alpha(s) = (\cos s, \operatorname{sen} s),$$

então a função tangente unitária de α é

$$\phi_1(s) = (-\operatorname{sen} s, \cos s)$$

e uma função ângulo polar para ϕ_1 é

$$\theta(s) = s + \frac{\pi}{2}.$$

O número de rotação de α é exatamente 1, como esperado.

Se $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definida por

$$\alpha(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t),$$

de modo que

$$\alpha'(t) = 2(-\operatorname{sen} 2t, \cos 2t),$$

então a função tangente unitária de α é

$$\phi_1(t) = (-\operatorname{sen} 2t, \cos 2t)$$

e uma função ângulo polar para ϕ_1 é

$$\theta(t) = 2t + \frac{\pi}{2}.$$

O número de rotação de α é exatamente 2, como esperado.

Em geral, se $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definida por

$$\alpha(t) = (\cos kt, \operatorname{sen} kt),$$

então o número de rotação de α é exatamente k ,

Note que nestes casos o número de rotação da curva coincide com o número de voltas da curva, apesar de eles serem conceitos completamente distintos. \square

Calcular o número de rotação de uma curva diretamente da definição é difícil em geral. Veremos a seguir que para curvas regulares ele pode ser calculado analiticamente através da curvatura. Isso não é surpreendente, uma vez que a curvatura mede exatamente a mudança da direção do vetor tangente. Uma vez que estamos interessados em saber quantas voltas o vetor tangente fez ao longo da curva desde o ponto inicial até o ponto final, é possível medir isso integrando a curvatura da curva desde o ponto inicial até o ponto final.

2.5 Definição. Se $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, então a **curvatura total** de α é definida por

$$\kappa_{\text{total}} = \int_0^L \kappa(s) ds. \quad (2.3)$$

Se $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada qualquer, então

$$\kappa_{\text{total}} = \int_a^b \kappa(t) \|\alpha'(t)\| dt. \quad (2.4)$$

□

Usando a fórmula da curvatura para curvas arbitrariamente parametrizadas (1.13), segue que

$$\kappa_{\text{total}} = \int_a^b \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad (2.5)$$

2.6 Teorema. O número de rotação de uma curva fechada regular é igual à sua curvatura total dividida por 2π .

Prova: Seja $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Como vimos na demonstração do Teorema Fundamental para as Curvas Planas (Teorema (1.64)), se

$$\theta(s) = \theta_0 + \int_0^s \kappa(\xi) d\xi,$$

a função tangente unitária $\phi_1 : [0, L] \rightarrow \mathbb{S}^1$ é exatamente

$$\phi_1(s) = \alpha'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)).$$

Segue da definição e do teorema fundamental do cálculo que o número de rotação de α é

$$\begin{aligned} \text{grau } \phi_1 &= \frac{1}{2\pi} [\theta(L) - \theta(0)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \theta'(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \kappa_{\text{total}}. \end{aligned}$$

■

2.7 Exemplo (Lemniscata de Bernoulli). A lemniscata de Bernoulli é a curva fechada $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida parametricamente por

$$\alpha(t) = \left(\frac{a \sin t}{1 + \cos^2 t}, \frac{a \sin t \cos t}{1 + \cos^2 t} \right). \quad (2.6)$$

Ela tem o formato de “∞”. Como uma elipse, uma lemniscata de Bernoulli tem focos F_1 e F_2 , mas ela é definida como o lugar geométrico dos pontos P tais que o produto das distâncias dos focos é uma certa constante, mais especificamente,

$$\alpha(I) = \{P \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(P, F_1) \text{dist}(P, F_2) = f^2\}$$

onde $2f = \text{dist}(F_1, F_2)$, isto é, f é a média da distância entre os focos. Em coordenadas, se $P = (x, y)$, $F_1 = (-f, 0)$ e $F_2 = (f, 0)$, temos

$$\left[(x+f)^2 + y^2 \right] \left[(x-f)^2 + y^2 \right] = f^4,$$

de onde obtemos a equação cartesiana (de quarto grau) para a lemniscata de Bernoulli

$$(x^2 + y^2)^2 = 2f^2 (x^2 - y^2). \quad (2.7)$$

A parametrização dada acima satisfaz esta equação.

Intuitivamente, vemos que a lemniscata deve ter número de rotação igual a zero. Quando o vetor tangente percorre o primeiro laço da curva (o laço direito) a partir do ponto médio da curva que une os dois laços, ele gira para esquerda, voltando pela primeira vez ao ponto inicial; a partir daí ele percorre o segundo laço da curva (o laço esquerdo) girando para a direita, retornando ao ponto inicial e desfazendo toda a volta anterior.

Vamos calcular o número de rotação da lemniscata através da sua curvatura total. Embora a sua curvatura é uma função complicada, a sua curvatura total é simples de obter. De fato, como α é uma curva periódica de período 2π , segue que

$$\kappa_{\text{total}} = \int_0^{2\pi} \kappa(t) \|\alpha'(t)\| dt = \int_{-\pi}^{\pi} \kappa(t) \|\alpha'(t)\| dt.$$

Como $x(t), y(t)$ são funções ímpares, derivadas de funções pares são funções ímpares e derivadas de funções ímpares são funções pares, segue que $x'(t), y'(t)$ são funções ímpares, enquanto que $x''(t), y''(t)$ são funções pares. Como o produto de uma função par e uma função ímpar é ímpar, temos que os produtos $x'(t)y''(t)$ e $y'(t)x''(t)$ são ambas funções ímpares. Portanto, o integrando de

$$\kappa_{\text{total}} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{\left([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\right)^{1/2}} dt$$

é uma função ímpar, logo

$$\kappa_{\text{total}} = 0.$$

□

2.1.2 Número de Rotação de Curvas Fechadas Simples

Intuitivamente, o número de rotação de uma curva fechada simples deve ser ± 1 . Isto é verdade, conforme provaremos a seguir.

2.8 Definição. Dizemos que duas aplicações contínuas $\phi_0, \phi_1 : [a, b] \rightarrow X$ são **homotópicas** se existe uma aplicação contínua

$$F : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow X$$

tal que

(i) $F(0, t) = \phi_0(t)$ para todo $t \in [a, b]$;

(ii) $F(1, t) = \phi_1(t)$ para todo $t \in [a, b]$.

A aplicação F é chamada uma **homotopia** entre ϕ_1 e ϕ_2 .

Se $\phi_0, \phi_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$ e $\phi(a) = \phi(b)$, requeremos ainda que

(iii) $F(s, a) = F(s, b)$ para todo $s \in [0, 1]$.

Dizemos que duas curvas regulares fechadas $\alpha_0, \alpha_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ são **regularmente homotópicas** se existe uma homotopia F entre elas com a propriedade adicional

(iv) $\alpha_s(t) = F(s, t)$ é uma curva regular para todo $s \in [0, 1]$.

Neste caso, F é chamada uma **homotopia regular** entre α_0 e α_1 . □

Uma homotopia nada mais é que uma deformação contínua que transforma ϕ_0 em ϕ_1 ; uma homotopia regular é uma deformação contínua através de curvas regulares.

2.9 Exemplo. Uma homotopia regular entre a esfera

$$\alpha_0(t) = (R \cos t, R \sin t)$$

e a elipse

$$\alpha_1(t) = (a \cos t, b \sin t)$$

é a aplicação $F : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(s, t) = ((1-s)R + sa) \cos t, ((1-s)R + sb) \sin t.$$

□

2.10 Proposição. Se $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$ são homotópicas, então elas tem o mesmo grau.

Consequentemente, se $\alpha_0, \alpha_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ são duas curvas regularmente homotópicas, então elas tem o mesmo número de rotação.

Prova: Para cada s fixado, podemos definir o grau da aplicação $\phi_s(t) = F(s, t)$. Esta aplicação é contínua e como o grau toma valores inteiros, ela é necessariamente a função constante. ■

2.11 Teorema. Uma curva fechada simples tem número de rotação ± 1 , o sinal dependendo da orientação.

Prova: Escolha uma reta tangente à curva tal que a curva está contida em um dos lados desta tangente (por exemplo, para obter uma reta tangente com esta propriedade, escolha inicialmente uma reta que não intercepta a curva e translate esta reta paralelamente até que ela seja tangente à curva). Escolhendo um sistema de coordenadas apropriado ou via uma isometria, podemos assumir esta tangente é o eixo x e podemos tomar um dos pontos de tangência da reta com a curva como o ponto inicial e final da curva, de modo que a parametrização da curva é da forma

$$\alpha(t) = (x(t), y(t))$$

com

$$y(a) = y(b) = 0$$

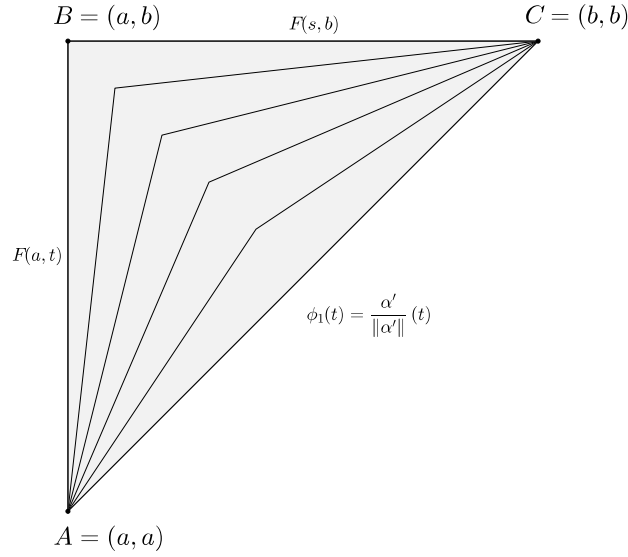
e

$$y(t) \geq 0$$

para todo t .

Como definir uma homotopia regular é consideravelmente difícil, definiremos uma homotopia contínua diretamente entre a aplicação tangente unitária de α e uma aplicação no círculo com grau fácil de calcular. Ao invés de definir a homotopia no quadrado $[0, 1] \times [a, b]$, vamos defini-la na região triangular

$$Q = \{(s, t) : a \leq s \leq t \leq b\}.$$



Definimos a *aplicação secante* $F : Q \rightarrow \mathbb{S}^1$

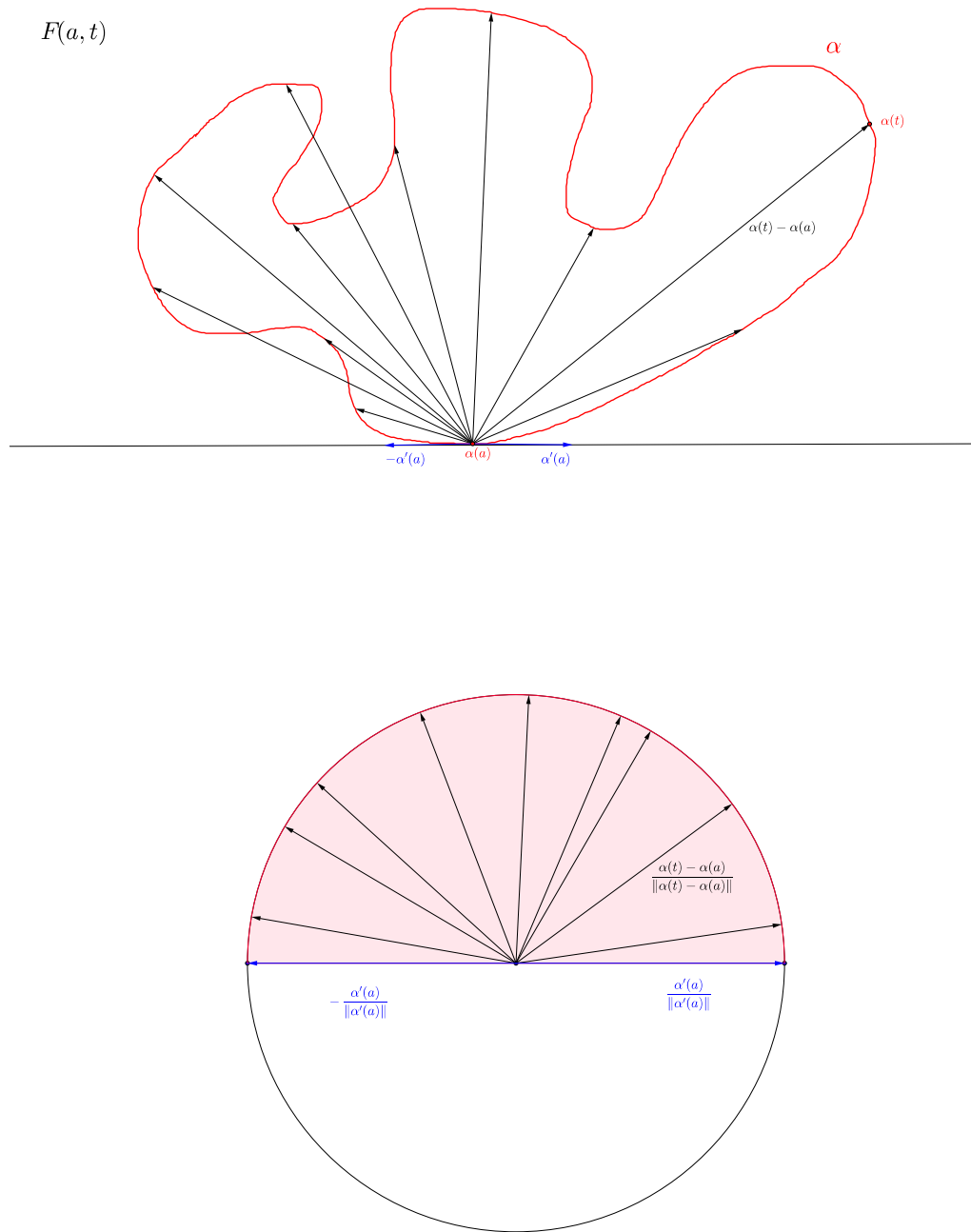
$$F(s, t) = \begin{cases} \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} & \text{se } s = t, \\ -\frac{\alpha'(a)}{\|\alpha'(a)\|} & \text{se } s = a \text{ e } t = b, \\ \frac{\alpha(t) - \alpha(s)}{\|\alpha(t) - \alpha(s)\|} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como a curva é simplesmente fechada, $\alpha(t) \neq \alpha(s)$ para todo $t \neq s$, exceto quando $s = a$ e $t = b$, portanto F está bem definida; ela é contínua porque α é continuamente diferenciável, logo as secantes tendem às tangentes quando $s \rightarrow t$.

Sejam $A = (a, a)$, $B = (a, b)$ e $C = (b, b)$ os vértices do triângulo Q . A restrição de F ao lado AC (hipotenusa do triângulo Q) é exatamente a função tangente unitária

$$\phi_1(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

da curva α . Assim por construção, ϕ_1 é homotópica à restrição de F ao caminho consistindo dos lados AB e BC unidos nesta orientação. Usando a proposição anterior, basta provar que esta restrição tem número de rotação ± 1 . De fato, se escolhermos a orientação positiva (antihorária), a restrição $F(a, t)$ de F ao lado AB através das secantes normalizadas $\alpha(t) - \alpha(a)$ cobre metade do círculo \mathbb{S}^1 na direção antihorária: o vetor inicial é $\alpha'(a)$ e o vetor final é $-\alpha'(a)$, sendo que por continuidade todas as posições intermediárias são cobertas e, como a curva encontra-se completamente acima do eixo x , nenhum vetor aponta na direção do semidisco inferior (veja as duas figuras abaixo).



A restrição $F(s, b)$ de F ao lado BC através das secantes normalizadas $\alpha(b) - \alpha(s)$ cobre a outra metade do círculo \mathbb{S}^1 na direção antihorária (os vetores apontam exatamente na direção contrária dos vetores da primeira figura acima). Portanto, o grau de F restrito a $AB \cup BC$ é $+1$; se escolhermos a orientação horária para a curva α , o grau é -1 . ■

2.2 Curvas Fechadas Simples Convexas

2.12 Definição. Uma curva plana regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma **curva convexa** se para todo $t \in I$ o traço $\alpha(I)$ de α está inteiramente contido em um lado do semiplano fechado determinado pela reta tangente à curva em t . \square

2.13 Teorema. *Uma curva plana regular fechada simples é convexa se e somente se sua curvatura não muda de sinal.*

Prova: Seja $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametrização da curva por comprimento de arco, e como antes considere a função ângulo

$$\theta(s) = \theta_0 + \int_0^s \kappa(\xi) d\xi,$$

para a função tangente unitária, de modo que

$$\alpha'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$$

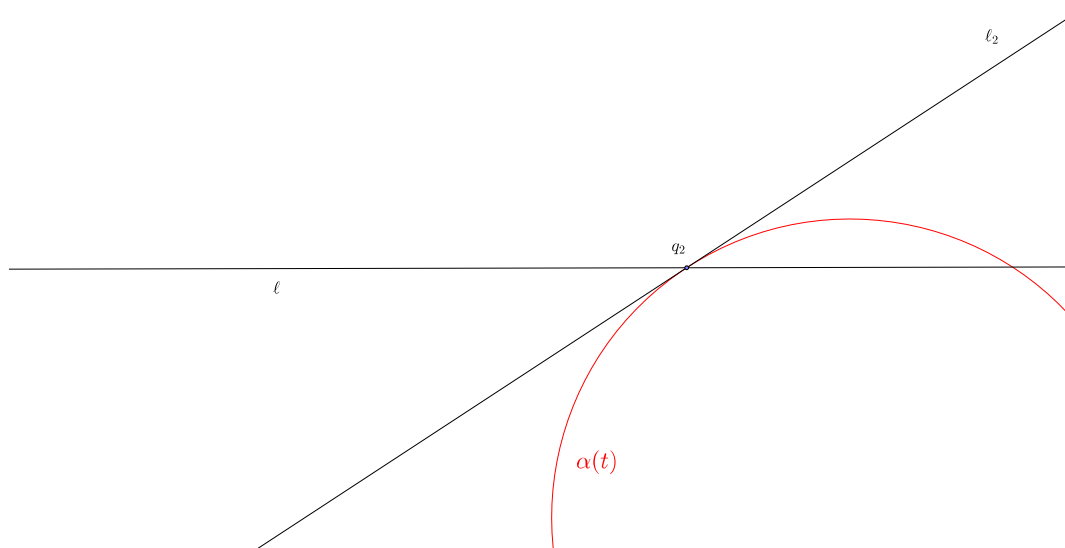
e

$$\theta'(s) = \kappa(s).$$

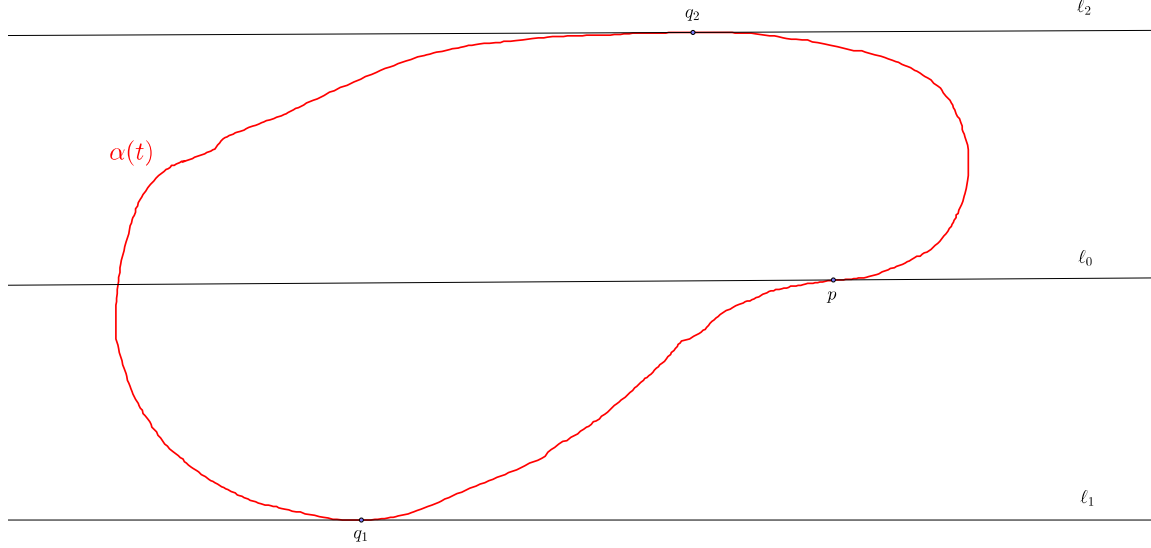
κ não muda de sinal $\implies \alpha$ convexa.

Se κ não muda de sinal, então a função ângulo $\theta(s)$ é crescente ou decrescente, já que $\theta'(s) \geq 0$ ou $\theta'(s) \leq 0$, respectivamente.

Suponha por absurdo que α não é convexa. Então existe um ponto p em α tal que α está em ambos os lados da reta tangente ℓ_0 a α em p . Como α é uma curva fechada existem pontos q_1, q_2 em lados opostos da reta ℓ_0 que estão mais distantes de ℓ_0 . As retas tangentes ℓ_1, ℓ_2 a α em q_1, q_2 , respectivamente, devem ser paralelas a ℓ_0 . Caso contrário, poderíamos construir uma reta ℓ paralela a ℓ_0 passando por q_i ; como ℓ não é tangente a α , existem pontos de α em ambos os lados de ℓ , logo existiriam pontos de α mais distantes de ℓ_0 que q_i .



As retas tangentes ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 são portanto paralelas e distintas.



Dois dos três pontos p, q_1, q_2 devem ter vetores tangentes com o mesmo sentido. Digamos, se

$$\begin{aligned} p &= \alpha(s_0), \\ q_1 &= \alpha(s_1), \\ q_2 &= \alpha(s_2), \end{aligned}$$

então existem $s_i < s_j$ tais que

$$\alpha'(s_i) = \alpha'(s_j)$$

de modo que

$$\theta(s_i) = \theta(s_j) + 2\pi k$$

para algum inteiro k . Como θ é uma função monótona e o número de rotação de uma curva regular fechada simples é ± 1 , segue que temos apenas três possibilidades: $k = 0$, $k = 1$ ou $k = -1$.

Se $k = 0$, então $\theta(s_i) = \theta(s_j)$ e a monotonicidade de θ implica que $\theta(s)$ é constante no intervalo $[s_i, s_j]$; mas isso implicaria por sua vez que as retas tangentes ℓ_i, ℓ_j são idênticas, uma contradição. Se $k = \pm 1$, então θ é constante nos intervalos $[0, s_i]$ e $[s_j, L]$; em qualquer um destes casos, segue que um dos dois arcos da curva α entre $\alpha(s_i)$ e $\alpha(s_j)$ é um segmento de reta, portanto novamente as retas tangentes ℓ_i, ℓ_j são idênticas, produzindo um absurdo.

α convexa $\implies \kappa$ não muda de sinal.

Reciprocamente, assuma α convexa e suponha por absurdo que κ muda de sinal, de modo que a função ângulo $\theta(s)$ não é monótona. Então existem $s_0, s_1, s_2 \in [0, L]$ tais que

$$s_1 < s_0 < s_2$$

mas

$$\theta(s_1) = \theta(s_2) \neq \theta(s_0). \quad (2.8)$$

Em particular,

$$\alpha'(s_1) = \alpha'(s_2).$$

Como o número de rotação de uma curva regular fechada simples é ± 1 , a função tangente unitária $\alpha'(s)$ tem como imagem o círculo \mathbb{S}^1 todo. Logo, existe $s_3 \in [0, L]$ tal que

$$\alpha'(s_3) = -\alpha'(s_1).$$

Se as retas tangentes a α em $\alpha(s_1)$, $\alpha(s_2)$ e $\alpha(s_3)$ fossem distintas, então elas seriam paralelas e uma estaria entre as outras duas, contrariando a convexidade de α . Portanto duas destas retas tangentes coincidem e existem pontos $p = \alpha(s_i)$, $q = \alpha(s_j)$ da curva α que estão na mesma reta tangente.

Afirmamos que o arco da curva α entre p e q é um segmento de reta. De fato, seja \overline{pq} o segmento de reta entre p e q e suponha que exista um ponto r em \overline{pq} que não está em α . Seja ℓ a reta perpendicular a \overline{pq} passando por r . Como α é convexa, ℓ não é tangente a α , logo ℓ intercepta α em pelo menos dois pontos r_1, r_2 . Pela convexidade de α , estes pontos estão ou ambos acima da reta tangente a α que passa por p e q , ou estão ambos abaixo dela. Mas se r_1 denota o ponto mais próximo a r , então a reta tangente a α em r_1 tem r_2 de um lado e um dos pontos p, q do outro, contradizendo a convexidade de α .

Portanto, o segmento de reta \overline{pq} está contido no traço de α . Isso implica que os vetores tangentes a α em p e q são idênticos, logo $p = \alpha(s_1)$ e $q = \alpha(s_2)$. Assim, α restrita ao intervalo $[s_1, s_2]$ é um segmento de reta e $\theta(s)$ é uma constante neste intervalo, contradizendo (2.8). ■

Como consequência do último parágrafo da demonstração do teorema anterior temos o seguinte resultado:

2.14 Corolário. *Seja $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização de uma curva plana convexa fechada simples por comprimento de arco e $\theta(s)$ a função ângulo para a tangente unitária. Se $\theta(s_1) = \theta(s_2)$ para algum $s_1 < s_2$, então α restrita ao intervalo $[s_1, s_2]$ é um segmento de reta.*

2.3 Teorema dos Quatro Vértices para Curvas Convexas

Considere a elipse $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\alpha(t) = (x_0 + a \cos t, y_0 + b \sin t).$$

A elipse é uma curva fechada, simples e convexa. Como vimos no Exemplo 1.34, sua curvatura é

$$\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}},$$

de modo que

$$\kappa'(t) = \frac{3ab(b^2 - a^2) \sin 2t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{5/2}}.$$

Segue que $\kappa'(t) = 0$ se e somente se $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Estes valores de t correspondem aos pontos da elipse que se situam em seus eixos. Os quatro pontos são pontos de máximo e mínimo para a curvatura. De fato, como

$$\kappa''(t) = \frac{6ab(b^2 - a^2) \cos 2t - \left[\frac{d}{dt} (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{5/2} \right] \sin 2t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^5},$$

se $a > b$ temos

$$\begin{aligned} \kappa''(0) &= \kappa''(\pi) > 0, \\ \kappa''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \kappa''\left(\frac{3\pi}{2}\right) < 0, \end{aligned}$$

isto é, os dois pontos da elipse que se situam em seu eixo maior são pontos de máximo ($\kappa(0) = \kappa(\pi) = a/b^2$), enquanto que os dois pontos da elipse que se situam em seu eixo menor são pontos de mínimo ($\kappa(\pi/2) = \kappa(3\pi/2) = b/a^2$). De fato, nos pontos próximos aos focos, a curvatura da elipse é maior.

2.15 Definição. Um **vértice** de uma curva plana regular é um ponto onde a curvatura com sinal é um máximo ou mínimo local. \square

Em uma curva fechada simples a função contínua curvatura (com sinal) atinge um máximo e um mínimo, logo existem pelo menos dois vértices distintos. Vértices sempre vem em número par:

2.16 Lema. *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável tal que $f(a) = f(b)$, $f'(a) = f'(b)$ e f não é constante em nenhum subintervalo, então f possui o mesmo número de mínimos e máximos locais (convencionando que se eles ocorrem nos extremos, são contados como um).*

Prova: Pois f' possui um número par de zeros que mudam de sinal no intervalo $[a, b]$ (convencionando que se eles ocorrem nos extremos eles contam como um zero). \blacksquare

Consequentemente toda curva fechada simples possui um número par de vértices, e os máximos e mínimos vem em pares. O fato de termos encontrado exatamente 2 máximos e 2 mínimos para a elipse é a pior situação possível, como o Teorema dos Quatro Vértices afirma. Este resultado foi provado em 1909 por Syamadas Mukhopadhyaya para curvas estritamente convexas; o caso geral foi demonstrado em 1912 por Adolf Kneser (veja [DeTurck] para a história do problema, generalizações, extensões, a recíproca do teorema e uma extensa lista de referências). Neste seção veremos uma demonstração para curvas fechadas simples convexas e na seção seguinte apresentaremos a demonstração direta, mais simples e intuitiva, para o caso geral dada por Robert Osserman em 1985 ([Osserman]).

2.17 Teorema (Teorema dos Quatro Vértices para Curvas Convexas). *Uma curva fechada simples plana convexa possui pelo menos quatro vértices.*

Prova: Se κ é constante em qualquer subintervalo, então todos os pontos deste subintervalo são máximos e mínimos locais e não há nada a provar. Podemos portanto assumir que a curva não contém segmentos de reta ou arcos de círculo.

Conforme observado antes, a curva contém pelo menos dois vértices distintos, um máximo e um mínimo. Posto que vértices de máximo e mínimo vem em pares, como vimos no lema, a única possibilidade do teorema ser falso é se a curva possuir exatamente um máximo e um mínimo. Suponha por absurdo que isso ocorre. Parametrize a curva através de uma parametrização por comprimento de arco $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(0)$ é o vértice de mínimo. Seja $\alpha(s_0)$ o vértice de máximo, $0 < s_0 < L$. Assim,

$$\kappa'(0) = \kappa'(s_0) = 0$$

e κ' muda de sinal apenas em s_0 , sendo positiva no intervalo $(0, s_0)$ e negativa em (s_0, L) .

Através de uma isometria, podemos assumir que os pontos $\alpha(0)$ e $\alpha(s_0)$ estão contidos no eixo x . Ou seja, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ com

$$y(0) = y(s_0) = 0.$$

A curva não intercepta o eixo x em nenhum outro ponto, caso contrário por convexidade ela conteria todo o segmento do eixo x entre $\alpha(0)$ e $\alpha(s_0)$ (argumento análogo ao usado no final da demonstração do Teorema 2.13) Portanto, este segmento divide a curva em dois arcos e a função $y(s)$ muda de sinal apenas no ponto s_0 , tendo sinal constante em cada um destes arcos, isto é, nos intervalos $(0, s_0)$ e (s_0, L) . Segue que a função

$$\kappa'(s)y(s)$$

tem o mesmo sinal nestes dois intervalos, só se anulando em 0 e s_0 . Em particular,

$$\int_0^L \kappa'(s)y(s) ds \neq 0.$$

Mas, integrando esta integral por partes, obtemos

$$\int_0^L \kappa'(s)y(s) ds = \kappa y|_0^L - \int_0^L \kappa(s)y'(s) ds = - \int_0^L \kappa(s)y'(s) ds,$$

e a fórmula de Frenet

$$N' = -\kappa T$$

implica que

$$x'' = -\kappa y',$$

(pois $T = (x', y')$, $N = (-y', x')$ e $N' = (-y'', x'')$), logo

$$\int_0^L \kappa'(s) y(s) ds = \int_0^L x''(s) ds = x'(L) - x'(0) = 0,$$

uma contradição. ■

2.18 Proposição. *Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva parametrizada por comprimento de arco cuja função curvatura $\kappa(s)$ é estritamente monótona, então α não possui autointerseções.*

Prova: Suponha $\alpha(a) = \alpha(b)$ é o primeiro ponto de autointerseção. Através de uma isometria, podemos assumir que os pontos $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ estão contidos no eixo x , isto é,

$$y(a) = y(b) = 0,$$

que o arco da curva $\alpha((a, b))$ entre os pontos $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ está contido no semiplano $y > 0$ e que $\alpha'(a) = (1, 0)$. Para fixar idéias, assumamos κ estritamente crescente, de modo que

$$\int_a^b \kappa'(s) y(s) ds > 0.$$

Integrando por partes, obtemos como na demonstração do teorema anterior

$$\begin{aligned} \int_a^b \kappa'(s) y(s) ds &= \kappa y|_a^b - \int_a^b \kappa(s) y'(s) ds \\ &= - \int_a^b \kappa(s) y'(s) ds \\ &= \int_a^b x''(s) ds \\ &= x'(b) - x'(a) \\ &= x'(b) - 1 \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

já que $\|\alpha'(b)\|^2 = [x'(b)]^2 + [y'(b)]^2 = 1$, uma contradição. ■

2.4 Teorema dos Quatro Vértices: Caso Geral

2.19 Teorema (Teorema dos Quatro Vértices). *Uma curva fechada simples plana possui pelo menos quatro vértices.*

A essência da demonstração de Osserman, como ele próprio afirma em seu artigo, é considerar o *círculo circunscrito*. Uma vez que fazemos isso, fica claro geometricamente porque o resultado é verdadeiro.

2.20 Exemplo. Assim, o Teorema dos Quatro Vértices não é válido para curvas que possuem autointerseções. A cardióide mostrada na figura abaixo



cuja equação em coordenadas polares é

$$r = 1 - 2 \operatorname{sen} \theta,$$

ou

$$\alpha(t) = ((1 - 2 \operatorname{sen} t) \cos t, (1 - 2 \operatorname{sen} t) \operatorname{sen} t),$$

para $t \in [0, 2\pi]$, possui apenas dois vértices: um máximo global no ponto inferior do laço menor ($\alpha(\pi/2) = (0, -1)$) e um mínimo global no ponto inferior do laço maior ($\alpha(3\pi/2) = (0, -3)$); entre estes pontos, a curvatura é estritamente crescente ou estritamente decrescente. \square

O Teorema dos Quatro Vértices seguirá do resultado a seguir:

2.21 Teorema (Teorema de Osserman). *Seja α uma curva fechada simples plana de classe C^2 e \mathcal{C} o seu círculo circunscrito.*

Então $\alpha \cap \mathcal{C}$ possui pelo menos n componentes e α tem pelo menos $2n$ vértices.

Capítulo 3

Superfícies Regulares

Da mesma forma que curvas regulares são deformações “suaves” em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 de um pedaço “inteiro” da reta real, superfícies são analogamente deformações “suaves” em \mathbb{R}^3 de um pedaço “inteiro” do plano \mathbb{R}^2 . As definições básicas são assim generalizações diretas daquelas que vimos no caso de curva, tais como curvas parametrizadas [superfícies parametrizadas], vetor tangente [plano tangente], vetor normal [idem]. Mas há algumas diferenças importantes: enquanto qualquer curva pode ser apresentada como a deformação de um pedaço da reta respeitando comprimentos, como por exemplo um fio de metal deformado sem ser esticado, que é exatamente a parametrização por comprimento de arco, não é possível construir uma esfera a partir de uma folha de metal sem esticar, alongar ou estender esta folha. Matematicamente, um pedaço de esfera não é *isométrico* a um pedaço de plano, como veremos ao longo deste capítulo.

3.1 Superfícies Parametrizadas Regulares e Superfícies Regulares

3.1.1 Definição e Exemplos

3.1 Definição. Uma **superfície parametrizada regular** de classe C^k é uma aplicação diferenciável $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^k , onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto conexo, tal que a diferencial $d\phi_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva para todo $(u, v) \in U$. \square

ϕ ser diferenciável de classe C^k é equivalente a podermos escrever

$$\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (3.1)$$

com as funções coordenadas $x, y, z : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k , isto é, elas possuem derivadas parciais em relação às variáveis u, v até ordem k . A condição da aplicação diferencial $d\phi_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ser injetiva é equivalente a exigir que a matriz jacobiana (que denotaremos também por $d\phi_{(u,v)}$, usando a identificação de transformações lineares e matrizes, uma vez fixada as bases, que no nosso caso são as bases canônicas de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3)

$$d\phi_{(u,v)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

tenha posto máximo, isto é, igual a 2. Em outras palavras, os vetores

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial u} &= d\phi_{(u,v)}(e_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \\ \frac{\partial \phi}{\partial v} &= d\phi_{(u,v)}(e_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right),\end{aligned}\tag{3.3}$$

são linearmente independentes. Ela é a condição de regularidade que confere “suavidade” à superfície. De fato, fixado $(u_0, v_0) \in U$, o vetor

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

é exatamente o *vetor tangente* à **curva coordenada**

$$u \longrightarrow \phi(u, v_0)$$

no ponto $p = \phi(u_0, v_0)$, enquanto que o vetor

$$\frac{\partial \phi}{\partial v}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$$

é exatamente o *vetor tangente* à curva coordenada

$$v \longrightarrow \phi(u_0, v)$$

no ponto p .

Uma noção mais restrita que a de superfície parametrizada regular é a de *superfície regular*:

3.2 Definição. Uma **superfície regular** de classe C^k é um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que para todo $p \in S$ existem um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, uma vizinhança W de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação diferenciável $\varphi : U \rightarrow V$ de classe C^k , onde $V = W \cap S$, tal que a diferencial $d\varphi_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva para todo $(u, v) \in U$ e φ é um homeomorfismo.

A aplicação φ é chamada uma **carta** ou **sistema de coordenadas local**, a vizinhança V é chamada uma **vizinhança coordenada** e $(u, v) \in U$ são chamadas **coordenadas locais**.

Um conjunto de parametrizações cujas imagens cobrem S é chamado um **atlas**. \square

Enquanto que uma superfície parametrizada é uma aplicação e frequentemente, por abuso de linguagem, identificamos sua imagem ou traço com a própria superfície, uma superfície regular é um subconjunto de \mathbb{R}^3 . Mas além desta diferença semântica, a principal diferença entre os dois conceitos é que uma superfície parametrizada admite autointerseções, enquanto que o requerimento que φ seja um homeomorfismo impede isso de ocorrer. Dizer que $\varphi : U \rightarrow V$ é um *homeomorfismo* significa dizer que φ é uma bijeção contínua e que φ^{-1} também é contínua, isto é, existe uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^3$ de V tal que $\varphi^{-1} : W \rightarrow U$ é contínua.

