

Representações e Simetrias

Rodney Josué Biezuner¹

Departamento de Matemática
Instituto de Ciências Exatas (ICEx)
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Notas de estudos e seminários em Representações de Grupos e Álgebras de Lie e Simetrias em Física.

13 de março de 2020

¹E-mail: biezunerufmg@gmail.com; homepage: <http://www.mat.ufmg.br/~rodney>.

Sumário

Capa	1
Sumário	1
1 Grupos de Lie	2
1.1 Definição	2
1.2 Exemplos	5
1.3 Propriedades	11
1.4 Ações	14
1.4.1 Definição	14
1.5 Representações de Grupos de Lie	16
1.5.1 Representações Irredutíveis	18
1.6 Representações Unitárias	20
1.7 $SU(2)$ é um recobrimento duplo de $SO(3)$	21
1.8 Exercícios	23
2 Representações de Grupos Finitos	25
2.1 Relações de Ortogonalidade	27
2.2 Caráteres de Representações	30
2.3 Ações em Espaços de Funções	33
2.4 A Representação Regular	38
Referências Bibliográficas	39

Capítulo 1

Grupos de Lie

1.1 Definição

Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável que é simultaneamente um grupo algébrico, de tal modo que a estrutura algébrica é compatível com a estrutura diferenciável, isto é, as operações algébricas de produto e inversão são aplicações diferenciáveis.

A aplicação mais importante de grupos de Lie é no estudo de simetrias de variedades, isto é, automorfismos de variedades que preservam alguma estrutura extra: o grupo de isometrias de uma variedade Riemanniana (por exemplo, o grupo de simetrias da esfera, formado por rotações e reflexões) é um grupo de Lie, como pode ser visto em detalhes em [\[Kobayashi\]](#).

1.1 Definição. Um **grupo de Lie** é uma variedade diferenciável G que possui uma estrutura algébrica de grupo tal que as aplicações produto

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\mapsto gh \end{aligned}$$

e inversão

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

são diferenciáveis. $\square$

Observe que a aplicação produto está definida na variedade produto $G \times G$. As duas condições acima que expressam a compatibilidade da estrutura algébrica com a estrutura diferencial podem ser resumidas em uma única condição:

1.2 Proposição. *Seja G um grupo que é uma variedade diferenciável. Então G é um grupo de Lie se e somente se a aplicação*

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\mapsto gh^{-1} \end{aligned}$$

é diferenciável.

Prova: Suponha que a aplicação do enunciado é diferenciável. Então a aplicação inversão de G é diferenciável porque é a composta de aplicações diferenciáveis:

$$\begin{array}{ccccc} G & \longrightarrow & G \times G & \longrightarrow & G \\ g & \mapsto & (e, g) & \mapsto & eg^{-1} = g^{-1} \end{array}$$

(lembre-se que a inclusão na variedade produto sempre é uma aplicação diferenciável). Da mesma forma, a aplicação produto de G é diferenciável porque é a composta de aplicações diferenciáveis:

$$\begin{array}{ccccc} G \times G & \longrightarrow & G \times G & \longrightarrow & G \\ (g, h) & \mapsto & (g, h^{-1}) & \mapsto & g(h^{-1})^{-1} = gh \end{array}$$

(lembre-se que uma aplicação de $G \times G$ em $G \times G$ é uma aplicação diferenciável se e somente se cada aplicação coordenada $G \times G \longrightarrow G$ é).

A recíproca é óbvia. ■

1.3 Proposição. *Seja G um grupo de Lie. Dado $g \in G$, então as aplicações **multiplicação à esquerda** por g*

$$\begin{array}{ccc} L_g : & G & \longrightarrow G \\ & g & \mapsto gh \end{array}$$

e multiplicação à direita por g

$$\begin{array}{ccc} R_g : & G & \longrightarrow G \\ & h & \mapsto hg \end{array}$$

são difeomorfismos.

Prova: Pois

$$\begin{aligned} (L_g)^{-1} &= L_{g^{-1}}, \\ (R_g)^{-1} &= R_{g^{-1}}, \end{aligned}$$

■

Este resultado mostra que um grupo de Lie é *homogêneo*, isto é, do ponto de vista da variedade diferenciável subjacente todo ponto localmente se parece com qualquer outro ponto, via os difeomorfismos globais (automorfismos) multiplicação à esquerda ou à direita.

Note que pela regra da cadeia

$$[(dL_g)_h]^{-1} = (dL_g^{-1})_{L_g h} = (dL_{g^{-1}})_{gh}$$

e similarmente

$$[(dR_g)_h]^{-1} = (dR_{g^{-1}})_{gh}.$$

Usando a homogeneidade de um grupo de Lie, podemos agora mostrar que na definição de um grupo de Lie basta assumir que a operação produto é diferenciável (este resultado não vale para *grupos topológicos*, ou seja, para um grupo ser topológico, ambas as aplicações produto e inversa devem ser contínuas; esta é uma peculiaridade dos grupos diferenciáveis, isto é, dos grupos de Lie):

1.4 Proposição. *Seja G um grupo que é uma variedade diferenciável. Então G é um grupo de Lie se e somente se a aplicação produto*

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g, h) & \mapsto & gh \end{array}$$

é diferenciável.

Prova: Para provar o resultado, basta mostrar que a aplicação inversão é diferenciável se a aplicação produto é.

Primeiro note que a aplicação produto $P : G \times G \longrightarrow G$ é uma submersão em (e, e) . De fato, identificando

$$T_{(e,e)}(G \times G) = T_e G \oplus T_e G$$

dado $v \in T_e G$, seja $\alpha : I \longrightarrow G$ uma curva tal que $\alpha(0) = e$ e $\alpha'(0) = v$. Defina a curva $\beta : I \longrightarrow G \times G$ por

$$\beta(t) = (\alpha(t), e),$$

de modo que

$$\beta'(t) = (\alpha'(t), 0),$$

donde

$$\begin{aligned}\beta(0) &= (e, e), \\ \beta'(0) &= (v, 0),\end{aligned}$$

Segue da regra da cadeia que

$$\begin{aligned}dP_{(e,e)}(v, 0) &= dP_{(e,e)}(\beta'(0)) = (P \circ \beta)'(0) \\ &= \alpha'(0) = v.\end{aligned}$$

Agora defina uma aplicação

$$F : G \times G \longrightarrow G \times G$$

por

$$F(g, h) = (g, gh),$$

ou seja,

$$F = (\pi_1, P),$$

onde π_1 é a projeção na primeira variável. Como ambas P e π_1 são submersões, segue que

$$dF_{(e,e)} : T_e G \oplus T_e G \longrightarrow T_e G \oplus T_e G$$

dada por

$$dF_{(e,e)} = \left(d(\pi_1)_{(e,e)}, dP_{(e,e)} \right)$$

também é sobrejetiva. Mas as dimensões do domínio e do contradomínio são iguais, logo $dF_{(e,e)}$ é um isomorfismo. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, existe uma vizinhança U de (e, e) tal que $F|_U$ é um difeomorfismo sobre sua imagem. Mas a inversa de F é, de fato,

$$F^{-1}(g, h) = (g, g^{-1}h),$$

logo em U a aplicação inversa é a composta de aplicações diferenciáveis segundo o diagrama

$$g \xrightarrow{i_1} (g, e) \xrightarrow{F^{-1}} (g, g^{-1}) \xrightarrow{\pi_1} g^{-1}$$

portanto pela regra da cadeia ela é diferenciável em U .

Para mostrar que a aplicação inversa é de fato diferenciável em qualquer aberto de G , usamos a homogeneidade de um grupo de Lie. Dado $g \in G$ arbitrário, como L_g é um difeomorfismo, $L_g(U) = gU$ é uma vizinhança de g . Em gU a aplicação inversa é a composta de aplicações diferenciáveis segundo o diagrama (no diagrama a seguir, dado $h \in gU$, escrevemos $h = gx$ para algum $x \in U$)

$$h = gx \xrightarrow{L_g^{-1}} x \xrightarrow{\text{inversa}|_U} x^{-1} \xrightarrow{R_{g^{-1}}} x^{-1}g^{-1} = (gx)^{-1} = h^{-1},$$

portanto pela regra da cadeia ela é diferenciável em gU . ■

O resultado acima é um exemplo típico de como podemos usar o comportamento de um grupo de Lie em uma vizinhança da identidade para provar fatos sobre todo o grupo.

1.5 Proposição. *Seja G um grupo de Lie. Se H é um subgrupo de G que é também uma subvariedade de G , então H é um grupo de Lie.*

Prova: Exercício 1.52. ■

1.2 Exemplos

1.6 Exemplo. Os espaços $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ (identificado com $\mathbb{R}^{2n}$) sob a operação de adição vetorial são grupos de Lie.

Da mesma forma, o grupo multiplicativo dos reais $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e o grupo multiplicativo dos complexos $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (identificado com $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$) sob a operação de multiplicação são grupos de Lie.