3.3 Exemplo (Plano). $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= (x_0 + V_1u + W_1v, y_0 + V_2u + W_2v, z_0 + V_3u + W_3v) \\ &= (x_0, y_0, z_0) + u(V_1, V_2, V_3) + v(W_1, W_2, W_3) \\ &= p_0 + uV + vW\end{aligned}$$

é uma parametrização de um **plano** se os vetores $V, W \in \mathbb{R}^3$ forem linearmente independentes. As curvas coordenadas são retas paralelas ao vetor V ou ao vetor W . \square

3.4 Exemplo (Gráficos de Funções de 2 Variáveis). Se $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^k , então $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad (3.4)$$

é uma superfície parametrizada regular de classe C^k , pois

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) &= \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\right), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) &= \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right), \end{aligned}$$

são L.I. Além disso, $f(U)$ também é uma superfície regular com a parametrização φ constituindo um atlas, pois sua inversa é simplesmente a projeção nas duas primeiras coordenadas. \square

3.5 Exemplo (Superfícies de Revolução). Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(v) = (f(v), g(v))$, uma curva parametrizada regular tal que $f(v) \neq 0$ para todo $v \in I$, podemos imaginar α contida no plano yz definindo

$$\alpha(v) = (0, f(v), g(v)).$$

Se girarmos esta curva ao redor do eixo z obteremos uma superfície parametrizada regular, chamada uma **superfície de revolução**. Uma parametrização para a superfície de revolução gerada por α é $\phi : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\phi(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)). \quad (3.5)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) &= (-f(v) \sin u, f(v) \cos u, 0), \\ \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) &= (f'(v) \cos u, f'(v) \sin u, g'(v)), \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| &= \|(f(v) g'(v) \cos u, f(v) g'(v) \sin u, -f(v) f'(v))\| \\ &= f(v) \sqrt{[f'(v)]^2 + [g'(v)]^2} \neq 0 \end{aligned}$$

para todos $(u, v) \in \mathbb{R} \times I$. Nesta parametrização, as curvas coordenadas $u \equiv \text{constante}$ são chamadas **meridianos** enquanto que as curvas coordenadas $v \equiv \text{constante}$ são chamadas **paralelos**. \square

3.6 Exemplo (Esfera). Considere a **esfera** \mathbb{S}_R^2 com centro na origem e raio R , cuja equação cartesiana é

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

A esfera é uma superfície regular mas não é uma superfície parametrizada, isto é, não existe uma parametrização que cobre a esfera toda. Uma demonstração rigorosa deste fato requer noções de topologia. A seguir consideraremos vários atlas para a esfera.

(1) Parametrizações para os hemisférios superior (z positivo) e inferior (z negativo) da esfera são dadas respectivamente por $\varphi_1, \varphi_2 : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $B_1(0) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$ é o disco unitário e

$$\begin{aligned} \varphi_1(u, v) &= \left(u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}\right), \\ \varphi_2(u, v) &= \left(u, v, -\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}\right). \end{aligned}$$

Estas parametrizações, juntamente com as parametrizações para os hemisférios x positivo e x negativo

$$\begin{aligned}\varphi_3(u, v) &= \left(\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}, u, v \right), \\ \varphi_4(u, v) &= \left(-\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}, u, v \right),\end{aligned}$$

e as parametrizações para os hemisférios y positivo e y negativo

$$\begin{aligned}\varphi_5(u, v) &= \left(u, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}, v \right), \\ \varphi_6(u, v) &= \left(u, -\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}, v \right),\end{aligned}$$

constituem um atlas para a esfera.

(2) Uma parametrização (no sentido de superfície parametrizada) para a esfera menos o polo sul $S = (0, 0, -R)$ e o polo norte $N = (0, 0, R)$ como superfície de revolução é dada por $\phi : \mathbb{R} \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\phi(u, v) = (R \cos u \operatorname{sen} v, R \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, R \cos v)$$

pois $\operatorname{sen} v \neq 0$ para $v \in (0, \pi)$. Analogamente, uma parametrização para a esfera menos os polos leste $E = (0, -R, 0)$ e o polo oeste $W = (0, R, 0)$ é dada por $\psi : \mathbb{R} \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\psi(u, v) = (R \cos u \operatorname{sen} v, R \cos v, R \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v).$$

Note que apesar destas parametrizações cobrirem a esfera toda se estendermos o domínio de definição, elas não fazem dela uma superfície parametrizada porque, por exemplo para a primeira parametrização temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}(k\pi, v) = 0$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ (pontos correspondentes aos polos sul e norte).

(3) Na *projeção estereográfica* a partir do polo norte $N = (0, 0, R)$, a reta a partir de N que intercepta o plano $z = 0$ em um ponto $\tilde{p} = (u, v, 0)$, intercepta a esfera em um ponto $p = \varphi(u, v)$. Portanto a parametrização da projeção estereográfica a partir do polo norte $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}_R^2 \setminus \{N\}$ é definida por

$$\varphi(u, v) = N + t(\tilde{p} - N) = (tu, tv, (1-t)R)$$

onde $t > 0$ é tal que $\|\varphi(u, v)\| = R$. Ou seja, t é tal que

$$t^2(u^2 + v^2) + (1-t)^2 R^2 = R^2,$$

donde

$$t = \frac{2R^2}{R^2 + u^2 + v^2}.$$

Portanto,

$$\varphi(u, v) = \left(\frac{2R^2 u}{R^2 + u^2 + v^2}, \frac{2R^2 v}{R^2 + u^2 + v^2}, R \frac{u^2 + v^2 - R^2}{R^2 + u^2 + v^2} \right).$$

Uma parametrização para a esfera menos o polo sul é dada pela projeção estereográfica a partir do polo sul $S = (0, 0, -R)$. Raciocinando como acima, obtemos $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ definida por

$$\psi(u, v) = \left(\frac{2R^2 u}{R^2 + u^2 + v^2}, \frac{2R^2 v}{R^2 + u^2 + v^2}, -R \frac{u^2 + v^2 - R^2}{R^2 + u^2 + v^2} \right).$$

Juntas elas formam um menor atlas possível para uma esfera, com apenas duas cartas. De fato, cada projeção estereográfica é um homeomorfismo. Para calcular a inversa da projeção estereográfica φ , por exemplo, dado $p = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, para determinar $\varphi^{-1}(p)$ basta encontrar o ponto de interseção da reta

$$N + t(p - N) = (tx, ty, R + t(z - R))$$

com o plano $z = 0$; isso ocorre quando

$$t = \frac{R}{R - z},$$

de modo que

$$\varphi^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{Rx}{R - z}, \frac{Ry}{R - z} \right)$$

e esta função é claramente contínua, já que $z < R$. \square

3.7 Exemplo (Elipsóide). Um **elipsóide** com centro na origem é definido pela equação cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Uma parametrização para o hemisfério norte do elipsóide como gráfico de função é dada por $\psi : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\psi(u, v) = \left(u, v, c\sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}} \right).$$

Uma parametrização para o elipsóide menos os polos $(0, 0, c)$ e $(0, 0, -c)$ é dada por $\phi : \mathbb{R} \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\phi(u, v) = (a \cos u \sin v, b \sin u \sin v, c \cos v).$$

Se $a = b$, ou se $b = c$ ou se $a = c$, então o elipsóide é uma superfície de revolução. O elipsóide, assim como a esfera, é uma superfície regular e não é uma superfície parametrizada. \square

3.8 Exemplo (Parabolóide Elíptico). O **parabolóide elíptico**, cuja equação cartesiana é

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

é uma superfície parametrizada, com uma parametrização $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ como gráfico de função

$$\varphi(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right).$$

\square

3.9 Exemplo (Parabolóide Hiperbólico). Da mesma forma, o **parabolóide hiperbólico**, cuja equação cartesiana é

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

é uma superfície parametrizada, com uma parametrização $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ como gráfico de função

$$\varphi(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right).$$

Ele tem um *ponto de sela* na origem com interessantes propriedades geométricas, como veremos mais tarde. \square

3.10 Exemplo (Hiperbolóide de Duas Folhas). Cada folha do **hiperbolóide de duas folhas**, cuja equação cartesiana é

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

é uma superfície parametrizada com uma parametrização $\varphi_{\pm} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ como gráfico de função com uma das duas formas

$$\varphi_{\pm}(u, v) = \left(u, v, \pm c\sqrt{1 + \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}} \right).$$

\square

3.11 Exemplo (Hiperbolóide de Uma Folha). O **hiperbolóide de uma folha**, cuja equação cartesiana é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

é uma superfície parametrizada. Suas partes com z positivo e z negativo podem ser separadamente parametrizadas como gráficos de função $\varphi_{\pm} : \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definidas por

$$\varphi_{\pm}(u, v) = \left(u, v, \pm c \sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - 1} \right).$$

Mas a superfície toda pode ser parametrizada através de uma única parametrização. De fato, cortando o hiperbolóide na altura $z = v$, obtemos uma elipse com equação cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)} = 1$$

que, como vimos no Exemplo 1.4, pode ser parametrizada por

$$u \mapsto \left(a \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}} \cos u, b \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}} \sin u \right).$$

Logo, uma parametrização para o hiperbolóide de uma folha completo é dada por $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\varphi(u, v) = \left(a \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}} \cos u, b \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}} \sin u, v \right).$$

É fácil verificar que todas as condições para uma superfície parametrizada são satisfeitas. \square

3.12 Exemplo (Toro). O **toro** é uma superfície parametrizada, a superfície de revolução gerada por um círculo em torno de um eixo que não intercepta o círculo. Tomando o círculo com centro em $(R, 0)$ e raio $r < R$ com parametrização $\alpha(v) = (R + r \cos v, r \sin v)$ e girando ele em torno do eixo z , obtemos a parametrização $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\phi(u, v) = ((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v).$$

A equação cartesiana do toro é

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right)^2 + z^2 = r^2,$$

\square

3.13 Exemplo (Helicóide). O **helicóide** é uma superfície parametrizada, obtida pela rotação uniforme de uma reta L em torno de um de seus pontos p_0 , enquanto este ponto p_0 move-se uniformemente ao longo de um eixo perpendicular a L . Uma parametrização para o helicóide é $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v).$$

\square

3.14 Exemplo (Catenóide). A **catenóide** é uma superfície parametrizada, a superfície de revolução gerada pela catenária $\alpha(v) = \left(v, a \cosh \frac{v}{a} \right)$. Uma parametrização para o catenóide é $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\phi(u, v) = \left(a \cosh \frac{v}{a} \cos u, a \cosh \frac{v}{a} \sin u, v \right).$$

\square

3.15 Exemplo (Faixa de Möbius). Considere um círculo de raio R centrado na origem no plano xy . Em um ponto p_0 deste círculo, suponha posicionado um segmento L de comprimento $2r$, com $r < R$, cujo ponto médio é exatamente p_0 . Enquanto o ponto médio do segmento percorre uniformemente o círculo, fazemos o segmento girar uniformemente em torno de seu ponto médio, mantendo uma posição sempre perpendicular ao vetor tangente, de tal forma que quando o ponto termina de dar uma volta, o segmento dá meia volta em torno de seu ponto médio. A superfície gerada desta forma é uma superfície parametrizada, a **faixa de Möbius**. Sua parametrização de acordo com a descrição dada é $\phi : \mathbb{R} \times (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\phi(u, v) = \left(\left(R + v \cos \frac{u}{2} \right) \cos u, \left(R + v \cos \frac{u}{2} \right) \sin u, v \sin \frac{u}{2} \right);$$

u dá o ângulo de rotação em torno do círculo, enquanto que v dá a posição do segmento (veja a Figura 5.18, p. 189, em [Borceux]). \square

3.1.2 Superfícies como Imagens Inversas de Valores Regulares

3.16 Lema (Teorema da Função Inversa). *Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável de classe C^k . Se $dF_{p_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo para algum $p_0 \in U$, então existem abertos $V \subset U$ contendo p_0 e $W \subset \mathbb{R}^n$ contendo $F(p_0)$ tais que $F|_V : V \rightarrow W$ é um difeomorfismo de classe C^k .*

$F : V \rightarrow W$ ser um difeomorfismo de classe C^k significa dizer que F é um homeomorfismo e ambas F, F^{-1} são aplicações diferenciais de classe C^k . O Teorema da Função Inversa diz que se a diferencial de uma aplicação é um isomorfismo em um certo ponto (equivalentemente, sua matriz jacobiana naquele ponto tem determinante não nulo), então a aplicação é um difeomorfismo na vizinhança daquele ponto; em particular, se isso ocorre para todo ponto em U , então F é um *difeomorfismo local*.

3.17 Proposição. *Seja $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Então, para todo $(u_0, v_0) \in U$ existe um aberto $U_0 \subset U$ contendo (u_0, v_0) tal que $\phi|_{U_0}$ é injetiva.*

Mais que isso, $\phi(U_0)$ é uma superfície regular.

Prova: Seja

$$\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Como a matriz jacobiana $d\phi_{(u_0, v_0)}$ tem posto 2, podemos assumir sem perda de generalidade que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u_0, v_0) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \end{bmatrix} \neq 0$$

(caso contrário, trocamos x ou y por z na definição da função F a seguir). Defina uma função $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$F(u, v) = (x(u, v), y(u, v)).$$

Segue do Teorema da Função Inversa que existe um aberto $U_0 \subset U$ contendo (u_0, v_0) tal que $F|_{U_0}$ é injetiva. Consequentemente, isso vale também para $\phi|_{U_0}$.

Estenda ϕ a uma aplicação $\tilde{\phi} : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definindo

$$\tilde{\phi}(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t).$$

[Ou seja, $\tilde{\phi}$ transforma um cilindro vertical com base em U em um cilindro deformado com base em $\phi(U)$, cada seção do cilindro vertical de altura t sendo transformada em uma superfície parametrizada $\phi(u, v) + te_3$.]

Como

$$\det d\tilde{\phi} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0,$$

segue do Teorema da Função Inversa que $\tilde{\phi}$ é um difeomorfismo de classe C^k em uma vizinhança possivelmente menor $U_1 \subset U_0$. Em particular $\tilde{\phi}^{-1}$, extensão de ϕ^{-1} a um aberto de \mathbb{R}^3 , é uma aplicação diferenciável de classe C^k . ■

Assim, superfícies parametrizadas regulares, do mesmo modo que curvas parametrizadas regulares, são localmente injetivas. Elas não são globalmente injetivas, pois podem ocorrer autointerseções.

3.18 Definição. Seja $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que um ponto $p \in U$ é um **ponto crítico** de F se a diferencial $dF_p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ não é sobrejetiva. A imagem $F(p)$ é então chamada um **valor crítico** de F .

Se $q \in \mathbb{R}^n$ não é um valor crítico de F , então dizemos que q é um **valor regular** de F . □

Assim, q é um valor regular de F se para todo $p \in F^{-1}(q)$ temos que $dF_p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é sobrejetiva (isso vale em particular se q não está na imagem de F).

3.19 Lema (Teorema da Função Implícita). *Seja $F : V \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável de classe C^k . Escreva um ponto $(x, y) \in V$ em coordenadas na forma*

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_n), \\ y &= (y_1, \dots, y_m). \end{aligned}$$

Seja $(x_0, y_0) \in V$ com $F(x, y) = c$ tal que o menor

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x_0, y_0) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Então existem uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^m$ de y_0 e uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k tal que $f(y_0) = x_0$ e $F(f(y), y) = c$.

3.20 Proposição (Superfícies de Nível). *Seja $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k . Se $c \in f(V)$ é um valor regular de f , então $f^{-1}(c)$ é uma superfície regular de classe C^k .*

Prova: Seja $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de $f^{-1}(c)$. Como c é um valor regular, podemos assumir sem perda de generalidade que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(p_0) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Implícita, existem um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ que contém (x_0, y_0) e uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k tal que $f(x_0, y_0) = z_0$ e $F(x, y, f(x, y)) = c$. Portanto, a aplicação $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

é uma parametrização de classe C^k de uma vizinhança de p_0 em $f^{-1}(c)$. Como a inversa de um gráfico é simplesmente a projeção no plano, segue que φ é um homeomorfismo. ■

3.21 Exemplo. Todas as superfícies vistas nos Exemplos 3.3-3.12 são imagens inversas de valores regulares de funções de classe C^∞ como pode-se verificar. Por exemplo, no caso da esfera temos $\mathbb{S}_R^2 = f^{-1}(R)$ onde

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

e $\nabla f(x, y, z) = 2(x, y, z) \neq 0$ para todo $(x, y, z) \in f^{-1}(R)$, pois pelo menos uma variável é não nula.

Em particular, elas são superfícies regulares de classe C^∞ . \square

3.2 Mudança de Coordenadas e Funções Diferenciáveis em Superfícies

Vamos estender as definições e resultados do Cálculo Diferencial para superfícies, isto é, vamos *fazer* cálculo diferencial em superfícies. Nesta seção vamos definir o que significa uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ser diferenciável em um ponto p de uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$. Um modo natural de fazer isso é tomar uma vizinhança coordenada $V \subset \mathbb{R}^2$ de p , parametrizada por uma aplicação $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V$ e verificar se a composta $f \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável. Como um mesmo ponto pode pertencer a várias vizinhanças coordenadas, é necessário que esta definição não dependa da escolha de um sistema de coordenadas.

3.22 Lema (Regra da Cadeia). *Sejam $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $G : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ aplicações de classe C^k , com $F(U) \subset V$. Então a composta $G \circ F$ é de classe C^k e*

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p.$$

3.23 Proposição. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular de classe C^k e $p \in S$. Sejam $\varphi_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V_1 \subset S$, $\varphi_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V_2 \subset S$ dois sistemas de coordenadas locais para p . Então a **mudança de coordenadas***

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \rightarrow \varphi_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

é um difeomorfismo de classe C^k .

Prova: Claramente, $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ é um homeomorfismo, composta de homeomorfismos. Escreva

$$\varphi_2(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Como $d\varphi_2$ é injetiva em todo ponto, podemos assumir sem perda de generalidade que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0.$$

Estenda φ_2 a uma aplicação $\tilde{\varphi}_2 : U_2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definindo

$$\tilde{\varphi}_2(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t).$$

[Ou seja, $\tilde{\varphi}_2$ transforma um cilindro vertical com base em U_2 em um cilindro deformado com base em $\varphi_2(U_2)$, cada seção do cilindro vertical de altura t sendo transformada em uma superfície parametrizada $\varphi_2(u, v) + te_3$.] Como as funções coordenadas $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ da parametrização φ_1 são diferenciáveis de classe C^k , a aplicação $\tilde{\varphi}_2$ é diferenciável de classe C^k . Como

$$\det d\tilde{\varphi}_2 = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0,$$

segue do Teorema da Função Inversa que $\tilde{\varphi}_2$ é um difeomorfismo de classe C^k . Em particular $\tilde{\varphi}_2^{-1}$ é uma aplicação diferenciável de classe C^k . Logo, pela Regra da Cadeia,

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \tilde{\varphi}_2^{-1} \circ \varphi_1$$

é uma aplicação de classe C^k . Raciocinando de maneira análoga concluímos que

$$\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 = (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)^{-1}$$

também é uma aplicação de classe C^k . Concluímos que $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ é um difeomorfismo de classe C^k . ■

3.24 Definição. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular de classe C^k . Dizemos que função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é **diferenciável** de classe C^k em um ponto $p \in S$ se para alguma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V$ de uma vizinhança coordenada V de p a composta

$$f \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

é diferenciável de classe C^k em $\varphi^{-1}(p)$.

Dizemos que f é diferenciável de classe C^k se f é diferenciável de classe C^k em todo ponto de S . □

Segue da Proposição 3.23 que a diferenciabilidade (de classe C^k) de uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ em um ponto da superfície S independe da parametrização escolhida: se $\varphi_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V_1 \subset S$, $\varphi_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V_2 \subset S$ são duas parametrizações para vizinhanças de p e $V = V_1 \cap V_2$, então $f \circ \varphi_1$ é diferenciável em $\varphi_1^{-1}(p)$ se e somente se $f \circ \varphi_2$ é diferenciável em $\varphi_2^{-1}(p)$, pois

$$\begin{aligned} f \circ \varphi_1 &= f \circ \varphi_2 \circ (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1), \\ f \circ \varphi_2 &= f \circ \varphi_1 \circ (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2), \end{aligned}$$

e $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1, \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ são difeomorfismos de classe C^k .

3.25 Exemplo. Se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular e $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, W um aberto contendo S , é uma função diferenciável de classe C^k , então $f|_S$ é uma função diferenciável de classe C^k . □

3.26 Exemplo (Função Altura). Dada uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$, a **função altura** $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ relativa a uma direção fixada $v \in \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(p) = \langle p, v \rangle$$

é uma função diferenciável de classe C^∞ . □

3.27 Exemplo (Função Quadrado da Distância). Dada uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$, a **função quadrado da distância** $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ relativa a um ponto fixado $p_0 \in \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(p) = \|p - p_0\|^2$$

é uma função diferenciável de classe C^∞ . □

A noção de diferenciabilidade pode ser estendida para aplicações entre superfícies:

3.28 Definição. Sejam $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ superfícies regulares de classe C^k . Dizemos que aplicação $F : S_1 \rightarrow S_2$ é **diferenciável** de classe C^k em um ponto $p \in S_1$ se para algumas parametrizações $\varphi_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V_1, \varphi_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V_2$ de uma vizinhança coordenada V_1 de p e de uma vizinhança coordenada V_2 de $F(p)$ a composta

$$\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^2$$

é diferenciável de classe C^k em $\varphi_1^{-1}(p)$.

Dizemos que F é diferenciável de classe C^k se F é diferenciável de classe C^k em todo ponto de S_1 . □

3.3 Plano Tangente, Vetor Normal e Diferencial

Continuando o processo iniciado na seção anterior de estender o Cálculo Diferencial para superfícies, nesta seção definimos a diferencial de uma aplicação diferenciável entre superfícies. Da mesma forma que a derivada, isto é, a diferencial dF_p de uma aplicação diferenciável $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $p \in U$, leva vetores de \mathbb{R}^m em vetores de \mathbb{R}^n , a diferencial de uma aplicação diferenciável entre superfícies levará vetores em vetores; no caso de superfícies, os únicos vetores intrínsecos a elas são os vetores tangentes.

3.3.1 Plano Tangente e Vetor Normal

3.29 Definição. Seja $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Uma curva parametrizada regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma **curva da superfície** se $\alpha(I) \subset \phi(U)$. \square

Se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular, uma curva da superfície é simplesmente uma curva $\alpha : I \rightarrow S$.

3.30 Definição. Seja $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Dizemos que um vetor $V \in \mathbb{R}^3$ é um **vetor tangente** à superfície em (u_0, v_0) se existe uma curva parametrizada regular da superfície $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que para algum $t_0 \in I$ temos

$$\begin{aligned}\alpha(t_0) &= \phi(u_0, v_0), \\ \alpha'(t_0) &= V.\end{aligned}$$

\square

Se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular, $V \in \mathbb{R}^3$ é um vetor tangente à superfície em um ponto $p \in S$ se existe uma curva parametrizada regular da superfície $\alpha : I \rightarrow S$ tal que para algum $t_0 \in I$ temos

$$\begin{aligned}\alpha(t_0) &= p, \\ \alpha'(t_0) &= V.\end{aligned}$$

3.31 Proposição. Seja $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Então o conjunto dos vetores tangentes à superfície em (u_0, v_0) é $d\phi_{(u_0, v_0)}(\mathbb{R}^2)$.

Em particular, o conjunto dos vetores tangentes à superfície em um ponto é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 .

Prova: Se $V = d\phi_{(u_0, v_0)}W$, considere a curva (segmento de reta) $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ definida por

$$\beta(t) = (u_0, v_0) + tW,$$

onde $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno para que tenhamos $\beta((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset U$. Se $\alpha = \phi \circ \beta$, então pela regra da cadeia

$$\alpha'(0) = d\phi_{\beta(0)}\beta'(0) = d\phi_{(u_0, v_0)}W = V.$$

Reciprocamente, seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular da superfície parametrizada e sejam $\alpha(t_0) = \phi(u_0, v_0)$ e $\alpha'(t_0) = V$. Considere $\beta = \phi^{-1} \circ \alpha$. Pela demonstração da Proposição 3.23, β é uma curva diferenciável. Temos

$$\alpha = \phi \circ (\phi^{-1} \circ \alpha) = \phi \circ \beta$$

de modo que, pela regra da cadeia,

$$V = \alpha'(t_0) = d\phi_{(u_0, v_0)}\beta'(t_0).$$

■

3.32 Definição. Seja $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. O conjunto dos vetores tangentes à superfície em (u_0, v_0) é chamado o **plano tangente** à superfície em (u_0, v_0) e será denotado por $T_{(u_0, v_0)}\phi$. \square

Se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular, o conjunto dos vetores tangentes a S em p é o plano tangente $T_p S$ a S em p . Como não há autointerseções, existe um único plano tangente $T_p S$.

Como $T_{(u_0, v_0)} \phi$ é um plano em \mathbb{R}^3 , existe uma única direção normal a este plano.

3.33 Definição. Seja $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. O **vetor unitário normal** ao plano tangente $T_{(u_0, v_0)} \phi$ é o vetor

$$N(u, v) = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|} (u, v). \quad (3.6)$$

□

De fato, como o produto vetorial $\frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v)$ é normal aos vetores

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) &= d\phi_{(u, v)} e_1, \\ \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) &= d\phi_{(u, v)} e_2, \end{aligned}$$

que geram o plano tangente $T_{(u, v)} \phi$, $N(u, v)$ é normal a este plano.

3.34 Exemplo. Considere a esfera com a parametrização

$$\phi(u, v) = (R \cos u \sen v, R \sen u \sen v, R \cos v).$$

Como vimos no Exemplo 3.5, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) &= R(-\sen u \sen v, \cos u \sen v, 0), \\ \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) &= R(\cos u \cos v, \sen u \cos v, -\sen v), \end{aligned}$$

de modo que

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| = R^2 \sen v.$$

Daí,

$$\begin{aligned} N(u, v) &= \frac{R^2(-\cos u \sen^2 v, -\sen u \sen^2 v, -\sen v \cos v)}{R^2 \sen v} \\ &= -(\cos u \sen v, \sen u \sen v, \cos v). \end{aligned}$$

□

3.3.2 Diferencial de uma Aplicação Diferenciável entre Superfícies Regulares

De posse do conceito de plano tangente, podemos agora definir a *diferencial* de uma aplicação diferenciável entre superfícies regulares.

3.35 Definição. Sejam $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ superfícies regulares de classe C^k e $F : S_1 \rightarrow S_2$ uma aplicação diferenciável de classe C^k . Dado $p \in S_1$ definimos a aplicação **diferencial**

$$dF_p : T_p S_1 \rightarrow T_{F(p)} S_2$$

da seguinte forma: dado $V \in T_p S_1$, se $\alpha : I \rightarrow S_1$ é uma curva parametrizada regular tal que $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = V$, então

$$dF_p(V) = (F \circ \alpha)'(t_0).$$

□

3.36 Proposição. *A diferencial está bem definida e é uma aplicação linear.*

Prova: Para provar que a diferencial está bem definida, devemos mostrar que a definição de $dF_p(V)$ independe da curva α escolhida. Sejam $\varphi_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V_1 \subset S_1$ e $\varphi_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V_2 \subset S_2$ parametrizações de vizinhanças coordenadas V_1 de p e V_2 de $F(p)$ respectivamente, de modo que

$$\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^2$$

é uma aplicação diferenciável por definição. Seja $\alpha : I \rightarrow S_1$ uma curva parametrizada regular tal que $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = V$. Como vimos na demonstração da Proposição 3.31, o vetor

$$W = (\varphi_1^{-1} \circ \alpha)'(t_0)$$

é caracterizado por

$$V = d(\varphi_1)_{\varphi_1^{-1}(p)} W$$

e independe da curva α . Considerando o isomorfismo linear $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p S_1$ definido por

$$L = d(\varphi_1)_{\varphi_1^{-1}(p)},$$

ou seja, L é a restrição de $d(\varphi_1)_{\varphi_1^{-1}(p)}$ ao seu conjunto imagem, podemos escrever

$$W = L^{-1}V.$$

Temos

$$(F \circ \alpha)(t) = \varphi_2 \circ (\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1) \circ (\varphi_1^{-1} \circ \alpha)(t),$$

Pela regra da cadeia,

$$(F \circ \alpha)'(t) = d(\varphi_2)_{\varphi_2^{-1}[F(\alpha(t))]} d(\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1)_{\varphi_1^{-1}[\alpha(t)]} (\varphi_1^{-1} \circ \alpha)'(t),$$

de modo que, fazendo $t = t_0$, obtemos

$$\begin{aligned} (F \circ \alpha)'(t_0) &= d(\varphi_2)_{\varphi_2^{-1}[F(p)]} d(\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1)_{\varphi_1^{-1}[p]} (\varphi_1^{-1} \circ \alpha)'(t_0) \\ &= d(\varphi_2)_{\varphi_2^{-1}[F(p)]} d(\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1)_{\varphi_1^{-1}[p]} W \\ &= d(\varphi_2)_{\varphi_2^{-1}[F(p)]} d(\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1)_{\varphi_1^{-1}[p]} L^{-1}V. \end{aligned}$$

Esta expressão mostra que $(F \circ \alpha)'(t_0)$ independe da curva α . Além disso, como

$$M = d(\varphi_2)_{\varphi_2^{-1}[F(p)]} d(\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1)_{\varphi_1^{-1}[p]} L^{-1}$$

é uma aplicação linear, pois é a composta de aplicações lineares, e

$$dF_p(V) = (F \circ \alpha)'(t_0) = MV$$

segue que dF_p é uma aplicação linear. ■

Podemos agora estender os resultados do Cálculo Diferencial em \mathbb{R}^n ao Cálculo Diferencial em Superfícies. A demonstração dos resultados a seguir fica como exercício.

3.37 Proposição (Regra da Cadeia). *Sejam $S_1, S_2, S_3 \subset \mathbb{R}^3$ superfícies regulares de classe C^k e $F : S_1 \rightarrow S_2$, $G : S_2 \rightarrow S_3$ aplicações de classe C^k , com $F(U) \subset V$. Então a composta $G \circ F$ é de classe C^k e*

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p.$$

3.38 Proposição (Teorema da Função Inversa). *Sejam $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ superfícies regulares de classe C^k e $F : S_1 \rightarrow S_2$ uma aplicação diferenciável de classe C^k . Se dF_p é um isomorfismo, então F é um difeomorfismo local em p .*

3.39 Corolário. *As cartas $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \varphi(U) \subset S$ de uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ são difeomorfismos.*

3.40 Exemplo (Diferencial da Função Altura). Se $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é a função altura

$$f(p) = \langle p, W \rangle,$$

dado um vetor $V \in T_p S$, seja $\alpha : I \rightarrow S_1$ uma curva parametrizada regular tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = V$. Como

$$f(\alpha(t)) = \langle \alpha(t), W \rangle,$$

segue que

$$df_p(V) = \left. \frac{d}{dt} \langle \alpha(t), W \rangle \right|_{t=0} = \langle \alpha'(0), W \rangle = \langle V, W \rangle.$$

□

3.4 Superfícies Orientáveis

Em geral, dizemos que duas bases em um espaço vetorial tem a mesma *orientação* se a matriz de mudança de coordenadas que leva uma base na outra tiver determinante positivo; caso contrário, elas possuem orientações opostas. Escolher uma base como tendo *orientação positiva* é escolher uma orientação para o espaço vetorial. Qualquer outra base do espaço vetorial terá orientação positiva se a matriz de mudança de coordenadas que leva uma base na outra tiver determinante positivo; caso contrário, dizemos que a outra base tem *orientação negativa*.

Podemos escolher uma orientação para cada plano tangente $T_p S$ de uma superfície regular, mas gostaríamos que esta escolha fosse coerente, que planos tangentes à superfície em pontos de uma mesma vizinhança tenham a mesma orientação e que esta não dependa da parametrização.

Para que planos tangentes à superfície em pontos de uma mesma vizinhança coordenada possuam a mesma orientação, basta fixar a orientação como sendo a da base coordenada

$$\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\}.$$

De fato, a orientação de um par de vetores em \mathbb{R}^3 está intimamente ligada ao produto vetorial. Fixar a orientação de um subespaço vetorial 2-dimensional em \mathbb{R}^3 escolhendo uma base $\{V, W\}$ como sendo positiva é equivalente a escolher a orientação dada pelo produto vetorial $V \times W$; escolher a base $\{W, V\}$ como sendo positiva é equivalente a escolher a orientação dada pelo produto vetorial $W \times V$. Isso pode ser expresso de maneira mais compacta através do produto misto: denotando o produto misto de três vetores X, Y, Z por

$$[X, Y, Z] = (X \times Y) \cdot Z,$$

segue que

$$[V, W, V \times W] = (V \times W) \cdot (V \times W) = \|V \times W\|^2 > 0$$

e

$$[V, W, W \times V] = (V \times W) \cdot (W \times V) = -\|V \times W\|^2 < 0$$

tem sinais opostos. Assim, como o vetor normal

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

varia de modo contínuo em uma vizinhança coordenada, todos os pontos desta vizinhança tem a mesma orientação. A questão é se esta variação contínua é global, válida para todos os pontos da superfície. Veremos que a resposta a esta pergunta é negativa: existem superfícies que não podem ser orientadas.

3.41 Definição. Uma superfície regular S é chamada **orientável** se ela possui um **atlas coerente** Φ , isto é, tal que para todos $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ temos

$$\det d(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1) > 0.$$

Uma escolha de um tal atlas é uma escolha de **orientação** para a superfície e quando esta escolha foi feita, dizemos que a superfície foi **orientada**.

Quando uma superfície não possui nenhum atlas com esta propriedade, dizemos que ela é **não-orientável**.
□

Em outras palavras, um atlas é coerente se os determinantes das matrizes jacobianas (diferenciais) das mudanças de coordenadas de todas as parametrizações deste atlas são sempre positivos. Observe que orientabilidade é uma *propriedade global* de uma superfície.

3.42 Exemplo. Toda superfície que é a imagem de uma única parametrização é orientável, pois o atlas consistindo desta única parametrização é trivialmente coerente. Assim, o conceito de orientabilidade para superfícies parametrizadas regulares é trivial. Em particular, superfícies regulares que são gráficos de funções são orientáveis.

Superfícies que podem ser cobertas por duas parametrizações cuja interseção é um conjunto conexo também são orientáveis. Se na interseção o determinante da matriz jacobiana da mudança de coordenadas é negativo, basta trocar a ordem das variáveis em uma das parametrizações, para mudar o sinal do determinante e assim obter um atlas coerente. Em particular, a esfera que pode ser coberta por duas projeções estereográficas que se interceptam ao longo de um conjunto conexo (Exemplo 3.6 (3); a interseção é a esfera menos os polos) é uma superfície orientável. □

Vimos anteriormente a ligação entre o vetor normal a um plano em \mathbb{R}^3 e a noção de orientabilidade. Veremos agora esta ligação com relação a superfícies.

3.43 Lema. *Sejam $U, V, W, Z \in \mathbb{R}^3$ e $A = (a_{ij})$ uma matriz 2×2 tais que*

$$\begin{aligned} W &= a_{11}U + a_{12}V, \\ Z &= a_{21}U + a_{22}V. \end{aligned}$$

Então

$$W \times Z = \det A (U \times V).$$

Prova: Temos

$$\begin{aligned} W \times Z &= (a_{11}U + a_{12}V) \times (a_{21}U + a_{22}V) \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) U \times V \\ &= \det A (U \times V). \end{aligned}$$

■

3.44 Teorema. *Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ de classe C^k , $k \geq 1$, é orientável se e somente se existe um campo normal unitário $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^{k-1} .*

Prova: S orientável $\implies S$ possui um campo normal unitário.

Seja Φ um atlas coerente para S . Para cada ponto $p \in S$ defina $N(p)$ por

$$N(p) = N(\varphi(u, v)) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|}$$

onde $\varphi \in \Phi$ é uma parametrização qualquer de uma vizinhança de p . Se $\tilde{\varphi} \in \Phi$ é qualquer outra parametrização de uma vizinhança de p , temos

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{u}} \times \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{v}} = \det d(\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}) \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}. \quad (3.7)$$

De fato, de $\tilde{\varphi} = \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})$ segue da regra da cadeia que $d\tilde{\varphi} = d\varphi \circ d(\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})$. Em coordenadas, escrevendo

$$(\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})(\tilde{u}, \tilde{v}) = ((\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})_1(\tilde{u}, \tilde{v}), (\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})_2(\tilde{u}, \tilde{v})),$$

temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{u}} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial (\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})_1}{\partial \tilde{u}} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial (\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})_2}{\partial \tilde{u}}, \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{v}} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial (\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})_1}{\partial \tilde{v}} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial (\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})_2}{\partial \tilde{v}}. \end{aligned}$$

Uma notação popular, menos carregada, para a mudança de coordenadas $\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$ é

$$(\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})).$$

Nesta notação a regra da cadeia se escreve na forma mais familiar

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{u}} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}, \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{v}} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}. \end{aligned}$$

Segue destas equações e do lema que

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{u}} \times \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{v}} = \frac{\partial (u, v)}{\partial (\tilde{u}, \tilde{v})} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right).$$

Como o determinante é positivo, conclui-se que

$$\frac{\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{u}} \times \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{v}}}{\left\| \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{u}} \times \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{v}} \right\|} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|},$$

isto é, N está bem definida em toda a superfície S . A aplicação N em coordenadas locais é exatamente

$$N(u, v) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|} (u, v),$$

que é uma aplicação diferenciável de classe C^{k-1} , já que $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ nunca se anula na vizinhança coordenada e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} (u, v) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{vmatrix} (u, v) \\ &= \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right) (u, v) \end{aligned}$$

é uma aplicação diferenciável de classe C^{k-1} porque suas funções coordenadas são.

S possui um campo normal unitário $\implies S$ orientável.

Seja $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo normal unitário de classe C^{k-1} . Como $k \geq 1$, temos que N é na pior das hipóteses uma aplicação contínua. Seja Φ um atlas para S . Para cada parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ deste atlas a função $f_\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_\varphi(u, v) = \left\langle N(\varphi(u, v)), \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|} \right\rangle$$

é pelo menos contínua. Como f_φ toma os valores discretos ± 1 e U é conexo (Definição 3.1), segue que $f_\varphi \equiv 1$ ou $f_\varphi \equiv -1$. Se $f_\varphi \equiv -1$ mudamos a ordem das variáveis da parametrização φ . Desta forma, obtemos um atlas $\bar{\Phi}$ para S tal que $f_\varphi \equiv 1$ para toda $\varphi \in \bar{\Phi}$; em outras palavras,

$$N(\varphi(u, v)) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|}$$

para toda $\varphi \in \bar{\Phi}$. Se $\varphi, \tilde{\varphi} \in \bar{\Phi}$ são parametrizações com $p = \varphi(u, v) = \tilde{\varphi}(\tilde{u}, \tilde{v})$, como

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|} = N(p) = \frac{\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{u}} \times \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{v}}}{\left\| \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{u}} \times \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{v}} \right\|}$$

e

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{u}} \times \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{v}} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right),$$

como visto acima, segue que

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} > 0.$$

■

3.45 Corolário. *Se uma superfície regular é a imagem inversa de um valor regular, então ela é orientável.*

Prova: Seja $S = f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$ um valor regular de uma função diferenciável f . Dado um ponto $p \in S$, considere uma curva $\alpha : I \rightarrow S$ satisfazendo $\alpha(t_0) = p$. Escreva

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Como

$$f(x(t), y(t), z(t)) = c,$$

derivando em relação a t , segue da regra da cadeia que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(p) y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(p) z'(t) = 0,$$

ou seja, o vetor gradiente de f

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right)$$

é normal ao vetor tangente $\alpha'(t)$. Como isso vale para toda curva α em S , segue que

$$N(p) = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$$

é normal ao plano tangente $T_p S$. Esta aplicação N define um campo normal unitário de classe de diferenciabilidade um a menos que a classe de diferenciabilidade da função f , porque $\nabla f(p)$ nunca se anula, já que c é um valor regular de f . ■

3.46 Corolário. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientável. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ é uma curva regular fechada e $N : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo normal unitário contínuo ao longo da curva γ , então $N(a) = N(b)$.*

Prova: Pelo Teorema 3.44 existe um campo normal unitário contínuo $\bar{N} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Como ambos os vetores $N(t)$ e $\bar{N}(\gamma(t))$ são normais ao plano tangente $T_{\gamma(t)} S$, segue que

$$f(t) = \langle N(t), \bar{N}(\gamma(t)) \rangle = \pm 1.$$

Como a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, devemos ter $f \equiv 1$ ou $f \equiv -1$. Em particular,

$$\langle N(a), \bar{N}(\gamma(a)) \rangle = \langle N(b), \bar{N}(\gamma(b)) \rangle.$$

Mas $\gamma(a) = \gamma(b)$, logo $\bar{N}(\gamma(a)) = \bar{N}(\gamma(b))$ e forçosamente $N(a) = N(b)$. ■

3.47 Proposição. *A faixa de Möbius não é orientável.*

Prova: Suponha por absurdo que a faixa de Möbius S é orientável. Considere o centro da faixa de Möbius S como uma curva fechada regular $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow S$ dada por

$$\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t, 0).$$

Definimos um campo normal $N : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ à faixa de Möbius ao longo desta curva, infinitamente diferenciável, por

$$N(t) = R \left(\cos t \sin \frac{t}{2}, \sin t \sin \frac{t}{2}, -\cos \frac{t}{2} \right).$$

Este campo é obtido da parametrização

$$\phi(u, v) = \left(\left(R + v \cos \frac{u}{2} \right) \cos u, \left(R + v \cos \frac{u}{2} \right) \sin u, v \sin \frac{u}{2} \right)$$

dada no Exemplo 3.15 calculando-se

$$\begin{aligned} N(u) &= \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, 0) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, 0) \\ &= (-R \sin u, R \cos u, 0) \times \left(\cos \frac{u}{2} \cos u, \cos \frac{u}{2} \sin u, \sin \frac{u}{2} \right) \\ &= R \left(\cos u \sin \frac{u}{2}, \sin u \sin \frac{u}{2}, -\cos \frac{u}{2} \right) \end{aligned}$$

e fazendo $t = u$. Mas

$$N(0) = R(0, 0, -1) \neq R(0, 0, 1) = N(2\pi),$$

contrariando o último corolário. ■

Capítulo 4

As Formas Fundamentais e Curvaturas

4.1 A Primeira Forma Fundamental

4.1 Definição. Seja $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. O produto interno canônico em \mathbb{R}^3 induz um produto interno no plano tangente $T_{(u,v)}\phi \subset \mathbb{R}^3$ para cada $(u, v) \in U$ denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(u,v)}$. A aplicação que associa a cada ponto $(u, v) \in U$ o produto interno induzido $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(u,v)}$ no plano tangente é chamada a **métrica** da superfície.

Da mesma forma, definimos a métrica de uma superfície regular em $S \subset \mathbb{R}^3$ como a aplicação que associa a cada ponto $p \in S$ o produto interno induzido $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no plano tangente $T_p S$ pelo produto interno canônico em \mathbb{R}^3 . \square

Como o produto interno induzido em cada espaço tangente provém do mesmo produto interno de \mathbb{R}^3 , em geral omitiremos o subscrito (u, v) ou p . A métrica da superfície permite medir comprimentos de curvas e áreas de regiões contidas na superfície de maneira intrínseca, conforme veremos nas subseções a seguir.

Todo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em um espaço vetorial induz uma forma quadrática $I(V) = \langle V, V \rangle$.

4.2 Definição. A forma quadrática de uma superfície parametrizada regular ou de uma superfície regular induzida por sua respectiva métrica, isto é,

$$I_{(u,v)}(V) = \langle V, V \rangle_{(u,v)}$$

ou

$$I_p(V) = \langle V, V \rangle_p,$$

respectivamente, é chamada a **primeira forma fundamental** da superfície. \square

Em coordenadas, se

$$V = V_1 \frac{\partial \phi}{\partial u} + V_2 \frac{\partial \phi}{\partial v},$$

temos

$$\begin{aligned} I_{(u,v)}(V) &= \left\langle V_1 \frac{\partial \phi}{\partial u} + V_2 \frac{\partial \phi}{\partial v}, V_1 \frac{\partial \phi}{\partial u} + V_2 \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle \\ &= V_1^2 \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle + 2V_1 V_2 \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle + V_2^2 \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle. \end{aligned}$$

4.3 Notação. Se $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada regular denotamos

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle, \\ F(u, v) &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle, \\ G(u, v) &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle. \end{aligned}$$

Se $\varphi : U \rightarrow S$ é uma parametrização de uma vizinhança de um ponto $p = \varphi(u, v)$ de uma superfície regular S , denotamos

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle, \\ F(u, v) &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle, \\ G(u, v) &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle. \end{aligned}$$

E, F, G são chamados os *coeficientes* da primeira forma fundamental. \square

No caso de uma superfície regular, os coeficientes E, F, G da primeira forma fundamental em um ponto p dependem do sistema de coordenadas locais em p . Note também que se uma superfície parametrizada regular ou uma superfície regular é de classe C^k , então os coeficientes da primeira forma fundamental são de classe C^{k-1} .

4.4 Proposição. *Os coeficientes da primeira forma fundamental satisfazem as seguintes propriedades:*

$$E, G > 0.$$

e

$$\det \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = EG - F^2 = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|^2 > 0.$$

Prova: Pois

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\|^2 > 0, \\ G(u, v) &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|^2 > 0, \end{aligned}$$

já que $d\varphi_{(u,v)}$ tem posto máximo; o mesmo argumento vale para uma superfície parametrizada. A última desigualdade segue da identidade vetorial

$$\|V \times W\|^2 + \langle V, W \rangle^2 = \|V\|^2 \|W\|^2,$$

pois

$$EG - F^2 = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|^2 - \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle^2 = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|^2 > 0$$

já que $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ são L.I. \blacksquare

4.5 Exemplo. Se

$$\varphi(u, v) = p_0 + uV + vW$$

é um plano e V, W são vetores ortonormais, então

$$\begin{aligned} E &= 1, \\ F &= 0, \\ G &= 1. \end{aligned}$$

□

4.6 Exemplo. Se

$$\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v)) \tag{4.1}$$

é um gráfico, de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) &= \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\right), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) &= \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right), \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} E(u, v) &= 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2, \\ F(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}, \\ G(u, v) &= 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}$$

□

4.7 Exemplo. Se

$$\phi(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$$

é uma superfície de revolução, de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) &= (-f(v) \sin u, f(v) \cos u, 0), \\ \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) &= (f'(v) \cos u, f'(v) \sin u, g'(v)), \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} E(u, v) &= [f(v)]^2, \\ F(u, v) &= 0, \\ G(u, v) &= [f'(v)]^2 + [g'(v)]^2. \end{aligned}$$

□

4.8 Exemplo. Um cilindro reto é uma superfície de revolução, obtido pela rotação de uma reta perpendicular ao plano xy em torno do eixo z . Uma parametrização para o cilindro reto de raio 1 é dada por $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\phi(u, v) = (\cos u, \sin u, v),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f(v) &= 1. \\ g(v) &= v. \end{aligned}$$

Logo, pelo exemplo anterior, os coeficientes de sua forma fundamental são

$$\begin{aligned} E(u, v) &= 1, \\ F(u, v) &= 0, \\ G(u, v) &= 1. \end{aligned}$$

Estes são os mesmos coeficientes da primeira forma fundamental do plano. Mais tarde veremos o significado geométrico deste fato. \square

4.1.1 Comprimento de Curvas em Superfícies

Dada uma curva regular em uma superfície parametrizada regular

$$\alpha(t) = \phi(u(t), v(t)),$$

o seu comprimento de arco (a partir de um ponto inicial fixado em $t = 0$) é dado por

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(t)\| dt.$$

Como, pela regra da cadeia,

$$\alpha'(t) = u'(t) \frac{\partial \phi}{\partial u}(u(t), v(t)) + v'(t) \frac{\partial \phi}{\partial v}(u(t), v(t)),$$

segue que

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} \\ &= \sqrt{(u')^2 \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle + 2u'v' \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle + (v')^2 \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle} \\ &= \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt. \quad (4.2)$$

Por este motivo, usa-se a expressão *elemento de comprimento de arco* ds e escreve-se

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2. \quad (4.3)$$

Note que derivando a função comprimento de arco obtemos

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2. \quad (4.4)$$

A mesma argumentação vale para uma curva regular $\alpha : I \rightarrow S$ em uma superfície regular cujo traço esteja inteiramente contido em uma vizinhança coordenada.

4.1.2 Área de Regiões de Superfícies

4.9 Definição. Um **domínio** do plano é um subconjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ fechado e limitado, cujo interior é homeomorfo a uma bola aberta de \mathbb{R}^2 e cuja fronteira é uma curva regular por partes homeomorfa a um círculo.

Uma **região** de uma superfície é a imagem $\varphi(D)$ de um domínio do plano por uma parametrização. \square

4.10 Definição. A **área** de uma região $\varphi(D)$ é definida por

$$A(\varphi(D)) = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| \, du \, dv. \quad (4.5)$$

\square

4.11 Proposição. A área de uma região independe da parametrização escolhida.

Prova: Suponha que $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ e $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ são duas parametrizações com $\tilde{\varphi}(\tilde{D}) = \varphi(D)$. Segue do Teorema de Mudança de Variáveis para Integrais Múltiplas que

$$\begin{aligned} A(\tilde{\varphi}(\tilde{D})) &= \iint_{\tilde{D}} \left\| \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{u}} \times \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{v}} \right\| \, d\tilde{u} \, d\tilde{v} \\ &= \iint_{\tilde{D}} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| \det d(\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}) \, d\tilde{u} \, d\tilde{v} \\ &= \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| \, du \, dv \\ &= A(\varphi(D)). \end{aligned}$$

■

4.12 Exemplo (Área do Toro). O toro é a imagem do domínio do plano $D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ pela parametrização

$$\phi(u, v) = ((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v).$$

Esta é uma parametrização como superfície de revolução com

$$\begin{aligned} f(v) &= R + r \cos v, \\ g(v) &= r \sin v. \end{aligned}$$

Pelo Exemplo 4.7, os coeficientes da primeira forma fundamental desta parametrização são

$$\begin{aligned} E(u, v) &= [R + r \cos v]^2, \\ F(u, v) &= 0, \\ G(u, v) &= [-r \sin v]^2 + [r \cos v]^2 = r^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sqrt{EG - F^2} = r(R + r \cos v)$$

e a área do toro é

$$\begin{aligned} A &= r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (R + r \cos v) \, du \, dv \\ &= 2\pi r \int_0^{2\pi} (R + r \cos v) \, dv \\ &= 2\pi r [Rv + r \sin v]_{v=0}^{v=2\pi} \\ &= 4\pi^2 r R. \end{aligned}$$

\square

4.2 Segunda Forma Fundamental

A curvatura de uma curva mede a taxa de variação da direção do vetor tangente. De modo análogo, queremos medir a taxa de variação da direção do plano tangente. A direção do plano tangente é dada pelo vetor normal unitário, logo basta medirmos a taxa de variação deste vetor. Veremos que a taxa de variação do vetor normal unitário é medida através de uma aplicação linear autoadjunta.

Nos restringiremos a superfícies regulares e não trataremos de superfícies parametrizadas regulares, onde os mesmos conceitos podem ser definidos localmente (para um tal tratamento com muitos exemplos veja [Gray], Capítulo 13 e os capítulos que lhe seguem).

4.2.1 A Aplicação de Gauss

Como vimos no capítulo anterior, se S é uma superfície orientável, a escolha de uma orientação em S é equivalente à escolha de um campo vetorial normal unitário $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Como este campo é unitário, podemos ver este campo normal como uma aplicação da superfície S na esfera unitária centrada na origem \mathbb{S}^2 .

4.13 Definição. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada. O campo normal unitário $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ é chamado a **aplicação de Gauss**. \square

A partir de agora, todas as superfícies regulares que considerarmos serão orientáveis, salvo afirmação explícita em contrário. Se S é uma superfície regular de classe pelo menos C^2 , então a aplicação de Gauss é uma aplicação diferenciável de classe C^1 . A partir de agora, assumiremos que todas as superfícies regulares são pelo menos de classe C^2 . A medida da taxa de variação do vetor normal em uma vizinhança de um ponto p da superfície S é então dada pela diferencial da aplicação de Gauss:

$$dN_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2.$$

Como os planos tangentes $T_p S$ e $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ são paralelos, ambos normais ao vetor unitário normal $N(p)$, podemos identificar estes dois planos e enxergar a diferencial da aplicação de Gauss como um *operador linear*

$$dN_p : T_p S \rightarrow T_p S. \quad (4.6)$$

Este operador é também conhecido como o **operador forma** (*shape operator*).

4.14 Exemplo. Se

$$\varphi(u, v) = p_0 + uV + vW$$

é um plano e V, W são vetores ortonormais, então

$$N \equiv V \times W$$

e portanto $dN \equiv 0$, isto é, o operador forma é o operador nulo. \square

4.15 Exemplo. Considerando a esfera de raio R centrada na origem

$$\mathbb{S}^2 = f^{-1}(R^2)$$

como imagem inversa do valor regular R^2 da função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

segue da demonstração do Corolário 3.45 que a aplicação de Gauss na esfera $N : \mathbb{S}_R^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ é:

$$N(x, y, z) = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}(x, y, z) = \frac{1}{R}(x, y, z).$$

Logo o operador forma é

$$dN_p = \frac{1}{R} \text{id} : T_p\mathbb{S}^2 \longrightarrow T_p\mathbb{S}^2,$$

isto é, $1/R$ vezes o operador identidade. Em particular, $1/R$ é o único autovalor de dN_p , possuindo dois autovetores linearmente independentes. \square

4.16 Exemplo. Considerando o cilindro

$$C = f^{-1}(1)$$

como imagem inversa do valor regular 1 da função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2,$$

segue da demonstração do Corolário 3.45 que a aplicação de Gauss no cilindro $N : C \longrightarrow \mathbb{S}^2$ é a aplicação:

$$N(x, y, z) = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}(x, y, z) = (x, y, 0).$$

Para determinar a diferencial da aplicação de Gauss, considere uma curva $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ no cilindro com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = V = (V_1, V_2, V_3)$. Temos

$$(N \circ \alpha)(t) = (x(t), y(t), 0),$$

de modo que, por definição,

$$dN_p(V) = (N \circ \alpha)'(0) = (x'(0), y'(0), 0) = (V_1, V_2, 0).$$

Em particular, se V é paralelo ao eixo z , segue que

$$dN_p(V) = 0,$$

isto é, V é um autovetor do autovalor 0 de dN_p , enquanto que se V é perpendicular ao eixo z , temos que

$$dN_p(V) = V,$$

isto é, V é um autovetor do autovalor 1 de dN_p . \square

4.17 Exemplo. Se

$$\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

é o gráfico de uma função, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right), \end{aligned}$$

e

$$N = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1}} \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\right). \quad (4.7)$$

Considerando o parabolóide hiperbólico S como gráfico da função

$$z = x^2 - y^2,$$

ou seja, parametrizado por

$$\phi(u, v) = (u, v, u^2 - v^2),$$

temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) &= (1, 0, 2u), \\ \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) &= (0, 1, -2v),\end{aligned}$$

de modo que segue de (4.7) que a aplicação de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ é

$$N(u, v) = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} (-2u, 2v, 1).$$

Vamos calcular a diferencial da aplicação de Gauss na origem $O = (0, 0, 0)$ que é um ponto de sela para a superfície; note que $N(O) = (0, 0, 1)$ é o polo norte da esfera. Na origem o plano tangente coincide com o plano xy e as curvas coordenadas são exatamente os eixos x e y . Segue que N restrita a estas curvas coordenadas é dada por

$$(N \circ \alpha)(t) = \frac{1}{\sqrt{4t^2 + 1}} (-2t, 0, 1)$$

e

$$(N \circ \beta)(t) = \frac{1}{\sqrt{4t^2 + 1}} (0, 2t, 1).$$

respectivamente. No primeiro caso temos

$$(N \circ \alpha)'(t) = \frac{1}{(4t^2 + 1)^{3/2}} (-2, 0, -4t)$$

e no segundo caso

$$(N \circ \beta)'(t) = \frac{1}{(4t^2 + 1)^{3/2}} (0, 2, -4t)$$

de modo que

$$\begin{aligned}dN_O(e_1) &= (N \circ \alpha)'(0) = (-2, 0, 0) = -2e_1, \\ dN_O(e_2) &= (N \circ \beta)'(0) = (0, 2, 0) = 2e_2.\end{aligned}$$

Portanto, e_1 e e_2 são autovetores de dN_O associados aos autovalores -2 e 2 , respectivamente. \square

4.2.2 A Segunda Forma Fundamental

Recordamos alguns fatos de Álgebra Linear. Se V é um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $A : V \rightarrow V$ é um operador autoadjunto, ou seja,

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle,$$

o funcional bilinear $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$B(v, w) = \langle Av, w \rangle$$

é simétrico, logo a ele está associado de forma única uma forma quadrática $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$Q(v) = B(v, v).$$

De fato, dado uma forma quadrática Q , então

$$B(v, w) = \frac{1}{2} [Q(v+w) - Q(v) - Q(w)]$$

define um funcional bilinear simétrico.

4.18 Proposição. *O operador forma é autoadjunto.*

Prova: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma vizinhança de um ponto $p \in S$. Para provar que dN_p é autoadjunta, basta mostrar que

$$\left\langle dN_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right), \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, dN_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right\rangle, \quad (4.8)$$

já que $\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\}$ é uma base para $T_p S$. Se

$$\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$$

é uma curva regular em S com $\alpha(0) = p$, por definição e pela regra da cadeia temos que

$$dN_p(\alpha'(0)) = \left. \frac{d}{dt} (N \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} = \frac{\partial N}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial N}{\partial v} v'(0).$$

Em particular, vemos que

$$\begin{aligned} dN_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) &= \frac{\partial N}{\partial u}, \\ dN_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) &= \frac{\partial N}{\partial v}, \end{aligned}$$

de modo que (4.8) é equivalente a

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle. \quad (4.9)$$

Para provar esta última equação, observe que

$$\begin{aligned} \left\langle N, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle N, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Derivando estas duas equações, a primeira com relação a v e a segunda com relação a u , segue que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle + \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle + \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u} \right\rangle &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle = - \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle. \quad (4.10)$$

■

Como o operador forma dN_p é um operador autoadjunto, ele tem associado a ele uma forma quadrática.

4.19 Definição. A forma quadrática

$$II_p(V) = - \langle dN_p(V), V \rangle$$

é chamada a **segunda forma fundamental** de S em p . □

O motivo para o sinal negativo será esclarecido na próxima seção (comentário após a demonstração da Proposição 4.24).

4.2.3 Segunda Forma Fundamental e Operador Forma em Coordenadas

Todas as parametrizações φ nesta subsecção serão assumidas compatíveis com a orientação da superfície S , isto é,

$$N(\varphi(u, v)) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|}(u, v).$$

Dado $p \in S$ e uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ de uma vizinhança de p em S , $p = \varphi(u, v)$, queremos obter a matriz que representa o operador forma $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ na base

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\}$$

de $T_p S$, isto é, a matriz $[dN_p]_{\mathcal{B}} = (a_{ij})$ tal que

$$dN_p \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

para todo vetor

$$V = V_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + V_2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \in T_p S.$$

Note que, apesar do operador dN_p ser autoadjunto, esta matriz só será simétrica se a base \mathcal{B} for ortonormal. Também queremos obter os **coeficientes da segunda forma fundamental** $e(u, v)$, $f(u, v)$, $g(u, v)$ nesta base coordenada, isto é,

$$\mathbb{I}_p(V) = e(u, v)V_1^2 + 2f(u, v)V_1V_2 + g(u, v)V_2^2.$$

Obteremos primeiro estes coeficientes, já que os elementos da matriz $[dN_p]_{\mathcal{B}}$ serão dados em função destes e dos coeficientes da primeira forma fundamental.

4.20 Proposição (Coeficientes da Segunda Forma Fundamental). *Seja*

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\}$$

uma base coordenada para o plano tangente $T_p S$ e

$$V = V_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + V_2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \in T_p S.$$

Então

$$\mathbb{I}_p(V) = eV_1^2 + 2fV_1V_2 + gV_2^2 \quad (4.11)$$

onde

$$\begin{aligned} e &= \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \right\rangle, \\ f &= \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right\rangle, \\ g &= \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Prova: Como

$$\begin{aligned} dN_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) &= \frac{\partial N}{\partial u}, \\ dN_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) &= \frac{\partial N}{\partial v}, \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} dN_p(V) &= dN_p \left(V_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + V_2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \\ &= V_1 dN_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + V_2 dN_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \\ &= V_1 \frac{\partial N}{\partial u} + V_2 \frac{\partial N}{\partial v}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_p(V) &= -\langle dN_p(V), V \rangle \\ &= -\left\langle V_1 \frac{\partial N}{\partial u} + V_2 \frac{\partial N}{\partial v}, V_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + V_2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle \\ &= -V_1^2 \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle - V_1 V_2 \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle - V_1 V_2 \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle \\ &\quad - V_2^2 \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle. \end{aligned}$$

Vimos em (4.10) que

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle = -\left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right\rangle = -f.$$

Também, como

$$\begin{aligned} \left\langle N, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle N, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle &= 0, \end{aligned}$$

derivando estas duas equações, a primeira com relação a u e a segunda com relação a v , obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle + \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle + \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right\rangle &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle &= -\left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \right\rangle = -e, \\ \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle &= -\left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right\rangle = -g. \end{aligned}$$

■

Agora obteremos a matriz que representa o operador forma em coordenadas.

4.21 Proposição (Matriz do Operador Forma). *Seja*

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\}$$

uma base coordenada para o plano tangente $T_p S$. Então

$$\begin{aligned} [dN_p]_{\mathcal{B}} &= -\frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} fF - eG & gF - fG \\ eF - fE & fF - gE \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Prova: Denote

$$[dN_p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Por definição, como

$$\begin{aligned} dN_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) &= \frac{\partial N}{\partial u}, \\ dN_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) &= \frac{\partial N}{\partial v}, \end{aligned}$$

temos

$$[dN_p]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial u} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial v} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \right]$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial u} &= a_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + a_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \\ \frac{\partial N}{\partial v} &= a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + a_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial v}. \end{aligned}$$

Segue da demonstração da Proposição 4.20 que

$$\begin{aligned} -e &= \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle = a_{11} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle + a_{21} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ -f &= \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = a_{11} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle + a_{21} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -f &= \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle = a_{12} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle + a_{22} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\ -g &= \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = a_{12} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle + a_{22} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = a_{12}F + a_{22}G. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \\ &= - \left(\frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} fF - eG & eF - fE \\ gF - fG & fF - gE \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

4.22 Corolário. Temos

$$\det dN_p = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (4.13)$$

e

$$\operatorname{tr} dN_p = -\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \quad (4.14)$$

Prova: Pela proposição anterior,

$$\begin{aligned} \det dN_p &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} \det \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} (EG - F^2) (eg - f^2) \\ &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \end{aligned}$$

e

$$\operatorname{tr} dN_p = \frac{1}{EG - F^2} (fF - eG + fF - gE) = -\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

■

4.3 Curvaturas

Como o operador forma é autoadjunto, ele é diagonalizável e possui dois autovalores reais (que podem ser iguais), cujo produto é o seu determinante e cuja soma é o seu traço. Os autovalores do operador forma e seus autovetores associados possuem significado geométrico, assim como o seu determinante e o seu traço. Veremos nesta seção o significado geométrico de cada um destes conceitos algébricos, assim como o da segunda forma fundamental.

4.3.1 Curvatura Normal

4.23 Definição. Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva regular em S parametrizada pelo comprimento de arco passando pelo ponto $p \in S$.

Sejam N o vetor normal unitário a S em p e n o vetor normal unitário a α em p . Se κ é a curvatura da curva α em p , a **curvatura normal** de α em p é definida por

$$\kappa_n = \kappa \langle n, N \rangle. \quad (4.15)$$

□

Em outras palavras, a curvatura normal é o comprimento da projeção do vetor κn sobre o vetor normal unitário N com um sinal dado pela orientação de N . Lembre-se que a curvatura κ de uma curva no espaço \mathbb{R}^3 tem sempre sinal positivo, de modo que o sinal da curvatura normal depende apenas da orientação da superfície.

4.24 Proposição (Significado Geométrico da Segunda Forma Fundamental). *Seja $V \in T_p S$ com $\|V\| = 1$. Então $\mathbb{I}_p(V)$ é igual à curvatura normal de uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco passando em p e tangente a V .*

Prova: Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva regular em S parametrizada pelo comprimento de arco satisfazendo $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = V$. Denotando $N(s) = N(\alpha(s))$ a restrição do campo normal unitário à superfície S ao longo da curva α , temos

$$\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$$

para todo s . Derivando esta equação em relação a s obtemos

$$\begin{aligned}\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle &= -\langle N(s), \alpha''(s) \rangle \\ &= -\langle N(s), \kappa(s) n(s) \rangle \\ &= -\kappa(s) \langle N(s), n(s) \rangle,\end{aligned}$$

pelos fórmulas de Frenet. Segue que

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_p(V) &= -\langle dN_p(V), V \rangle \\ &= -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle \\ &= \kappa(0) \langle N(0), n(0) \rangle \\ &= \kappa_n(p).\end{aligned}$$

■

Este resultado geométrico é o motivo de usarmos o sinal negativo na definição da segunda forma fundamental.

4.25 Corolário. *Todas as curvas em uma superfície S passando por um ponto $p \in S$ que possuem a mesma reta tangente em p tem a mesma curvatura normal em p .*

Este resultado permite falar na **curvatura normal ao longo de uma direção** em p . Para entender o significado geométrico da curvatura normal propriamente dita, precisamos encontrar curvas que satisfazem o Corolário 4.25.

4.26 Definição. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Dado um vetor unitário $V_p \in T_p S$, a curva interseção de S com o plano $\pi_p(V_p, N(p))$ passando por p e paralelo aos vetores V_p e $N(p)$ é chamada a **seção normal** em p ao longo de V_p . □

4.27 Proposição. *A curvatura de uma seção normal em p é igual ao módulo da sua curvatura normal.*

Prova: Pois o vetor normal unitário n à seção normal é $\pm N(p)$. ■

O conceito de seção normal permite entender melhor e visualmente calcular curvaturas normais. A seção normal, sendo a interseção da superfície S com o plano $\pi_p(V_p, N(p))$, é uma curva plana contida neste plano passando por p com vetor tangente V_p e vetor normal $n_p = \pm N(p)$, cuja curvatura é $\pm \kappa_n(p, V_p)$. Se $\kappa_n(p, V_p) > 0$, então a seção normal está se curvando na mesma direção de $N(p)$, logo a superfície toda na direção de V_p está se curvando na mesma direção de $N(p)$; se $\kappa_n(p, V_p) < 0$, então a seção normal está se curvando na direção oposta à $N(p)$, logo a superfície toda na direção de V_p está se curvando direção oposta à $N(p)$. Por este motivo, em geometria diferencial geralmente escolhemos orientações para as superfícies compactas, tais como esferas e elipsóides, com o vetor normal unitário orientado apontando *para dentro* de modo que as curvaturas normais são todas positivas.

4.3.2 Curvaturas Principais

Como o operador forma dN_p é autoadjunto, existe uma base ortonormal $\{E_1, E_2\}$ de autovetores de dN_p para $T_p S$. Escrevemos

$$\begin{aligned}dN_p(E_1) &= -\kappa_1 E_1, \\ dN_p(E_2) &= -\kappa_2 E_2.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Nesta base ortonormal, a segunda forma fundamental se escreve como

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_p(V) &= \mathbb{I}_p(V_1 E_1 + V_2 E_2) \\ &= -\langle dN_p(V_1 E_1 + V_2 E_2), V_1 E_1 + V_2 E_2 \rangle \\ &= -\langle -\kappa_1 V_1 E_1 - \kappa_2 V_2 E_2, V_1 E_1 + V_2 E_2 \rangle \\ &= \kappa_1 V_1^2 + \kappa_2 V_2^2.\end{aligned}$$

É um resultado de Álgebra Linear (veja uma prova simples em [Carmo], p. 215) que κ_1, κ_2 são os valores máximo e mínimo da forma quadrática \mathbb{I}_p sobre o círculo unitário $\|V\| = 1$ em $T_p S$. Pela Proposição 4.26, eles são os valores máximo e mínimo da curvatura normal em p .

4.28 Definição. As **curvaturas principais** em p são a **curvatura normal máxima** κ_1 e a **curvatura normal mínima** κ_2 definidos através de (4.16) e escolhendo $\kappa_1 \geq \kappa_2$.

As direções dos autovetores E_1, E_2 do operador forma são chamadas as **direções principais** em p . \square

Como os autovetores E_1, E_2 são ortogonais, as direções principais são ortogonais.

4.3.3 Curvatura Gaussiana

4.29 Definição. A **curvatura Gaussiana** de S em p é definida como sendo

$$K = \det dN_p = \kappa_1 \kappa_2. \quad (4.17)$$

\square

De fato, como os autovalores de dN_p são $-\kappa_1, -\kappa_2$, segue que

$$\det dN_p = (-\kappa_1)(-\kappa_2) = \kappa_1 \kappa_2.$$

Pelo Corolário 4.22 temos a seguinte expressão para a curvatura gaussiana em coordenadas:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \quad (4.18)$$

4.30 Proposição (Interpretação Geométrica da Curvatura Gaussiana). *Seja p um ponto de uma superfície regular S tal que $K(p) \neq 0$ e seja V uma vizinhança conexa de p onde K não muda de sinal. Então*

$$K(p) = \lim_{R \rightarrow p} \frac{A(N(R))}{A(R)}$$

onde $A(R)$ é a área de uma região $R \subset V$ contendo p e $A(N(R))$ é a área da imagem $N(R)$ da região R pela aplicação de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$.

Prova: O limite no enunciado entendido da seguinte forma: uma sequência de regiões R_n converge para p se qualquer bola com centro em p contém todos os R_n para n suficientemente grande.

Temos

$$\begin{aligned} A(R) &= \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv, \\ A(N(R)) &= \iint_D \left\| \frac{\partial N}{\partial u} \times \frac{\partial N}{\partial v} \right\| du dv, \end{aligned}$$

onde $D = \varphi^{-1}(R)$. Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial u} &= dN \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right), \\ \frac{\partial N}{\partial v} &= dN \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right), \end{aligned}$$

temos

$$\frac{\partial N}{\partial u} \times \frac{\partial N}{\partial v} = (\det dN) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = K \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right).$$

Logo,

$$A(N(R)) = \iint_D K \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv.$$

Portanto, pelo Teorema do Valor Médio para Integrais,

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow p} \frac{A(N(R))}{A(R)} &= \lim_{R \rightarrow p} \frac{\frac{A(N(R))}{A(D)}}{\frac{A(R)}{A(D)}} \\ &= \frac{\lim_{R \rightarrow p} \frac{1}{A(D)} \iint_D K \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv}{\lim_{R \rightarrow p} \frac{1}{A(D)} \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv} \\ &= \frac{K(p) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|(p)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|(p)} \\ &= K(p). \end{aligned}$$

■

4.3.4 Curvatura Média

4.31 Definição. A curvatura média de S em p é definida como sendo

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} dN_p. \quad (4.19)$$

□

Pelo Corolário 4.22 temos a seguinte expressão para a curvatura média em coordenadas:

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \quad (4.20)$$

4.3.5 Classificação dos Pontos de uma Superfície

4.32 Definição. Um ponto p de uma superfície regular S é chamado

1. **elíptico** se $K(p) > 0$;
2. **hiperbólico** se $K(p) < 0$;
3. **parabólico** se $K(p) = 0$ e $H(p) \neq 0$;
4. **planar** se $K(p) = H(p) = 0$.

□

Os pontos de um plano são todos planares (Exemplo 4.14). Os pontos de uma esfera são todos elípticos (Exemplo 4.15). Os pontos de um cilindro são parabólicos (Exemplo 4.16). A origem é um ponto hiperbólico do parabolóide hiperbólico (Exemplo 4.17).

Em um ponto hiperbólico, existem duas seções normais que estão se curvando em direções opostas: uma está se curvando na mesma direção do vetor normal N , enquanto que a outra está se curvando na direção oposta a N . É o clássico *ponto de sela*. Esta noção pode ser melhor caracterizada através do resultado seguinte. Nós nos referiremos aos dois semiespaços em que um plano em \mathbb{R}^3 divide o espaço como os *lados* do plano.

4.33 Proposição. *Se p é um ponto elíptico, então existe uma vizinhança V de p em S tal que todos os pontos de V estão de um mesmo lado de $T_p S$.*

Se p é um ponto hiperbólico, então em toda vizinhança V de p em S existem pontos de V que estão de um lado de $T_p S$ e pontos que estão do outro lado.

Prova: Seja $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma vizinhança de um ponto $p \in S$ com $\varphi(0,0) = p$. A distância d de um ponto $q = \varphi(u,v)$ ao plano tangente $T_p S$ é dada por

$$d = \langle \varphi(u,v) - \varphi(0,0), N(p) \rangle,$$

já que p é um ponto do plano. Pela Fórmula de Taylor,

$$\begin{aligned} \varphi(u,v) &= \varphi(0,0) + \frac{\partial \varphi}{\partial u}(0,0)u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0,0)v \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(0,0)u^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(0,0)uv + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(0,0)v^2 \right] + R(u,v), \end{aligned}$$

onde

$$\lim_{(u,v) \rightarrow 0} \frac{R(u,v)}{\|(u,v)\|^2} = 0.$$

Como

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(0,0), N(p) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0,0), N(p) \right\rangle = 0,$$

segue da Proposição 4.20 que

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2} \left[\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(0,0), N(p) \right\rangle u^2 + 2 \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(0,0), N(p) \right\rangle uv + \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(0,0), N(p) \right\rangle v^2 \right] + \langle R(u,v), N(p) \rangle \\ &= \frac{1}{2} (e(p)u^2 + 2f(p)uv + g(p)v^2) + \langle R(u,v), N(p) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{I}_p(V) + r(V), \end{aligned}$$

onde $V = u \frac{\partial \varphi}{\partial u}(0,0) + v \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0,0)$ e $r(V) = \langle R(u,v), N(p) \rangle$ satisfaz

$$\lim_{(u,v) \rightarrow 0} \frac{r(V)}{\|V\|^2} = 0.$$

Usando as propriedades de bilinearidade de uma forma quadrática (mais especificamente, se $Q(V) = B(V,V)$ é uma forma quadrática e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $Q(\alpha V) = \alpha^2 Q(V)$), podemos escrever

$$d = \|V\|^2 \left[\frac{1}{2} \mathbb{I}_p \left(\frac{V}{\|V\|} \right) + \frac{r(V)}{\|V\|^2} \right].$$

Se p é um ponto elíptico, então (como observado logo antes da Definição 4.28) \mathbb{I}_p atinge um mínimo negativo ou positivo no círculo unitário de $T_p S$. Portanto, para todo V suficientemente pequeno, isto é, para todo (u,v) suficientemente próximo de $(0,0)$, d é negativa ou positiva. Tais pontos estão do mesmo lado de $T_p S$.