Como $\mathbb{S}^1$ com a multiplicação induzida de $\mathbb{C}$ é um subgrupo e uma subvariedade de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ele também é um grupo de Lie. □

1.7 Exemplo (Quaternions). A álgebra (anel com divisão não-comutativo) dos **quaternions** $\mathbb{H}$ é o subespaço vetorial *real* das matrizes complexas

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} : z, w \in \mathbb{C} \right\}$$

com o produto usual de matrizes. De fato,

$$\begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|z|^2 + |w|^2} \begin{bmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{bmatrix}.$$

Ele é isomorfo a $\mathbb{R}^4$, com sua base canônica sendo dada pelas matrizes

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, um quaternion pode ser escrito na forma

$$a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k},$$

com os *quaternions puros* $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ satisfazendo as *relações de comutação*

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 &= \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \\ \mathbf{i}\mathbf{j} &= -\mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{k}, \\ \mathbf{j}\mathbf{k} &= -\mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{i}, \\ \mathbf{k}\mathbf{i} &= -\mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Usando estas relações mais as leis associativa e distributiva, podemos multiplicar os quaternions diretamente, sem nos referirmos a matrizes. Um mnemônico para as três últimas relações é

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{i} & \\ \nearrow & & \searrow \\ \mathbf{k} & \longleftarrow & \mathbf{j} \end{array}$$

Definimos a *parte real* e a *parte imaginária* de um quaternion $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ por

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} q &= a, \\ \operatorname{Im} q &= b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}. \end{aligned}$$

O seu conjugado quaternion é

$$\bar{q} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$$

e seu módulo

$$|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Note que

$$q\bar{q} = |q|^2,$$

de modo que

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}.$$

O grupo multiplicativo dos quaternions $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ é um grupo de Lie. $\square$

1.8 Exemplo (Produto Direto). Se G e H são grupos de Lie, o produto direto $G \times H$

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1g_2, h_1h_2)$$

com a estrutura diferenciável de variedade produto é um grupo de Lie (Exercício 1.53). Assim, o toro n -dimensional $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^{2n}$ é um grupo de Lie. $\square$

1.9 Exemplo (Grupo Linear Geral $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$). O grupo das matrizes reais $n \times n$ invertíveis, chamado o **grupo linear geral** real de ordem n e denotado $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, é um grupo de Lie de dimensão n^2 .

De fato, identificando as matrizes reais $n \times n$ com pontos de $\mathbb{R}^{n^2}$ (por exemplo, ordenando as colunas lado a lado), temos que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ é um *aberto* de $\mathbb{R}^{n^2}$, pois

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

O produto de matrizes é uma aplicação diferenciável

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

pois as n^2 funções coordenadas desta aplicação são

$$(XY)_j^i = \sum_{k=1}^n X_k^i Y_j^k,$$

que é uma função polinômial nas variáveis $X_1^1, \dots, X_1^n, \dots, X_n^1, \dots, X_n^n, Y_1^1, \dots, Y_1^n, \dots, Y_n^1, \dots, Y_n^n$, portanto diferenciável. A inversão de matrizes também é uma aplicação diferenciável

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

pois cada função coordenada desta aplicação é da forma

$$X_j^i = (-1)^{i+j} \frac{\det X(i|j)}{\det X}$$

(aqui $X(i|j)$ denota a matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtida de X através da eliminação de sua i -ésima linha e de sua j -ésima coluna), que é uma função racional nas variáveis $X_1^1, \dots, X_1^n, \dots, X_n^1, \dots, X_n^n$ (o determinante é uma função polinomial de grau n das entradas da matriz), cujo denominador nunca se anula, portanto diferenciável.

Note que o grupo linear geral $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ é o grupo de automorfismos de $\mathbb{R}^n$ que preservam a estrutura linear (a estrutura de espaço vetorial) de $\mathbb{R}^n$, isto é, os isomorfismos de $\mathbb{R}^n$. $\square$

1.10 Exemplo (Grupo Linear Especial $SL_n(\mathbb{R})$). O **grupo linear especial** real de ordem n , denotado por $SL_n(\mathbb{R})$, é o grupo das matrizes com determinante 1. Ele é exatamente o grupo dos isomorfismos de $\mathbb{R}^n$ que preservam o volume. Ele inclui não apenas os isomorfismos isométricos mas também, por exemplo, aqueles isomorfismos que são dilatações em certas direções e contrações em outras, que se compensam exatamente de forma a não alterar o volume. Ele é um grupo de Lie de dimensão $n^2 - 1$, porque 1 é um valor regular da função determinante $\det : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$. De fato, como a função determinante é uma função n -linear, sua derivada direcional é dada por

$$d(\det)_X H = \sum_{i=1}^n \det(X^1, \dots, H^i, \dots, X^n)$$

(aqui X^i denota a i -ésima coluna de X). Daí, a derivada parcial da função determinante em relação à variável X_q^p na matriz X é dada por (denotamos a matriz elementar cujo elemento (r, s) é 1 e os demais elementos são nulos por E_{rs})

$$\frac{\partial \det}{\partial X_s^r}(X) = d(\det)_X E_{rs} = (-1)^{r+s} \det X (r|s),$$

ou seja, é o menor da matriz X . Pela expansão do determinante ao longo de uma linha ou coluna da matriz, segue que qualquer valor não nulo do determinante é um valor regular: se $\det X \neq 0$, então pelo menos um de seus menores é diferente de zero, logo pelo menos uma das derivadas parciais da função $\det$ calculada em X é não nula. Portanto, $SL_n(\mathbb{R})$ é um subgrupo e uma subvariedade de $GL_n(\mathbb{R})$, logo também é um grupo de Lie.

Note que, diferentemente de $GL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{R})$ é uma subvariedade fechada, pois é a imagem inversa do subconjunto fechado $\{1\}$ pela função contínua determinante. $\square$

1.11 Exemplo (Grupo Ortogonal O_n). O grupo das matrizes reais $n \times n$ ortogonais, chamado o **grupo ortogonal** de ordem n e denotado O_n , é um grupo de Lie de dimensão $n(n-1)/2$.

De fato, O_n é um subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$ que também é uma subvariedade de $GL_n(\mathbb{R})$. Para verificar este último fato, lembre-se que uma matriz X é ortogonal se e somente se $XX^t = I$. Como XX^t é uma matriz simétrica, identificamos o espaço vetorial das matrizes simétricas com $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. Para provar que O_n é uma subvariedade basta então provar que I é um valor regular da aplicação

$$F : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$$

definida por

$$F(X) = XX^t,$$

uma aplicação claramente diferenciável. A derivada direcional desta aplicação, como pode ser calculado diretamente da definição, é dada por

$$dF_X H = XH^t + HX^t.$$

Para provar que I é um valor regular de F , temos que mostrar que para toda matriz simétrica $S \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ existe uma matriz H tal que

$$dF_X H = XH^t + HX^t = S.$$

A possibilidade mais simples disso ocorrer é se H satisfizesse

$$XH^t = HX^t = \frac{1}{2}S.$$

E, de fato, podemos garantir que isso realmente ocorre usando a ortogonalidade de X para obter explicitamente

$$H = \frac{1}{2}SX.$$

Como I é um valor regular de F , $O_n = F^{-1}(I)$ é uma subvariedade de dimensão

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Em particular, O_n é uma subvariedade fechada (a imagem inversa de um subconjunto fechado por uma função contínua). Além disso, ele é um conjunto limitado, pois toda matriz ortogonal tem norma n em $\mathbb{R}^{n^2}$ (cada uma das n colunas tem norma 1). Concluímos portanto que O_n é um grupo de Lie compacto.

Note que o grupo ortogonal O_n é o grupo das isometrias euclidianas de $\mathbb{R}^n$. Mais geralmente, definimos o grupo ortogonal $O_{p,q}$ como sendo o grupo das isometrias de $\mathbb{R}^n$ dotado da métrica de assinatura (p, q) ; este também é um grupo de Lie de dimensão $n(n-1)/2$, mas não é compacto se $pq \neq 0$. $\square$

1.12 Proposição. *Seja G um grupo de Lie. A componente conexa que contém a identidade G_0 é um subgrupo de Lie.*

Prova: Como G_0 é uma componente conexa de G , em particular é aberta em G e portanto uma subvariedade. Para verificar que G_0 é um grupo de Lie, basta então verificar que ele é fechado em relação às operações de produto e de tomar inversa. Se $g, h \in G_0$ então existem caminhos contínuos $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow G_0$ tais que $\alpha(0) = \beta(0) = e$ e $\alpha(1) = g, \beta(1) = h$. Pela continuidade da operação produto e da operação de tomar inversa,

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)(t) &= \alpha(t)\beta(t), \\ \alpha^{-1}(t) &= [\alpha(t)]^{-1}, \end{aligned}$$

são caminhos contínuos de e para gh e g^{-1} , logo $gh, g^{-1} \in G_0$. $\blacksquare$

O subgrupo de Lie G_0 é chamada a **componente da identidade**. Obviamente, as componentes conexas que não contém a identidade não podem ser subgrupos.

1.13 Exemplo (Grupo Ortogonal Especial SO_n). O grupo ortogonal O_n contém duas componentes conexas, o formado pelas matrizes ortogonais de determinante $+1$ (isto é, as rotações) e o das matrizes ortogonais de determinante -1 (isto é, as reflexões).

Claramente, O_n não pode ser conexo, pois a imagem de O_n pela função determinante é o conjunto desconexo $\{-1, 1\}$. Para ver que O_n possui exatamente 2 componentes conexas, veja [Lima], p. 59.