Se p é um ponto hiperbólico, então existem dois pontos no círculo unitário de $T_p S$ em que \mathbb{I}_p atinge um mínimo negativo e um máximo positivo; para todo V suficientemente pequeno, isto é, para todo (u,v) suficientemente próximo de $(0,0)$, na direção do mínimo negativo d é negativa e na direção do máximo positivo d é positiva. Estes pontos ocupam lados opostos de $T_p S$. ■

4.34 Exemplo (Pontos Planares). Em pontos planares, podem ocorrer qualquer um dos comportamentos da Proposição 4.33.

A **sela de macaco** é a superfície S dada pela parametrização (gráfico de uma função)

$$\varphi(u, v) = (u, v, u^3 - 3u^2v).$$

Temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial u} &= (1, 0, 3u^2 - 6uv), \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} &= (0, 1, -3u^2),\end{aligned}$$

e de (4.7)

$$N = \frac{1}{\sqrt{9u^4 - 36u^3v + 36u^2v^2 + 1}} (3u^2 - 6uv, 3u^2, 1).$$

Como

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} &= (0, 0, 6u - 6v), \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} &= (0, 0, -6u), \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} &= (0, 0, 0),\end{aligned}$$

os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned}e &= \left\langle N, \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} \right\rangle = \frac{6u - 6v}{\sqrt{9u^4 - 36u^3v + 36u^2v^2 + 1}}, \\ f &= \left\langle N, \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} \right\rangle = -\frac{6u}{\sqrt{9u^4 - 36u^3v + 36u^2v^2 + 1}}, \\ g &= \left\langle N, \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} \right\rangle = 0.\end{aligned}$$

Em particular, na origem $(0, 0)$ os coeficientes da segunda forma fundamental são todos nulos, logo $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ e a origem é um ponto planar para a sela de macaco. Como o próprio nome diz, em qualquer vizinhança da origem O existem pontos que estão dos dois lados do plano tangente $T_O S$, que é o plano xy .

Agora considere um **parabolóide oblato**, do tipo

$$\varphi(u, v) = (u, v, u^4 + v^4).$$

Temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial u} &= (1, 0, 4u^3), \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} &= (0, 1, 4v^3),\end{aligned}$$

e de (4.7)

$$N = \frac{1}{\sqrt{16u^6 + 16v^6 + 1}} (-4u^3, -4v^3, 1).$$

Como

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} &= (0, 0, 12u^2), \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} &= (0, 0, 0), \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} &= (0, 0, 12v^2),\end{aligned}$$

os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned}e &= \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \right\rangle = \frac{12u^2}{\sqrt{16u^6 + 16v^6 + 1}}, \\ f &= \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right\rangle = 0, \\ g &= \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right\rangle = \frac{12v^2}{\sqrt{16u^6 + 16v^6 + 1}}.\end{aligned}$$

Em particular, na origem $(0, 0)$ os coeficientes da segunda forma fundamental são todos nulos, logo $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ e a origem é um ponto planar para o parabolóide achatado. Toda a superfície está no lado superior do plano tangente $T_O S$, que é o plano xy . \square

4.35 Exemplo (Pontos Parabólicos). Em pontos parabólicos também podem ocorrer qualquer um dos comportamentos da Proposição 4.33.

No **cilindro circular reto** C todos os pontos são parabólicos e em qualquer ponto p dele toda a superfície está em um dos lados do plano tangente $T_p C$.

Considere agora um toro. Serre o toro ao meio e conecte as duas metades por dois cilindros (obtendo uma curva em formato “ \ominus ”); isso pode ser feito de maneira tão suave quando se desejar. Um ponto p no equador interno deste toro modificado é agora parabólico, limite de pontos parabólicos da sua parte cilíndrica, isto é, ele tem curvatura gaussiana zero, mas não é planar porque tem um círculo gerador do toro original como seção normal. Este é um ponto de sela, pois os pontos do círculo gerador do toro estão todos de um lado do plano tangente à superfície em p , mas os pontos do equador original passando por p estão do outro lado do plano tangente. \square

4.36 Definição. Um ponto p de uma superfície regular S é chamado umbílico se $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$. \square

Se p é umbílico, então o operador forma dN_p é um múltiplo escalar da identidade. Pontos planares são trivialmente umbílicos. Os pontos de um plano e uma esfera são umbílicos, como vimos nos Exemplos 4.14 e 4.15.

O próximo resultado é um resultado global.

4.37 Proposição. *Se uma superfície conexa S de classe C^3 possui apenas pontos umbílicos, então S está contida em um plano ou em uma esfera.*

Prova: Seja $p \in S$ e $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V$ uma parametrização de uma vizinhança $V \subset S$ de p . Como todo ponto $q \in V$ é umbílico, temos

$$dN_q = \lambda(q) \text{id}_{T_q S}$$

para alguma aplicação diferenciável $\lambda : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ (daí a necessidade de assumir S de classe C^3).

Afirmamos que λ é uma função constante. De fato, como

$$\begin{aligned}dN_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) &= \frac{\partial N}{\partial u}, \\ dN_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) &= \frac{\partial N}{\partial v},\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial u} &= \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ \frac{\partial N}{\partial v} &= \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial v}.\end{aligned}$$

Derivando a primeira equação em relação a v e a segunda em relação a u , obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 N}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, \\ \frac{\partial^2 N}{\partial v \partial u} &= \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u},\end{aligned}$$

donde, subtraindo uma equação da outra,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

Como os vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ são L.I., segue que

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0$$

e portanto, como $V = \varphi(U)$ é conexo, λ é constante.

Se $\lambda = 0$, então $\frac{\partial N}{\partial u} = \frac{\partial N}{\partial v} = 0$ em V e portanto N é constante em V , digamos $N(u, v) \equiv N_0$. Então

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, N_0 \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, N_0 \right\rangle = 0,$$

o que implica

$$\frac{\partial}{\partial u} \langle \varphi(u, v), N_0 \rangle = \frac{\partial}{\partial v} \langle \varphi(u, v), N_0 \rangle = 0$$

e portanto

$$\langle \varphi(u, v) - p, N_0 \rangle \equiv \text{constante},$$

ou seja, $V = \varphi(U)$ está contida no plano normal ao vetor N_0 passando por p .

Se $\lambda \neq 0$, então

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} \left[\varphi(u, v) - \frac{1}{\lambda} N(u, v) \right] &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial N}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial v} \left[\varphi(u, v) - \frac{1}{\lambda} N(u, v) \right] &= \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial N}{\partial v} = 0,\end{aligned}$$

logo

$$\varphi(u, v) - \frac{1}{\lambda} N(u, v) \equiv P$$

para algum ponto $P \in \mathbb{R}^3$. Isso significa que

$$\|\varphi(u, v) - P\| = \frac{1}{\lambda} \|N(u, v)\| = \frac{1}{\lambda},$$

isto é, $V = \varphi(U)$ está na esfera de centro em P e raio $1/\lambda$.

Isso mostra o resultado localmente. Para completar a demonstração, note que como S é conexa, ela é conexa por caminhos e qualquer ponto de S pode ser conectado a qualquer outro ponto de S . Um caminho entre dois pontos de S é um conjunto compacto, logo pode ser coberto por um número finito de vizinhanças coordenadas. Segue que se todos os pontos de uma destas vizinhanças está em um plano, então todos os pontos de todas as vizinhanças estarão no mesmo plano; se todos os pontos de uma destas vizinhanças está em uma esfera, então todos os pontos de todas as vizinhanças estarão na mesma esfera. ■

4.3.6 Exemplos

4.38 Exemplo (Curvatura de Gráficos de Função). Seja S uma superfície dada como um gráfico de função

$$\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

Então

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial u} &= \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right),\end{aligned}$$

de modo que os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned}E &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2, \\ F &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}, \\ G &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2.\end{aligned}\tag{4.21}$$

Em particular,

$$EG - F^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2.\tag{4.22}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} &= \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right), \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} &= \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\right), \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} &= \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right),\end{aligned}$$

e

$$N = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1}} \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\right),\tag{4.23}$$

de modo que os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned}
 e &= \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \right\rangle = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1}}, \\
 f &= \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right\rangle = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1}}, \\
 g &= \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right\rangle = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1}}.
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Em particular,

$$eg - f^2 = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1}. \tag{4.25}$$

Segue que

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\right)^2}{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1\right]^2}. \tag{4.26}$$

e

$$H = \frac{\frac{1}{2} eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{\frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right] \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2\right] \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}}{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1\right]^{3/2}}. \tag{4.27}$$

□

4.39 Exemplo (Curvatura do Parabolóide). Considere o parabolóide circular

$$\varphi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2),$$

gráfico da função

$$f(u, v) = u^2 + v^2.$$

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 2u, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = 2v,$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 2.$$

Pelo exemplo anterior, segue que

$$K = \frac{4}{(4u^2 + 4v^2 + 1)^2},$$

ou seja, todos os pontos do parabolóide circular são elípticos (o mesmo vale para o parabolóide elíptico) e

$$H = \frac{2u^2 + 2v^2 + 1}{(4u^2 + 4v^2 + 1)^{3/2}}.$$

□

4.40 Exemplo (Curvatura de Superfícies de Revolução). Seja S uma superfície de revolução parametrizada por

$$\varphi(u, v) = (\mathbf{f}(v) \cos u, \mathbf{f}(v) \sin u, \mathbf{g}(v)).$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= (-\mathbf{f} \sin u, \mathbf{f} \cos u, 0), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= (\mathbf{f}' \cos u, \mathbf{f}' \sin u, \mathbf{g}'), \end{aligned}$$

de modo que os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \mathbf{f}^2, \\ F(u, v) &= 0, \\ G(u, v) &= (\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Em particular,

$$EG - F^2 = \mathbf{f}^2 [(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2]. \tag{4.29}$$

Se a curva geradora da superfície de revolução está parametrizada por comprimento de arco, então

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \mathbf{f}^2, \\ F(u, v) &= 0, \\ G(u, v) &= 1 \end{aligned} \tag{4.30}$$

e

$$EG - F^2 = \mathbf{f}^2. \tag{4.31}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} &= (-\mathbf{f} \cos u, -\mathbf{f} \sin u, 0), \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} &= (-\mathbf{f}' \sin u, \mathbf{f}' \cos u, 0), \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} &= (\mathbf{f}'' \cos u, \mathbf{f}'' \sin u, \mathbf{g}''), \end{aligned}$$

e

$$N = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2}} (\mathbf{g}' \cos u, \mathbf{g}' \sin u, -\mathbf{f}'), \tag{4.32}$$

de modo que os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned} e &= \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \right\rangle = \frac{-\mathbf{f}\mathbf{g}'}{\sqrt{(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2}}, \\ f &= \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right\rangle = 0, \\ g &= \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right\rangle = \frac{\mathbf{f}''\mathbf{g}' - \mathbf{f}'\mathbf{g}''}{\sqrt{(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2}}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Em particular,

$$eg - f^2 = \frac{\mathbf{f}\mathbf{g}'(\mathbf{f}'\mathbf{g}'' - \mathbf{f}''\mathbf{g}')}{(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2}. \quad (4.34)$$

Se a curva geradora da superfície de revolução está parametrizada por comprimento de arco, então

$$N = (\mathbf{g}' \cos u, \mathbf{g}' \sin u, -\mathbf{f}'), \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} e &= -\mathbf{f}\mathbf{g}', \\ f &= 0, \\ g &= \mathbf{f}''\mathbf{g}' - \mathbf{f}'\mathbf{g}'' \end{aligned} \quad (4.36)$$

e

$$eg - f^2 = \mathbf{f}\mathbf{g}'(\mathbf{f}'\mathbf{g}'' - \mathbf{f}''\mathbf{g}'). \quad (4.37)$$

Em particular, a matriz do operador forma em relação à base coordenada é uma matriz diagonal

$$[dN_p]_{\mathcal{B}} = -\frac{1}{EG} \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} = -\frac{1}{EG} \begin{bmatrix} eG & 0 \\ 0 & gE \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{e}{E} & 0 \\ 0 & \frac{g}{G} \end{bmatrix},$$

o que implica que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

são as direções principais e que

$$\frac{e}{E} \quad \text{e} \quad \frac{g}{G} \quad (4.38)$$

são as curvaturas principais. Segue também que

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{eg}{EG} = \frac{\mathbf{g}'(\mathbf{f}'\mathbf{g}'' - \mathbf{f}''\mathbf{g}')}{\mathbf{f} \left[(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2 \right]^2}. \quad (4.39)$$

e

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{eG + gE}{EG} = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-\mathbf{g}'}{\mathbf{f} \left[(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2 \right]^{1/2}} + \frac{\mathbf{f}''\mathbf{g}' - \mathbf{f}'\mathbf{g}''}{\left[(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2 \right]^{3/2}} \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

(note que o segundo termo é a curvatura com sinal da curva geradora). Se a curva geradora da superfície de revolução está parametrizada por comprimento de arco, então derivando

$$(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2 = 1$$

obtemos

$$\mathbf{f}'\mathbf{f}'' = -\mathbf{g}'\mathbf{g}'',$$

de modo que podemos escrever

$$\begin{aligned} K &= \frac{\mathbf{g}'(\mathbf{f}'\mathbf{g}'' - \mathbf{f}''\mathbf{g}')}{\mathbf{f}} = \frac{\mathbf{f}'\mathbf{g}'\mathbf{g}'' - \mathbf{f}''(\mathbf{g}')^2}{\mathbf{f}} = \frac{-(\mathbf{f}')^2\mathbf{f}'' - \mathbf{f}''(\mathbf{g}')^2}{\mathbf{f}} \\ &= -\frac{\mathbf{f}''[(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2]}{\mathbf{f}}, \end{aligned}$$

donde

$$K = -\frac{\mathbf{f}''}{\mathbf{f}}. \quad (4.41)$$

Também se a curva geradora da superfície de revolução está parametrizada por comprimento de arco temos

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{-\mathbf{g}'}{\mathbf{f}} + \mathbf{f}''\mathbf{g}' - \mathbf{f}'\mathbf{g}'' \right). \quad (4.42)$$

□

4.41 Exemplo (Curvatura Gaussiana do Toro). Considere o toro como superfície de revolução

$$\varphi(u, v) = ((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, \sin v),$$

de modo que

$$\mathbf{f}(v) = 2 + \cos v,$$

$$\mathbf{g}(v) = \sin v,$$

e a curva geratriz do toro está parametrizada por comprimento de arco. Então, por (4.41),

$$K = \frac{\cos v}{2 + \cos v}$$

Segue que $K = 0$ nos pontos pertencentes aos paralelos $v = \pi/2$ e $v = 3\pi/2$ (estes são os paralelos gerados pelos pontos superior e inferior do círculo gerador, respectivamente); estes pontos são parabólicos, já que o coeficiente g da segunda forma fundamental não se anula nestes pontos, como pode-se verificar. Estes paralelos delimitam a superfície do toro em suas regiões interior (que circundam o buraco) correspondente a $\pi/2 < v < 3\pi/2$, onde a curvatura é negativa e todos os pontos são hiperbólicos, e exterior, correspondente a $0 < v < \pi/2$ e $3\pi/2 < v < 2\pi$, onde a curvatura é positiva e todos os pontos são elípticos. □

4.42 Exemplo (Curvatura Média da Catenóide). Considere a catenóide como superfície de revolução

$$\phi(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v),$$

de modo que

$$\mathbf{f}(v) = \cosh v,$$

$$\mathbf{g}(v) = v,$$

e a curva geratriz não está parametrizada por comprimento de arco. Então

$$\begin{aligned}\mathbf{f}'(v) &= \sinh v, \\ \mathbf{f}''(v) &= \cosh v, \\ \mathbf{g}'(v) &= 1, \\ \mathbf{g}''(v) &= 0,\end{aligned}$$

de modo que, por (4.40),

$$\begin{aligned}H &= \frac{1 - \mathbf{f} \left[(\mathbf{f}')^2 + 1 \right] + \mathbf{f}^2 \mathbf{f}''}{2 \left[\mathbf{f}^2 \left[(\mathbf{f}')^2 + 1 \right] \right]^{3/2}} \\ &= \frac{1 - (\sinh^2 v + 1) + \cosh^2 v}{2 \cosh v (\sinh^2 v + 1)^{3/2}} \\ &= \frac{1 - \cosh^2 v + \cosh^2 v}{2 \cosh^{5/2} v} \\ &= 0.\end{aligned}$$

A curvatura média da catenóide é zero. Conforme veremos no final do capítulo, isso significa que a catenóide é uma *superfície mínima*. Ela é a única superfície de revolução que é uma superfície mínima (veja Proposição 4.53). \square

4.4 Superfícies de Curvatura Constante

Nesta seção examinaremos superfícies de curvatura constante, isto é, superfícies de *curvatura gaussiana* constante.

4.43 Exemplo (Curvatura Gaussiana da Esfera). Do Exemplo 4.15 segue que a esfera de raio R é uma superfície de curvatura constante igual a $1/R^2$. \square

O próximo resultado mostra que toda superfície compacta (isto é, fechada e limitada) possui pontos elípticos. Uma consequência deste resultado é que superfícies de curvatura nula ou negativa são não fechadas ou não limitadas.

4.44 Proposição. *Se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície compacta, então existe um ponto $p \in S$ tal que $K(p) > 0$, isto é, S possui um ponto elíptico.*

Prova: Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ a função quadrado da distância da origem

$$f(p) = \|p\|^2.$$

Conforme vimos no Exemplo 3.27, esta função é infinitamente diferenciável. Em particular ela é contínua e como S é compacta, ela atinge um máximo e um mínimo. Seja $p_0 \in S$ um ponto de máximo para f ; ou seja, p_0 é um ponto de S mais distante da origem. Logo, se $f(p_0) = \|p_0\|^2 = R^2$, S está dentro da esfera de raio R centrada na origem. Afirmamos que

$$K(p_0) \geq \frac{1}{R^2},$$

isto é, a curvatura de S em p_0 deve ser maior ou igual à curvatura da esfera de raio R .

Considere um vetor unitário qualquer $V \in T_{p_0}S$ e uma curva $\alpha : I \rightarrow S$ parametrizada por comprimento de arco com $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha'(0) = V$. A composta $g = f \circ \alpha$ obviamente também tem um máximo em $t = 0$, logo

$$g'(0) = 0, \quad (4.43)$$

$$g''(0) \leq 0. \quad (4.44)$$

Como

$$\begin{aligned} g(s) &= \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle, \\ g'(s) &= 2 \langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle, \end{aligned}$$

segue de (4.43) que

$$\langle p_0, V \rangle = 0 \quad (4.45)$$

Isso significa que o vetor p_0 é normal ao plano tangente $T_{p_0}S$, já que V é um vetor arbitrário. Portanto,

$$N_0 = \frac{p_0}{\|p_0\|} = \frac{p_0}{R}$$

é um vetor normal unitário a $T_{p_0}S$. Além disso, como

$$g''(s) = 2 \langle \alpha(s), \alpha''(s) \rangle + 2 \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle,$$

segue de (4.44) e de $\|V\| = 1$ que

$$2 \langle p_0, \alpha''(0) \rangle + 2 \leq 0,$$

ou seja,

$$\langle p_0, \alpha''(0) \rangle \leq -1.$$

Portanto, a curvatura normal de α em p satisfaz

$$\kappa_n(p_0) = \langle \alpha''(0), N_0 \rangle = \frac{1}{R} \langle \alpha''(0), p_0 \rangle \leq -\frac{1}{R}$$

e, conseqüentemente, as curvaturas principais de S em p satisfazem

$$\kappa_1(p_0), \kappa_2(p_0) \leq -\frac{1}{R}.$$

Concluimos que

$$K(p_0) = \kappa_1(p_0) \kappa_2(p_0) \geq \frac{1}{R^2}.$$

■

4.45 Corolário. *Não existem superfícies compactas em \mathbb{R}^3 com $K \leq 0$.*

Veremos no próximo capítulo que a esfera é a única superfície compacta em \mathbb{R}^3 com curvatura constante (Teorema de Rigidez da Esfera).

4.4.1 Superfícies de Revolução com Curvatura Constante

Existem muitas superfícies de revolução (não compactas) de curvatura gaussiana constante. Como observado antes, tratamos apenas de superfícies regulares e não de superfícies parametrizadas regulares. Para ver vários exemplos de superfícies de revolução com curvatura constante mas com autointerseções veja [Gray], Capítulo 15.

4.46 Proposição. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície de revolução regular com curvatura gaussiana K . Então S pode ser parametrizada por*

$$\varphi(u, v) = (\mathbf{f}(v) \cos u, \mathbf{f}(v) \sin u, \mathbf{g}(v))$$

onde

$$\mathbf{f}(v) = \begin{cases} av + b & \text{se } K_0 = 0, \\ a \cos(\sqrt{K_0}v) + b \sin(\sqrt{K_0}v) & \text{se } K_0 > 0, \\ a \cosh(\sqrt{-K_0}v) + b \sinh(\sqrt{-K_0}v) & \text{se } K_0 < 0, \end{cases} \quad (4.46)$$

para $a, b \in \mathbb{R}$. Mais precisamente e sucintamente, podemos escrever

(1) se $K_0 = 0$, então

$\mathbf{f}(v) = v,$	$d \in \mathbb{R},$	<i>plano</i>
$\mathbf{g}(v) = d,$	$v \in \mathbb{R},$	
$\mathbf{f}(v) = e,$	$e > 0$	<i>cilindro circular reto</i>
$\mathbf{g}(v) = v,$	$v \in \mathbb{R},$	
$\mathbf{f}(v) = cv,$	$c > 0,$	<i>cone menos o vértice</i>
$\mathbf{g}(v) = v,$	$v \in \mathbb{R}, v \neq 0$	

(2) se $K_0 > 0$, então

$\mathbf{f}(v) = \frac{1}{\sqrt{K_0}} \cos(\sqrt{K_0}v),$	$v \in \left[-\frac{\pi}{2\sqrt{K_0}}, \frac{\pi}{2\sqrt{K_0}}\right],$	<i>esfera</i>
$\mathbf{g}(v) = \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sin(\sqrt{K_0}v),$		
$\mathbf{f}(v) = c \cos(\sqrt{K_0}v),$	$0 < c < 1/\sqrt{K_0},$	<i>esfera prolata</i>
$\mathbf{g}(v) = \int_0^v \sqrt{1 - c^2 K_0 \sin^2(\sqrt{K_0}t)} dt,$	$v \in \left(-\frac{\pi}{2\sqrt{K_0}}, \frac{\pi}{2\sqrt{K_0}}\right),$	
$\mathbf{f}(v) = c \cos(\sqrt{K_0}v),$	$c > 1/\sqrt{K_0},$	<i>esfera oblata</i>
$\mathbf{g}(v) = \int_0^v \sqrt{1 - c^2 K_0 \sin^2(\sqrt{K_0}t)} dt,$	$v \in \left(-\frac{1}{\sqrt{K_0}} \sin^{-1} \frac{1}{c\sqrt{K_0}}, \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sin^{-1} \frac{1}{c\sqrt{K_0}}\right),$	

(3) Se $K_0 < 0$, então

$\mathbf{f}(v) = \frac{1}{\sqrt{-K_0}} e^{-\sqrt{-K_0}v},$	$v > 0,$	<i>pseudoesfera</i>
$\mathbf{g}(v) = \int_0^v \sqrt{1 - e^{-2\sqrt{-K_0}t}} dt,$		
$\mathbf{f}(v) = c \cosh(\sqrt{-K_0}v),$	$c > 0,$	<i>tipo hiperbolóide</i>
$\mathbf{g}(v) = \int_0^v \sqrt{1 - c^2 K_0 \sinh^2(\sqrt{-K_0}t)} dt,$	$v \in \left(-\frac{1}{\sqrt{-K_0}} \sinh^{-1} \frac{1}{c\sqrt{-K_0}}, \frac{1}{\sqrt{-K_0}} \sinh^{-1} \frac{1}{c\sqrt{-K_0}}\right),$	
$\mathbf{f}(v) = c \sinh(\sqrt{-K_0}v),$	$c > 0,$	<i>tipo cônico</i>
$\mathbf{g}(v) = \int_0^v \sqrt{1 - c^2 K_0 \cosh^2(\sqrt{-K_0}t)} dt,$	$v \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{-K_0}} \cosh^{-1} \frac{1}{c\sqrt{-K_0}}\right),$	

Prova: Podemos escolher uma parametrização para S de tal forma que a curva geratriz está parametrizada por comprimento de arco, ou seja,

$$(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2 = 1.$$

De (4.41), segue que \mathbf{f} satisfaz a equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$\mathbf{f}'' + K_0 \mathbf{f} = 0. \quad (4.47)$$

A solução geral desta equação é exatamente (4.46).

(1) **Caso** $K_0 = 0$.

Temos

$$\mathbf{f}(v) = av + b.$$

Para obter \mathbf{g} , como ela satisfaz a equação diferencial ordinária

$$(\mathbf{g}')^2 = 1 - (\mathbf{f}')^2 = 1 - a^2,$$

denotando $c = \sqrt{1 - a^2}$ (note que devemos ter $|a| \leq 1$) e assumindo $\mathbf{g}' > 0$ (caso contrário, trocamos v por $-v$), segue que

$$\mathbf{g}(v) = cv + d.$$

Se $a = 1$ e $c = 0$ temos o plano, obtido através de girar uma reta perpendicular ao eixo z de altura d em torno do eixo z ; podemos tomar $b = 0$ sem perda de generalidade. Se $a = 0$ e $b \neq 0$, obtemos o cilindro circular reto, obtido através de girar uma reta perpendicular ao plano xy em torno do eixo z ; neste caso $c = 1$. Se $0 < a < 1$, obtemos o cone circular, e para que este seja uma superfície regular devemos remover o vértice onde o plano tangente não existe e este corresponde a $v = 0$; podemos tomar $b = 0$ sem perda de generalidade. Todas estas superfícies são ilimitadas, as primeiras duas fechadas e a última não fechada, devido à remoção do vértice.

(2) **Caso** $K_0 > 0$.

Podemos escrever

$$\mathbf{f}(v) = a \cos(\sqrt{K_0}v) + b \operatorname{sen}(\sqrt{K_0}v) = c \cos(\sqrt{K_0}v - d)$$

onde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $d = \arctan b/a$. Sem perda de generalidade podemos tomar $d = 0$: isso corresponde a mudar o ponto inicial da curva geratriz e assim transladar a curva ao longo do eixo de revolução. Também podemos assumir $c > 0$, usando uma reflexão em caso contrário. Portanto,

$$\mathbf{f}(v) = c \cos(\sqrt{K_0}v),$$

com $c > 0$.

Para obter \mathbf{g} , como ela satisfaz a equação diferencial ordinária

$$(\mathbf{g}')^2 = 1 - (\mathbf{f}')^2 = 1 - c^2 K_0 \operatorname{sen}^2(\sqrt{K_0}v)$$

segue que

$$\mathbf{g}' = \sqrt{1 - c^2 K_0 \operatorname{sen}^2(\sqrt{K_0}v)},$$

onde assumimos $\mathbf{g}' > 0$ (caso contrário, trocamos v por $-v$). Integrando de 0 a v , obtemos

$$\mathbf{g}(v) = \int_0^v \sqrt{1 - c^2 K_0 \operatorname{sen}^2(\sqrt{K_0}t)} dt. \quad (4.48)$$

Quando $c = 1/\sqrt{K_0}$, temos

$$\mathbf{f}(v) = \frac{1}{\sqrt{K_0}} \cos(\sqrt{K_0}v),$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(v) &= \int_0^v \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\sqrt{K_0}t)} dt = \mathbf{g}(v) = \int_0^v \cos(\sqrt{K_0}t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{K_0}} \operatorname{sen}(\sqrt{K_0}v), \end{aligned}$$

e a curva geratriz é o arco de círculo de raio $1/\sqrt{K_0}$

$$\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{K_0}} \left(\cos(\sqrt{K_0}v), \text{sen}(\sqrt{K_0}v) \right),$$

de modo que S é a esfera.

O caso $c < 1/\sqrt{K_0}$ corresponde à chamada **esfera prolata** (uma palavra que significa esfera alongada), enquanto que o caso $c > 1/\sqrt{K_0}$ corresponde à chamada **esfera oblata** (uma palavra que significa esfera achatada nos polos). Não se deve confundir estas superfícies com o *esferóide prolato* e o *esferóide oblato*, que são elipsóides de revolução. Estes últimos são gerados pela rotação de uma elipse em torno de um de seus semieixos: girar uma elipse em torno do seu semieixo maior produz um esférico prolato, enquanto que girar uma elipse em torno do seu semieixo menor produz um esférico oblato. A grande diferença é que estes elipsóides são superfícies compactas como a esfera, os seus polos são pontos regulares onde o plano tangente está definido, e obviamente elas não possuem curvatura gaussiana constante pelo Teorema de Rigidez da Esfera. A esfera prolata e a esfera oblata são superfícies regulares limitadas mas não fechadas. A esfera prolata parece-se como uma bola de futebol americano com polos “pontudos”, isto é, em que os polos

$$v = -\frac{\pi}{2\sqrt{K_0}}, \frac{\pi}{2\sqrt{K_0}}$$

são pontos de singularidade onde o plano tangente não está definido; a parametrização está de fato definida para todo $v \in \mathbb{R}$, mas se fizermos v variar de $-\infty$ a $+\infty$ obteremos uma figura que se parece com um colar de gotas, cada gota com o formato de uma bola de futebol com polos pontudos. A esfera oblata não intercepta o eixo de revolução, na verdade fica bem longe dele, e tem o formato de um barril aberto em cima e embaixo (veja a Figura 3.12 em [Kuhnel], p. 83, ou as Figuras 15.6 e 15.7 em [Gray], p. 476). De fato, devemos ter

$$1 - c^2 K_0 \text{sen}^2(\sqrt{K_0}v) > 0,$$

para que o radicando em (4.48) seja positivo, o que é equivalente a

$$\text{sen}^2(\sqrt{K_0}v) < \frac{1}{c^2 K_0},$$

ou seja,

$$\left| \text{sen}(\sqrt{K_0}v) \right| < \frac{1}{c\sqrt{K_0}}.$$

Se $c < 1/\sqrt{K_0}$, então $c^2 K_0 < 1$ e isso ocorre para todo v ; se $c > 1/\sqrt{K_0}$, então $c^2 K_0 > 1$ e isso ocorre apenas para v satisfazendo

$$-\frac{1}{c\sqrt{K_0}} \arcsen \frac{1}{c\sqrt{K_0}} < v < \frac{1}{c\sqrt{K_0}} \arcsen \frac{1}{c\sqrt{K_0}}.$$

Neste último caso, a distância da curva até o eixo, que é dada pelo valor mínimo de $\mathbf{f}(v)$, é um número positivo ($\mathbf{f}(v)$ é o raio do círculo de revolução traçado pelo ponto $(\mathbf{f}(v), \mathbf{g}(v))$ em torno do eixo z).

(3) Caso $K_0 < 0$.

Para obter o primeiro caso (a pseudoesfera), escrevemos a solução geral da equação (4.11) na forma

$$\mathbf{f}(v) = ae^{\sqrt{-K_0}v} + be^{-\sqrt{-K_0}v}.$$

Tomando $a = 0$, obtemos

$$\mathbf{f}(v) = be^{-\sqrt{-K_0}v}.$$

Fazendo a substituição $w = v - \frac{\ln b}{\sqrt{K_0}} - \frac{\ln(1/\sqrt{K_0})}{\sqrt{K_0}}$, podemos assumir $b = 1/\sqrt{K_0}$, logo

$$\mathbf{f}(v) = \frac{1}{\sqrt{K_0}} e^{-\sqrt{-K_0}v}.$$

Daí

$$\mathbf{g}' = \sqrt{1 - e^{-2\sqrt{-K_0}v}},$$

onde assumimos $\mathbf{g}' > 0$ sem perda de generalidade; observe que para que o radicando seja positivo precisamos ter $v > 0$. Integrando de 0 a v , obtemos

$$\mathbf{g}(v) = \int_0^v \sqrt{1 - c^2 K_0 e^{-2\sqrt{-K_0}t}} dt. \quad (4.49)$$

Tomando $b = 0$ e $a = 1/\sqrt{K_0}$, desta vez precisamos tomar o parâmetro $v < 0$, mas procedendo como acima obteremos apenas a imagem refletida em relação ao plano xy da superfície obtida anteriormente; em $v = 0$ estas duas superfícies são unidas ao longo de um círculo centrado na origem, mas em nenhum ponto deste círculo podemos definir o plano tangente (isso ocorre porque neste pontos uma das curvaturas principais torna-se infinita, enquanto que a outra se anula), portanto apenas cada uma delas separadamente é uma superfície regular e escolhemos no enunciado aquela que se encontra no semiespaço superior. Assim, a pseudoesfera é uma superfície ilimitada e não fechada (veja a Figura 3.13 em [Kuhnel], p. 84, ou a Figura 15.10 em [Gray], p. 480). A curva geradora da pseudoesfera é a *tratrix*.

As outras duas soluções são obtidas através da solução geral (4.46). As superfícies do tipo cônico possuem uma singularidade na origem que deve ser removida, como o cone, portanto elas também não são fechadas. As superfícies do tipo hiperbolóide são fechadas (veja a Figura 3.13 em [Kuhnel], p. 84, ou as Figuras 15.8 e 15.9 em [Gray], p. 479). ■

4.5 Superfícies Mínicas

4.47 Definição. Dizemos que uma superfície parametrizada regular ou uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície mínima se $H = 0$. □

Geometricamente, as duas curvaturas principais são iguais em módulo e opostas sinal em todo ponto da superfície; em particular, todo ponto da superfície é um ponto hiperbólico ou planar.

4.48 Corolário. Não existem superfícies mínimas compactas em \mathbb{R}^3 .

Prova: Segue da Proposição 4.44, pois em um ponto elíptico as curvaturas principais tem o mesmo sinal, logo a curvatura média não pode se anular. ■

Para explicar um pouco a relação entre a curvatura média e a palavra “mínima”, precisamos introduzir a noção de *variação normal*.

4.49 Definição. Seja $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Se $D \subset\subset U$ é um domínio limitado e $h : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então a **variação normal** de $\phi(\overline{D})$ determinada por h é a aplicação

$$\Phi : \overline{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definida por

$$\Phi(u, v, t) = \phi(u, v) + th(u, v)N(u, v). \quad (4.50)$$

□

Assim, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,

$$\phi_t(u, v) = \Phi(u, v, t)$$

é uma superfície parametrizada e

$$\phi_0(u, v) = \Phi(u, v, 0) = \phi(u, v).$$

4.50 Lema. Se t é suficientemente pequeno, ϕ_t é uma superfície parametrizada regular.

Prova: De (4.50) segue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi_t}{\partial u} &= \frac{\partial\phi}{\partial u} + t\frac{\partial h}{\partial u} N + th\frac{\partial N}{\partial u}, \\ \frac{\partial\phi_t}{\partial v} &= \frac{\partial\phi}{\partial v} + t\frac{\partial h}{\partial v} N + th\frac{\partial N}{\partial v}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial\phi_t}{\partial u} \times \frac{\partial\phi_t}{\partial v} = \frac{\partial\phi}{\partial u} \times \frac{\partial\phi}{\partial v} + o(t)$$

onde $o(t)$ significa uma função $R(u, v, t)$ tal que $\lim_{t \rightarrow 0} R(u, v, t) = 0$, uniformemente para $(u, v) \in \bar{D}$, já que \bar{D} é compacto. Assim, para todo t suficientemente pequeno $\left\{ \frac{\partial\phi_t}{\partial u}, \frac{\partial\phi_t}{\partial v} \right\}$ é L.I. ■

4.51 Proposição. *Seja $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Se $D \subset\subset U$ é um domínio limitado e Φ é uma variação normal de $\phi(\bar{D})$, denote por $A_t(D)$ a área de $\phi_t(D)$. Então ϕ é uma superfície mínima se e somente se*

$$\left. \frac{d}{dt} A_t(D) \right|_{t=0} = 0$$

para todo D e para toda variação normal de $\phi(\bar{D})$.

Prova: Como vimos no lema anterior,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi_t}{\partial u} &= \frac{\partial\phi}{\partial u} + t\frac{\partial h}{\partial u} N + th\frac{\partial N}{\partial u}, \\ \frac{\partial\phi_t}{\partial v} &= \frac{\partial\phi}{\partial v} + t\frac{\partial h}{\partial v} N + th\frac{\partial N}{\partial v}.\end{aligned}$$

Denotando por E_t, F_t, G_t os coeficientes da primeira forma fundamental de ϕ_t , e usando

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial u}, N \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial v}, N \right\rangle = 0, \\ \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, N \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, N \right\rangle = 0,\end{aligned}$$

(as duas últimas seguem derivando $\langle N, N \rangle = 1$ em relação a u e em relação a v , respectivamente), temos

$$\begin{aligned}E_t &= \left\langle \frac{\partial\phi_t}{\partial u}, \frac{\partial\phi_t}{\partial u} \right\rangle = E + 2th \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial u} \right\rangle + t^2 h^2 \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial u} \right\rangle + t^2 \left(\frac{\partial h}{\partial u} \right)^2, \\ F_t &= \left\langle \frac{\partial\phi_t}{\partial u}, \frac{\partial\phi_t}{\partial v} \right\rangle = F + th \left(\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial v} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial v}, \frac{\partial N}{\partial u} \right\rangle \right) + t^2 h^2 \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial v} \right\rangle + t^2 \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial v}, \\ G_t &= \left\langle \frac{\partial\phi_t}{\partial v}, \frac{\partial\phi_t}{\partial v} \right\rangle = G + 2th \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial v}, \frac{\partial N}{\partial v} \right\rangle + t^2 h^2 \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial N}{\partial v} \right\rangle + t^2 \left(\frac{\partial h}{\partial v} \right)^2.\end{aligned}$$

Como, pela Proposição 4.20 e sua demonstração,

$$\begin{aligned}e &= \left\langle N, \frac{\partial^2\phi}{\partial u^2} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial\phi}{\partial u} \right\rangle, \\ f &= \left\langle N, \frac{\partial^2\phi}{\partial u\partial v} \right\rangle = - \frac{1}{2} \left[\left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial\phi}{\partial v} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial\phi}{\partial u} \right\rangle \right], \\ g &= \left\langle N, \frac{\partial^2\phi}{\partial v^2} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial\phi}{\partial v} \right\rangle,\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} E_t &= E - 2the + t^2 h^2 \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial u} \right\rangle + t^2 \left(\frac{\partial h}{\partial u} \right)^2, \\ F_t &= F - 2thf + t^2 h^2 \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial v} \right\rangle + t^2 \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial v}, \\ G_t &= G - 2thg + t^2 h^2 \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial N}{\partial v} \right\rangle + t^2 \left(\frac{\partial h}{\partial v} \right)^2. \end{aligned}$$

De

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2},$$

obtemos então

$$\begin{aligned} E_t G_t - F_t^2 &= EG - F^2 - 2th(eG - 2fF + gE) + o(t^2) \\ &= (1 - 4thH)(EG - F^2) + o(t^2), \end{aligned}$$

onde $o(t^2)$ significa uma função $R(u, v, t)$ tal que $\lim_{t \rightarrow 0} R(u, v, t)/t = 0$, uniformemente para $(u, v) \in \bar{D}$, já que \bar{D} é compacto. Segue que

$$A_t(D) = \int_{\bar{D}} \sqrt{E_t G_t - F_t^2} \, dudv = \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4thH + o(t^2)} \sqrt{EG - F^2} \, dudv$$

(a ordem $o(t^2)$ é mantida porque $\tilde{R}(u, v, t) = R(u, v, t)/\sqrt{EG - F^2}$ ainda satisfaz $\lim_{t \rightarrow 0} \tilde{R}(u, v, t)/t = 0$, uniformemente em \bar{D}). Derivando em relação a t , obtemos

$$\frac{d}{dt} A_t(D) = - \int_{\bar{D}} \frac{2hH + o(t)}{\sqrt{1 - 4thH + o(t^2)}} \sqrt{EG - F^2} \, dudv,$$

de modo que

$$\left. \frac{d}{dt} A_t(D) \right|_{t=0} = - \int_{\bar{D}} 2hH \sqrt{EG - F^2} \, dudv. \quad (4.51)$$

Daí segue o resultado. ■

Assim, qualquer região compacta $\phi(\bar{D})$ é um **ponto crítico** para o funcional área de qualquer variação normal de $\phi(\bar{D})$. Neste sentido, superfícies mínimas são o análogo bidimensional de *geodésicas*, que veremos no Capítulo 6. Mas não é necessariamente verdade que $\phi(\bar{D})$ é um ponto de mínimo, como no caso de geodésicas. No entanto pode-se caracterizar superfícies mínimas de outras forma: uma superfície é mínima se todo ponto possui uma vizinhança cuja área é a menor relativa à sua fronteira. Como películas de sabão minimizam a área (pois a energia superficial da película é proporcional à sua área e quando a diferença de pressão entre as superfícies interna e externa da película de sabão é zero, a energia superficial é minimizada; por sinal, bolhas de sabão esféricas tem pressão interna maior que a externa, que impede a bolha de colapsar até um ponto, e não são superfícies mínimas), elas realizam fisicamente as superfícies mínimas. Para maiores detalhes veja [Oprea2].

4.52 Exemplo. O plano e a catenóide (Exemplo 4.42) são superfícies mínimas sem autointerseções. Outro exemplo é a helicóide

$$\phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v).$$

De fato (lembre-se que a helicóide não é uma superfície de revolução), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial u} &= (\cos v, \sin v, 0), \\ \frac{\partial \phi}{\partial v} &= (-u \sin v, u \cos v, 1), \end{aligned}$$

de modo que os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned} E(u, v) &= 1, \\ F(u, v) &= 0, \\ G(u, v) &= u^2 + 1. \end{aligned}$$

Em particular,

$$EG - F^2 = u^2 + 1.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} &= (-\sin v, \cos v, 0), \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} &= (-u \cos v, -u \sin v, 0), \end{aligned}$$

e

$$N = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} (\sin v, -\cos v, u), \quad (4.52)$$

de modo que os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned} e &= \left\langle N, \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} \right\rangle = 0, \\ f &= \left\langle N, \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}, \\ g &= \left\langle N, \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \right\rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Em particular,

$$eg - f^2 = -\frac{1}{u^2 + 1}. \quad (4.54)$$

Segue que

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{(u^2 + 1)^2} \quad (4.55)$$

e

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = 0. \quad (4.56)$$

O plano e a catenóide são as únicas superfícies mínimas de revolução (veja Proposição 4.53, a seguir). O plano e a helicóide são as únicas superfícies mínimas regradas (veja [Carmo], p. 204, para uma demonstração).

Durante algum tempo conjecturou-se que o plano, a catenóide e a helicóide fossem as únicas superfícies mínimas regulares (existem muitos exemplos de superfícies parametrizadas regulares mínimas com autointerseções, com parametrizações explícitas; veja [Gray], pp. 509–515). Em 1982, Costa provou que isso não era verdade (veja [Costa1] ou [Costa2]). Desde então, vários outros exemplos foram encontrados. Veja [Gray], Seção 22.7, pp. 748–751, para imagens e uma parametrização da superfície de Costa usando a função de Weierstrass (que toma valores complexos). Uma animação da superfície de Costa também pode ser encontrada na Wikipedia. \square

4.53 Proposição. *Uma superfície de revolução que é também uma superfície mínima está contida em um plano ou em uma catenóide.*

Prova: Seja

$$\varphi(u, v) = (\mathbf{f}(v) \cos u, \mathbf{f}(v) \sin u, \mathbf{g}(v)),$$

de modo que, como vimos no Exemplo 4.40,

$$H = \frac{1 - \mathbf{f}\mathbf{g}' \left[(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2 \right] + \mathbf{f}^2 (\mathbf{f}''\mathbf{g}' - \mathbf{f}'\mathbf{g}'')}{2 \mathbf{f}^2 \left[(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2 \right]^{3/2}}.$$

Vamos considerar 3 casos:

Caso 1. $\mathbf{g}' \equiv 0$.

Então \mathbf{g} é constante e φ é a parametrização de um plano.

Caso 2. $\mathbf{g}' \neq 0$ em todo ponto.

Pelo Teorema da Função Inversa podemos reparametrizar a superfície de revolução por uma parametrização da forma

$$\psi(u, v) = (\mathbf{h}(v) \cos u, \mathbf{h}(v) \sin u, v)$$

e a curvatura média será então

$$H = \frac{1 - \left[(\mathbf{h}')^2 + 1 \right] + \mathbf{h}\mathbf{h}''}{2 \mathbf{h} \left[(\mathbf{h}')^2 + 1 \right]^{3/2}}.$$

Logo, \mathbf{h} satisfaz a equação diferencial ordinária

$$\mathbf{h}\mathbf{h}'' = (\mathbf{h}')^2 + 1.$$

Escrevemos esta equação na forma

$$\frac{2\mathbf{h}'\mathbf{h}''}{(\mathbf{h}')^2 + 1} = \frac{2\mathbf{h}'}{\mathbf{h}}$$

e integramos, obtendo

$$\log \left[(\mathbf{h}')^2 + 1 \right] = \log (\mathbf{h}^2) - \log (c^2) = \log \left(\frac{\mathbf{h}}{c} \right)^2$$

para alguma constante $c \neq 0$. Exponenciando, segue que

$$(\mathbf{h}')^2 + 1 = \left(\frac{\mathbf{h}}{c} \right)^2.$$

Daí,

$$\mathbf{h}' = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{h}}{c} \right)^2 - 1},$$

donde

$$\frac{\frac{\mathbf{h}'}{c}}{\sqrt{\left(\frac{\mathbf{h}}{c} \right)^2 - 1}} = \frac{1}{c}.$$

Integrando, obtemos

$$\cosh^{-1} \frac{\mathbf{h}}{c} = \frac{v}{c} + b,$$

de modo que

$$\mathbf{h}(v) = c \cosh\left(\frac{v}{c} + b\right)$$

e portanto a superfície é parte de uma catenóide.

Caso 3. $\mathbf{g}' = 0$ em alguns pontos e $\mathbf{g}' \neq 0$ em outros pontos.

Este caso não pode ocorrer, pois a curva geratriz tem inclinação dada por $\mathbf{f}'(v)/\mathbf{g}'(v)$ onde $\mathbf{g}'(v) \neq 0$ e em um ponto v_0 onde $\mathbf{g}'(v_0) = 0$ e $\mathbf{g}'(v) > 0$ (ou < 0) para $v > v_0$, por exemplo, a inclinação seria $\mathbf{f}'(v)/\mathbf{g}'(v)$ para os pontos $v > v_0$ e a curva geratriz uma catenária, como visto no caso anterior e tornando-se infinita perto de v_0 , o que não é possível para o gráfico do cosseno hiperbólico. ■

Capítulo 5

Geometria Intrínseca das Superfícies

Comprimento, ângulo e área em uma superfície podem ser medidos “sem sair” da superfície, através da primeira forma fundamental (a métrica). Isso é chamado *geometria intrínseca*. Já conceitos que dependem da segunda forma fundamental, cuja definição depende da idéia de vetor normal, que só existe quando há um espaço ambiente onde a superfície está mergulhada, e portanto é necessário “sair” da superfície para defini-los e medi-los, formam a *geometria extrínseca* da superfície. Neste capítulo veremos algumas outras propriedades locais importantes que podem ser expressas apenas em termos da primeira forma fundamental. Em particular, veremos que a curvatura gaussiana, que foi definida através da segunda forma fundamental, pode ser expressa exclusivamente através dos coeficientes da primeira forma fundamental e suas derivadas, portanto ela é na realidade um conceito intrínseco da superfície. Veremos também como consequências alguns resultados globais importantes. Este estudo continuará no próximo capítulo, quando estudaremos o conceito de geodésicas em profundidade.

5.1 Isometrias

A noção de isometria torna precisa a idéia de que duas superfícies tem localmente a mesma primeira forma fundamental (a mesma métrica).

5.1 Definição. Sejam $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ duas superfícies regulares. Dizemos que um difeomorfismo $F : S_1 \rightarrow S_2$ é uma **isometria** se

$$\langle dF_p(V), dF_p(W) \rangle = \langle V, W \rangle$$

para todo $p \in S_1$ e para todos $V, W \in T_p S_1$. Neste caso dizemos que S_1 e S_2 são isométricas.

Dizemos que S_1 e S_2 são **localmente isométricas** se para cada ponto $p_i \in S_i$ existir uma vizinhança V_i de p_i em S_i e uma isometria $F_i : V_i \rightarrow V_j$ de V_i sobre uma vizinhança V_j de S_j para $i, j = 1, 2$; F_i é chamada uma **isometria local**. \square

Em particular, uma isometria local deixa invariante os coeficientes da primeira forma fundamental. Observe que em vista da demonstração da Proposição 1.56 (Passo 2), para provar que F é uma isometria é suficiente provar que

$$\|dF_p(V)\| = \|V\|$$

para todo $p \in S_1$ e para todo $V \in T_p S_1$.

5.2 Exemplo (O plano e o cilindro são localmente isométricos). Intuitivamente, como podemos enrolar uma folha de papel transformando-a em um cilindro, o plano e o cilindro são localmente isométricos (papel não pode ser esticado ou contraído). A própria parametrização do cilindro $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

permite construir isometrias locais. Basta restringir φ a domínios da forma $(u_0, u_0 + 2\pi) \times \mathbb{R}$ para obter isometrias locais do plano para o cilindro e considerar as inversas destas aplicações para obter isometrias locais do cilindro para o plano, todos os pontos destas duas superfícies sendo cobertas. De fato, se $\{e_1, e_2\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^2 temos

$$\begin{aligned}\langle e_1, e_1 \rangle &= 1 = \langle (-\sin u, \cos u, 0), (-\sin u, \cos u, 0) \rangle = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle = \langle d\varphi(e_1), d\varphi(e_1) \rangle, \\ \langle e_1, e_2 \rangle &= 0 = \langle (-\sin u, \cos u, 0), (0, 0, 1) \rangle = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = \langle d\varphi(e_1), d\varphi(e_2) \rangle, \\ \langle e_2, e_2 \rangle &= 1 = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = \langle d\varphi(e_2), d\varphi(e_2) \rangle.\end{aligned}$$

A verificação de que as aplicações assim obtidas são difeomorfismos fica como exercício.

Por outro lado, o plano e o cilindro não são isométricos, pois não são difeomorfos, nem mesmo homeomorfos. Intuitivamente, o cilindro tem um buraco (o círculo unitário com centro na origem não pode ser deformado no cilindro até um ponto), enquanto que o plano não. Uma demonstração rigorosa requer o desenvolvimento de ferramentas mais avançadas de topologia diferencial e topologia algébrica, respectivamente. \square

5.3 Proposição. *Sejam $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ duas superfícies regulares. Se existem cartas*

$$\begin{aligned}\varphi_1 : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \varphi_1(U) \subset S_1, \\ \varphi_2 : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \varphi_2(U) \subset S_2,\end{aligned}$$

tais que

$$\begin{aligned}E_1 &= E_2, \\ F_1 &= F_2, \\ G_1 &= G_2,\end{aligned}$$

então

$$F = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U) \longrightarrow \varphi_2(U)$$

é uma isometria local.

Prova: Por ser uma composta de difeomorfismos (Corolário 3.39), $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ é um difeomorfismo. Dados $p = \varphi_1(u_1, v_1) \in S_1$ e $V \in T_p S_1$, escreva

$$V = V_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + V_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}.$$

Temos

$$\begin{aligned}\|dF_p(V)\|^2 &= \left\langle d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})_p(V), d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})_p(V) \right\rangle \\ &= \left\langle d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})_p \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \right), d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})_p \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \right) \right\rangle V_1^2 \\ &\quad + 2 \left\langle d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})_p \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \right), d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})_p \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right) \right\rangle V_1 V_2 \\ &\quad + \left\langle d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})_p \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right), d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})_p \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right) \right\rangle V_2^2.\end{aligned}$$

Denotando por $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de \mathbb{R}^2 e $F(p) = \varphi_2(u_2, v_2)$, pela regra da cadeia temos

$$\begin{aligned} d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})_p \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \right) &= d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})_p (d\varphi_1)_{(u_0, v_0)}(e_1) = (d\varphi_2)_{(u_2, v_2)}(e_1) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \\ d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})_p \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right) &= d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})_p (d\varphi_1)_{(u_0, v_0)}(e_2) = (d\varphi_2)_{(u_2, v_2)}(e_2) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|dF_p(V)\|^2 &= \left\langle \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \right\rangle V_1^2 + 2 \left\langle \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right\rangle V_1 V_2 + \left\langle \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right\rangle V_2^2 \\ &= E_2 V_1^2 + 2F_2 V_1 V_2 + G_2 V_2^2 \\ &= E_1 V_1^2 + 2F_1 V_1 V_2 + G_1 V_2^2 \\ &= \|V\|^2. \end{aligned}$$

■

5.4 Exemplo (A catenóide e o helicóide são localmente isométricas). Parametrizações para a catenóide e o helicóide são $\phi_1, \bar{\phi}_2 : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\phi_1(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)$$

e

$$\bar{\phi}_2(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v} \cos \bar{u}, \bar{v} \sin \bar{u}, \bar{u}),$$

respectivamente. Pelo Exemplo 4.40, os coeficientes da primeira forma fundamental da catenóide são

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \cosh^2 v, \\ F(u, v) &= 0, \\ G(u, v) &= 1 + \sinh^2 v = \cosh^2 v. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u, \\ \bar{v} &= \sinh v, \end{aligned}$$

(note que a mudança de coordenadas é um difeomorfismo de classe C^∞ cuja inversa é $u = \bar{u}$, $v = \sinh^{-1} \bar{v}$) obtemos a reparametrização $\phi_2 : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ para o helicóide dada por

$$\phi_2(u, v) = (\sinh v \cos u, \sinh v \sin u, u).$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} &= (-\sinh v \sin u, \sinh v \cos u, 1), \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} &= (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, 0), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} E &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle = 1 + \sinh^2 v = \cosh^2 v, \\ F &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = 0, \\ G &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = \cosh^2 v, \end{aligned}$$

segue da Proposição 5.3 que as duas superfícies são localmente isométricas. Veja [Carmo], pp. 223-224 e [Gray], p. 505, para ilustrações detalhando a deformação isométrica de uma helicóide em uma catenóide. □

5.2 Símbolos de Christoffel

Como no estudo de curvas usamos o triedro $\{T, N, B\}$, no estudo de superfícies vamos agora usar o triedro

$$\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}, N \right\},$$

para uma dada parametrização φ . Escrevemos as derivadas destes vetores em relação a esta base da seguinte forma

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = \Gamma_{11}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, N \right\rangle N,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \Gamma_{12}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, N \right\rangle N,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u} = \Gamma_{21}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{21}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u}, N \right\rangle N,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \Gamma_{22}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}, N \right\rangle N,$$

$$\frac{\partial N}{\partial u} = a_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + a_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, N \right\rangle N,$$

$$\frac{\partial N}{\partial v} = a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + a_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, N \right\rangle N.$$

Os coeficientes Γ_{ij}^k são chamados os **símbolos de Christoffel**. Usamos o fato que N é um vetor unitário, normal aos vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}$. Como

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u},$$

temos a simetria dos símbolos de Christoffel em relação aos índices inferiores:

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1, \tag{5.1}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2. \tag{5.2}$$

Já vimos nas Proposições 4.20 e 4.21 que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, N \right\rangle &= e, \\ \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, N \right\rangle &= f, \\ \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}, N \right\rangle &= g, \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial u} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{eF - fE}{EG - F^2} \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \\ \frac{\partial N}{\partial v} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{fF - gE}{EG - F^2} \frac{\partial \varphi}{\partial v}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} &= \Gamma_{11}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + eN, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} &= \Gamma_{12}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + fN, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} &= \Gamma_{22}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + gN, \\ \frac{\partial N}{\partial u} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{eF - fE}{EG - F^2} \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \\ \frac{\partial N}{\partial v} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{fF - gE}{EG - F^2} \frac{\partial \varphi}{\partial v}.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Veremos agora que os símbolos de Christoffel podem ser expressos exclusivamente em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental.

5.5 Proposição. *Os símbolos de Christoffel se escrevem em relação aos coeficientes da primeira forma fundamental da seguinte forma:*

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{G \frac{\partial E}{\partial u} - 2F \frac{\partial F}{\partial u} + F \frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2E \frac{\partial F}{\partial u} - E \frac{\partial E}{\partial v} - F \frac{\partial E}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{G \frac{\partial E}{\partial v} - F \frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{E \frac{\partial G}{\partial u} - F \frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2G \frac{\partial F}{\partial v} - G \frac{\partial G}{\partial u} - F \frac{\partial G}{\partial v}}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{E \frac{\partial G}{\partial v} - 2F \frac{\partial F}{\partial v} + F \frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)}.\end{aligned}$$

Prova: Fazendo o produto escalar dos vetores em (5.3) com os vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ obtemos

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle &= \Gamma_{11}^1 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle + \Gamma_{11}^2 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle + e \left\langle N, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle = E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2, \\ \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle &= \Gamma_{11}^1 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle + \Gamma_{11}^2 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle + e \left\langle N, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle &= \Gamma_{12}^1 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle + \Gamma_{12}^2 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle + f \left\langle N, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle = E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2, \\ \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle &= \Gamma_{12}^1 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle + \Gamma_{12}^2 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle + f \left\langle N, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle &= \Gamma_{22}^1 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle + \Gamma_{22}^2 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle + f \left\langle N, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle = E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2, \\ \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle &= \Gamma_{22}^1 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle + \Gamma_{22}^2 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle + f \left\langle N, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2.\end{aligned}$$

Derivando

$$\begin{aligned}E &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle, \\ F &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle, \\ G &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle,\end{aligned}$$

em relação a u e v , obtemos

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle &= \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u}, & \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle &= \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}, & \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle &= \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}, \\ \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle &= \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}, & \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle &= \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}, & \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle &= \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v}.\end{aligned}$$

Portanto, temos os três sistemas independentes

$$\begin{cases} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u}, \\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}, \end{cases} \quad \begin{cases} E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}, \\ F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}, \end{cases} \quad \begin{cases} E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2 = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}, \\ F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v}. \end{cases}$$

Todos estes sistemas tem a matriz

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

como matriz de coeficientes, cuja inversa é

$$\frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}.$$

Portanto, a solução destes três sistemas é

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \end{bmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} G \frac{\partial E}{\partial u} - F \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{2} F \frac{\partial E}{\partial v} \\ E \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} E \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2} F \frac{\partial E}{\partial u} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \end{bmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} G \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2} F \frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{1}{2} E \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2} F \frac{\partial E}{\partial v} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} \end{bmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} G \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2} F \frac{\partial G}{\partial v} \\ \frac{1}{2} E \frac{\partial G}{\partial v} - F \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{2} F \frac{\partial G}{\partial u} \end{bmatrix},$$

donde segue o resultado. ■

Consequentemente, *todos os conceitos geométricos e propriedades expressos em termos dos símbolos de Christoffel são invariantes por isometrias.*

Existe uma maneira mais sucinta de escrever as relações da Proposição 5.5, sintetizando-as em uma única fórmula. Definindo

$$\begin{aligned} g_{11} &= E, \\ g_{12} &= g_{21} = F, \\ g_{22} &= G, \end{aligned}$$

e a matriz simétrica

$$g = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix},$$

de modo que

$$\det g = EG - F^2,$$

e também definindo a sua inversa

$$(g^{ij}) = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = g^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix},$$

podemos escrever

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 (\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}) g^{mk}, \quad (5.4)$$

onde convencionamos

$$\begin{aligned} \partial_1 &= \frac{\partial}{\partial u}, \\ \partial_2 &= \frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned}$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 (\partial_1 g_{1m} + \partial_1 g_{1m} - \partial_m g_{11}) g^{m2} \\
 &= \frac{1}{2} [(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) g^{12} + (\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11}) g^{22}] \\
 &= \frac{1}{2} [(\partial_1 g_{11}) g^{12} + (2\partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11}) g^{22}] \\
 &= \frac{1}{2(EG - F^2)} \left(-F \frac{\partial E}{\partial u} + 2E \frac{\partial F}{\partial u} - E \frac{\partial E}{\partial v} \right)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{12}^2 &= \sum_{m=1}^2 (\partial_1 g_{2m} + \partial_2 g_{1m} - \partial_m g_{12}) g^{m2} \\
 &= \frac{1}{2} [(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) g^{12} + (\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{12}) g^{22}] \\
 &= \frac{1}{2} [(\partial_2 g_{11}) g^{12} + (\partial_1 g_{22}) g^{22}] \\
 &= \frac{1}{2(EG - F^2)} \left(-F \frac{\partial E}{\partial v} + E \frac{\partial G}{\partial u} \right).
 \end{aligned}$$

Embora a validade da fórmula (5.4) possa ser provada através de verificar cada um dos seis símbolos de Christoffel, uma justificativa de porque ela realmente funciona será vista no próximo capítulo.

5.6 Exemplo (Símbolos de Christoffel para uma Superfície de Revolução). Como vimos no Exemplo 4.40, uma superfície de revolução parametrizada por

$$\varphi(u, v) = (\mathbf{f}(v) \cos u, \mathbf{f}(v) \sin u, \mathbf{g}(v)).$$

tem como coeficientes da primeira forma fundamental

$$\begin{aligned}
 E &= \mathbf{f}^2, \\
 F &= 0, \\
 G &= (\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$EG - F^2 = \mathbf{f}^2 [(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2]$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E}{\partial u} &= 0, & \frac{\partial E}{\partial v} &= 2\mathbf{f}\mathbf{f}', \\
 \frac{\partial F}{\partial u} &= 0, & \frac{\partial F}{\partial v} &= 0, \\
 \frac{\partial G}{\partial u} &= 0, & \frac{\partial G}{\partial v} &= 2(\mathbf{f}'\mathbf{f}'' + \mathbf{g}'\mathbf{g}'').
 \end{aligned}$$

Daí,

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{2\mathbf{f}\mathbf{f}' \left[(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2 \right]}{2\mathbf{f}^2 \left[(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2 \right]} = \frac{\mathbf{f}'}{\mathbf{f}},$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{-2\mathbf{f}^3\mathbf{f}'}{2\mathbf{f}^2 \left[(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2 \right]} = -\frac{\mathbf{f}\mathbf{f}'}{(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2},$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{2\mathbf{f}^2 (\mathbf{f}'\mathbf{f}'' + \mathbf{g}'\mathbf{g}'')}{2\mathbf{f}^2 \left[(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2 \right]} = \frac{\mathbf{f}'\mathbf{f}'' + \mathbf{g}'\mathbf{g}''}{(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2}.$$

□

5.3 Equações de Compatibilidade e Teorema Egrégio de Gauss

5.7 Proposição (Equações de Compatibilidade). *Se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície de classe C^3 , valem as seguintes equações.*

Equação de Gauss:

$$\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = -EK. \quad (5.5)$$

Equações de Codazzi-Mainardi:

$$e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 = \frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u},$$

$$e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2 = \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u}.$$

Prova: Como estamos assumindo que S é uma superfície regular de classe C^3 , podemos calcular derivadas terceiras e valem as relações

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right), \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right), \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial N}{\partial u} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial N}{\partial v} \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Vamos mostrar como obter a Equação de Gauss, já que as Equações de Codazzi-Mainardi são obtidas de

modo análogo. Derivando as duas primeiras relações em (5.3), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \right) &= \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{11}^1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{\partial e}{\partial v} N + e \frac{\partial N}{\partial v} \\
&= \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{11}^1 \left(\Gamma_{12}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + fN \right) \\
&\quad + \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \Gamma_{11}^2 \left(\Gamma_{22}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + gN \right) \\
&\quad + \frac{\partial e}{\partial v} N + e \left(\frac{gF - fG}{EG - F^2} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{fF - gE}{EG - F^2} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \\
&= \left(\frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + e \frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\
&\quad + \left(\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\
&\quad + \left(\Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g + \frac{\partial e}{\partial v} \right) N
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right) &= \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{12}^1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u} + \frac{\partial f}{\partial u} N + f \frac{\partial N}{\partial u} \\
&= \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{12}^1 \left(\Gamma_{11}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + eN \right) \\
&\quad + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \Gamma_{12}^2 \left(\Gamma_{12}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + fN \right) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial u} N + f \left(\frac{fF - eG}{EG - F^2} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{eF - fE}{EG - F^2} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \\
&= \left(\frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + f \frac{fF - eG}{EG - F^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\
&\quad + \left(\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + f \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\
&\quad + \left(e \Gamma_{12}^1 + f \Gamma_{12}^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \right) N
\end{aligned}$$

Igualando estas expressões de acordo com a primeira equação em (5.6) e usando o fato que os vetores são L.I., obtemos 3 relações:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + e \frac{gF - fG}{EG - F^2} &= \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + f \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\
\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e \frac{fF - gE}{EG - F^2} &= \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + f \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\
\Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g + \frac{\partial e}{\partial v} &= e \Gamma_{12}^1 + f \Gamma_{12}^2 + \frac{\partial f}{\partial u}.
\end{aligned}$$

A Equação de Gauss segue da segunda relação. De fato, ela é equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 &= e \frac{fF - gE}{EG - F^2} - f \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ &= -E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= -EK. \end{aligned}$$

■

Embora tenhamos 9 relações possíveis usando todas as 3 equações em (5.6), as 6 outras não são independentes e podem ser derivadas das Equações de Gauss e Codazzi-Mainardi.

5.8 Teorema (Teorema Egrégio de Gauss). *A curvatura gaussiana é invariante por isometrias locais.*

Prova: Pela Proposição 5.7, a curvatura gaussiana é dada por

$$K = -\frac{1}{E} \left[\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 \right].$$

Como os símbolos de Christoffel se escrevem exclusivamente em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental, segue que isso vale também para K . ■

O nome deste teorema (*egrégio* significa notável, digno de admiração) se refere exatamente ao fato de que apesar da curvatura gaussiana ter sido definida através da aplicação gaussiana, que depende de como a superfície está mergulhada no espaço ambiente \mathbb{R}^3 , o resultado inesperado é que na verdade ela é um conceito intrínseco da superfície. No caso de superfícies regulares de curvatura gaussiana constante vale a recíproca: se elas possuem a mesma curvatura, então elas são localmente isométricas; este é o Teorema de Minding, que veremos no próximo capítulo (Teorema 6.24).

5.4 Teorema Fundamental Local das Superfícies

Os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais determinam localmente uma superfície, a menos de sua posição no espaço. Para provar este resultado, precisaremos do seguinte resultado sobre a existência e unicidade de soluções de sistemas lineares de equações diferenciais parciais.

5.9 Lema (Existência e Unicidade de Soluções de Sistemas de EDPs). *Sejam $V \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial u} = F_1(u, v, f_1, \dots, f_n) \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} = G_1(u, v, f_1, \dots, f_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} = F_n(u, v, f_1, \dots, f_n) \\ \frac{\partial f_n}{\partial v} = G_n(u, v, f_1, \dots, f_n) \end{array} \right. \quad (5.7)$$

um sistema de $2n$ equações diferenciais parciais tais que as funções $F_1, \dots, F_n, G_1, \dots, G_n : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^2 e lineares em relação às variáveis f_1, \dots, f_n . Suponha que

$$\frac{\partial F_i}{\partial v} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial v} = \frac{\partial G_i}{\partial u} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial G_i}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial v} \quad (5.8)$$

para todo i . Então, dadas condições iniciais em (u_0, v_0) , o sistema possui uma única solução de classe C^3 em um aberto $U \subset V$ contendo (u_0, v_0) .

Prova: Veja [Stoker], pp. 392–395. ■

Observe que como há mais equações ($2n$) do que incógnitas ($n + 2$), o sistema (5.7) é sobredeterminado, por isso é natural impor condições adicionais para que ele possua solução. As condições (5.8) são chamadas *condições de integrabilidade* ou *condições de compatibilidade* do sistema. Elas são as mínimas condições necessárias, pois uma vez estabelecida a existência de uma solução (f_1, \dots, f_n) , elas correspondem a

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial v \partial u}. \quad (5.9)$$

5.10 Teorema. *Sejam $E, F, G, e, f, g : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ aberto, funções diferenciáveis de classe C^2 com $E, G > 0, EG - F^2 > 0$.*

Se as funções satisfazem a equação de Gauss e as equações de Codazzi-Mainardi, então para cada $(u_0, v_0) \in V$ existem uma vizinhança $U \subset V$ de (u_0, v_0) e uma superfície parametrizada regular $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^3 tal que E, F, G são os coeficientes da primeira forma fundamental e e, f, g são os coeficientes da segunda forma fundamental de ϕ .

Se $\phi, \bar{\phi}$ são duas superfícies parametrizadas que possuem os mesmos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental, então existe uma isometria J de \mathbb{R}^3 tal que $\bar{\phi} = J \circ \phi$ em uma vizinhança de (u_0, v_0) .

Prova: A demonstração deste teorema é semelhante à demonstração do Teorema Fundamental das Curvas no Espaço (Teorema 1.76). Primeiro, buscamos um triedro de vetores

$$\{T_1(u, v), T_2(u, v), N(u, v)\},$$

satisfazendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_1}{\partial u} = \Gamma_{11}^1 T_1 + \Gamma_{11}^2 T_2 + eN \\ \frac{\partial T_1}{\partial v} = \frac{\partial T_2}{\partial u} = \Gamma_{12}^1 T_1 + \Gamma_{12}^2 T_2 + fN \\ \frac{\partial T_2}{\partial v} = \Gamma_{22}^1 T_1 + \Gamma_{22}^2 T_2 + gN \\ \frac{\partial N}{\partial u} = \frac{fF - eG}{EG - F^2} T_1 + \frac{eF - fE}{EG - F^2} T_2 \\ \frac{\partial N}{\partial v} = \frac{gF - fG}{EG - F^2} T_1 + \frac{fF - gE}{EG - F^2} T_2 \end{array} \right.$$

onde os símbolos de Christoffel são definidos pela Proposição 5.5. Como cada um dos 3 vetores T_1, T_2, N tem três coordenadas, este é um sistema de 15 equações diferenciais parciais lineares com 9 incógnitas (3 equações são redundantes). As condições de integrabilidade deste sistema são exatamente as equações de Gauss e Mainardi-Codazzi, como vimos na demonstração da Proposição 5.7. Logo, dado $(u_0, v_0) \in V$, segue do lema que este sistema possui uma solução única de classe C^3 em uma vizinhança de (u_0, v_0) dadas condições iniciais neste ponto.

Sejam T_1, T_2, N soluções do sistema onde escolhemos as condições iniciais

$$T_1(u_0, v_0), T_2(u_0, v_0), N(u_0, v_0)$$

de tal forma que as seguintes relações são satisfeitas

$$\begin{aligned} \|T_1(u_0, v_0)\|^2 &= \langle T_1, T_1 \rangle(u_0, v_0) = E(u_0, v_0), \\ \langle T_1, T_2 \rangle(u_0, v_0) &= F(u_0, v_0), \\ \|T_2(u_0, v_0)\|^2 &= \langle T_2, T_2 \rangle(u_0, v_0) = G(u_0, v_0), \\ \|N(u_0, v_0)\| &= 1, \\ \langle T_1, N \rangle(u_0, v_0) &= \langle T_2, N \rangle(u_0, v_0) = 0. \end{aligned}$$

Consideramos então o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial u} = T_1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial v} = T_2 \end{cases}$$

Como a condição de integrabilidade para este sistema também é satisfeita, pois

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} = \frac{\partial T_1}{\partial v} = \frac{\partial T_2}{\partial u} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial u},$$

segue que este sistema também possui uma solução única definida em uma vizinhança (possivelmente menor) de (u_0, v_0) para alguma condição inicial

$$\phi(u_0, v_0) = p_0 \in \mathbb{R}^3.$$

Vamos provar que esta superfície parametrizada tem E, F, G e e, f, g como coeficientes das respectivas formas fundamentais. De fato, como o triedro

$$\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v), N(u, v) \right\},$$

satisfaz (5.3), podemos calcular as derivadas parciais de

$$\begin{aligned} f_1 &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle, \\ f_2 &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle, \\ f_3 &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle, \\ f_4 &= \langle N, N \rangle \\ f_5 &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, N \right\rangle, \\ f_6 &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial v}, N \right\rangle, \end{aligned}$$

e obter um sistema de 12 equações diferenciais parciais lineares

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial u} = F_1(u, v, f_1, \dots, f_6) \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} = G_1(u, v, f_1, \dots, f_6) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial u} = F_6(u, v, f_1, \dots, f_6) \\ \frac{\partial f_6}{\partial v} = G_6(u, v, f_1, \dots, f_6) \end{cases}$$

satisfazendo as condições iniciais

$$\begin{aligned} f_1(u_0, v_0) &= E(u_0, v_0), \\ f_2(u_0, v_0) &= F(u_0, v_0), \\ f_3(u_0, v_0) &= G(u_0, v_0), \\ f_4(u_0, v_0) &= 1, \\ f_5(u_0, v_0) &= f_6(u_0, v_0) = 0. \end{aligned}$$

É óbvio devido as condições de diferenciabilidade de classe C^3 , mas também pode ser verificado diretamente, calculando as derivadas parciais e usando (5.3), que as condições de integrabilidade

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial v \partial u}$$

para $i = 1, \dots, 6$ são satisfeitas, de modo que a solução deste sistema é único. Como as funções

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1 &= E, \\ \tilde{f}_2 &= F, \\ \tilde{f}_3 &= G, \\ \tilde{f}_4 &= 1 \\ \tilde{f}_5 &= 0, \\ \tilde{f}_6 &= 0, \end{aligned}$$

também são soluções para o sistema, segue da unicidade que

$$\begin{aligned} f_1 &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle = E, \\ f_2 &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle = F, \\ f_3 &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle = G, \\ f_4 &= \langle N, N \rangle = 1, \\ f_5 &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, N \right\rangle = 0, \\ f_6 &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial v}, N \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Podemos ver agora que a superfície parametrizada ϕ é regular, pois

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|^2 - \left\| \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle \right\|^2 = EG - F^2 > 0.$$

Trocando u e v , se necessário, temos

$$N = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|}.$$

Usando (5.3), calculamos os coeficientes da segunda forma fundamental de ϕ , obtendo

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}, N \right\rangle &= e, \\ \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}, N \right\rangle &= f, \\ \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}, N \right\rangle &= g,\end{aligned}$$

ou seja, estes coeficientes são iguais às funções e, f, g .