Apenas a componente conexa das rotações é um grupo, pela propriedade do determinante do produto de matrizes (a composta de rotações é uma rotação, enquanto que a composta de reflexões é uma rotação).

O grupo de Lie das matrizes ortogonais com determinante 1 é chamado o **grupo ortogonal especial** e denotado SO_n . Ela é a componente conexa de O_n que contém a identidade. Como esta componente conexa também é fechada (imagem inversa de 1 pela função determinante), SO_n também é um grupo de Lie compacto, além de conexo (Exercício 1.56). $\square$

1.14 Exemplo (Grupo Ortogonal Especial de Lorentz $SO_{1,3}$). O grupo não compacto $O_{1,3}$ das matrizes ortogonais com assinatura $(1, 3)$ é chamado o **grupo de Lorentz**. O subgrupo de $O_{1,3}$ das matrizes ortogonais com determinante 1 é chamado o **grupo ortogonal especial** $SO_{1,3}$. Ele é um subgrupo de Lie de $O_{1,3}$, mas não é a componente conexa que contém a identidade. De fato, $O_{1,3}$ possui 4 componentes conexas e $SO_{1,3}$ duas componentes conexas.

Para ver que o grupo de Lorentz não possui menos que 4 componentes conexas, denotando

$$\eta = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

por definição uma matriz Λ é ortogonal na assinatura $(1, 3)$ (isto é, ela é uma **transformação de Lorentz**) se ela satisfaz

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta.$$

De fato, isso é equivalente a

$$v^t \Lambda^t \eta \Lambda w = v^t \eta w$$

para todos os vetores $v, w \in \mathbb{R}^4$ e a métrica de Lorentz de assinatura $(1, 3)$ é definida por

$$\langle v, w \rangle := v^t \eta w,$$

de modo que

$$\langle \Lambda v, \Lambda w \rangle = \langle v, w \rangle$$

para todos os vetores $v, w \in \mathbb{R}^4$. Isso implica em particular que uma transformação de Lorentz Λ satisfaz a condição

$$|\Lambda_{00}| \geq 1,$$

pois

$$-\Lambda_{00}^2 + \sum_{i=1}^3 \Lambda_{i0}^2 = \langle \Lambda e_0, \Lambda e_0 \rangle = \langle e_0, e_0 \rangle = -1,$$

de modo que

$$\Lambda_{00}^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 \Lambda_{i0}^2 \geq 1. \quad (1.1)$$

A regra do produto dos determinantes, juntamente com $\det \eta = -1$, implica que uma transformação de Lorentz satisfaz

$$\det \Lambda = \pm 1,$$

logo a condição

$$\det (\Lambda \Lambda') = \det \Lambda \det \Lambda'$$

implica que $O_{1,3}$ tem pelo menos duas componentes, aquela formada pelas matrizes de Lorentz com determinante -1 e aquelas com determinante $+1$, esta última sendo um subgrupo (isto é, $SO_{1,3}$). Mas cada uma destas componentes na verdade se divide em pelo menos duas componentes conexas, aquela formada pelas matrizes de Lorentz satisfazendo $\Lambda_{00} \geq 1$ e aquela formada pelas matrizes de Lorentz satisfazendo $\Lambda_{00} \leq -1$. Isso decorre da regra do produto dos sinais do primeiro elemento das matrizes de Lorentz:

$$\text{sign}[(\Lambda \Lambda')_{00}] = \text{sign}(\Lambda_{00}) \text{sign}(\Lambda'_{00}).$$

De fato,

$$(\Lambda \Lambda')_{00} = \Lambda_{00} \Lambda'_{00} + \sum_{i=1}^3 \Lambda_{0i} \Lambda'_{i0},$$

de modo que se $\Lambda_{00} \Lambda'_{00} > 0$, então segue de (1.1) (a transposta de uma transformação de Lorentz é uma transformação de Lorentz, logo a equação vale não apenas para a primeira coluna mas também para a primeira linha) e da desigualdade de Schwarz que

$$\begin{aligned} (\Lambda \Lambda')_{00} &= \left(1 + \sum_{i=1}^3 \Lambda_{i0}^2\right)^{1/2} \left(1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda'_{0i})^2\right)^{1/2} + \sum_{i=1}^3 \Lambda_{0i} \Lambda'_{i0} \\ &\geq \left(1 + \sum_{i=1}^3 \Lambda_{i0}^2\right)^{1/2} \left(1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda'_{0i})^2\right)^{1/2} - \left(\sum_{i=1}^3 \Lambda_{i0}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^3 (\Lambda'_{0i})^2\right)^{1/2} \\ &> 0, \end{aligned}$$

e se $\Lambda_{00}\Lambda'_{00} < 0$, então

$$\begin{aligned} (\Lambda\Lambda')_{00} &= - \left(1 + \sum_{i=1}^3 \Lambda_{i0}^2 \right)^{1/2} \left(1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda'_{0i})^2 \right)^{1/2} + \sum_{i=1}^3 \Lambda_{0i}\Lambda'_{i0} \\ &\leq - \left(1 + \sum_{i=1}^3 \Lambda_{i0}^2 \right)^{1/2} \left(1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda'_{0i})^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^3 \Lambda_{i0}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^3 (\Lambda'_{0i})^2 \right)^{1/2} \\ &< 0. \end{aligned}$$

A componente da identidade $\text{SO}_{1,3}^0$ de $\text{SO}_{1,3}$ (e de $\text{O}_{1,3}$) é portanto formada pelas matrizes com determinante $+1$ e primeiro elemento $\Lambda_{00} \geq 1$; ela é chamada o **grupo de Lorentz ortócrono próprio**. Transformações de Lorentz preservam a direção do tempo. Observe que as seguintes transformações de Lorentz não pertencem a $\text{SO}_{1,3}^0$ (isto é, não são ortócronas):

$$\begin{aligned} \text{reversão espacial (paridade): } P(t, x, y, z) &= (t, -x, -y, -z), \\ \text{reversão temporal: } T(t, x, y, z) &= (-t, x, y, z), \\ \text{reversão espaçotemporal: } PT(t, x, y, z) &= (-t, -x, -y, -z). \end{aligned}$$

Note que as transformações de Lorentz ortócronas com determinante ± 1 também formam um subgrupo de $\text{O}_{1,3}$, chamado o **subgrupo isócrono** e denotado $\text{O}_{1,3}^+$, e as transformações de Lorentz com determinante $+1$ satisfazendo $\text{sign}(\Lambda_{00}) = \pm 1$ também formam outro subgrupo de $\text{O}_{1,3}$, chamado o **subgrupo próprio**. $\square$

1.15 Exemplo (Grupo Linear Geral $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ e Grupo Linear Especial $\text{SL}_n(\mathbb{C})$). Os grupos lineares complexos $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ e $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ são definidos de forma análoga aos grupos lineares reais $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ e $\text{SL}_n(\mathbb{R})$, respectivamente, e são grupos de Lie de dimensão $4n^2$. $\square$

1.16 Exemplo (Grupo Unitário U_n e Grupo Unitário Especial SU_n). O grupo das matrizes complexas $n \times n$ unitárias, chamado o **grupo unitário** de ordem n e denotado U_n , é um grupo de Lie de dimensão n^2 . Analogamente às matrizes ortogonais, as matrizes unitárias U satisfazem $|\det U| = 1$, exceto que $\det U$ em geral é um número complexo. O grupo das matrizes unitárias $n \times n$ com determinante 1 é chamado o **grupo unitário especial** de ordem n , denotado SU_n . Sua dimensão é $n^2 - 1$. Todos estes grupos são conexos (Exercício 1.59).

U_1 é o círculo $\mathbb{S}^1$ e SU_2 é o grupo dos quaternions unitários. De fato, se

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

é uma matriz em SU_2 , então a condição $\det A = 1$ implica

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

enquanto que o fato que A é unitária, ou seja, $A\bar{A}^t = I$ implica que

$$\begin{bmatrix} \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} & \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} \\ \bar{\alpha}\gamma + \bar{\beta}\delta & \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As duas condições juntas implicam $\alpha = \bar{\delta}$ e $\gamma = -\bar{\beta}$, como pode ser verificado. Em particular, SU_2 é difeomorfo à esfera $\mathbb{S}^3$. As esferas $\mathbb{S}^1$ e $\mathbb{S}^3$ são as únicas esferas que podem ser grupos de Lie. $\square$

De forma análoga a $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ pode-se definir $\mathbb{H}^n$ e considerá-lo essencialmente como um espaço vetorial mas, como $\mathbb{H}$ não é um corpo, deve-se ter cuidado com a multiplicação por escalares. Daí pode-se definir

$GL_n(\mathbb{H})$, $SL_n(\mathbb{H})$ e $U_n(\mathbb{H})$; este último é denotado Sp_n e chamado o **grupo simplético compacto** de ordem n (Sp_1 é difeomorfo a SU_2). Veja [Naber], pp. 39-46, para um desenvolvimento detalhado destes conceitos. O grupo de calibre da teoria eletromagnética é U_1 , o grupo de calibre da teoria eletrofraca é $U_1 \times SU_2$ e o grupo de calibre do modelo padrão (força eletromagnética + força fraca + força forte) é $U_1 \times SU_2 \times SU_3$.