Falta apenas demonstrar a unicidade de ϕ a menos de uma isometria de \mathbb{R}^3 . Suponha que $\bar{\phi}$ seja outra parametrização tal que

$$\begin{aligned}\bar{E} &= E, \bar{F} = F, \bar{G} = G, \\ \bar{e} &= e, \bar{f} = f, \bar{g} = g.\end{aligned}$$

Em particular, se

$$N = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|}, \bar{N} = \frac{\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial v} \right\|},$$

temos

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial u} \right\rangle (u_0, v_0) &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle (u_0, v_0) = E, \\ \left\langle \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial v} \right\rangle (u_0, v_0) &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle (u_0, v_0) = F, \\ \left\langle \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial v}, \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial v} \right\rangle (u_0, v_0) &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle (u_0, v_0) = G, \\ \langle \bar{N}, \bar{N} \rangle (u_0, v_0) &= \langle N, N \rangle (u_0, v_0) = 1, \\ \left\langle \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial u}, \bar{N} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, N \right\rangle = 0, \\ \left\langle \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial v}, \bar{N} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial v}, N \right\rangle = 0,\end{aligned}$$

de modo que é possível levar o triedro

$$\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \phi}{\partial v}(u_0, v_0), N(u_0, v_0) \right\}$$

no triedro

$$\left\{ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial v}(u_0, v_0), \bar{N}(u_0, v_0) \right\}$$

através de uma transformação ortogonal (rotação) de \mathbb{R}^3 , isto é, existe uma transformação ortogonal $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial u}(u_0, v_0) &= P \left[\frac{\partial \phi}{\partial u}(u_0, v_0) \right], \\ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial v}(u_0, v_0) &= P \left[\frac{\partial \phi}{\partial v}(u_0, v_0) \right], \\ \bar{N}(u_0, v_0) &= P [N(u_0, v_0)].\end{aligned}$$

Se

$$\bar{\phi}(u_0, v_0) = \phi(u_0, v_0) + q_0,$$

considere a translação pelo vetor q_0 e defina a isometria $J = T \circ P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Como

$$\begin{aligned} \left\langle dJ \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial u} \right), dJ \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial u} \right) \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\rangle = E, \\ \left\langle dJ \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial u} \right), dJ \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial v} \right) \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle = F, \\ \left\langle dJ \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial v} \right), dJ \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial v} \right) \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial v}, \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle = G, \\ \left\langle dJ \left(\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial u^2} \right), dJ(\bar{N}) \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial u^2}, \bar{N} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}, N \right\rangle = e, \\ \left\langle dJ \left(\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial u \partial v} \right), dJ(\bar{N}) \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial u \partial v}, \bar{N} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}, N \right\rangle = f, \\ \left\langle dJ \left(\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial v^2} \right), dJ(\bar{N}) \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial v^2}, \bar{N} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}, N \right\rangle = g, \end{aligned}$$

ambos

$$\left\{ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial v}(u, v), \bar{N}(u, v) \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ dJ \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \right), dJ \left(\frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \right), dJ(N(u, v)) \right\}$$

satisfazem o mesmo sistema de equações diferenciais parciais lineares (5.3) com a mesma condição inicial, segue da unicidade que

$$\bar{\phi} = F \circ \phi$$

em uma vizinhança de (u_0, v_0) . ■

5.5 O Teorema de Rigidez da Esfera

5.5.1 Parametrizações Ortogonais

5.11 Definição. Dizemos que uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de uma superfície regular é uma **parametrização ortogonal** se $F = 0$. □

Ou seja, em uma parametrização ortogonal vale

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle = 0.$$

Parametrizações ortogonais existem em qualquer superfície regular, como veremos mais adiante (Corolário 5.22).

5.12 Proposição. Em uma parametrização ortogonal, a curvatura gaussiana é dada por

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial E}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial u} \right) \right]$$

Prova: Observe que o lado direito da equação do enunciado é

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left[(EG)^{-1/2} \frac{\partial E}{\partial v} \right] + \frac{\partial}{\partial u} \left[(EG)^{-1/2} \frac{\partial G}{\partial u} \right] \right\} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{(EG)^{3/2}} \left(\frac{\partial E}{\partial v} G + E \frac{\partial G}{\partial v} \right) \frac{\partial E}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} \right] \\
& -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{(EG)^{3/2}} \left(\frac{\partial E}{\partial u} G + E \frac{\partial G}{\partial u} \right) \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right] \\
&= \frac{1}{4(EG)^2} \left[\left(\frac{\partial E}{\partial v} G + E \frac{\partial G}{\partial v} \right) \frac{\partial E}{\partial v} + \left(\frac{\partial E}{\partial u} G + E \frac{\partial G}{\partial u} \right) \frac{\partial G}{\partial u} \right] - \frac{1}{2EG} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right) \\
&= \frac{1}{4(EG)^2} \left[E \left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 + E \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial v} + G \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial u} + G \left(\frac{\partial E}{\partial v} \right)^2 \right] - \frac{1}{2EG} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right). \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Pela equação de Gauss,

$$K = -\frac{1}{E} \left[\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 \right].$$

Em uma parametrização ortogonal, os símbolos de Christoffel são dados por

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial u}, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial v}, \\
\Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial v}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u}, \\
\Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial u}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial v}.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{1}{E} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{G} \frac{\partial E}{\partial v} \right) - \frac{1}{4EG} \left(\frac{\partial E}{\partial v} \right)^2 - \frac{1}{4EG} \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{1}{4G^2} \left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{4G^2} \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial v} \right] \\
&= -\frac{1}{E} \left[-\frac{1}{2G^2} \left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{2G} \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{1}{2G^2} \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial E}{\partial v} + \frac{1}{2G} \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{4EG} \left(\frac{\partial E}{\partial v} \right)^2 - \frac{1}{4EG} \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{1}{4G^2} \left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{4G^2} \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial v} \right] \\
&= -\frac{1}{E} \left[\frac{1}{2G} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} \right) - \frac{1}{4EG} \left(\frac{\partial E}{\partial v} \right)^2 - \frac{1}{4EG} \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{4G^2} \left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 - \frac{1}{4G^2} \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial v} \right] \\
&= -\frac{1}{2EG} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right) + \frac{1}{4(EG)^2} \left[E \left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 + E \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial v} + G \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial u} + G \left(\frac{\partial E}{\partial v} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Comparando esta fórmula com a fórmula obtida em (5.10) vemos que elas são idênticas. ■

5.13 Proposição. *Em uma parametrização ortogonal tal que $f = 0$, as curvaturas gaussianas e média são dadas por*

$$\begin{aligned}
K &= \frac{eg}{EG}, \\
H &= \frac{1}{2} \left(\frac{eG + gE}{EG} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right).
\end{aligned}$$

Em particular, as curvaturas principais são

$$\frac{e}{E} \quad e \quad \frac{g}{G}.$$

Prova: As fórmulas para a curvatura gaussiana e média seguem diretamente das fórmulas destas curvaturas em coordenadas. As fórmulas para as curvaturas principais seguem quando resolvemos o sistema

$$\begin{cases} \kappa_1 \kappa_2 = \frac{eg}{EG} \\ \kappa_1 + \kappa_2 = \frac{eG + gE}{EG} \end{cases}$$

De fato, substituindo

$$\kappa_2 = \frac{1}{\kappa_1} \frac{eg}{EG}$$

na segunda equação, obtemos a equação do segundo grau

$$(\kappa_1)^2 - \frac{eG + gE}{EG} \kappa_1 + \frac{eg}{EG} = 0,$$

ou seja,

$$(\kappa_1)^2 - \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) \kappa_1 + \frac{e}{E} \frac{g}{G} = 0,$$

que se fatora em

$$\left(\kappa_1 - \frac{e}{E} \right) \left(\kappa_1 - \frac{g}{G} \right) = 0.$$

■

5.14 Proposição. Em uma parametrização ortogonal tal que $f = 0$, as equações de Codazzi-Mainardi se reduzem a

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial v} &= \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) = H \frac{\partial E}{\partial v}, \\ \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) = H \frac{\partial G}{\partial u}. \end{aligned}$$

Prova: Neste tipo de parametrização, as equações de Codazzi-Mainardi se reduzem a

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial v} &= e\Gamma_{12}^1 - g\Gamma_{11}^2, \\ \frac{\partial g}{\partial u} &= g\Gamma_{12}^2 - e\Gamma_{22}^1, \end{aligned}$$

enquanto que os símbolos de Christoffel são dados por (5.11). Destas fórmulas e da proposição anterior seguem os resultados. ■

Este tipo de parametrização ortogonal existe, embora não em toda superfície regular, como veremos adiante (Corolário 5.25).

5.5.2 Curvas Principais

5.15 Definição. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow S$ em uma superfície regular S é uma **curva principal** (ou **linha de curvatura**) de S se para todo $t \in I$, $\alpha'(t)$ é uma direção principal em p . □

Em particular, curvas principais que se cruzam o fazem ortogonalmente.

5.16 Proposição (Teorema de Olinde Rodrigues). *Seja $\alpha : I \rightarrow S$ dada por*

$$\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$$

uma curva regular de uma superfície regular S . α é uma curva principal de S se e somente se

$$(N \circ \alpha)'(t) = \lambda(t) \alpha'(t)$$

para alguma função diferenciável $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Prova: Pois $\alpha'(t)$ é uma direção principal de S em $\alpha(t)$ se e somente se ela é um autovetor do operador forma $dN_{\alpha(t)}$, isto é, se e somente se existe um número $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ tal que

$$dN_{\alpha(t)}\alpha'(t) = \lambda(t) \alpha'(t).$$

Como pela regra da cadeia

$$(N \circ \alpha)'(t) = dN_{\alpha(t)}\alpha'(t),$$

segue o resultado. A diferenciabilidade de λ segue da fórmula

$$\lambda(t) = \frac{\langle dN_{\alpha(t)}\alpha'(t), \alpha'(t) \rangle}{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle}.$$

■

5.17 Proposição (Equação Diferencial das Curvas Principais). *Seja*

$$\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$$

uma curva regular de uma superfície regular S . α é uma curva principal de S se e somente se ela satisfaz a equação diferencial

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0.$$

Prova: Pela proposição anterior e pela Proposição 4.21 temos que α é uma curva principal de S se e somente se as funções u e v satisfazem o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{fF - eG}{EG - F^2}u' + \frac{gF - fG}{EG - F^2}v' = \lambda u' \\ \frac{eF - fE}{EG - F^2}u' + \frac{fF - gE}{EG - F^2}v' = \lambda v' \end{cases}$$

para alguma função diferenciável $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$. Eliminando λ do sistema, através de subtrair a segunda equação multiplicada por u' da primeira equação multiplicada por v' , obtemos a equação diferencial

$$\frac{gF - fG}{EG - F^2}(v')^2 + \left(\frac{fF - eG}{EG - F^2} - \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) u'v' - \frac{eF - fE}{EG - F^2}(u')^2 = 0,$$

que é equivalente a

$$(gF - fG)(v')^2 + (gE - eG)u'v' + (fE - eF)(u')^2 = 0, \quad (5.12)$$

que é a equação diferencial do enunciado. ■

Em particular, este resultado assegura a existência de curvas principais passando por qualquer ponto de qualquer superfície para cada direção principal, consequência do Teorema de Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias. Em um ponto não umbílico passarão exatamente duas curvas principais ortogonais, uma para cada direção principal, enquanto que em um ponto umbílico todas as direções são direções principais, logo haverá uma curva principal em cada uma destas direções.

5.18 Corolário. *Se $F = f = 0$, as curvas coordenadas de uma parametrização são curvas principais. Em uma vizinhança suficientemente pequena de um ponto não umbílico, elas são as únicas curvas principais.*

Reciprocamente, se em uma vizinhança suficientemente pequena de um ponto não umbílico as curvas coordenadas de uma parametrização são curvas principais, então $F = f = 0$.

Prova: Se $F = f = 0$, a equação diferencial (5.12) das curvas principais se reduz a

$$(gE - eG)u'v' = 0.$$

Como as curvas coordenadas satisfazem $u' = 0$ ou $v' = 0$, elas satisfazem esta equação diferencial e são curvas principais. Além disso, neste tipo de coordenadas as curvaturas principais são dadas por

$$\frac{e}{E} \quad \text{e} \quad \frac{g}{G},$$

como vimos na Proposição 5.13. Em um ponto não umbílico as curvaturas principais são por definição distintas e a condição de não-umbilicidade se mantém em uma vizinhança suficientemente pequena do ponto, logo

$$\frac{e}{E} \neq \frac{g}{G}$$

nesta vizinhança e portanto

$$gE - eG \neq 0,$$

de modo que a equação diferencial das curvas principais se reduz a

$$u'v' = 0,$$

cujas soluções são exatamente as curvas coordenadas.

Reciprocamente, suponha que as curvas coordenadas $u \equiv u_0$ e $v \equiv v_0$ sejam curvas principais. Como em uma vizinhança suficientemente pequena de um ponto não umbílico todos os pontos são não umbílicos, as curvas principais são ortogonais (já que em pontos não umbílicos existem apenas duas direções principais) e os vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ estão na direção das curvas coordenadas, segue que

$$F = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = 0.$$

No caso em que as curvas coordenadas $u \equiv u_0$ são curvas principais, a equação diferencial

$$-fG(v')^2 = 0$$

é satisfeita, enquanto que no caso em que as curvas coordenadas $u \equiv u_0$ são curvas principais, a equação diferencial

$$fE(u')^2 = 0$$

é satisfeita. Como no primeiro caso $v' \neq 0$ (caso contrário teríamos um ponto, não uma curva) e no segundo caso $u' \neq 0$, segue que

$$fG = fE = 0,$$

donde

$$f = 0,$$

já que $E, G > 0$. ■

5.19 Exemplo (Curvas Principais de Superfícies de Revolução). Os paralelos e os meridianos de uma superfície de revolução são curvas principais, pois $F = f = 0$ na parametrização padrão destas superfícies (veja Exemplo 4.40) e os paralelos e meridianos são as curvas coordenadas de uma superfície de revolução nesta parametrização. □

5.5.3 Existência de Parametrizações Ortogonais

Lembramos alguns resultados de equações diferenciais ordinárias relacionados a campos vetoriais.

5.20 Teorema. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, U aberto, um campo vetorial de classe C^1 . Dado $p \in U$, existe uma única **trajetória** $\alpha : I \rightarrow U$ do campo X passando por p , isto é, uma curva regular de classe C^1 satisfazendo*

$$\begin{aligned}\alpha(t_0) &= p, \\ \alpha'(t) &= X(\alpha(t)) \quad \text{para todo } t \in I.\end{aligned}$$

Além disso, existe uma vizinhança $V \subset U$ de p e uma aplicação $\alpha : V \times I \rightarrow U$ de classe C^1 tal que

$$\begin{aligned}\alpha(p, t_0) &= p, \\ \frac{d\alpha}{dt}(p, t) &= X(\alpha(p, t)).\end{aligned}$$

A aplicação α é chamada o fluxo local do campo X .

5.21 Teorema. *Sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, U aberto, um campo vetorial de classe C^1 e $p \in U$ tal que $X(p) \neq 0$. Então existe uma vizinhança $V \subset U$ de p e uma função $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que f é constante ao longo das trajetórias de X e $df_q = \nabla f(q) \neq 0$ para todo $q \in V$.*

Chamaremos f a **função integral** do campo X .

5.22 Definição. Um campo vetorial de classe C^k em um aberto $V \subset S$ de uma superfície regular é uma aplicação diferenciável $X : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^k tal que $X(p) \in T_p S$ para cada $p \in V$.

Os Teoremas 5.20 e 5.21 se estendem facilmente para campos vetoriais em superfícies:

5.23 Teorema. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $X : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X(q) \in T_q S$ para todo $q \in S$, um campo vetorial de classe C^1 em S . Dado $p \in S$, existe uma única **trajetória** $\alpha : I \rightarrow S$ do campo X passando por p , isto é, uma curva regular de classe C^1 satisfazendo*

$$\begin{aligned}\alpha(t_0) &= p, \\ \alpha'(t) &= X(\alpha(t)) \quad \text{para todo } t \in I.\end{aligned}$$

Além disso, existe uma vizinhança V de p em S e uma aplicação $\alpha : V \times I \rightarrow S$ de classe C^1 tal que

$$\begin{aligned}\alpha(p, t_0) &= p, \\ \frac{d\alpha}{dt}(p, t) &= X(\alpha(p, t)).\end{aligned}$$

5.24 Teorema. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $X : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X(q) \in T_q S$ para todo $q \in S$, um campo vetorial de classe C^1 em S e $p \in S$ tal que $X(p) \neq 0$. Então existe uma vizinhança V de p em S e uma função $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que f é constante ao longo das trajetórias de X e $df_q = \nabla f(q) \neq 0$ para todo $q \in V$.*

5.25 Teorema. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Sejam X, Y campos vetoriais definidos em uma vizinhança V de $p \in S$, linearmente independentes em p .*

Então existe uma vizinhança $W \subset V$ de p em S e uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow W$ tal que para cada $q \in W$ as curvas coordenadas desta parametrização passando por q são tangentes aos vetores $X(q)$ e $Y(q)$.

Prova: Sejam f_1 e f_2 as funções integrais dos campos X e Y , respectivamente, definidas em uma vizinhança $W \subset V$ de p em S , e defina uma aplicação $F : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$F(q) = (f_1(q), f_2(q)).$$

Como f_1 é constante nas trajetórias de X , segue que

$$dF_p(X) = \left((df_1)_p(X), (df_2)_p(X) \right) = \left(0, (df_2)_p(X) \right)$$

com

$$(df_2)_p(X) = \langle \nabla f_2(p), X \rangle \neq 0$$

porque $df_2 = \nabla f_2 \neq 0$ e X e Y são linearmente independentes (o gradiente é normal às curvas de nível, que no caso são as trajetórias do campo). Analogamente,

$$dF_p(Y) = \left((df_1)_p(X), 0 \right) \neq 0.$$

Portanto, F é um difeomorfismo local em uma vizinhança (possivelmente menor) de p sobre uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^2$. A aplicação

$$\varphi = F^{-1}$$

é portanto uma parametrização. Suas curvas coordenadas são exatamente

$$f_1(q) \equiv \text{constante} \quad \text{e} \quad f_2(q) \equiv \text{constante},$$

que são as trajetórias dos campos X e Y , portanto tangentes a estes campos. ■

Observa-se que o teorema não implica que as curvas coordenadas podem ser parametrizadas de tal forma que seus vetores velocidades são os campos X e Y .

5.26 Corolário. *Todo ponto de uma superfície regular possui uma vizinhança que pode ser parametrizada através de uma parametrização ortogonal.*

Prova: Seja $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização arbitrária de uma vizinhança de um ponto p de uma superfície regular S . Definimos dois campos vetoriais ortogonais X e Y em $\varphi(U)$ por

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ Y &= -\frac{F}{E} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}. \end{aligned}$$

De fato,

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{F}{E} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = -\frac{F}{E} E + F = 0.$$

O resultado segue do teorema. ■

5.27 Corolário. *Se p é um ponto não umbílico de uma superfície S , então existe uma vizinhança de p que pode ser parametrizada por uma parametrização ortogonal tal que $f = 0$.*

Prova: Existe uma vizinhança de um ponto não umbílico onde as curvas principais são ortogonais. Construindo estas curvas de maneira apropriada, produzimos dois campos vetoriais linearmente independentes em p , cada um em uma direção principal. Segue do teorema que existe um sistema de coordenadas em uma vizinhança de p tal que as curvas coordenadas são curvas principais. O resultado segue agora do Corolário 5.18. ■

5.5.4 O Teorema de Rigidez da Esfera

5.28 Lema. *Seja S uma superfície regular e $p \in S$ tal que*

(i) $K(p) > 0$.

(ii) p é um máximo local para a função curvatura principal κ_1 e um mínimo local para a função curvatura principal κ_2 (convencionando $\kappa_1 \geq \kappa_2$).

Então p é um ponto umbílico.

Prova: Suponha por absurdo que p não é umbílico. Então

$$\kappa_1(p) > \kappa_2(p)$$

e pelo Corolário 5.27 podemos parametrizar uma vizinhança de p através de uma parametrização ortogonal tal que $f = 0$. Pela Proposição 5.13, podemos assumir (trocando u e v , se necessário) que as curvaturas principais de S nestas coordenadas são

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \frac{e}{E}, \\ \kappa_2 &= \frac{g}{G}.\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \kappa_1}{\partial v} &= \frac{\frac{\partial e}{\partial v} E - e \frac{\partial E}{\partial v}}{E^2} = \frac{\frac{\partial e}{\partial v} - \kappa_1 \frac{\partial E}{\partial v}}{E}, \\ \frac{\partial \kappa_2}{\partial u} &= \frac{\frac{\partial g}{\partial u} G - g \frac{\partial G}{\partial u}}{G^2} = \frac{\frac{\partial g}{\partial u} - \kappa_2 \frac{\partial G}{\partial u}}{G}.\end{aligned}$$

Usando as equações de Codazzi-Mainardi da Proposição 5.14 nestas coordenadas obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \kappa_1}{\partial v} &= \frac{\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} (\kappa_1 + \kappa_2) - \kappa_1 \frac{\partial E}{\partial v}}{E} = \frac{1}{2E} (-\kappa_1 + \kappa_2) \frac{\partial E}{\partial v}, \\ \frac{\partial \kappa_2}{\partial u} &= \frac{\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} (\kappa_1 + \kappa_2) - \kappa_2 \frac{\partial G}{\partial u}}{G} = \frac{1}{2G} (\kappa_1 - \kappa_2) \frac{\partial G}{\partial u},\end{aligned}$$

donde

$$\frac{\partial E}{\partial v} = -\frac{2E}{\kappa_1 - \kappa_2} \frac{\partial \kappa_1}{\partial v}, \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{2G}{\kappa_1 - \kappa_2} \frac{\partial \kappa_2}{\partial u} \quad (5.14)$$

Pela Proposição 5.12, a curvatura gaussiana nestas coordenadas é dada por

$$\begin{aligned}K &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial E}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial u} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2EG} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right) - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \right) \frac{\partial E}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{EG}} \right) \frac{\partial G}{\partial u} \right]\end{aligned}$$

Escrevemos esta expressão na forma

$$-2KEG = \left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right) + P(u, v) \frac{\partial E}{\partial v} + Q(u, v) \frac{\partial G}{\partial u}, \quad (5.15)$$

onde P, Q são funções cuja forma explícita não será necessário conhecer. De (5.13) e (5.14) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} &= -\frac{2E}{\kappa_1 - \kappa_2} \frac{\partial^2 \kappa_1}{\partial v^2} - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{2E}{\kappa_1 - \kappa_2} \right) \frac{\partial \kappa_1}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} &= \frac{2G}{\kappa_1 - \kappa_2} \frac{\partial^2 \kappa_2}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{2G}{\kappa_1 - \kappa_2} \right) \frac{\partial \kappa_2}{\partial u}.\end{aligned}$$

portanto (5.15) se torna

$$\begin{aligned}-2KEG &= -\frac{2E}{\kappa_1 - \kappa_2} \frac{\partial^2 \kappa_1}{\partial v^2} + \frac{2G}{\kappa_1 - \kappa_2} \frac{\partial^2 \kappa_2}{\partial u^2} \\ &\quad - \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{2E}{\kappa_1 - \kappa_2} \right) + P \frac{2E}{\kappa_1 - \kappa_2} \right] \frac{\partial \kappa_1}{\partial v} + \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{2G}{\kappa_1 - \kappa_2} \right) + Q \frac{2G}{\kappa_1 - \kappa_2} \right] \frac{\partial \kappa_2}{\partial u}\end{aligned}$$

que escrevemos na forma

$$-2KEG(\kappa_1 - \kappa_2) = -2E \frac{\partial^2 \kappa_1}{\partial v^2} + 2G \frac{\partial^2 \kappa_2}{\partial u^2} + \tilde{P}(u, v) \frac{\partial \kappa_1}{\partial v} + \tilde{Q}(u, v) \frac{\partial \kappa_2}{\partial u}, \quad (5.16)$$

onde mais uma vez \tilde{P}, \tilde{Q} são funções cuja forma explícita não será necessário conhecer. Como κ_1 atinge um máximo local em p e κ_2 um mínimo local em p , temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \kappa_1}{\partial v^2}(p) &\leq 0, \\ \frac{\partial^2 \kappa_2}{\partial u^2}(p) &\geq 0, \\ \frac{\partial \kappa_1}{\partial v}(p) &= \frac{\partial \kappa_2}{\partial u}(p) = 0\end{aligned}$$

e $E, G > 0$ sempre, de modo que o lado direito da equação (5.16) em p é

$$\left[-2E \frac{\partial^2 \kappa_1}{\partial v^2} + 2G \frac{\partial^2 \kappa_2}{\partial u^2} + \tilde{P}(u, v) \frac{\partial \kappa_1}{\partial v} + \tilde{Q}(u, v) \frac{\partial \kappa_2}{\partial u} \right](p) = \left[-2E \frac{\partial^2 \kappa_1}{\partial v^2} + 2G \frac{\partial^2 \kappa_2}{\partial u^2} \right](p) \geq 0.$$

Mas $E, G > 0$ sempre, $K(p) > 0$ por hipótese e $\kappa_1(p) > \kappa_2(p)$ por hipótese de absurdo, logo o lado esquerdo da equação (5.16) em p é

$$[-2KEG(\kappa_1 - \kappa_2)](p) < 0,$$

uma contradição. ■

5.29 Teorema (Rigidez da Esfera). *Seja S uma superfície regular, conexa, compacta e com curvatura gaussiana constante. Então S é uma esfera.*

Prova: Como S é compacta, ela possui um ponto elíptico pela Proposição 4.44. Porque K é constante, concluímos que $K > 0$ em S .

As funções autovalor máximo e mínimo de uma matriz são funções contínuas, raízes do polinômio característico. Logo, por compacidade, a função contínua κ_1 atinge o seu valor máximo em um ponto $p \in S$. Como $K = \kappa_1 \kappa_2$ é uma função positiva constante, a função

$$\kappa_2 = \frac{K}{\kappa_1}$$

é uma função decrescente de κ_1 e portanto atinge o seu valor mínimo em p . Segue do lema que p é um ponto umbílico, ou seja,

$$\kappa_1(p) = \kappa_2(p).$$

Seja $q \in S$ um ponto arbitrário. Como

$$\kappa_1(p) \geq \kappa_1(q) \geq \kappa_2(q) \geq \kappa_2(p) = \kappa_1(p),$$

segue que

$$\kappa_1(q) = \kappa_2(q),$$

ou seja, todo ponto de S é umbílico. Concluimos da Proposição 4.37 que S está contida em uma esfera \mathbb{S} , já que $K \neq 0$. Como S é compacta, ela é fechada em \mathbb{S} , e sendo uma superfície regular também é aberta em \mathbb{S} , portanto, $S = \mathbb{S}$. ■

5.30 Corolário. *Seja S uma superfície regular, conexa, compacta, com curvatura gaussiana positiva e curvatura média constante. Então S é uma esfera.*

Prova: Para que a demonstração do teorema anterior seja válida, basta que a curvatura gaussiana seja constante e que κ_2 seja uma função decrescente de κ_1 . Esta última condição continua válida se

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$$

é constante. ■

Superfícies conexas compactas em \mathbb{R}^3 com curvatura gaussiana positiva são chamadas *ovalóides*. Este resultado afirma que ovalóides de curvatura média constante são esferas. Exemplos de ovalóides são os elipsóides.

Na verdade, um resultado mais forte é verdadeiro: uma superfície regular, conexa, compacta com curvatura média constante é uma esfera. Veja referências para este resultado em [Carmo], p. 322.

Capítulo 6

Geodésicas

Inicialmente definimos *geodésicas* através do espaço ambiente e depois mostramos que este também é um conceito intrínseco que depende apenas da primeira forma fundamental (métrica).

6.1 Definição

6.1 Definição. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva em S . Decompomos o vetor aceleração $\alpha''(t) \in \mathbb{R}^3$ de α em duas componentes: uma **componente tangencial** $\alpha''(t)^\top \in T_{\alpha(t)}S$ e uma componente normal $\alpha''(t)^\perp$ normal a $T_{\alpha(t)}S$ (isto é, na direção do vetor normal $N(\alpha(t))$), de modo que

$$\alpha''(t) = \alpha''(t)^\top + \alpha''(t)^\perp.$$

□

6.2 Definição. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $\gamma : I \rightarrow S$ uma curva em S . Dizemos que γ é uma **geodésica** de S se

$$(\gamma'')^\top \equiv 0,$$

isto é, se a componente tangencial da aceleração da curva é nula ao longo da curva. □

Assim, quando “vista” do ponto de vista da superfície, sem se referir ao espaço ambiente, uma partícula percorrendo uma trajetória geodésica não sofre efeitos de aceleração (não tem aceleração na superfície).

6.3 Proposição. Se $\gamma : I \rightarrow S$ é uma geodésica, então

$$\|\gamma'(t)\| \equiv \text{constante}.$$

Prova: Pois,

$$\frac{d}{dt} \|\gamma'(t)\|^2 = \frac{d}{dt} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 2 \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle = 0,$$

logo

$$\|\gamma'(t)\| \equiv \text{constante}.$$

■

6.4 Definição. Uma geodésica $\gamma : I \rightarrow S$ é **normalizada** (ou **unitária**) se

$$\|\gamma'(t)\| \equiv 1.$$

□

6.5 Lema. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma vizinhança coordenada de S . Se*

$$\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$$

é a expressão em coordenadas de uma curva nesta vizinhança coordenada, então

$$\alpha''(t)^\top = \left[u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 \right] \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \left[v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 \right] \frac{\partial \varphi}{\partial v} \quad (6.1)$$

$$\alpha''(t)^\perp = \left[e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 \right] N. \quad (6.2)$$

Prova: Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} u' + \frac{\partial \varphi}{\partial v} v', \\ \alpha''(t) &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} (u')^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} v'u' + \frac{\partial \varphi}{\partial u} u'' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} (v')^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u} u'v' + \frac{\partial \varphi}{\partial v} v''. \end{aligned}$$

Por (5.3), segue que

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= \left[\Gamma_{11}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + eN \right] (u')^2 + 2 \left[\Gamma_{12}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + fN \right] u'v' + \frac{\partial \varphi}{\partial u} u'' \\ &\quad + \left[\Gamma_{22}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + gN \right] (v')^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial v} v'' \\ &= \left[u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 \right] \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ &\quad + \left[v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 \right] \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ &\quad + \left[e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 \right] N, \end{aligned}$$

donde segue o resultado. ■

6.6 Proposição (A Equação Geodésica). *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $p \in S$ e $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma vizinhança de p . Se*

$$\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$$

é uma curva em S passando por p , então γ é uma geodésica se e somente se ela satisfaz o sistema de equações diferenciais não lineares

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 = 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 = 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

Prova: O resultado segue imediatamente do lema e da definição de geodésica. ■

Segue que geodésicas são conceitos intrínsecos da geometria de uma superfície, pois os símbolos de Christoffel dependem apenas dos coeficientes da primeira forma fundamental. Em particular, isometrias e isometrias locais levam geodésicas em geodésicas, fato que enunciamos da seguinte forma:

6.7 Corolário. *Isometrias e isometrias locais preservam geodésicas.*

6.8 Corolário (Existência e Unicidade de Geodésicas). *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Então para todos $p \in S$ e $V \in T_p S$, existe um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ contendo 0 (dependente de p e V) e uma única geodésica $\gamma : I \rightarrow S$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = V$.*

Prova: Transformamos o sistema de EDOs de segunda ordem (6.3) em um sistema de primeira ordem equivalente definindo

$$\begin{aligned} w &= u', \\ z &= v'. \end{aligned}$$

Obtemos

$$\begin{cases} w' = -\Gamma_{11}^1 w^2 - 2\Gamma_{12}^1 wz - \Gamma_{22}^1 z^2 \\ z' = -\Gamma_{11}^2 w^2 - 2\Gamma_{12}^2 wz - \Gamma_{22}^2 z^2 \end{cases}.$$

O resultado segue então do Teorema de Existência e Unicidade local de soluções para sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não lineares. ■

6.2 Exemplos

6.9 Exemplo (Geodésicas do Plano). Como $E = G = 1$ e $F = 0$, os símbolos de Christoffel do plano são

$$\Gamma_{ij}^k \equiv 0,$$

onde a equação geodésica é simplesmente

$$\begin{cases} u'' = 0 \\ v'' = 0 \end{cases},$$

cujas soluções são

$$\begin{cases} u(t) = u_0 + V_1 t \\ v(t) = v_0 + V_2 t \end{cases}$$

onde $p_0 = (u_0, v_0)$ é um ponto fixado e $V = (V_1, V_2)$ é um vetor fixado. Em outras palavras, as geodésicas do plano são suas retas. □

6.10 Exemplo (Geodésicas de uma Superfície de Revolução). Como vimos no Exemplo 5.6, os símbolos de Christoffel para uma superfície de revolução parametrizada por

$$\varphi(u, v) = (\mathbf{f}(v) \cos u, \mathbf{f}(v) \sin u, \mathbf{g}(v))$$

são

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{\mathbf{f}'}{\mathbf{f}},$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{\mathbf{f}\mathbf{f}'}{(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2},$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{\mathbf{f}'\mathbf{f}'' + \mathbf{g}'\mathbf{g}''}{(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2}.$$

Portanto, a equação geodésica para superfícies de revolução é

$$\begin{cases} u'' + 2\frac{\mathbf{f}'}{\mathbf{f}}u'v' = 0 \\ v'' - \frac{\mathbf{f}\mathbf{f}'}{(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2}(u')^2 + \frac{\mathbf{f}'\mathbf{f}'' + \mathbf{g}'\mathbf{g}''}{(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2}(v')^2 = 0 \end{cases}. \quad (6.4)$$

Se a curva geratriz é parametrizada por comprimento de arco, de modo que

$$\begin{aligned}(\mathbf{f}')^2 + (\mathbf{g}')^2 &= 1, \\ 2\mathbf{f}'\mathbf{f}'' + 2\mathbf{g}'\mathbf{g}'' &= 0,\end{aligned}$$

a equação da geodésica se reduz a

$$\begin{cases} u'' + 2\frac{\mathbf{f}'}{\mathbf{f}}u'v' = 0 \\ v'' - \mathbf{f}\mathbf{f}'(u')^2 = 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

Desta equação obtemos imediatamente que os meridianos de superfícies de revolução são geodésicas. De fato, parametrizando os meridianos por comprimento de arco (já que geodésicas devem ter velocidade em norma constante)

$$\begin{aligned}u &\equiv u_0, \\ v &= v(s),\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}u'' &= u' = 0, \\ (v')^2 &= 1, \\ 2v'v'' &= 0 \implies v'' = 0,\end{aligned}$$

logo as duas equações em (6.5) são trivialmente satisfeitas.

Para que um paralelo seja uma geodésica, parametrizando-o por comprimento de arco

$$\begin{aligned}u &= u(s), \\ v &\equiv v_0,\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}v'' &= v' = 0, \\ (u')^2 &= 1, \\ 2u'u'' &= 0 \implies u'' = 0,\end{aligned}$$

a primeira equação é trivialmente satisfeita e a segunda se reduz a

$$\mathbf{f}\mathbf{f}'(u')^2 = 0.$$

Como $\mathbf{f}(v) = \mathbf{f}(v_0) \neq 0$, $u' \neq 0$, segue que

$$\mathbf{f}'(v_0) = 0,$$

ou seja, o paralelo $v \equiv v_0$ é uma geodésica de uma superfície de revolução se e somente se a reta tangente à curva geratriz é paralela ao eixo de revolução.

Em ambos os casos, é fácil ver que o vetor normal da curva está na direção do vetor normal da superfície, portanto a sua componente tangencial é nula. \square

6.11 Exemplo (Geodésicas da Esfera). Os grandes círculos da esfera, isto é, círculos na superfície da esfera cujos centros coincidem com o centro da esfera, são as suas geodésicas. Isso pode ser visto de várias maneiras. Como a esfera é uma superfície de revolução, os seus grandes círculos que são meridianos são geodésicas como vimos no exemplo anterior. Por outro lado, rotações da esfera são isometrias da esfera: elas são restrições de rotações do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 que são transformações ortogonais e portanto isometrias de \mathbb{R}^3 . Uma

vez que geodésicas são preservadas por isometrias, e qualquer grande círculo pode ser transformado em um meridiano através de uma rotação, segue que todo grande círculo é uma geodésica.

Outra forma de ver que os grandes círculos são geodésicas da esfera é parametrizá-los por comprimento de arco e notar que os seus vetores unitários normais apontam na mesma direção do campo vetorial normal unitário à esfera.

Pelo teorema de unicidade de geodésicas não existem outras geodésicas, uma vez que dado um ponto p da esfera e um vetor tangente V à esfera neste ponto existe um grande círculo passando por p com a direção de V . \square

6.12 Exemplo (Geodésicas do Cilindro). As geodésicas do cilindro C

$$\varphi(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v),$$

além dos meridianos e de todas as paralelas (já que $\mathbf{f} = \text{constante}$, logo $\mathbf{f} \equiv 0$), são as imagens de retas parametrizadas por comprimento de arco, isto é, as curvas $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow C$ dadas por

$$\gamma(s) = \varphi(as, bs)$$

com $a^2 + b^2 = 1$, que são hélices, pois

$$\gamma(s) = (\cos as, \operatorname{sen} as, bs).$$

Isso decorre do fato de φ ser uma isometria, como vimos no Exemplo 5.2, logo leva as geodésicas do plano (retas) nas geodésicas do cilindro (hélices). \square

6.13 Exemplo (Geodésicas do Toro). Resolver equações diferenciais não lineares em geral não é fácil e muitas vezes não podemos resolvê-las explicitamente, sendo necessário recorrer a métodos numéricos para encontrar as soluções. Por outro lado, em geral espera-se que superfícies que possuem algum tipo de simetria dêem origem a equações diferenciais que podem ser explicitamente resolvidas, embora nem sempre de maneira fácil. Um exemplo disso é a equação geodésica do toro.

Como superfície de revolução, segue imediatamente que os meridianos e os paralelos equador interior e exterior do toro são geodésicas. Para encontrar as demais geodésicas, primeiro obtemos a equação geodésica do toro. Para simplificar, escolhemos o toro parametrizado por

$$\phi(u, v) = ((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \operatorname{sen} u, \operatorname{sen} v),$$

em que a curva geratriz

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(v) &= 2 + \cos v, \\ \mathbf{g}(v) &= \operatorname{sen} v \end{aligned}$$

é parametrizada por comprimento de arco. A equação geodésica é então

$$\begin{cases} u'' - \frac{2 \operatorname{sen} v}{2 + \cos v} u' v' = 0 \\ v'' + \operatorname{sen} v (2 + \cos v) (u')^2 = 0 \end{cases}.$$

Para simplificar a primeira equação, façamos a mudança de variável

$$\begin{aligned} w &= 2 + \cos v, \\ w' &= -(\operatorname{sen} v) v', \end{aligned} \tag{6.6}$$

de modo que ela se torna

$$u'' + \frac{2u'w'}{w} = 0.$$

Integrando

$$\frac{u''}{u'} = -2\frac{w'}{w},$$

obtemos

$$\log u' = \log w^{-2} + \log c,$$

donde

$$u' = \frac{c}{w^2},$$

ou seja,

$$u' = \frac{c}{(2 + \cos v)^2}. \quad (6.7)$$

A segunda equação agora envolve apenas a variável v :

$$v'' + \frac{c^2 \sin v}{(2 + \cos v)^3} = 0.$$

Multiplicando a equação por v' e novamente usando a mudança de variável (6.6), segue que

$$v''v' - c^2 \frac{w'}{w^3} = 0$$

ou

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} (v')^2 = c^2 \frac{w'}{w^3}.$$

Integrando, obtemos

$$(v')^2 = -\frac{c^2}{w^2} + d,$$

donde

$$v' = \sqrt{d - \frac{c^2}{(2 + \cos v)^2}}. \quad (6.8)$$

Usando a condição da velocidade em norma constante da geodésica,

$$(u')^2 + (v')^2 = \text{constante},$$

segue que as geodésicas do toro satisfazem

$$\frac{1}{(2 + \cos v)^4} - \frac{1}{(2 + \cos v)^2} = \text{constante}.$$

Estas geodésicas podem ser bastante complexas. Algumas são fechadas. A maioria não é e dá infinitas voltas em torno do toro com um comportamento dinâmico complexo; de fato, pode-se provar que se uma geodésica do toro não é fechada, então sua imagem é densa no toro (isto é, seu fecho é o toro inteiro). Maiores detalhes e ilustrações podem ser obtidos em vários documentos acessíveis na Internet. \square

6.3 Aplicação Exponencial

6.3.1 Definição

O resultado obtido no Corolário 6.8 pode ser melhorado, no sentido de que podemos garantir que os intervalos de definição das geodésicas passando por $p \in S$ são os mesmos, independente da velocidade inicial, desde que esta esteja limitada.

6.14 Proposição. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Então, para todo $p \in S$ existem números $\delta, \varepsilon > 0$, dependendo de p , e uma aplicação diferenciável*

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B_\delta \longrightarrow S$$

onde

$$B_\delta = \{V \in T_p S : \|V\| < \varepsilon\}$$

tal que $\gamma(t, V)$ é a única geodésica de S que satisfaz as condições iniciais

$$\begin{aligned}\gamma(0, V) &= p, \\ \frac{d\gamma}{dt}(0, V) &= V,\end{aligned}$$

e $\gamma(t, 0) = p$.

Prova: Segue do Teorema de Dependência das Soluções de uma Equação Diferencial Ordinária de suas Condições Iniciais. ■

Este resultado afirma que se $\|V\| < \varepsilon$, a geodésica $\gamma(t, V)$ existe no intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Podemos sempre aumentar a velocidade da geodésica ao preço de diminuir o seu intervalo de definição (e vice-versa). Para isso basta reparametrizar a geodésica:

6.15 Proposição. *Se a geodésica $\gamma(t, V)$ está definida no intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$, então a geodésica $\gamma(t, cV)$ está definida no intervalo $\left(-\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c}\right)$. Além disso,*

$$\gamma(t, cV) = \gamma(ct, V). \quad (6.9)$$

Prova: Seja $\beta : \left(-\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c}\right) \longrightarrow S$ a curva definida por

$$\beta(t) = \gamma(ct, V),$$

de modo que $\beta(0) = \gamma(0, V) = p$ e $\beta'(0) = c \frac{d\gamma}{dt}(0, V) = cV$. Temos,

$$\beta''(t) = c^2 \frac{d^2\gamma}{dt^2}(ct, V),$$

donde

$$[\beta''(t)]^\top = c^2 \left[\frac{d^2\gamma}{dt^2}(ct, V) \right]^\top = 0.$$

Portanto β é uma geodésica e, por unicidade, $\beta(t) = \gamma(t, cV)$. ■

6.16 Definição. Se $V \in T_p S$ é tal que $\gamma(1, V) = \gamma\left(\|V\|, \frac{V}{\|V\|}\right)$ está definido, definimos a **exponencial** de V por

$$\exp_p(V) = \gamma(1, V). \quad (6.10)$$

□

Geometricamente, $\exp_p(V)$ é o ponto de S obtido percorrendo a partir de p a geodésica com velocidade inicial V durante um intervalo de tempo unitário ou, equivalentemente, percorrendo a geodésica que parte de p com velocidade unitária igual a $V/\|V\|$ um comprimento igual a $\|V\|$. Segue da Proposição 6.14 que a aplicação exponencial \exp_p está definida em uma bola $B_\varepsilon \subset T_p S$:

$$\exp_p : B_\varepsilon \subset T_p S \longrightarrow S.$$

Pelo Teorema de Dependência das Soluções de uma Equação Diferencial Ordinária de suas Condições Iniciais, a exponencial é uma aplicação diferenciável.

6.17 Proposição. Dado $p \in S$, existe $\varepsilon > 0$ tal que \exp_p é um difeomorfismo de B_ε sobre um aberto de S .

Prova: Temos

$$d(\exp_p)_0 V = \left. \frac{d}{dt} \exp_p(tV) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \gamma(1, tV) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \gamma(t, V) \right|_{t=0} = V,$$

o que mostra que $d(\exp_p)_0 : T_p S \rightarrow T_p S$ é a aplicação identidade, onde identificamos o espaço tangente a $T_p S$ na origem com o próprio $T_p S$, isto é, $T_0(T_p S) = T_p S$. Pelo Teorema da Função Inversa, \exp_p é um difeomorfismo local em uma vizinhança de 0. ■

6.3.2 Coordenadas Normais

6.18 Definição. Se \exp_p é um difeomorfismo de uma vizinhança U da origem em $T_p S$ sobre uma vizinhança V de p em S , dizemos que V é uma **vizinhança normal** de p .

Nestas condições, se B_ε é tal que $\overline{B_\varepsilon} \subset V$, então nós chamamos

$$B_\varepsilon(p) := \exp_p(B_\varepsilon) \tag{6.11}$$

a **bola geodésica** de centro em p e raio ε . □

Em uma vizinhança normal, podemos definir um sistema de coordenadas com propriedades especiais.

6.19 Definição. Seja $V = \exp_p(U)$ uma vizinhança normal de p em S . Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal para $T_p S$ e $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p S$ o isomorfismo $E(u, v) = ue_1 + ve_2$. Considere a parametrização $\varphi : E^{-1}(U) \rightarrow V$ definida por

$$\varphi(u, v) = (\exp_p \circ E)(u, v) = \exp_p(ue_1 + ve_2).$$

As coordenadas desta parametrização são chamadas as **coordenadas normais** centradas em p . □

Devido às propriedades especiais de coordenadas normais enumeradas na proposição a seguir, elas constituem uma ferramenta vital em geometria diferencial. O resultado a seguir segue imediatamente da definição.

6.20 Proposição. Em coordenadas normais centradas em um ponto p temos

$$E(p) = G(p) = 1 \text{ e } F(p) = 0.$$

6.3.3 Coordenadas Geodésicas Polares

Em \mathbb{R}^2 menos um raio partindo da origem, podemos introduzir coordenadas polares $(r, \theta) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ através da carta definida por

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x \geq 0 \text{ e } y = 0\} \\ (r, \theta) &\longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

Claramente esta aplicação é um difeomorfismo, cuja diferencial é

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix},$$

cujos determinante é $r \neq 0$.

6.21 Definição. Dado $p \in S$, sejam (r, θ) coordenadas polares no plano tangente $T_p S$ parametrizado pelo isomorfismo da Definição 6.19. Usando o difeomorfismo

$$\exp_p : B_\varepsilon \setminus \{\theta = 0\} \longrightarrow \exp_p(B_\varepsilon \setminus \{\theta = 0\}),$$

esta parametrização da vizinhança $\exp_p(B_\varepsilon \setminus \{\theta = 0\})$ pelas coordenadas (r, θ) é chamada **coordenadas geodésicas polares**.

As imagens por \exp_p de círculos centrados na origem ($r = \text{constante}$) serão chamados **círculos geodésicos** centrados em p , enquanto que as imagens por \exp_p de segmentos de raios ou raios partindo da origem ($\theta = \text{constante}$) serão chamadas **geodésicas radiais** (ou também **raios geodésicos**) partindo de p . \square

Note que as geodésicas radiais são de fato geodésicas pela definição de aplicação exponencial, enquanto que os círculos geodésicos não são geodésicas, exceto em situações muito raras. Observe também que as coordenadas geodésicas polares não estão definidas no ponto p ($r = 0$), onde elas deixam de ser um difeomorfismo devido à singularidade das coordenadas polares na origem.

Os coeficientes da primeira forma fundamental do plano em relação a coordenadas polares (identificando \mathbb{R}^2 com o plano $z = 0$ em \mathbb{R}^3) são

$$\begin{aligned} E &= \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = 1, \\ F &= \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle = 0, \\ G &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle = r^2. \end{aligned}$$

Em particular, o comprimento de arco em coordenadas polares é

$$dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Note que

$$\lim_{r \rightarrow 0} G(r, \theta) = 0$$

e

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r}(r, \theta) = 1.$$

O resultado a seguir mostra que estas propriedades também valem para as coordenadas geodésicas polares, o que as torna ferramentas muito úteis para provar resultados de geometria diferencial (por exemplo, o fato que geodésicas minimizam distâncias, como veremos na próxima seção).

Para compreender melhor a demonstração, observamos que coordenadas polares no plano podem ser estendidas até uma aplicação contínua, de classe C^∞ para $r \neq 0$,

$$\begin{aligned} [0, +\infty] \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x \geq 0 \text{ e } y = 0\} \\ (r, \theta) &\longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

que obviamente deixa de ser bijetiva e portanto não é um difeomorfismo. Isso é vantajoso em certas situações (como na demonstração do lema de Gauss a seguir), à medida que nos permite considerar as derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(0+, \theta) &= (\cos \theta, \sin \theta), \\ \frac{\partial}{\partial \theta}(0+, \theta) &= 0. \end{aligned}$$

Como \exp_p é um difeomorfismo, o mesmo vale para as coordenadas geodésicas polares.

6.22 Lema (Lema de Gauss). *Os coeficientes da primeira forma fundamental em coordenadas polares satisfazem as condições*

$$\begin{aligned} E(r, \theta) &= 1, \\ F(r, \theta) &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0} G(r, \theta) &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r}(r, \theta) &= 1. \end{aligned}$$

Em particular, uma parametrização por coordenadas polares é uma parametrização ortogonal e as geodésicas radiais partindo de p são ortogonais às esferas geodésicas centradas em p .

Prova: Por definição da aplicação exponencial, r mede o comprimento de arco ao longo dos raios partindo da origem, logo $E = 1$. Em maiores detalhes, denotando as coordenadas polares por

$$\varphi(r, \theta) = \exp_p(r, \theta),$$

se V é um vetor unitário na direção de um raio $\theta = \text{constante}$, temos por definições

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= d(\exp_p)_V V \\ &= \left. \frac{d}{dt} \exp_p((t+1)V) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \gamma(1, (t+1)V) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \gamma(t+1, V) \right|_{t=0} \\ &= \gamma'(1, V), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} E &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right\rangle = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right\|^2 \\ &= \|\gamma'(1, V)\|^2 = \|\gamma'(0, V)\|^2 = \|V\|^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Para provar que $F = 0$, usaremos primeiro a equação geodésica em coordenadas polares:

$$\begin{cases} r'' + \Gamma_{11}^1 (r')^2 + 2\Gamma_{12}^1 r' \theta' + \Gamma_{22}^1 (\theta')^2 = 0 \\ \theta'' + \Gamma_{11}^2 (r')^2 + 2\Gamma_{12}^2 r' \theta' + \Gamma_{22}^2 (\theta')^2 = 0 \end{cases}$$

para concluir que $F(r, \theta)$ não depende de r . De fato, como os raios, que correspondem às curvas coordenadas $\theta \equiv \theta_0$, são geodésicas, concluímos da segunda equação do sistema que

$$\Gamma_{11}^2(r, \theta) = 0.$$

Segue então da Proposição 5.5 que

$$0 = \Gamma_{11}^2 = \frac{2E \frac{\partial F}{\partial r} - E \frac{\partial E}{\partial \theta} - F \frac{\partial E}{\partial r}}{2(EG - F^2)} = \frac{\frac{\partial F}{\partial r}}{EG - F^2},$$

donde

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 0,$$

isto é,

$$F(r, \theta) = F(\theta).$$

$F(r, \theta)$ não está definido em p , pois corresponde a $r = 0$, mas como

$$\lim_{r \rightarrow 0} F(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\rangle = 0,$$

pois $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ tem comprimento constante e $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(0+, \theta) = d(\exp_p)_v \left(\frac{\partial}{\partial \theta}(0+, \theta) \right) = 0$, segue o resultado.

Para provar as últimas afirmações, escolha um sistema de coordenadas normais (u, v) em p . Então a mudança de coordenadas polares para coordenadas normais é dada pela familiar fórmula

$$\begin{aligned} u &= r \cos \theta, \\ v &= r \sin \theta. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Mudança de Variáveis para Integrais,

$$\sqrt{G}(r, \theta) = \sqrt{EG - F^2}(r, \theta) = \sqrt{EG - F^2}(u, v) \frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)},$$

de modo que

$$\sqrt{G}(r, \theta) = r \sqrt{EG - F^2}(u, v)$$

Como em coordenadas normais em p temos

$$\sqrt{EG - F^2}(p) = 1,$$

segue que $\sqrt{EG - F^2}(u, v)$ é limitado em uma vizinhança da origem e portanto

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{G}(r, \theta) = 0.$$

Similarmente, derivando a expressão acima obtemos

$$\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r}(r, \theta) = \sqrt{EG - F^2}(u, v) + r \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{EG - F^2}(u, v) \right],$$

de modo que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r}(r, \theta) = 1.$$

■

Segue do Lema de Gauss que o comprimento de arco em coordenadas polares é dado por

$$dr^2 + G(r, \theta) d\theta^2$$

e $G(r, \theta)$ se comporta como r^2 na origem.

6.23 Corolário. *Em coordenadas geodésicas polares, a curvatura gaussiana é dada por*

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2}.$$

Prova: Pela Proposição 5.12 e pelo Lema de Gauss, a curvatura gaussiana é dada por

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{G}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial r} \right) \right] = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2}.$$

■

6.24 Teorema (Teorema de Minding). *Duas superfícies regulares com a mesma curvatura gaussiana constante são localmente isométricas.*

Prova: Pela Proposição 5.3 basta mostrar que em coordenadas polares os coeficientes da primeira forma fundamental de qualquer superfície com curvatura gaussiana K são idênticos.

Pelo Corolário 6.23, a função \sqrt{G} satisfaz a equação diferencial ordinária linear de segunda ordem com coeficiente constante

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2} + K\sqrt{G} = 0. \quad (6.12)$$

Como conhecido, esta equação tem uma solução geral diferente para cada um dos três casos $K = 0$, $K > 0$ e $K < 0$. Consideraremos cada um destes três casos separadamente.

Caso 1. $K = 0$.

Neste caso, segue do Corolário 6.23 que

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2} = 0,$$

logo

$$\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} = \text{constante}.$$

Como pelo Lema de Gauss $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} = 1$, concluímos que

$$\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} = 1.$$

Portanto,

$$\sqrt{G} = r + f(\theta)$$

para alguma função f . Como pelo Lema de Gauss $\lim_{r \rightarrow 0} G(r, \theta) = 0$, segue que $f = 0$ e portanto

$$\sqrt{G} = r.$$

Assim, em coordenadas polares, os coeficientes da primeira forma fundamental de qualquer superfície com curvatura gaussiana $K = 0$ são idênticos, iguais a

$$\begin{aligned} E &= 1, \\ F &= 0, \\ G &= r^2. \end{aligned}$$

Note que estes são exatamente os coeficientes da primeira forma fundamental do plano em coordenadas polares.

Caso 2. $K > 0$.

Neste caso, a solução geral de (6.12) é

$$\sqrt{G} = A(\theta) \cos(\sqrt{K}r) + B(\theta) \text{sen}(\sqrt{K}r).$$

Como $\lim_{r \rightarrow 0} G(r, \theta) = 0$, segue que $A(\theta) = 0$, logo

$$\sqrt{G} = B(\theta) \operatorname{sen}(\sqrt{K}r),$$

donde

$$\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} = \sqrt{K} B(\theta) \cos(\sqrt{K}r).$$

Como $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} = 1$, concluimos que

$$B(\theta) = \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

Portanto,

$$\sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{sen}(\sqrt{K}r).$$

Assim, em coordenadas polares, os coeficientes da primeira forma fundamental de qualquer superfície com curvatura gaussiana $K > 0$ são idênticos, iguais a

$$\begin{aligned} E &= 1, \\ F &= 0, \\ G &= \frac{1}{K} \operatorname{sen}^2(\sqrt{K}r). \end{aligned}$$

Caso 3. $K < 0$.

Neste caso, a solução geral de (6.12) é

$$\sqrt{G} = A(\theta) \cosh(\sqrt{-K}r) + B(\theta) \operatorname{senh}(\sqrt{-K}r).$$

Como $\lim_{r \rightarrow 0} G(r, \theta) = 0$, segue que $A(\theta) = 0$, logo

$$\sqrt{G} = B(\theta) \operatorname{senh}(\sqrt{-K}r),$$

donde

$$\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} = \sqrt{-K} B(\theta) \cosh(\sqrt{-K}r).$$

Como $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} = 1$, concluimos que

$$B(\theta) = \frac{1}{\sqrt{-K}}.$$

Portanto,

$$\sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{senh}(\sqrt{-K}r).$$

Assim, em coordenadas polares, os coeficientes da primeira forma fundamental de qualquer superfície com curvatura gaussiana $K < 0$ são idênticos, iguais a

$$\begin{aligned} E &= 1, \\ F &= 0, \\ G &= \frac{1}{-K} \operatorname{senh}^2(\sqrt{-K}r). \end{aligned}$$

■

6.4 Propriedades Minimizantes das Geodésicas

6.25 Definição. Se $\gamma : I \rightarrow S$ é uma geodésica e $[a, b] \subset I$, a restrição $\gamma|_{[a,b]}$ é chamada o **segmento de geodésica** ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Dizemos que o segmento de geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ é **minimizante** se $\ell(\gamma) \leq \ell(\alpha)$ para toda curva α ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$. \square

6.26 Proposição (Geodésicas minimizam distâncias localmente). *Sejam S uma superfície regular e $p \in S$. Então existe uma vizinhança W de p tal que para todo segmento de geodésica $\gamma : [0, t_0] \rightarrow W$ com $\gamma(0) = p$, se $\alpha : [0, t_0] \rightarrow S$ é qualquer curva regular ligando $\gamma(0)$ a $\gamma(t_0)$, então*

$$\ell(\gamma) \leq \ell(\alpha).$$

Além disso, se $\ell(\gamma) = \ell(\alpha)$, então necessariamente $\alpha([0, t_0]) = \gamma([0, t_0])$.

Prova: Seja V uma vizinhança normal de p e $W = B_R$ uma bola geodésica tal que $\overline{W} \subset V$. Seja $\gamma : [0, t_0] \rightarrow W$ um segmento de geodésica tal que $\gamma(0) = p$ e denote $q = \gamma(t_0)$. Considere coordenadas geodésicas polares em \overline{W} tais que o ponto q está no raio $\theta = 0$, que denotaremos por L .

Dada uma curva $\alpha : [0, t_0] \rightarrow S$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha(t_0) = q$, consideraremos três casos.

Caso 1. $\alpha((0, t_0)) \subset \overline{W} \setminus L$.

Escreva α em coordenadas polares

$$\alpha(t) = (r(t), \theta(t)).$$

O comprimento de arco em coordenadas polares é

$$\begin{aligned} \|\alpha'\|^2 &= \left\langle r' \frac{\partial}{\partial r} + \theta' \frac{\partial}{\partial \theta}, r' \frac{\partial}{\partial r} + \theta' \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle \\ &= (r')^2 + G^2 (\theta')^2 \\ &\geq (r')^2, \end{aligned}$$

onde denotamos a base da parametrização por coordenadas polares simplesmente por $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}$. Além disso,

$$\|\alpha'\|^2 = (r')^2$$

se e somente se $\theta = \text{constante}$. Segue que o comprimento de α entre ε e $t_0 - \varepsilon$ (pois as coordenadas polares não estão definidas em $\alpha(0) = p$ e $\alpha(t_0) = q$) é

$$\ell(\alpha|_{[\varepsilon, t_0 - \varepsilon]}) = \int_{\varepsilon}^{t_0 - \varepsilon} \sqrt{(r')^2 + G^2 (\theta')^2} dt \geq \int_{\varepsilon}^{t_0 - \varepsilon} r' dt = \ell(\gamma) - 2\varepsilon$$

com a igualdade valendo se e somente se $\theta = \text{constante}$ e $r' > 0$. Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ segue o resultado.

Caso 2. $\alpha((0, t_0)) \subset \overline{W}$ e intercepta L .

Seja $t_1 \in [0, t_0]$ o primeiro valor para o qual α intercepta L . Pelo argumento anterior,

$$\ell(\gamma|_{[0, t_1]}) \leq \ell(\alpha|_{[0, t_1]})$$

e

$$\ell(\gamma|_{[0, t_1]}) = \ell(\alpha|_{[0, t_1]})$$

implica $\alpha([0, t_1]) = \gamma([0, t_1])$. Como $\alpha([0, t_0])$ e L são compactos, existe um último ponto $\tilde{t} \geq t_1$ tal que α intercepta L ou $\alpha([t, t_0]) \subset L$. Raciocinando desta forma nos intervalos entre as interseções de α e L , concluímos o resultado.

Caso 3. $\alpha((0, 1)) \not\subset \overline{W}$.

Seja $t_1 \in [0, t_0]$ o primeiro valor para o qual α intercepta a fronteira ∂W . Seja $\tilde{\gamma}$ a geodésica radial que liga p a $\alpha(t_1)$ e seja $\tilde{\alpha} = \alpha|_{[0, t_1]}$. Então, pelo argumento anterior,

$$\ell(\tilde{\gamma}) \leq \ell(\tilde{\alpha}) < \ell(\alpha).$$

Como q é um ponto interior de W , temos

$$\ell(\gamma) < \ell(\tilde{\gamma}),$$

portanto

$$\ell(\gamma) < \ell(\alpha).$$

■

O resultado vale apenas localmente: um segmento de geodésica suficientemente grande pode não ser minimizante. Por exemplo, as geodésicas de uma esfera (círculos maximais) que partem de um ponto p deixam de ser minimizantes depois que passam pelo antípoda de p .

6.27 Corolário (Curvas que minimizam distância são Geodésicas). *Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada regular com parâmetro proporcional ao comprimento de arco.*

Se o comprimento da curva entre quaisquer dois pontos da curva é menor que o comprimento de qualquer outra curva regular ligando estes dois pontos, então α é uma geodésica.

Prova: Sejam $t_1 \in I$ e W uma vizinhança de $\alpha(t_1)$ satisfazendo as condições da Proposição 6.26. Seja $t_2 \in I$. Pela hipótese e pela última afirmação daquela proposição segue que α é uma geodésica em (t_1, t_2) . Por regularidade da curva α e continuidade, segue que α também é uma geodésica em t_1 . ■

Observe que este resultado é global, não apenas local: dados dois pontos quaisquer de uma superfície, se existir uma curva ligando eles que minimiza distâncias, então ela é uma geodésica. Por outro lado, dados dois pontos arbitrários em uma superfície, pode não existir nenhuma geodésica que os ligue: considere \mathbb{R}^2 com o disco centrado em zero e raio 1 removido; para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, não existe nenhuma geodésica que une os pontos

$$(-1 - \delta, 0, \dots, 0) \quad \text{e} \quad (1 + \delta, 0, \dots, 0),$$

por exemplo, e esta afirmação vale para quaisquer outros dois pontos antípodas muito próximos ao bordo do disco removido.

6.5 Vizinhanças Totalmente Normais e Vizinhanças Convexas

O resultado da Proposição 6.14 pode ser melhorado usando resultados mais fortes sobre o fluxo de um campo vetorial (para referências e uma discussão mais detalhada, veja [Carmo], pp 298–300):

6.28 Proposição (O Fluxo Geodésico). *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Então, para cada $p \in S$ existem $\delta, \varepsilon, \eta > 0$ e uma aplicação diferenciável*

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathcal{V} \rightarrow S$$

onde

$$\mathcal{V} = \{(q, V) : q \in B_\delta(p), V \in T_q S \text{ e } \|V\| < \eta\}$$

tais que para cada $(q, V) \in \mathcal{V}$

$$\gamma(t, q, V) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$$

é a geodésica de S que satisfaz

$$\begin{aligned} \gamma(0, q, V) &= (q, V), \\ \frac{d\gamma}{dt}(0, q, V) &= V, \end{aligned}$$

se $V \neq 0$ e $\gamma(t, q, 0) = q$.

6.29 Definição. Seja S uma superfície regular. Se V é uma vizinhança em S que é uma vizinhança normal para todos os seus pontos, dizemos que V é uma **vizinhança totalmente normal**.

Dizemos que uma vizinhança V em S é uma **vizinhança uniformemente normal** se existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $q \in V$ a bola geodésica $B_\varepsilon(q) = \exp_q(B_\varepsilon(0))$ contém V . ε é chamado o **raio geodésico comum** da vizinhança uniformemente normal. \square

Observe que em uma vizinhança uniformemente normal V , dois pontos q_1, q_2 quaisquer da vizinhança são ligados por uma geodésica radial de comprimento menor que 2ε . Toda vizinhança uniformemente normal é em particular totalmente normal.

6.30 Proposição. *Todo ponto de uma superfície regular possui uma vizinhança uniformemente normal.*

Prova: Seja \mathcal{V} como na Proposição 6.28. Defina $F : \mathcal{V} \rightarrow S \times S \subset \mathbb{R}^6$ por

$$F(q, V) = (q, \exp_q V).$$

Temos $F(p, 0) = (p, p)$ e

$$dF(p, 0) = \begin{bmatrix} I & * \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

pois $d(\exp_p)_0 = I$, conforme vimos na demonstração da Proposição 6.17. Portanto, F é um difeomorfismo local em uma vizinhança de $(p, 0)$, logo existe uma vizinhança $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ de $(p, 0)$ tal que F aplica \mathcal{V}' difeomorficamente sobre uma vizinhança W' de (p, p) em $S \times S$. Escolha \mathcal{V}' da forma

$$\mathcal{V}' = \{(q, V) : q \in W, V \in T_q S \text{ e } \|V\| < \delta\}$$

com W uma vizinhança de p em S e algum $\delta > 0$. Escolha uma vizinhança $Z \subset W$ de p em S de tal forma que $Z \times Z \subset F(\mathcal{V}')$. Então, para todo $q \in Z$ temos

$$F(\{q\} \times B_\delta(0)) \supset \{q\} \times Z$$

o que implica, pela definição de F ,

$$B_\delta(q) = \exp_q(B_\delta(0)) \supset Z.$$

■

6.31 Corolário. *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ uma curva regular por partes tal que em cada segmento regular o parâmetro é proporcional ao comprimento de arco.*

Se o comprimento de α entre dois pontos quaisquer é menor que ou igual ao comprimento de qualquer outra curva regular que liga estes pontos, então α é uma geodésica.

Em particular, α é uma curva regular.

Prova: Seja

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = b$$

uma partição do intervalo $[a, b]$ tal que $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ é regular para $i = 0, \dots, n$. Pelo Corolário 6.27, α é uma geodésica em cada um dos pontos dos intervalos abertos (t_i, t_{i+1}) .

Para provar que α é uma geodésica no extremo t_i , considere uma vizinhança uniformemente normal V de $\alpha(t_i)$ de raio geodésico comum ε . Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno para que os pontos

$$\begin{aligned} q_1 &= \alpha(t_i - \delta), \\ q_2 &= \alpha(t_i + \delta), \end{aligned}$$

estejam em V e tome a geodésica radial γ em $B_\varepsilon(q_1)$ que liga q_1 a q_2 . Pela Proposição 6.26 (estendida a curvas regulares por partes) temos

$$\ell(\gamma|_{[q_1, q_2]}) \leq \ell(\alpha|_{[q_1, q_2]})$$

onde $[q_1, q_2]$ denota o segmento da curva respectiva entre os pontos q_1 e q_2 . Por hipótese,

$$\ell(\gamma|_{[q_1, q_2]}) = \ell(\alpha|_{[q_1, q_2]}),$$

o que implica novamente pela Proposição 6.26 (estendida a curvas regulares por partes) que os traços de γ e α coincidem entre os pontos q_1 e q_2 . Em particular, α é uma geodésica em t_i . ■

Por outro lado, nada garante que esta geodésica esteja contida em v (as duas geodésicas radiais, uma partindo de q_1 e outra partindo de q_2 podem se ligar através de um ponto p fora de $W \subset B_\varepsilon(q_1) \cup B_\varepsilon(q_2)$).

6.32 Definição. Seja S uma superfície regular. Dizemos que uma vizinhança V em S é uma **vizinhança convexa** se para todos os pontos $p, q \in V$ existe uma única geodésica minimizante ligando p a q cuja imagem está inteiramente contida em V . □

O raio de uma bola geodésica pode ser escolhido de tal forma que ela se torne convexa.

6.33 Lema. Para todo ponto p de uma superfície regular existe $\varepsilon > 0$ tal que qualquer geodésica tangente à esfera geodésica $S_r(p)$ de raio $r < \varepsilon$ em um ponto q está fora da bola geodésica $B_r(p)$ em uma vizinhança de q .

Prova: Seja W uma vizinhança uniformemente normal de p . Restringindo convenientemente o intervalo de definição, podemos assumir que todas as geodésicas de W tem velocidade 1. Para cada (q, V) , $q \in W$ e $V \in T_p S$ com $\|V\| = 1$, considere a geodésica $\gamma(t, q, V)$. Defina

$$u(t, q, V) = \exp_p^{-1}(\gamma(t, q, V))$$

e

$$F(t, q, V) = \|u(t, q, V)\|^2,$$

ou seja, F mede o quadrado da distância entre $\gamma(t, q, V)$ e p .

Considere o conjunto

$$\mathcal{V} = \{(q, V) : q \in W, V \in T_p S \text{ e } \|V\| = 1\}$$

e defina uma função contínua $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(q, V) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(0, q, V).$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= 2 \left\langle u, \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= 2 \left\langle u, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\rangle + 2 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, p, V) &= V, \\ u''(t, p, V) &= 0, \end{aligned}$$

segue que

$$f(p, V) = 2 > 0$$

para todo $V \in T_p S$ com $\|V\| = 1$. Por continuidade, existe uma vizinhança $Z \subset W$ de p tal que $f(q, V) > 0$ para todo $q \in Z$ e para todo $V \in T_q S$ com $\|V\| = 1$. Seja agora $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(p) \subset Z$. Afirmamos que este ε satisfaz a afirmação do lema.

De fato, dado $r > 0$, seja $\gamma(t, q, V)$ uma geodésica tangente à esfera geodésica $S_r(p)$ no ponto $q = \gamma(0, q, V)$. Pelo Lema de Gauss (Lema 6.22),

$$\left\langle u(0, q, V), \frac{\partial u}{\partial t}(0, q, V) \right\rangle = 0$$

já que $\gamma(t, q, V)$ é tangente à esfera geodésica centrada em p e $u(0, q, V)$ é o vetor que liga a origem a $\exp_p^{-1}(\gamma(t, q, V))$. Em particular,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(0, q, V) = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} F(0, q, V) &= r^2, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(0, q, V) &> 0, \end{aligned}$$

segue que o ponto crítico $(0, q, V)$ de F é um mínimo estrito, de modo que os pontos de γ estão a uma distância de p maior que r para t suficientemente pequeno, o que conclui a demonstração. ■

6.34 Proposição. *Todo ponto de uma superfície regular possui uma vizinhança convexa.*

Prova: Seja p um ponto qualquer da superfície regular e $\varepsilon > 0$ como no lema. Escolha uma vizinhança uniformemente normal V com raio geodésico comum $\delta < \varepsilon/2$. Se $r < \delta$ é tal que $B_r(p) \subset V$, afirmamos que $B_r(p)$ é convexa.

De fato, sejam $q_1, q_2 \in B_r(p)$ e γ a única geodésica minimizante de comprimento menor que $2r < 2\delta < \varepsilon$ ligando q_1 a q_2 (veja a observação depois da Definição 6.29; em particular, o traço de γ está contido na bola $B_\varepsilon(p)$). Suponha por absurdo que a imagem de γ não está contida em $B_r(p)$. Então existe um ponto q do traço de γ onde a distância máxima $r < \varepsilon$ de p ao traço de γ é atingida. Logo γ é tangente à esfera geodésica $S_r(p)$ em q e os pontos de γ numa vizinhança de q estão em $\overline{B}_r(p)$, contradizendo o lema. ■

6.6 Função Distância

6.35 Definição. Seja S uma superfície regular conexa. Dados $p, q \in S$, a **distância** entre p e q é definida por

$$\text{dist}(p, q) = \inf \{ \ell(\alpha) : \alpha \text{ é uma curva diferenciável por partes ligando } p \text{ e } q \}.$$

□

Por definição, se existe uma geodésica minimizante ligando p e q , então $\text{dist}(p, q) = \ell(\gamma)$.

6.36 Proposição. *Seja S uma superfície regular conexa. Com a função distância definida acima, S é um espaço métrico.*

Além disso, a topologia de S como espaço métrico coincide com a topologia de S como subespaço métrico de \mathbb{R}^3 .

Prova: De fato, a função distância satisfaz as três propriedades da função distância de um espaço métrico:

(i) Simetria:

$$\text{dist}(p, q) = \text{dist}(q, p).$$

(ii) Desigualdade triangular:

$$\text{dist}(p, q) \leq \text{dist}(p, r) + \text{dist}(r, q).$$

(iii) Positividade:

$$\text{dist}(p, q) \geq 0$$

e

$$\text{dist}(p, q) = 0 \quad \text{se e somente se } p = q.$$

Todas as propriedades seguem imediatamente da definição (a desigualdade triangular segue da definição de ínfimo) exceto a afirmação que $\text{dist}(p, q) = 0$ implica $p = q$. Suponha o contrário e considere uma bola normal $B_\varepsilon(p)$ que não contém q . Como $\text{dist}(p, q) = 0$, existe uma curva α ligando p a q com comprimento menor que ε , contradizendo a Proposição 6.26.

Como observado antes, se existe uma geodésica minimizante γ ligando p e q (o que nem sempre acontece globalmente, mas sempre acontece localmente) então

$$\text{dist}(p, q) = \ell(\gamma).$$

Em particular, dado $p \in S$, se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, a bola geodésica $B_\varepsilon(p)$ de raio ε coincide com a bola métrica de centro em p e raio ε definida pela função distância:

$$B(p; \varepsilon) = \{q \in S : \text{dist}(p, q) < \varepsilon\}.$$

Logo, bolas geodésicas contem bolas métricas e vice-versa, portanto as topologias são as mesmas. ■

De agora em diante, variedades riemannianas serão vistas também como espaços métricos com a noção de distância definida acima.

6.7 Superfícies Completas e Teorema de Hopf-Rinow

6.37 Definição. Seja S uma superfície regular. Dizemos que S é **geodesicamente completa** se para todo $p \in S$ as geodésicas radiais $\gamma(t)$ partindo de p estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. □

Equivalentemente, S é geodesicamente completa se para todo $p \in S$ a aplicação exponencial está definida em todo o espaço tangente $T_p S$.

Lembramos que um espaço métrico é completo se toda sequência de Cauchy é convergente.