1.17 Teorema. *Seja G um grupo de Lie. Se H é um subgrupo fechado de G , então H é um subgrupo de Lie.*

1.18 Definição. Um subgrupo fechado de qualquer grupo linear geral $GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$ ou $GL_n(\mathbb{H})$ é chamado um **grupo de Lie matricial**. $\square$

1.19 Definição. Os **grupos de Lie clássicos** são os seguintes grupos de Lie matriciais:

- (i) os grupos lineares gerais $GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$ ou $GL_n(\mathbb{H})$
- (ii) os grupos lineares especiais $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$ e $SL_n(\mathbb{H})$;
- (iii) os grupos unitários $U_n(\mathbb{R}) := O_n$, $U_{p,q}(\mathbb{R}) := O_{p,q}$, $U_n(\mathbb{C}) = U_n$ e $U_n(\mathbb{H}) := Sp_n$;
- (iv) os grupos unitários especiais SO_n , $SO_{p,q}$ e SU_n . $\square$

Um *isomorfismo entre grupos de Lie* é um isomorfismo entre grupos que é também um difeomorfismo.

1.20 Teorema. *Todo grupo de Lie compacto é isomorfo a um grupo de Lie matricial.*

Mais que isso, todo grupo de Lie compacto é isomorfo a um subgrupo de Lie de U_n e portanto de SO_{2n} .

Portanto, todo grupo de Lie compacto não apenas é um grupo matricial, como também é um grupo cujos elementos podem ser vistos como rotações em algum $\mathbb{R}^{2n}$. Compare com o Teorema de Cayley, que diz que qualquer subgrupo finito de ordem n (ou seja, grupos de Lie de dimensão zero compactos) é um subgrupo do grupo simétrico S_n (grupo de permutações de n elementos).

1.21 Teorema. *A menos de recobrimentos finitos, todo grupo de Lie compacto é isomorfo a um produto de grupos de Lie compactos*

$$G_1 \times \dots \times G_r$$

tais que G_i é um grupo de Lie matricial, ou grupo de spin ou um grupo de Lie excepcional compacto.

Os **grupos de spin** $Spin_{p,q}$ são certos recobrimentos duplos de $SO_{p,q}^0$ e os **grupos de Lie excepcionais compactos simples** são os grupos G_2 , F_4 , E_6 , E_7 e E_8 . Existem grupos de Lie não compactos que não são isomorfos a grupos de Lie matriciais, tais como o recobrimento universal de $SL_2(\mathbb{R})$.

1.3 Propriedades

1.22 Definição. Seja G um grupo de Lie. Dizemos que um campo vetorial X é **invariante à esquerda** se

$$(L_g)_* X = X$$

para todo $g \in G$. $\square$

Explicitando a definição acima, ela significa que para todos $g, h \in G$ vale

$$(dL_g)_h X_h = X_{L_g h} = X_{gh}.$$

Em particular, um campo invariante à esquerda fica completamente determinado pelo seu valor em um ponto qualquer de G . Por exemplo, se conhecemos o valor de X_e então, tomando $h = e$, segue que

$$X_g = (dL_g)_e X_e.$$

Campos invariantes à esquerda são automaticamente diferenciáveis:

1.23 Proposição. *Se X é um campo invariante à esquerda, então $X \in \mathcal{T}(G)$.*

Prova: Para provar que um campo invariante à esquerda X é diferenciável em G , basta mostrar isso para uma vizinhança V da identidade e : se X é diferenciável em V , como L_g é um difeomorfismo, $X = (L_g)_* X$ é um campo diferenciável na vizinhança $gV = L_g(V)$ de g .

Seja (φ, U) uma vizinhança coordenada de e com funções coordenadas x^i . Observe que as componentes do campo X neste sistema de coordenadas são exatamente X^i : se $X = X^j \partial_j$, temos

$$Xx^i = X^j \partial_j x^i = X^j \delta_j^i = X^i.$$

Logo, para provar que X é C^∞ em alguma vizinhança $V \subset U$ de e , basta provar que as suas componentes Xx^i são funções C^∞ em V . Tome uma vizinhança V de e tal que

$$VV \subset U,$$

isto é, se $g, h \in V$, então $gh \in U$ (em particular, $V \subset U$, porque $e \in V$). A existência de V segue da continuidade da aplicação produto $P : G \times G \rightarrow G$: $P^{-1}(U)$ é um aberto de $G \times G$ contendo (e, e) , e na topologia produto existe um aberto da forma $V_1 \times V_2 \subset P^{-1}(U)$ contendo (e, e) ; basta tomar $V = V_1 \cap V_2$.

Para cada $g \in V$, temos

$$\begin{aligned} (Xx^i)(g) &= X_g(x^i) \\ &= [(dL_g)_e X_e](x^i) \\ &= X_e(x^i \circ L_g) \end{aligned}$$

e note que a última identidade faz sentido, isto é, $x^i \circ L_g$ está definido em V , porque $L_g(V) \subset U$. Escrevendo

$$X_e = c^j \partial_j|_e,$$

para alguns escalares $c^j \in \mathbb{R}$, segue que

$$(Xx^i)(g) = c^j \frac{\partial (x^i \circ L_g)}{\partial x^j}(e).$$

Para cada g fixado, o lado direito desta identidade é uma função C^∞ em V (derivada parcial da composta da função coordenada de uma carta com um difeomorfismo), mas precisamos mostrar que ele também é C^∞ em $g \in V$. Para isso, observe que, a composta

$$\psi = \varphi \circ P : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ou seja,

$$\psi(g, h) = (x^1(gh), \dots, x^n(gh)),$$

é C^∞ . Usando a carta

$$\varphi \times \varphi : V \times V \rightarrow \varphi(V) \times \varphi(V),$$

temos

$$(\varphi \times \varphi)(g, h) = (\varphi(g), \varphi(h)) = (x^1(g), \dots, x^n(g), x^1(h), \dots, x^n(h)),$$

de modo que se

$$F : \varphi(V) \times \varphi(V) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

é definida por

$$F = \psi \circ (\varphi \times \varphi)^{-1},$$

podemos escrever

$$\psi = F \circ (\varphi \times \varphi).$$

Em particular,

$$\psi^i = F^i \circ (\varphi \times \varphi),$$

donde

$$(x^i \circ L_g)(h) = x^i(gh) = F^i((x^1(g), \dots, x^n(g), x^1(h), \dots, x^n(h)))$$

As funções coordenadas $F^1, \dots, F^n$ são C^∞ em $\varphi(V) \times \varphi(V)$, logo

$$\frac{\partial (x^i \circ L_g)}{\partial x^j}(e) = \frac{\partial F^i}{\partial x^{n+j}}((x^1(g), \dots, x^n(g), x^1(e), \dots, x^n(e))),$$

que é C^∞ em $g \in V$. ■

1.24 Corolário. *Seja G um grupo de Lie. Todo vetor tangente X_e no espaço tangente $T_e G$ possui uma única extensão a um campo invariante à esquerda $X \in \mathcal{T}(G)$.*

1.25 Proposição. *Mais que isso, toda base de $T_e G$ pode ser estendida a um referencial global de campos invariantes à esquerda.*

Em particular, o conjunto dos campos invariantes à esquerda de um grupo de Lie n -dimensional G é um subespaço vetorial de $\mathcal{T}(G)$ de dimensão n .

Prova: Basta definir

$$X_g = (dL_g)_e X_e.$$

Para ver que X é um campo invariante à esquerda, seja $h \in G$ qualquer. Como

$$L_h \circ L_g = L_{hg}$$

segue que

$$(dL_h)_g X_g = (dL_h)_g (dL_g)_e X_e = [d(L_h \circ L_g)]_e X_e = (dL_{hg})_e X_e = X_{hg}.$$

Pela proposição anterior, $X \in \mathcal{T}(G)$. A unicidade segue pelo fato de campos invariantes à esquerda ficarem completamente determinado pelo seu valor em um ponto qualquer de G , como observado no início desta seção.

Seja agora

$$\mathcal{B} = \{X_{1,e}, \dots, X_{n,e}\}$$

uma base para $T_e G$. Como acabamos de demonstrar, cada vetor $X_{i,e}$ pode ser estendido a um campo invariante à esquerda $X_i \in \mathcal{T}(G)$ definindo

$$X_{i,g} = (dL_g)_e X_{i,e}$$

Como dL_g é um difeomorfismo, em particular

$$\mathcal{B}_g = \{X_{1,g}, \dots, X_{n,g}\}$$

é uma base para $T_g G$. ■

1.26 Corolário. *Todo grupo de Lie possui um fibrado tangente trivial.*

Em particular, todo grupo de Lie é orientável.

Prova: Pela proposição, podemos obter um referencial suave

$$\mathcal{B}_g = \{X_{1,g}, \dots, X_{n,g}\}$$

para G . Logo podemos definir um difeomorfismo

$$F : TG \longrightarrow G \times \mathbb{R}^n$$

por

$$F(g, c^i X_{i,g}) = (g, c^i e_i).$$

O resultado segue do Exercício 1.2. ■

1.4 Ações

1.4.1 Definição

1.27 Definição. Dizemos que um grupo G **age à esquerda** em um conjunto M , se existe uma aplicação (chamada uma **ação à esquerda** de G em M)

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \longrightarrow & M \\ (g, p) & \longmapsto & g \cdot p \end{array}$$

tal que

$$\begin{array}{l} e \cdot p = p, \\ (gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p). \end{array}$$

Analogamente, dizemos que um grupo G **age à direita** em um conjunto M , se existe uma aplicação (chamada uma **ação à direita** de G em M)

$$\begin{array}{ccc} M \times G & \longrightarrow & M \\ (p, g) & \longmapsto & p \cdot g \end{array}$$

tal que

$$\begin{array}{l} p \cdot e = p, \\ p \cdot (gh) = (p \cdot g) \cdot h. \end{array}$$

Um conjunto em que G age é também chamada um G -conjunto ou **conjunto com estrutura G** . $\square$

Dada uma ação $\cdot$ de um grupo G à esquerda em M , podemos definir uma ação $*$ de G à direita em M por

$$p * g = g^{-1} \cdot p.$$

De fato,

$$\begin{aligned} p * e &= e^{-1} \cdot p \\ &= e \cdot p \\ &= p \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} p * (gh) &= (gh)^{-1} \cdot p \\ &= (h^{-1}g^{-1}) \cdot p \\ &= h^{-1} \cdot (g^{-1} \cdot p) \\ &= (p \cdot g) \cdot h. \end{aligned}$$

Portanto, não há realmente diferença entre ações à esquerda e ações à direita. No entanto, em muitas situações (por exemplo, ações em fibrados), é necessário considerar duas ações simultaneamente, que devem ser compatíveis em algum sentido. Nestas situações, do ponto de vista computacional e de simplificação da notação, e também para não causar confusão, é mais conveniente definir uma das ações à esquerda e a outra à direita.

1.28 Proposição. *Todo grupo G agindo em um conjunto M pode ser visto como um subgrupo de bijeções de M agindo de forma natural.*

Prova: Se G é qualquer subgrupo de bijeções de M (por exemplo, um grupo de homeomorfismos se M é um espaço topológico, um grupo de difeomorfismos se M é uma variedade diferenciável, ou um grupo de isometrias se M é uma variedade métrica) então G age em M definindo

$$g \cdot p = g(p),$$

pois

$$\begin{aligned} (gh) \cdot p &= (gh)(p) \\ &= g(h(p)) \\ &= g \cdot (h \cdot p). \end{aligned}$$

Reciprocamente, dada uma ação de um grupo G em M , temos que a ação do elemento $g \in G$ em M é uma bijeção de M , pois sua inversa é a ação por g^{-1} . ■

Exemplos de subgrupos de bijeções de M são o grupo de *isomorfismos lineares* se M é um espaço vetorial, o *grupo de homeomorfismos* se M é um espaço topológico, o *grupo de difeomorfismos* se M é uma variedade diferenciável, e o *grupo de isometrias* se M é uma variedade métrica, e subgrupos destes grupos todos. Quando G é visto agindo em M como um subgrupo de bijeções de M , G é frequentemente chamado um **grupo de transformações** de M .

1.29 Definição. Quando G é um grupo topológico e M é um espaço topológico, consideramos *ações contínuas* de G em M .

Quando G é um grupo de Lie e M é uma variedade diferenciável, consideramos *ações diferenciáveis* de G em M .

□

1.30 Notação. Frequentemente, precisamos denotar uma ação $G \times M \rightarrow M$ por um símbolo explícito, digamos ϕ . Assim,

$$\begin{aligned} \phi(e, p) &= p, \\ \phi(g, \phi(h, p)) &= \phi(gh, p). \end{aligned}$$

Neste caso, a ação de um elemento $g \in G$ em M será denotada por ϕ_g , isto é, a bijeção $\phi_g : M \rightarrow M$ é definida por

$$\phi_g(p) = \phi(g, p) = g \cdot p.$$

□

1.31 Proposição. Se M é um espaço topológico, G um grupo topológico e ϕ uma ação contínua de G em M , então ϕ_g é um homeomorfismo para cada $g \in G$.

Se M é uma variedade diferenciável, G um grupo de Lie e ϕ uma ação diferenciável de G em M , então ϕ_g é um difeomorfismo para cada $g \in G$.

Prova: Pois $(\phi_g)^{-1} = \phi_{g^{-1}}$. ■

A ação de um grupo pode satisfazer diversas propriedades importantes:

1.32 Definição. Dizemos que a ação de um grupo G em um conjunto M é

(i) **transitiva** se para todos $p, q \in M$ existe $g \in G$ tal que

$$q = g \cdot p.$$

(ii) **fiel** (ou **efetiva**) se $g \cdot p = p$ para todo $p \in M$, então $g = e$.

(iii) **livre** se $g \cdot p = p$ para algum $p \in M$, então $g = e$.

□

Em outras palavras, G age transitivamente em M se dados quaisquer $p, q \in M$ existe algum elemento $g \in G$ que leva p em q ; G age fielmente ou efetivamente em M se o único elemento de G que se comporta como a identidade, isto é, fixa todos os pontos de M , é a identidade; G age livremente em M se G age sem pontos fixos, isto é, qualquer elemento de G com exceção da identidade leva um ponto de M em um ponto diferente de M .

Considerando a classe dos espaços em que G age, definimos os morfismos entre tais objetos para transformá-la em uma categoria:

1.33 Definição. Sejam M, N dois conjuntos. Dizemos que uma aplicação $F : M \longrightarrow N$ é **G -invariante** (ou **G -equivariante**) se ela preserva a ação, isto é, se

$$F(g \cdot p) = g \cdot F(p)$$

para todos $g \in G$ e $p \in M$, em outras palavras, se o diagrama abaixo é comutativo para todo $g \in G$:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi_g} & M \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ N & \xrightarrow{\psi_g} & N \end{array}$$

onde ϕ é a ação de G em M e ψ é a ação de G em N . $\square$

1.5 Representações de Grupos de Lie

No que segue, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Seja V um espaço $\mathbb{K}$ -vetorial e $\text{GL}(V)$ o grupo dos isomorfismos de V . Se V tem dimensão finita n , $\text{GL}(V)$ é isomorfo ao grupo linear geral $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e ao grupo linear geral $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Vários grupos de Lie são subgrupos de $\text{GL}(V)$ (mas nem todos; todos os grupos de Lie compacto são), o que leva naturalmente à *teoria de representações de grupos de Lie*:

1.34 Definição. Se G é um grupo de Lie, uma **representação** de G é um homomorfismo diferenciável

$$\rho : G \longrightarrow \text{GL}(V).$$

Se ρ é injetiva, dizemos que a representação é **fiel**. $\square$

Quando a representação ρ é fiel $G \cong \rho(G)$, isto é, G é efetivamente isomorfo a um subgrupo de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ ou de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$; assim, neste caso G é realmente *representado* por um grupo de matrizes. Como todo grupo de Lie compacto é isomorfo a um subgrupo matricial, todo grupo de Lie compacto possui pelo menos uma representação em algum espaço vetorial de dimensão finita igual à dimensão do grupo.

1.35 Exemplo. O grupo de rotações em duas dimensões $\mathbb{S}^1$ possui duas representações úteis:

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \text{U}_1 \subset \text{GL}_1(\mathbb{C}), \\ \sigma : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \text{SO}_2 \subset \text{GL}_2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

A primeira age em $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ por multiplicação complexa e a segunda age em $\mathbb{R}^2$ por multiplicação matricial. $\square$

1.36 Exemplo. O grupo de recobrimento universal de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ é um exemplo de um grupo de Lie que não possui nenhuma representação fiel, portanto não é isomorfo a um subgrupo de matrizes reais ou complexas. $\square$

1.37 Proposição. *Uma representação $\rho : G \longrightarrow \text{GL}(V)$ de um grupo de Lie G em $\text{GL}(V)$ corresponde a uma ação linear de G sobre o espaço vetorial V*

$$g \cdot v := \rho(g) v.$$

Prova: De fato, como ρ é um homomorfismo, temos

$$\begin{aligned} e \cdot v &= \rho(e) v \\ &= \text{id}(v) \\ &= v \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (gh) \cdot v &= \rho(gh) v \\ &= \rho(g) \rho(h) v \\ &= g \cdot (h \cdot v). \end{aligned}$$

Reciprocamente, dada uma ação linear de G em V , isto é, uma ação que satisfaz

$$g \cdot (xv + yw) = x(g \cdot v) + y(g \cdot w),$$

definimos para cada $g \in G$ um isomorfismo linear $\rho(g) \in \text{GL}(V)$ por

$$\rho(g) = g \cdot v.$$

Como para todo $v \in V$ temos

$$\begin{aligned} \rho(gh) v &= (gh) \cdot v \\ &= g \cdot (h \cdot v) \\ &= \rho(g) \rho(h) v, \end{aligned}$$

segue que

$$\rho(gh) = \rho(g) \rho(h)$$

e portanto ρ é um homomorfismo de grupos. ■

O objetivo da teoria de representações não é apenas determinar quando um grupo de Lie possui uma representação e qual é ela. Em geral, um grupo de Lie possui várias representações diferentes. O objetivo é determinar a menos de isomorfismos quais são estas representações. Para classificar representações, isto é, dizer quando duas determinações são essencialmente a mesma, definimos a noção de equivalência de duas representações da seguinte forma:

1.38 Definição. Se G é um grupo de Lie, duas representações de G

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow \text{GL}(V), \\ \rho' : G &\longrightarrow \text{GL}(V), \end{aligned}$$

são **equivalentes** se existe um isomorfismo $T : V \longrightarrow V$ tal que

$$T \rho(g) = \rho'(g) T$$

para todo $g \in G$, ou, na linguagem de ações,

$$T(g \cdot v) = g \cdot (Tv)$$

a ação de G sobre V no lado esquerdo desta equação sendo dada por ρ , enquanto que no lado direito a ação é dada por ρ' . □

Em outras palavras, para todo $g \in G$ vale

$$\rho'(g) = T^{-1} \rho(g) T.$$

Pensando em termos de matrizes (uma vez fixada uma base para V), as matrizes $\rho'(g)$ e $\rho(g)$ são semelhantes para todo g e através da mesma mudança de coordenadas dada pelo isomorfismo T . Assim, as ações dadas pelas duas representações ρ, ρ' de G em $\text{GL}(V)$ são essencialmente as mesmas, pois diferem apenas por uma mudança de coordenadas em V .