6.38 Lema. *Seja S uma superfície regular conexa. Se \exp_p está definida em todo $T_p S$, então qualquer ponto $q \in S$ pode ser ligado a p por um segmento geodésico γ tal que*

$$\ell(\gamma) = \text{dist}(p, q).$$

Prova: Seja $r = \text{dist}(p, q)$. Tome uma bola geodésica fechada $\overline{B}_\delta(p)$. Se $q \in \overline{B}_\delta(p)$, então existe uma geodésica radial minimizante ligando p a q e não há nada a provar. Se $q \notin \overline{B}_\delta(p)$, lembrando que a função distância é contínua e conjuntos fechados limitados são compactos em espaços métricos, seja $x_0 \in S_\delta(p) = \partial \overline{B}_\delta(p)$ onde a função

$$f(x) = \text{dist}(x, q)$$

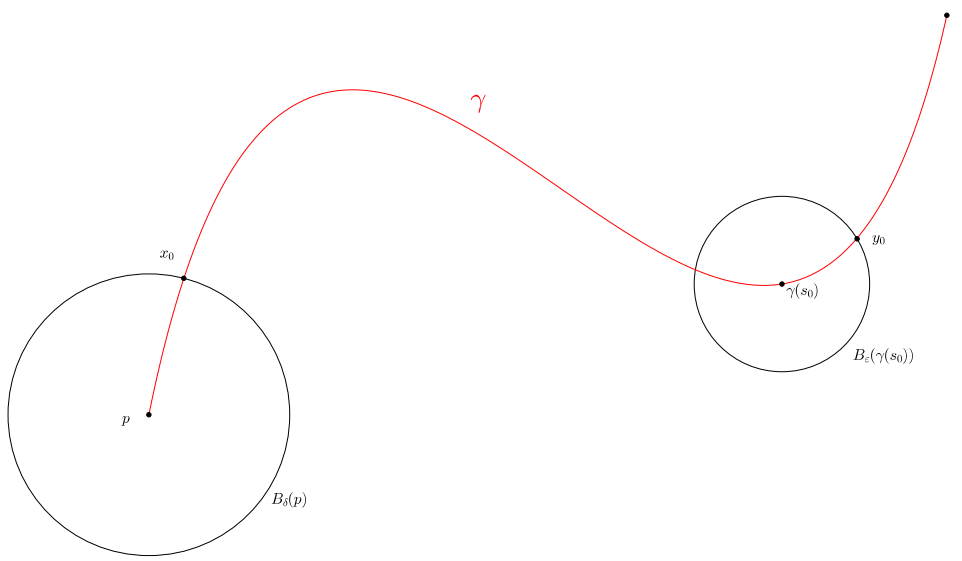
atinge um mínimo em $S_\delta(p)$. Seja $\gamma(s) = \exp_p(sV)$ a geodésica radial unitária ligando p a x_0 . Por hipótese, γ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Para provar o lema, basta mostrar que

$$\gamma(r) = q.$$

Para provar isso, considere o conjunto não vazio (pois $0 \in A$)

$$A = \{s \in [0, r] : \text{dist}(\gamma(s), q) = r - s\}.$$

A é fechado em $[0, r]$ pela continuidade da função distância e de γ . Se provarmos que para todo $s_0 \in A$ vale $s_0 + \varepsilon \in A$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, isso implicará que A também é aberto no conjunto conexo $[0, r]$ e portanto $A = [0, r]$; em particular, $r \in A$, o que implica $\text{dist}(\gamma(r), q) = r - r = 0$, o que é equivalente a $\gamma(r) = q$.



Seja então $s_0 \in A$ e considere uma bola geodésica fechada $\overline{B}_\varepsilon(\gamma(s_0))$. Temos

$$r - s_0 = \text{dist}(\gamma(s_0), q) = \varepsilon + \min_{y \in \overline{B}_\varepsilon(\gamma(s_0))} \text{dist}(y, q) = \varepsilon + \text{dist}(y_0, q)$$

onde $y_0 \in S_\varepsilon(\gamma(s_0)) = \partial \overline{B}_\varepsilon(\gamma(s_0))$ é o ponto onde a função

$$g(y) = \text{dist}(y, q)$$

atinge um mínimo em $S_\varepsilon(\gamma(s_0))$. Para provar a afirmação, basta então mostrar que $y_0 = \gamma(s_0 + \varepsilon)$, pois neste caso

$$r - s_0 = \varepsilon + \text{dist}(\gamma(s_0 + \varepsilon), q),$$

donde

$$\text{dist}(\gamma(s_0 + \varepsilon), q) = r - (s_0 + \varepsilon).$$

De fato, temos

$$\text{dist}(p, y_0) \geq \text{dist}(p, q) - \text{dist}(q, y_0) = r - [r - (s_0 + \varepsilon)] = s_0 + \varepsilon.$$

Por outro lado, a curva quebrada que liga p a y_0 constituída do segmento geodésico γ que vai de p a $\gamma(s_0)$ e do raio geodésico que vai de $\gamma(s_0)$ a y_0 tem comprimento $s_0 + \varepsilon$. Portanto,

$$\text{dist}(p, y_0) = s_0 + \varepsilon$$

e esta curva quebrada é uma geodésica (logo, não é quebrada), donde $y_0 = \gamma(s_0 + \varepsilon)$, o que termina a demonstração. ■

6.39 Teorema (Teorema de Hopf-Rinow). *Uma superfície regular conexa é geodesicamente completa se e somente se ela é completa como um espaço métrico.*

Prova:

1. S superfície regular completa como espaço métrico $\implies S$ superfície regular geodesicamente completa.

Suponha por absurdo que exista uma geodésica unitária $\gamma : [0, a) \rightarrow S$ que não se estende a um intervalo $[0, a + \varepsilon)$ para nenhum $\varepsilon > 0$. Seja $\{t_i\}$ uma sequência crescente tal que $t_i \rightarrow a$; em particular, $\{t_i\}$ é uma sequência de Cauchy. Seja $q_i = \gamma(t_i)$. Como γ é parametrizada por comprimento de arco, segue que

$$\text{dist}(q_i, q_j) \leq |t_i - t_j|$$

e $\{q_i\}$ é uma sequência de Cauchy em S . Logo $q_i \rightarrow q \in S$. Seja V uma vizinhança uniformemente normal de q e $\delta > 0$ tal que V está contido em qualquer bola geodésica de raio δ centrada em um ponto de V . Para j suficientemente grande temos $q_j \in V$ e $t_j > a - \delta$. O fato que $B_\delta(q_j)$ é uma bola geodésica implica que toda geodésica partindo de q_j existe por um intervalo de tempo pelo menos igual a δ . Em particular isso vale para a geodésica σ satisfazendo $\sigma(0) = q_j$ e $\sigma'(0) = \gamma'(t_j)$. Por unicidade de geodésica, esta é uma reparametrização de γ , isto é, $\sigma(t) = \gamma(t + t_j)$, logo $\tilde{\gamma}(t) = \sigma(t - t_j)$ é uma extensão de γ além de a , contradizendo a hipótese inicial.

2. S superfície regular geodesicamente completa $\implies S$ espaço métrico completo.

Para provar a recíproca, demonstraremos um resultado mais forte:

Se existe $p \in S$ tal que \exp_p está definida em todo $T_p S$, então S é um espaço métrico completo.

Seja $\{q_i\} \subset S$ uma sequência de Cauchy. Para cada i , seja $\gamma_i(s) = \exp_p(sV_i)$ a geodésica radial unitária que liga p a q_i , e seja

$$d_i = \text{dist}(p, q_i),$$

de modo que pelo lema

$$q_i = \exp_p(d_i V_i).$$

Além disso, $\{d_i\}$ é uma sequência de Cauchy em \mathbb{R} , pois

$$|d_i - d_j| = |\text{dist}(p, q_i) - \text{dist}(p, q_j)| \leq \text{dist}(q_i, q_j).$$

Como sequências de Cauchy são limitadas, $\{d_i\}$ é limitada; além disso $\|V_i\| = 1$ para todo i , logo $\{d_i V_i\}$ é limitada em $T_p S$. Portanto, uma subsequência $\{d_{i_k} V_{i_k}\}$ converge para $V \in T_p S$. Por continuidade da aplicação exponencial,

$$q_{i_k} = \exp_p(d_{i_k} V_{i_k}) \rightarrow \exp_p(V).$$

Como a sequência original $\{q_i\}$ é de Cauchy, ela converge para o mesmo ponto para o qual sua subsequência converge. ■

Em particular, o conceito de superfície regular geodesicamente completa é equivalente ao conceito de superfície regular completa como espaço métrico para variedades conexas e para estas podemos nos referir simplesmente a uma *superfície regular completa*, implicando ambos os conceitos.

6.40 Corolário. *Toda superfície regular compacta é geodesicamente completa.*

Prova: Pois todo espaço métrico compacto é completo. ■

6.41 Corolário. *Uma superfície regular fechada em \mathbb{R}^3 é geodesicamente completa.*

Prova: Pois todo subconjunto fechado de um espaço métrico é completo. ■

6.42 Corolário. *Os conjuntos fechados e limitados de uma superfície regular geodesicamente completa são compactos.*

Prova: Este resultado vale em espaços métricos completos. ■

6.43 Corolário. *Se S é uma superfície regular conexa e existe $p \in S$ tal que \exp_p está definida em todo $T_p S$ então S é geodesicamente completa.*

Prova: Segue da demonstração do teorema de Hopf-Rinow. ■

6.44 Corolário. *Uma superfície regular conexa S é completa se e somente se quaisquer dois pontos $p, q \in S$ podem ser ligados por um segmento geodésico γ tal que*

$$\ell(\gamma) = \text{dist}(p, q).$$

Prova: Segue do Lema 6.38 e da demonstração do teorema de Hopf-Rinow. ■

Capítulo 7

Superfícies k -dimensionais em \mathbb{R}^n

Da mesma forma que superfícies bidimensionais regulares são deformações suaves em \mathbb{R}^3 de abertos do plano \mathbb{R}^2 , superfícies k -dimensionais em \mathbb{R}^n são deformações suaves em \mathbb{R}^n de abertos do plano \mathbb{R}^k . As definições básicas são assim generalizações diretas daquelas que vimos no caso de superfícies bidimensionais.

7.1 Superfícies Parametrizadas e Superfícies Regulares

7.1.1 Definição

No que se segue, “diferenciável” sempre significará “diferenciável de classe C^∞ ”, e será sinônimo de “suave”.

7.1 Definição. Uma **superfície parametrizada** de dimensão k imersa em \mathbb{R}^n é uma aplicação diferenciável $\phi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k \leq n$, onde $U \subset \mathbb{R}^k$ é um aberto conexo, tal que a derivada $d\phi_p : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva para todo $p \in U$. \square

Muitas vezes também nos referimos à imagem $\phi(U)$ como sendo a superfície parametrizada. ϕ ser diferenciável é equivalente a podermos escrever

$$\phi(x^1, \dots, x^k) = (y^1(x^1, \dots, x^k), \dots, y^n(x^1, \dots, x^k))$$

com as funções coordenadas $y^1, \dots, y^n : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , isto é, elas possuem derivadas parciais em relação às variáveis x^1, \dots, x^k de todas as ordens. A condição da aplicação diferencial $d\phi_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ser injetiva é equivalente a exigir que a matriz jacobiana (que denotaremos também por $d\phi_p$, usando a identificação de morfismos lineares e matrizes, uma vez fixada as bases, que no nosso caso são as bases canônicas de \mathbb{R}^k e \mathbb{R}^n)

$$d\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^k}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^k}(p) \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

tenha posto máximo, isto é, igual a k . Em outras palavras, os vetores

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x^1}(p) &= d\phi_p(e_1) = \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial y^n}{\partial x^1}(p) \right), \\ &\vdots \\ \frac{\partial \phi}{\partial x^k}(p) &= d\phi_p(e_k) = \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^k}(p), \dots, \frac{\partial y^n}{\partial x^k}(p) \right), \end{aligned}$$

são LI. Ela é a condição de regularidade que confere “suavidade” à superfície. De fato, fixado $(u_0, v_0) \in U$, o vetor

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i}(p) = \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^i}(p), \dots, \frac{\partial y^n}{\partial x^i}(p) \right)$$

é exatamente o *vetor tangente* à **curva coordenada**

$$t \longrightarrow \phi(x^1, \dots, x^{i-1}, t, x^{i+1}, \dots, x^k)$$

no ponto p .

Uma noção mais restrita que a de superfície parametrizada é a de *superfície regular*:

7.2 Definição. Uma **superfície regular** de dimensão k mergulhada em \mathbb{R}^n é um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$, $k \leq n$, tal que para todo $p \in M$ existem um aberto $U \subset \mathbb{R}^k$, uma vizinhança W de p em \mathbb{R}^n e uma aplicação diferenciável $\varphi : U \longrightarrow V$, onde $V = W \cap M$, tal que

- (i) φ é um homeomorfismo;
- (ii) a derivada $d\varphi_x : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva para todo $x \in U$.

A aplicação φ é chamada uma **carta** ou **sistema de coordenadas local**, a vizinhança V é chamada uma **vizinhança coordenada** e $(x^1, \dots, x^k) \in U$ são chamadas **coordenadas locais**.

Um conjunto de parametrizações cujas imagens cobrem M é chamado um **atlas**. \square

Dizer que $\varphi : U \longrightarrow V$ é um *homeomorfismo* significa dizer que φ é uma bijeção contínua e que φ^{-1} também é contínua, isto é, $\varphi^{-1} : V \longrightarrow U$ é contínua. Enquanto que uma superfície parametrizada é uma aplicação e frequentemente, por abuso de linguagem, identificamos sua imagem com a própria superfície, uma superfície regular é um subconjunto de \mathbb{R}^n . Mas, além desta diferença semântica, a principal diferença entre os dois conceitos é que uma superfície parametrizada pode ter autointerseções, enquanto que o requerimento que φ seja um homeomorfismo impede isso de ocorrer em superfícies regulares.

7.1.2 Exemplos

7.3 Exemplo (Plano k -dimensional). $\varphi : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\varphi(x^1, \dots, x^k) = p_0 + x^1 V_1 + \dots + x^k V_k$$

é uma parametrização de um **plano** de dimensão k se os vetores $V_1, \dots, V_k \in \mathbb{R}^n$ forem LI. As curvas coordenadas são retas paralelas aos vetores V_i . Além disso, $\varphi(\mathbb{R}^k)$ também é uma superfície regular com um atlas que tem φ como a sua única carta. \square

7.4 Exemplo (Gráficos de Funções). Se $f : U \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função, então $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ definida por

$$\varphi(x) = (x, f(x)) = (x^1, \dots, x^k, f(x))$$

é uma superfície parametrizada de dimensão k em \mathbb{R}^{k+1} (também chamada uma **superfície de codimensão 1** ou simplesmente uma **hiperfície**), pois

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}(u, v) &= \left(1, \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial x^1}(x) \right), \\ &\vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}(u, v) &= \left(0, \dots, 1, \frac{\partial f}{\partial x^k}(x) \right), \end{aligned}$$

são LI. Além disso, $f(U)$ também é uma superfície regular com a parametrização φ constituindo um atlas, pois sua inversa é simplesmente a projeção nas k primeiras coordenadas.

Mais geralmente, se $f : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ é uma função vetorial, então $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{k+l}$ definida por

$$\varphi(x) = (x, f(x)) = (x^1, \dots, x^k, f^1(x), \dots, f^l(x))$$

é uma superfície parametrizada de dimensão k em \mathbb{R}^n , $n = k + l$. \square

7.5 Exemplo (Esfera). Considere a **esfera** unitária centrada na origem

$$\mathbb{M}^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1 \right\}.$$

A esfera é uma superfície regular mas não é uma superfície parametrizada, isto é, não existe uma parametrização que cobre a esfera toda, pois ela é compacta. A seguir consideraremos dois atlas para a esfera.

(1) Atlas de gráficos de hemisférios:

Para cada $i = 1, \dots, n+1$, considere os dois hemisférios

$$\begin{aligned} U_i^+ &= \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{M}^n : x^i > 0\}, \\ U_i^- &= \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{M}^n : x^i < 0\}. \end{aligned}$$

Se

$$D^n = \left\{ (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 < 1 \right\}$$

denota o disco unitário, as aplicações $\varphi_i^\pm : D^n \rightarrow U_i^\pm$ definidas por

$$(\varphi_i^\pm)(x^1, \dots, x^n) = \left(x^1, \dots, x^i, \pm \left[1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} (x^k)^2 \right]^{1/2}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1} \right),$$

são parametrizações. De fato, elas são claramente suaves e suas inversas são as projeções (portanto contínuas)

$$(\varphi_i^\pm)^{-1}(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1})$$

de modo que elas são homeomorfismos. Observe que este atlas tem $2(n+1)$ cartas.

(2) Atlas de projeções estereográficas:

Na projeção estereográfica a partir do polo norte $N = (0, \dots, 0, 1)$, qualquer reta ℓ passando por N que não seja tangente à esfera intercepta a esfera em um único ponto

$$p = (x^1, \dots, x^n, x^{n+1})$$

e o hiperplano $x^{n+1} = 0$ em um único ponto

$$\tilde{x} = (x^1, \dots, x^n, 0).$$

Identificando este hiperplano com \mathbb{R}^n através da identificação natural

$$(x^1, \dots, x^n, 0) \leftrightarrow (x^1, \dots, x^n) =: x$$

podemos obter uma parametrização $\varphi_N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ da seguinte maneira: a reta ℓ pode ser descrita pela equação paramétrica

$$N + t(\tilde{x} - N) = (tx^1, \dots, tx^n, 1 - t)$$

e intercepta a esfera quando

$$\|(tx^1, \dots, tx^n, 1 - t)\| = 1,$$

isto é

$$t^2 \|x\|^2 + (1 - t)^2 = 1 \Rightarrow t^2 (\|x\| + 1) - 2t = 0.$$

Esta equação tem duas soluções: $t = 0$, correspondente ao polo norte, e

$$t = \frac{2}{1 + \|x\|^2},$$

correspondente ao ponto p . Logo,

$$\begin{aligned}\varphi_N(x) &= \left(\frac{2x^1}{1 + \|x\|^2}, \dots, \frac{2x^n}{1 + \|x\|^2}, \frac{\|x\|^2 - 1}{1 + \|x\|^2} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \|x\|^2} (2x, \|x\|^2 - 1),\end{aligned}$$

que é uma aplicação suave.

Para provar que ela é um homeomorfismo, obtemos a sua inversa: a reta ℓ também pode ser descrita pela equação

$$N + t(p - N) = (tx^1, \dots, tx^n, 1 + t(x^{n+1} - 1))$$

e intercepta o plano $x^{n+1} = 0$ exatamente quando

$$t = \frac{1}{1 - x^{n+1}},$$

de modo que a inversa $\varphi_N^{-1} : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é definida por

$$\varphi_N^{-1}(p) = \left(\frac{x^1}{1 - x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1 - x^{n+1}} \right) = \frac{x}{1 - x^{n+1}}.$$

Esta aplicação é claramente contínua, já que $x^{n+1} < 1$.

De maneira completamente análoga, fazendo a projeção estereográfica a partir do polo sul $S = -N$, obtemos uma segunda parametrização $\varphi_M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ dada por

$$\begin{aligned}\varphi_M(y) &= \left(\frac{2y^1}{1 + \|y\|^2}, \dots, \frac{2y^n}{1 + \|y\|^2}, \frac{1 - \|y\|^2}{1 + \|y\|^2} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \|y\|^2} (2y, 1 - \|y\|^2),\end{aligned}$$

cujas inversa é

$$\varphi_M^{-1}(y) = \left(\frac{y^1}{1 + y^{n+1}}, \dots, \frac{y^n}{1 + y^{n+1}} \right) = \frac{y}{1 + y^{n+1}}.$$

Como $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \cup \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$, estas duas parametrizações constituem um atlas para a esfera. \square

7.1.3 Superfícies Parametrizadas são Localmente Superfícies Regulares

7.6 Lema (Teorema da Função Inversa). *Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável.*

Se $dF_{p_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo para algum $p_0 \in U$, então existem abertos $V \subset U$ contendo p_0 e $W \subset \mathbb{R}^n$ contendo $F(p_0)$ tais que $F|_V : V \rightarrow W$ é um difeomorfismo suave.

$F : V \rightarrow W$ ser um difeomorfismo suave significa dizer que F é um homeomorfismo e ambas F, F^{-1} são aplicações diferenciais de classe C^∞ . O Teorema da Função Inversa diz que se a derivada de uma aplicação é um isomorfismo em um certo ponto (equivalentemente, sua matriz jacobiana naquele ponto é invertível inversa, isto é, possui determinante não nulo), então a aplicação é um difeomorfismo na vizinhança daquele ponto; em particular, se isso ocorre para todo ponto em U , então F é um *difeomorfismo local*.

7.7 Proposição. *Seja $\phi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma superfície parametrizada.*

Para todo $p_0 \in U$ existe um aberto $U_0 \subset U$ contendo p_0 tal que $\phi|_{U_0}$ é injetiva.

Mais que isso, $\phi(U_0)$ é uma superfície regular.

Prova: Seja

$$\phi(x^1, \dots, x^k) = (y^1(x^1, \dots, x^k), \dots, y^n(x^1, \dots, x^k)).$$

Como a matriz jacobiana $d\phi_{p_0}$ tem posto k , podemos assumir sem perda de generalidade que o menor

$$\frac{\partial(y^1, \dots, y^n)}{\partial(x^1, \dots, x^k)}(p_0) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^k}(p_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^k}{\partial x^1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial y^k}{\partial x^k}(p_0) \end{bmatrix} \neq 0$$

(caso contrário, trocamos as coordenadas de posição na definição da função F a seguir). Defina uma função $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ por

$$F(x^1, \dots, x^k) = (y^1(x^1, \dots, x^k), \dots, y^k(x^1, \dots, x^k)).$$

Segue do Teorema da Função Inversa que existe um aberto $U_0 \subset U$ contendo p_0 tal que $F|_{U_0}$ é injetiva. Consequentemente, isso vale também para $\phi|_{U_0}$.

Para mostrar que $\phi(U_0)$ é uma superfície regular, precisamos provar que $\phi|_{U_0}$ é um homeomorfismo. Estenda ϕ a uma aplicação $\tilde{\phi} : U \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definindo

$$\tilde{\phi}(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) = (y^1, \dots, y^k, y^{k+1} + x^{k+1}, \dots, y^n + x^n).$$

Como

$$\det d\tilde{\phi} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^k}(p_0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^k}{\partial x^1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial y^k}{\partial x^k}(p_0) & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial y^{k+1}}{\partial x^1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial y^{k+1}}{\partial x^k}(p_0) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^k}(p_0) & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial(y^1, \dots, y^n)}{\partial(x^1, \dots, x^k)}(p_0) \neq 0,$$

segue do Teorema da Função Inversa que $\tilde{\phi}$ é um difeomorfismo suave em uma vizinhança possivelmente menor $U_1 \subset U_0$. Em particular, tomando $x^{k+1} = \dots = x^n = 0$, onde $\tilde{\phi}$ é essencialmente ϕ , obtemos $\phi(U_1)$ homeomorfo a U_1 . ■

Assim, superfícies parametrizadas são localmente superfícies regulares; elas não são globalmente, pois podem ocorrer autointerseções.

7.2 Mudança de Coordenadas

Vamos estender as definições e resultados do Cálculo Diferencial para superfícies, isto é, vamos *fazer* cálculo diferencial em superfícies. Nesta seção vamos definir o que significa uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ser diferenciável em um ponto p de uma superfície regular $M \subset \mathbb{R}^3$. Um modo natural de fazer isso é tomar uma vizinhança coordenada $V \subset \mathbb{R}^2$ de p , parametrizada por uma aplicação $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V$ e verificar se a composta $f \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável. Como um mesmo ponto pode pertencer a várias vizinhanças coordenadas, é necessário que esta definição não dependa da escolha de um sistema de coordenadas.

7.8 Lema (Regra da Cadeia). *Sejam $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $G : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ aplicações diferenciáveis, com $F(U) \subset V$.*

A composta $G \circ F$ é diferenciável e

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p.$$

7.9 Proposição. *Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície regular k -dimensional e $p \in M$. Sejam*

$$\varphi_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow V_1 \subset M,$$

$$\varphi_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow V_2 \subset M$$

dois sistemas de coordenadas locais para p .

A mudança de coordenadas

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \rightarrow \varphi_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

é um difeomorfismo suave.

Prova: Claramente, $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ é um homeomorfismo, composta de homeomorfismos. Escreva

$$\varphi_2(x^1, \dots, x^k) = (y^1(x^1, \dots, x^k), \dots, y^n(x^1, \dots, x^k)).$$

Como $d\varphi_2$ é injetiva em todo ponto, podemos assumir sem perda de generalidade que

$$\frac{\partial (y^1, \dots, y^n)}{\partial (x^1, \dots, x^k)} \neq 0.$$

Estenda φ_2 a uma aplicação $\tilde{\varphi}_2 : U \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definindo

$$\tilde{\varphi}_2(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) = (y^1, \dots, y^k, y^{k+1} + x^{k+1}, \dots, y^n + x^n).$$

Como as função coordenadas y^1, \dots, y^n são diferenciáveis, $\tilde{\varphi}_2$ também é. Temos, como na demonstração da Proposição 7.7,

$$\det d\tilde{\varphi}_2 = \frac{\partial (y^1, \dots, y^n)}{\partial (x^1, \dots, x^k)} \neq 0,$$

logo segue do Teorema da Função Inversa que $\tilde{\varphi}_2$ é um difeomorfismo. Em particular $\tilde{\varphi}_2^{-1}$ é uma aplicação diferenciável. Pela Regra da Cadeia,

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \tilde{\varphi}_2^{-1} \circ \varphi_1$$

é diferenciável. Raciocinando de maneira análoga concluímos que

$$\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 = (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)^{-1}$$

também é diferenciável. Portanto, $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ é um difeomorfismo suave. ■

7.3 Funções Diferenciáveis em Superfícies

7.10 Definição. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície regular de dimensão k .

Dizemos que função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é **diferenciável** em um ponto $p \in M$ se para alguma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow V$ de uma vizinhança coordenada V de p a composta

$$f \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$$

é diferenciável em $\varphi^{-1}(p)$.

Dizemos que f é diferenciável se f for diferenciável em todo ponto de M . □

Segue da Proposição 7.9 que a diferenciabilidade de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ em um ponto da superfície M independe da parametrização escolhida: se $\varphi_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow V_1 \subset M$, $\varphi_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow V_2 \subset M$ são duas parametrizações para vizinhanças de p e $V = V_1 \cap V_2$, então $f \circ \varphi_1$ é diferenciável em $\varphi_1^{-1}(p)$ se e somente se $f \circ \varphi_2$ é diferenciável em $\varphi_2^{-1}(p)$, pois

$$\begin{aligned} f \circ \varphi_1 &= f \circ \varphi_2 \circ (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1), \\ f \circ \varphi_2 &= f \circ \varphi_1 \circ (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2), \end{aligned}$$

e $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1, \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ são difeomorfismos.

7.11 Exemplo. A restrição de uma função diferenciável em \mathbb{R}^n a uma superfície é uma funções diferenciável nesta, isto é, se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície regular e $f : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, W um aberto contendo M , é uma função diferenciável, então $f|_M$ é uma função diferenciável. \square

7.12 Exemplo (Função Altura). Dada uma superfície regular $M \subset \mathbb{R}^n$, a **função altura** $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ relativa a uma direção fixada $v \in \mathbb{R}^n$ definida por

$$f(p) = \langle p, v \rangle$$

é uma função diferenciável. \square

7.13 Exemplo (Função Quadrado da Distância). Dada uma superfície regular $M \subset \mathbb{R}^n$, a **função quadrado da distância** $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ relativa a um ponto fixado $p_0 \in \mathbb{R}^n$ definida por

$$f(p) = \|p - p_0\|^2$$

é uma função diferenciável. \square

A noção de diferenciabilidade é estendida a aplicações entre superfícies, mesmo de dimensões diferentes:

7.14 Definição. Sejam $M, N \subset \mathbb{R}^n$ superfícies regulares. Dizemos que aplicação $F : M \rightarrow N$ é **diferenciável** em um ponto $p \in M$ se para algumas parametrizações

$$\begin{aligned} \varphi : U \subset \mathbb{R}^k &\rightarrow V, \\ \psi : W \subset \mathbb{R}^l &\rightarrow Z \end{aligned}$$

de uma vizinhança coordenada V de p e de uma vizinhança coordenada Z de $F(p)$ a composta

$$\psi^{-1} \circ F \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow W \subset \mathbb{R}^l$$

é diferenciável em $\varphi^{-1}(p)$.

Dizemos que F é diferenciável se F é diferenciável em todo ponto de M . \square

7.4 Espaço Tangente e Derivada

Continuando o processo iniciado na seção anterior de estender o cálculo diferencial a superfícies, nesta seção definimos a derivada de uma aplicação diferenciável entre superfícies. Da mesma forma que a derivada dF_p de uma aplicação diferenciável $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $p \in U$, leva vetores de \mathbb{R}^m em vetores de \mathbb{R}^n , a derivada de uma aplicação diferenciável entre superfícies levará vetores em vetores; no caso de superfícies, os únicos vetores intrínsecos a elas são os vetores tangentes.

7.4.1 Espaço Tangente

7.15 Definição. Seja $\phi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma superfície parametrizada.

Uma curva suave $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma **curva da superfície** se $\alpha(I) \subset \phi(U)$.

Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície regular, uma curva da superfície é simplesmente uma curva suave $\alpha : I \rightarrow M$. \square

7.16 Definição. Seja $\phi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma superfície parametrizada.

Dizemos que um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é um **vetor tangente** à superfície em p se existe uma curva da superfície $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que para algum $t_0 \in I$ temos

$$\begin{aligned}\alpha(t_0) &= \phi(p), \\ \alpha'(t_0) &= v.\end{aligned}$$

Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície regular, $v \in \mathbb{R}^n$ é um vetor tangente à superfície em um ponto $p \in M$ se existe uma curva da superfície $\alpha : I \rightarrow M$ tal que para algum $t_0 \in I$ temos

$$\begin{aligned}\alpha(t_0) &= p, \\ \alpha'(t_0) &= v.\end{aligned}$$

\square

7.17 Proposição. Seja $\phi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma superfície parametrizada.

O conjunto dos vetores tangentes à superfície em p é $d\phi_p(\mathbb{R}^k)$.

Em particular, o conjunto dos vetores tangentes à superfície em um ponto é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n .

Prova: Se $v = d\phi_p w$, considere a curva (segmento de reta) $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ definida por

$$\beta(t) = p + tw,$$

onde $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno para que tenhamos $\beta((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset U$. Se $\alpha = \phi \circ \beta$, então pela regra da cadeia

$$\alpha'(0) = d\phi_{\beta(0)}\beta'(0) = d\phi_p w = v.$$

Reciprocamente, seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva da superfície com $\alpha(t_0) = \phi(p)$ e $\alpha'(t_0) = v$. Considere $\beta = \phi^{-1} \circ \alpha$. Pela demonstração da Proposição 7.9, β é uma curva diferenciável. Temos

$$\alpha = \phi \circ (\phi^{-1} \circ \alpha) = \phi \circ \beta$$

de modo que, pela regra da cadeia,

$$v = \alpha'(t_0) = d\phi_p \beta'(t_0).$$

■

7.18 Definição. Seja $\phi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma superfície parametrizada.

O conjunto dos vetores tangentes à superfície em p é chamado o **espaço tangente** à superfície em p e será denotado por $T\phi_p$.

Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície regular, o conjunto dos vetores tangentes a M em p é chamado o espaço tangente a M em p e denotado TM_p . \square

Note que no caso de superfícies regulares, como não há autointerseções, existe um único plano tangente TM_p .

7.4.2 Derivada de uma Aplicação Diferenciável entre Superfícies Regulares

De posse do conceito de espaço tangente, podemos agora definir a derivada de uma aplicação diferenciável entre superfícies regulares.

7.19 Definição. Sejam M, N superfícies regulares e $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável.

Dado $p \in M$, definimos a **derivada**

$$dF_p : TM_p \rightarrow TN_{F(p)}$$

da seguinte forma: dado $v \in T_pM$, se $\alpha : I \rightarrow M$ é uma curva suave tal que $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = v$, então

$$dF_p(v) = (F \circ \alpha)'(t_0).$$

□

7.20 Proposição. A derivada está bem definida e é linear.

Prova: Para provar que dF_p está bem definida, devemos mostrar que a definição de $dF_p(v)$ independe da curva α escolhida. Sejam

$$\begin{aligned} \varphi : U \subset \mathbb{R}^k &\rightarrow V \subset M, \\ \psi : W \subset \mathbb{R}^l &\rightarrow Z \subset N \end{aligned}$$

parametrizações de vizinhanças coordenadas V de p e Z de $F(p)$ respectivamente, de modo que

$$\psi^{-1} \circ F \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow Z \subset \mathbb{R}^l$$

é uma aplicação diferenciável por definição. Seja $\alpha : I \rightarrow M$ uma curva parametrizada regular tal que $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = v$. Como vimos na demonstração da Proposição 7.17, o vetor

$$w = (\varphi^{-1} \circ \alpha)'(t_0)$$

é caracterizado por

$$v = d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}w$$

e independe da curva α . Considerando o isomorfismo linear $L : \mathbb{R}^k \rightarrow TM_p$ definido por

$$L = d\varphi_{\varphi^{-1}(p)},$$

ou seja, L é a restrição de $d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}$ ao seu conjunto imagem, podemos escrever

$$w = L^{-1}v.$$

Temos

$$(F \circ \alpha)(t) = \psi \circ (\psi^{-1} \circ F \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \alpha)(t),$$

Pela regra da cadeia,

$$(F \circ \alpha)'(t) = d\psi_{\psi^{-1}[F(\alpha(t))]}d(\psi^{-1} \circ F \circ \varphi)_{\varphi^{-1}[\alpha(t)]}(\varphi^{-1} \circ \alpha)'(t),$$

de modo que, fazendo $t = t_0$, obtemos

$$\begin{aligned} (F \circ \alpha)'(t_0) &= d\psi_{\psi^{-1}[F(p)]}d(\psi^{-1} \circ F \circ \varphi)_{\varphi^{-1}[p]}(\varphi^{-1} \circ \alpha)'(t_0) \\ &= d\psi_{\psi^{-1}[F(p)]}d(\psi^{-1} \circ F \circ \varphi)_{\varphi^{-1}[p]}w \\ &= d\psi_{\psi^{-1}[F(p)]}d(\psi^{-1} \circ F \circ \varphi)_{\varphi^{-1}[p]}L^{-1}v. \end{aligned}$$

Esta expressão mostra que $(F \circ \alpha)'(t_0)$ independe da curva α . Além disso, como

$$T = d(\varphi_2)_{\varphi_2^{-1}[F(p)]} d(\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1)_{\varphi_1^{-1}[p]} L^{-1}$$

é uma aplicação linear, pois é a composta de aplicações lineares, e

$$dF_p(v) = (F \circ \alpha)'(t_0) = Tv$$

segue que dF_p é uma aplicação linear. ■

Podemos agora estender os resultados do cálculo diferencial em \mathbb{R}^n ao cálculo diferencial em superfícies. A demonstração dos resultados a seguir fica como exercício.

7.21 Proposição (Regra da Cadeia). *Sejam M, N, P superfícies regulares e*

$$F : M \longrightarrow N,$$

$$G : N \longrightarrow P$$

aplicações diferenciáveis, com $F(U) \subset V$.

A composta $G \circ F$ é diferenciável e

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p.$$

7.22 Proposição (Teorema da Função Inversa). *Sejam M, N superfícies regulares e $F : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável.*

Se dF_p é um isomorfismo, então F é um difeomorfismo local em p .

7.23 Corolário. *As parametrizações $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \varphi(U) \subset M$ de uma superfície regular $M \subset \mathbb{R}^n$ são difeomorfismos.*

7.24 Exemplo (Diferencial da Função Altura). Se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função altura

$$f(p) = \langle p, w \rangle,$$

dado um vetor $v \in TM_p$, seja $\alpha : I \longrightarrow M_1$ uma curva parametrizada regular tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Como

$$f(\alpha(t)) = \langle \alpha(t), w \rangle,$$

segue que

$$df_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \langle \alpha(t), w \rangle \right|_{t=0} = \langle \alpha'(0), w \rangle = \langle v, w \rangle.$$

□

Referências Bibliográficas

- [Borceux] Francis BORCEUX, *A Differential Approach to Geometry*, Geometric Trilogy 3, Springer, 2014.
- [Carmo] Manfredo Perdigão do CARMO, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, 1976.
- [Costa1] Celso José da COSTA, *Imersões mínimas completas em \mathbb{R}^3 de gênero um e curvatura total finita*, Tese de Doutorado, IMPA, Rio de Janeiro, Brazil, 1982.
- [Costa2] Celso José da COSTA, *Example of a complete minimal immersion in \mathbb{R}^3 of genus one and three embedded ends*, Bol. Soc. Bras. Mat. **15** (1984), 47–54.
- [DeTurck] Dennis DeTurck, Herman Gluck, Daniel Pomerleano and David Shea Vick, *The Four Vertex Theorem and Its Converse*, Notices of the AMS **54**, Number 2, February 2007.
- [Gray] Alfred GRAY, Elsa ABBENA e Simon SALAMON, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with MATHEMATICA*, 3rd. Ed., Chapman & Hall/CRC, 2006.
- [Kuhnel] Wolfgang KÜHNEL, *Differential Geometry: Curves - Surfaces - Manifolds*, 2nd. Ed., Student Mathematical Library 16, AMS, 2005.
- [Lima] Elon Lages LIMA, *Curso de Análise, vol. 2*, Projeto Euclides, IMPA, 1985.
- [Oprea] John OPREA, *Differential Geometry and its Applications*, Prentice Hall, 1997.
- [Oprea2] John OPREA, *The Mathematics of Soap Films: Explorations With Maple*, Student Mathematical Library Vol. 10, AMS, 2000.
- [Osserman] Robert OSSERMAN, *The Four-or-More Vertex Theorem*, Amer. Math. Monthly **92**, No. 5, 332–337.
- [Stoker] James J. STOKER, *Differential Geometry*, Wiley, 1969.