1.39 Definição. Sejam V, W espaços vetoriais e

$$\begin{aligned} \rho_V : G &\longrightarrow \text{GL}(V), \\ \rho_W : G &\longrightarrow \text{GL}(W), \end{aligned}$$

representações.

Dizemos que um morfismo linear $T : V \longrightarrow W$ é **G -equivariante** se ele preserva a ação de G dada pelas representações:

$$T(g \cdot v) = g \cdot T(v),$$

ou seja,

$$T(\rho_V(g)v) = \rho_W(g)T(v)$$

para todos $g \in G, v \in V$.

T é também chamado um **entrelaçador** (ou **operador de entrelaçamento**).

O subespaço dos morfismos lineares G -equivariantes em $\text{Hom}(V, W)$ será denotado por

$$\text{Hom}_G(V, W).$$

□

1.5.1 Representações Irredutíveis

Podemos criar novas representações a partir de representações dadas:

1.40 Definição. Seja G um grupo de Lie e $\rho_1, \dots, \rho_k$ representações de G agindo sobre os espaços vetoriais $V_1, \dots, V_k$, respectivamente.

Sua **soma direta** é a representação $\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_k$ agindo sobre a soma direta $V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ dos espaços vetoriais definida por

$$(\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_k)(g)(v_1, \dots, v_k) = (\rho_1(g)v_1, \dots, \rho_k(g)v_k).$$

Seu **produto tensorial** é a representação $\rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_k$ agindo sobre o produto tensorial $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ dos espaços vetoriais definido por

$$(\rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_k)(g)(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = \rho_1(g)v_1 \otimes \dots \otimes \rho_k(g)v_k.$$

□

Em termos de ações

$$g \cdot (v_1, \dots, v_k) = (g \cdot v_1, \dots, g \cdot v_k)$$

e

$$g \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = g \cdot v_1 \otimes \dots \otimes g \cdot v_k.$$

Em termos matriciais, uma vez escolhidas bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$ para $V_1, \dots, V_k$, se $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{B}_k$ temos

$$[\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_k (g)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [\rho_1 (g)]_{\mathcal{B}_1} & & \\ & \ddots & \\ & & [\rho_k (g)]_{\mathcal{B}_k} \end{bmatrix},$$

isto é, a matriz de $\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_k (g)$ na base $\mathcal{B}$ é uma matriz em blocos.

1.41 Definição. Seja $\rho : G \longrightarrow \text{GL}(V)$ uma representação.

Dizemos que um subespaço W de V é **invariante** sob a ação de G definida por ρ se

$$g \cdot w \in W$$

para todo $w \in W$ e para todo $g \in G$.

Dizemos que ρ é uma **representação irredutível** se os únicos subespaços invariantes de ρ são os subespaços triviais 0 e V . $\square$

Em outras palavras,

$$g \cdot W \subset W$$

para todo $g \in G$. Em particular, dado $w \in W$, temos

$$g \cdot (g^{-1} \cdot w) = e \cdot w = w,$$

de modo que, como $g^{-1} \cdot W \subset W$, temos $g \cdot W \supset W$ também. Concluimos que W é invariante sob ρ se e somente se

$$g \cdot W = W$$

para todo $g \in G$. Se W tem dimensão finita, segue que $\rho(g)|_W \in \text{GL}(W)$ para todo $g \in G$.

Representações irredutíveis são os elementos de construção de representações de grupos de Lie. Se W é invariante sob ρ , então existe uma subrepresentação de G agindo em W

$$\rho_W : G \longrightarrow \text{GL}(W)$$

dada por

$$\rho(g) = \rho(g)|_W.$$

Quando uma representação é irredutível, ela não possui nenhuma subrepresentação própria não nula. Se

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$$

é uma decomposição em soma direta de V por subespaços invariantes sob ρ e denotamos

$$\rho_k = \rho|_{W_k},$$

então podemos escrever

$$\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_k.$$

1.42 Definição. Dizemos que uma representação de um grupo de Lie é **completamente redutível** se ela é isomorfa a uma soma direta finita de representações irredutíveis. $\square$

Observe que em particular uma representação irredutível é completamente redutível.

1.43 Proposição. *Se G é um grupo de Lie compacto, então toda representação dele é completamente redutível.*

Prova: Veja [Hall], p. 93. $\blacksquare$

Os grupos de gauge que aparecem em teoria quântica de campos são compactos (o grupo de Lorentz da relatividade geral não é compacto) e as partículas elementares correspondem a representações irredutíveis de tais grupos.

1.44 Proposição. *Toda representação sobre um espaço vetorial unidimensional é irredutível.*

Prova: Pois os únicos subespaços de um espaço vetorial unidimensional V são 0 e V . $\blacksquare$

1.45 Teorema (Lema de Schur). *Sejam V um espaço vetorial complexo e $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ uma representação irredutível.*

Se $T \in \text{Hom}_G(V)$ (isto é, T é G -equivariante com relação à ação dada por ρ), então

$$T = \lambda \text{id}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{C}$.

Prova: Como V é complexo, T possui pelo menos um autovalor λ . Seja

$$W = \ker(T - \lambda \text{id})$$

o autoespaço associado a λ . Se $v \in W$, então

$$\begin{aligned} T(\rho(g)v) &= \rho(g)(Tv) \\ &= \rho(g)(\lambda v) \\ &= \lambda \rho(g)v, \end{aligned}$$

de modo que $\rho(g)v \in W$ também, de modo que os autoespaços de T são invariantes pela representação ρ . Como ρ é irredutível, concluímos que $W = V$ e portanto $T = \lambda \text{id}$. $\blacksquare$

1.46 Corolário. *Qualquer representação irredutível de um grupo de Lie comutativo é unidimensional.*

Prova: Pois qualquer $\rho(g)$ comuta com todos os outros, logo $\rho(g)$ é um múltiplo da identidade. $\blacksquare$

1.47 Corolário. *Toda representação de um grupo de Lie comutativo compacto é isomorfa a uma soma direta de representações unidimensionais.*

Outra maneira de ver isso é lembrar que operadores que comutam são simultaneamente diagonalizáveis e no caso irredutível o único espaço invariante não nulo é V .

1.6 Representações Unitárias

No caso de representações complexas, as mais interessantes do ponto de vista da Física Quântica são aquelas que preservam o produto hermitiano:

1.48 Definição. Seja V um espaço vetorial hermitiano de dimensão n . Dizemos que uma representação $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ é **unitária** se

$$\rho(G) \subset \text{U}(n).$$

$\square$

Em outras palavras, $\rho(g)$ é um operador unitário para todo $g \in G$, isto é,

$$\langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle = \langle v, w \rangle$$

para todo $g \in G$ e para todos $v, w \in V$.

1.49 Teorema. *Toda representação unitária em um espaço hermitiano de dimensão finita é completamente redutível.*

Prova: Seja $\rho : G \longrightarrow \text{GL}(V)$ uma representação unitária em um espaço hermitiano V . Se ρ não é irredutível, então existe um subespaço invariante sob a ação de ρ , próprio e não nulo, $W \subset V$. Como ρ é unitária, segue que $W^\perp$ também é invariante sob a ação de ρ , logo

$$\rho = \rho_W \oplus \rho_{W^\perp}.$$

Se ρ_W e $\rho_{W^\perp}$ são irredutíveis, isto termina a demonstração. Caso contrário, aplicamos o mesmo argumento a ρ_W e/ou $\rho_{W^\perp}$; como a dimensão de V é finita, eventualmente o argumento termina e obtemos uma decomposição em soma direta finita

$$\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_k.$$

■

1.50 Teorema. *Se G é um grupo de Lie compacto, toda representação é equivalente a uma representação unitária.*

1.51 Exemplo (Aplicação em Física Quântica). Quando temos um grupo G agindo em um sistema quântico, isto é, em um espaço de Hilbert hermitiano de estados V , ele age através de uma representação unitária $\rho : G \longrightarrow \text{GL}(V)$. Em particular, podemos escrever $\rho(g) = e^A$ para uma matriz anti-hermitiana A , ou seja, a álgebra de Lie de $U(n)$ é o subespaço das matrizes anti-hermitianas (como veremos no próximo capítulo). Ao invés de usarmos A , podemos usar $B = iA$, que será uma matriz hermitiana, e operadores hermitianos correspondem a observáveis em mecânica quântica, cujos autovalores podem ser experimentalmente medidos. □

1.7 $SU(2)$ é um recobrimento duplo de $SO(3)$

Mostraremos que existe um homomorfismo

$$\rho : SU_2 \longrightarrow SO_3$$

que é um recobrimento duplo. Como SU_2 é difeomorfo a S^3 (veja [Naber], p. 38, Teorema 1.1.4), isso também implicará que SO_3 é difeomorfo a $\mathbb{RP}^3$, como veremos (veja também [Hall], p. 21, Proposição 1.17). Isso implica que vendo SO_3 como um subgrupo de $GL_3(\mathbb{C})$, este homomorfismo também é uma representação de SO_3 em $GL_3(\mathbb{C})$.

Lembre-se que SU_2 consiste das matrizes unitárias complexas 2×2 com determinante 1, isto é, das matrizes que satisfazem $U^*U = I$, onde a transposta conjugada é definida por

$$(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}.$$

O espaço vetorial *real* V das matrizes complexas hermitianas (autoadjuntas, isto é, $A^* = A$) 2×2 com traço nulo é isomorfo a $\mathbb{R}^3$. De fato, um elemento de V tem a forma geral

$$X = \begin{bmatrix} x^3 & x^1 - x^2i \\ x^1 + x^2i & -x^3 \end{bmatrix}$$

e as **matrizes de Pauli**

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \sigma_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \\ \sigma_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

formam uma base para este espaço, isto é, $X = x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3$. Com esta identificação, o produto interno canônico de $\mathbb{R}^3$ pode ser calculado como

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(XY)$$

como pode ser verificado por cálculo direto.

Defina para cada $U \in \mathrm{SU}_2$ um operador linear $\Phi_U : V \longrightarrow V$ por

$$\Phi_U(X) = UXU^{-1}.$$

De fato, como U é unitário, temos

$$(UXU^{-1})^* = (U^{-1})^* X^* U^* = UXU^{-1}$$

e, usando a propriedade do traço do produto $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$,

$$\operatorname{tr}(UXU^{-1}) = \operatorname{tr}(U^{-1}UX) = \operatorname{tr} X = 0,$$

de modo que $\Phi_U(X) \in V$. Afirmamos que a aplicação

$$U \longmapsto \Phi_U$$

é uma representação

$$\rho : \mathrm{SU}_2 \longrightarrow \mathrm{GL}(V).$$

Com efeito, para ver que $\rho(U_1 U_2) = \rho(U_1) \rho(U_2)$, isto é, que

$$\Phi_{U_1 U_2} = \Phi_{U_1} \circ \Phi_{U_2},$$

é só notar que

$$\begin{aligned}\Phi_{U_1 U_2}(X) &= (U_1 U_2) X (U_1 U_2)^{-1} \\ &= (U_1 U_2) X (U_2^{-1} U_1^{-1}) \\ &= U_1 (U_2 X U_2^{-1}) U_1^{-1} \\ &= \Phi_{U_1}[\Phi_{U_2}(X)].\end{aligned}$$

Além disso, o operador linear Φ_U é uma isometria, pois

$$\begin{aligned}\langle \Phi_U(X), \Phi_U(Y) \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\Phi_U(X) \Phi_U(Y)) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(UXU^{-1}UYU^{-1}) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(UXYU^{-1}) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(U^{-1}UXY) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(XY) \\ &= \langle X, Y \rangle.\end{aligned}$$

Logo, o homomorfismo ρ na verdade é um homomorfismo

$$\rho : \mathrm{SU}_2 \longrightarrow \mathrm{O}_3 .$$

Como o homomorfismo ρ é contínuo e SU_2 é conexo (pois é difeomorfo a $\mathbb{S}^3$), segue que o homomorfismo ρ no final é um homomorfismo

$$\rho : \mathrm{SU}_2 \longrightarrow \mathrm{SO}_3 .$$

Ele é pelo menos dois para um, pois

$$\Phi_U = \Phi_{-U} .$$

Na verdade ρ é exatamente dois para um, pois se $\rho(U_1) = \rho(U_2)$, então

$$\rho(U_1 U_2^{-1}) = \mathrm{id},$$

isto é, $\Phi_{U_1 U_2^{-1}}$ é operador identidade, o que significa que $U_1 U_2^{-1}$ comuta com todas as matrizes $X \in V$:

$$(U_1 U_2) X (U_1 U_2)^{-1} = X \implies (U_1 U_2) X = X (U_1 U_2) .$$

Uma matriz que comuta com todas as matrizes hermitianas com traço nulo só pode ser um múltiplo da identidade (exercício: basta considerar matrizes A que comutam com as matrizes de Pauli, já que elas formam uma base para V , obtendo equações para as entradas de A cujas soluções mostram que A tem que ser um múltiplo da identidade). Como os únicos múltiplos da identidade em SU_2 são I e $-I$, segue que $U_1 = \pm U_2$.

Para ver que ρ é sobrejetiva, é só observar que toda rotação em $\mathbb{R}^3$ pode ser representada pela conjugação de um quaternião unitário. Mais precisamente, se $u = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ é um quaternião unitário, então a rotação de $\mathbb{R}^3$ com eixo u e ângulo 2θ é dada pela conjugação

$$R(p) = q^{-1} p q$$

onde $q = \cos \theta + u \sin \theta$ e $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$ (para uma demonstração deste fato, veja [Stillwell], pp. 14-15).

Portanto, ρ é uma aplicação diferenciável sobrejetiva que identifica pontos antipodais de SU_2 , e é possível mostrar que ρ é um recobrimento duplo de SO_3 e portanto que SO_3 é difeomorfo a $\mathbb{RP}^3$ (para detalhes, veja [Naber], pp. 398-399). O homomorfismo $\rho : \mathrm{SU}_2 \longrightarrow \mathrm{SO}_3$ é chamado a **aplicação spinor**. Para o significado físico deste homomorfismo, veja [Naber], p. 399.

1.8 Exercícios

Para alguns dos exercícios a seguir, veja as referências [Hall], [Stillwell] e [Warner].

1.52 Exercício. Prove a Proposição 1.5.

1.53 Exercício. Prove que o produto direto de dois grupos de Lie, considerado como a variedade produto, é um grupo de Lie.

1.54 Exercício. Mostre que o grupo linear geral complexo $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, o grupo linear especial complexo $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, o grupo unitário U_n e o grupo unitário especial SU_n são grupos de Lie e ache suas dimensões.

1.55 Exercício. Prove que o grupo linear geral $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ e o grupo linear especial $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ possuem exatamente 2 componentes conexas.

1.56 Exercício. Prove que o grupo ortogonal O_n possui exatamente 2 componentes conexas e que SO_n é conexo.

1.57 Exercício. Prove que o grupo de Lorentz $O_{1,3}$ possui exatamente 4 componentes conexas e que $SO_{1,3}$ possui exatamente duas componentes conexas.

1.58 Exercício. Mostre que o grupo de Lorentz $O_{1,3}$ e $SO_{1,3}$ não são compactos.

1.59 Exercício. Mostre que $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$, U_n e SU_n são conexos.

1.60 Exercício. Prove que U_1 é difeomorfo a $\mathbb{S}^1$ e que SU_2 é difeomorfo a $\mathbb{S}^3$.

1.61 Exercício. Prove que SO_3 é difeomorfo a $\mathbb{RP}^3$.

1.62 Exercício. Prove que U_n é difeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times SU_n$.

Capítulo 2

Representações de Grupos Finitos

Grupos finitos são grupos de Lie compactos, logo todas as suas representações são completamente redutíveis. Se eles forem comutativos, suas representações deles são isomorfas a uma soma direta de representações unidimensionais.

2.1 Proposição. *Sejam G um grupo finito, V um espaço vetorial complexo unidimensional e $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ uma representação.*

Então $\rho(g)$ é a multiplicação por um número complexo, de modo que a representação ρ pode ser vista simplesmente como uma função complexa

$$\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$$

que satisfaz $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ e $\rho(e) = 1$.

Além disso, $\rho(g)$ é uma raiz da identidade, cuja ordem é algum divisor da cardinalidade de G .

Prova: Duas transformações lineares em um espaço vetorial complexo unidimensional são equivalentes se e somente se elas são a multiplicação pelo mesmo número complexo, logo a classe de equivalência de uma representação é determinada completamente pela função complexa ρ .

Além disso, para qualquer $g \in G$ temos

$$g^{\#G} = e,$$

logo

$$\rho(g)^{\#G} = 1.$$

■

2.2 Exemplo (Representações Irredutíveis de $\mathbb{Z}_n$). Se $G = \mathbb{Z}_n$, para cada inteiro $0 \leq k \leq n$ e gerador g de $\mathbb{Z}_n$ (isto é, um elemento cujas potências geram todos os elementos de $\mathbb{Z}_n$), definimos a representação

$$\rho_n(g) = e^{2\pi i \frac{k}{n}},$$

de modo que

$$\rho_n(g^m) = e^{2\pi i \frac{mk}{n}}$$

Desta forma, obtemos todas as n representações irredutíveis distintas de $\mathbb{Z}_n$ em um espaço vetorial complexo unidimensional. Mais tarde obteremos da fórmula

$$1^2 + \cdots + 1^2 = n = \#\mathbb{Z}_n$$

que estas são todas as representações irredutíveis do grupo comutativo $\mathbb{Z}_n$. □

2.3 Exemplo (Representações Irredutíveis de S_3). Considere o grupo simétrico S_3 como o grupo de simetrias do triângulo. Para determinar as representações unidimensionais ρ de S_3 , escrevemos

$$\rho(hgh^{-1}g^{-1}) = 1.$$

Se g é uma reflexão, temos $g^2 = e$, de modo que $\rho(g)^2 = 1$, logo

$$\rho(g) = \pm 1.$$

Se g é uma rotação e h é uma reflexão, então

$$hgh^{-1} = g^{-1}$$

(porque $(hgh^{-1})g = (hgh)g = (hg)(hg) = e$, pois hg é uma reflexão, composta de uma rotação e uma reflexão). Daí,

$$hgh^{-1}g^{-1} = (g^{-1})^2,$$

e como toda rotação r em S_3 é da forma $r = (g^{-1})^2$ para alguma rotação g , concluímos que

$$\rho(r) = 1.$$

Portanto, as representações unidimensionais ρ de S_3 satisfazem

$$\rho(g) = \begin{cases} 1 & \text{se } g \text{ é uma rotação,} \\ \pm 1 & \text{se } g \text{ é uma reflexão.} \end{cases}$$

Isso implica que há apenas duas possibilidades para a função $\rho : S_3 \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\rho \equiv 1$$

e, porque o produto de uma rotação e uma reflexão é uma reflexão (ou seja, se $\rho(g) \neq 1$ para algum reflexão g , isto é, $\rho(g) = -1$, então $\rho(h) = -1$ para todas as reflexões h),

$$\rho(g) = \begin{cases} 1 & \text{se } g \text{ é uma rotação,} \\ -1 & \text{se } g \text{ é uma reflexão.} \end{cases}$$

Mais tarde veremos que estas são as únicas duas representações unidimensionais para qualquer grupo simétrico S_n .

Além destas representações unidimensionais, S_3 possui a representação natural bidimensional que é a ação em $\mathbb{R}^2$ dadas pelas simetrias do triângulo, ou seja,

$$\rho : S_3 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^2) = \text{GL}_2(\mathbb{R}) \subset \text{GL}_2(\mathbb{C}).$$

Esta representação é obviamente irredutível, já que os únicos subespaços invariantes são 0 e $\mathbb{R}^2$.

Destas três representações duas são unidimensionais e uma é bidimensional; segue então da equação

$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = \#S_3,$$

que elas são as únicas representações irredutíveis de S_3 , a menos de equivalência. $\square$

2.4 Proposição. *Representações de grupos finitos em espaços vetoriais complexos hermitianos são completamente redutíveis.*

Prova: O argumento é o mesmo para representações unitárias do capítulo anterior (Teorema 1.49). Dada uma representação ρ de um grupo finito G sobre um espaço vetorial complexo V , basta apenas construir um produto hermitiano em V em relação ao qual ρ seja unitária. Como G é finito, se $\langle, \rangle$ é o produto hermitiano original de V definimos o **produto hermitiano induzido por ρ**

$$\langle v, w \rangle_\rho := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \langle \rho(g) v, \rho(g) w \rangle.$$

Em relação a este produto interno, ρ é unitária. De fato, para todo $h \in H$ temos

$$\begin{aligned} \langle \rho(h) v, \rho(h) w \rangle_\rho &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \langle \rho(g) \rho(h) v, \rho(g) \rho(h) w \rangle \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \langle \rho(gh) v, \rho(gh) w \rangle \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{k \in G} \langle \rho(k) v, \rho(k) w \rangle \\ &= \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

■

2.1 Relações de Ortogonalidade

2.5 Lema. *Sejam V_1, V_2 são espaços vetoriais e*

$$\begin{aligned} \rho_1 : G &\longrightarrow \mathrm{GL}(V_1), \\ \rho_2 : G &\longrightarrow \mathrm{GL}(V_2), \end{aligned}$$

representações irredutíveis de G .

Se ρ_1 e ρ_2 não são equivalentes, então $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = 0$.

Prova: Seja $T \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$. Note que os subespaços $\ker T$ e $\mathrm{im} T$ são sempre G -invariantes, independentemente das representações serem irredutíveis ou não. De fato pois se $g \in G$ é qualquer e $v_1 \in \ker T$, então

$$T(g \cdot v_1) = g \cdot (Tv_1) = g \cdot 0 = 0,$$

de modo que $g \cdot v_1 \in \ker T$; se $v_2 \in \mathrm{im} T$, de modo que $v_2 = Tv_1$ para algum $v_1 \in V_1$, então

$$g \cdot v_2 = g \cdot (Tv_1) = T(g \cdot v_1),$$

de modo que $g \cdot v_2 \in \mathrm{im} T$.

Como ρ_1 é irredutível, segue que $\ker T = 0$ ou $\ker T = V_1$. Este último caso é equivalente a $T = 0$. No primeiro caso, como ρ_2 é irredutível, segue que $\mathrm{im} T = V_2$, logo T é um isomorfismo, contrariando o fato que ρ_1 e ρ_2 não são equivalentes. ■

Em outras palavras, se não existe um isomorfismo equivariante entre representações irredutíveis, então o único morfismo equivariante entre elas é o morfismo nulo.

2.6 Definição. Dadas as representações ρ_1, ρ_2 de G em V_1, V_2 , elas induzem uma representação

$$\rho_{\mathrm{Hom}} : G \longrightarrow \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$$

definindo

$$\rho_{\mathrm{Hom}}(g) T = \rho_2(g) T \rho_1(g)^{-1}.$$

□

2.7 Corolário. Nas condições do lema, dado $S \in \text{Hom}(V_1, V_2)$ defina $T \in \text{Hom}(V_1, V_2)$ por

$$T = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho_{\text{Hom}}(g) S.$$

Se ρ_1 e ρ_2 não são equivalentes, então $T = 0$.

Prova: Segue do lema anterior, porque $T \in \text{Hom}_G(V_1, V_2)$. De fato

$$\begin{aligned} \rho_2(g) T \rho_1(g)^{-1} &= \rho_2(g) \left(\frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \rho_2(h) S \rho_1(h)^{-1} \right) \rho_1(g)^{-1} \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \rho_2(g) \rho_2(h) S \rho_1(h)^{-1} \rho_1(g)^{-1} \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \rho_2(gh) S \rho_1(gh)^{-1} \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{k \in G} \rho_2(k) S \rho_1(k)^{-1} \\ &= T. \end{aligned}$$

■

2.8 Corolário. Seja V espaço vetorial complexo e $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ uma representação irredutível de G . Dado $S \in \text{Hom}(V)$ defina $T \in \text{Hom}(V)$ por

$$T = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho_{\text{Hom}}(g) S.$$

Então

$$T = \lambda I$$

para

$$\lambda = \frac{1}{\dim V} \text{tr } S.$$

Prova: Como vimos no corolário anterior, $T \in \text{Hom}_G(V)$. Pelo Lema de Schur, $T = \lambda I$. Da definição

$$T = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g) S \rho(g)^{-1}$$

segue que

$$\text{tr } T = \text{tr } S,$$

logo

$$\text{tr } S = \text{tr } (\lambda I) = \lambda \dim V.$$

■

2.9 Definição. Seja G um grupo finito. Dadas duas funções $\phi, \psi : G \rightarrow \mathbb{C}$, definimos seu produto interno por

$$\langle \phi, \psi \rangle_{L^2(G)} = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \phi(g) \overline{\psi(g)}.$$

□

2.10 Corolário (Relações de Ortogonalidade). *Sejam V_1, V_2 são espaços vetoriais de dimensão finita e*

$$\rho_1 : G \rightarrow \text{GL}(V_1),$$

$$\rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(V_2),$$

representações irredutíveis de G . Escolhendo bases em V_1 e V_2 , considere os elementos das matrizes $(\rho_1)_j^i$ e $(\rho_2)_l^k$ em relação a estas bases como funções complexas.

Se ρ_1 e ρ_2 são representações unitárias não equivalentes, então

$$\left\langle (\rho_1)_j^i, (\rho_2)_l^k \right\rangle_{L^2(G)} = 0$$

para todos i, j, k, l .

Prova: Segue do Lema 2.5: independentemente de S , a matriz de T tem entradas

$$T_l^i = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sum_{j, k} [(\rho_2)(g)]_j^i S_k^j [\rho_1(g)^{-1}]_l^k$$

de modo que, como $T = 0$,

$$\sum_{j, k} \left(\sum_{g \in G} [(\rho_2)(g)]_j^i [\rho_1(g)^{-1}]_l^k \right) S_k^j = 0$$

para todo $S_k^j \in \mathbb{C}$, para todos i, l . Vendo as equações acima como um sistema de equações lineares nas variáveis S_k^j , segue que os coeficientes deste sistema devem se anular, ou seja,

$$\sum_{g \in G} [(\rho_2)(g)]_j^i [\rho_1(g)^{-1}]_l^k = 0$$

para todos i, j, k, l . Como ρ_1 é uma matriz unitária, temos

$$[\rho_1(g)^{-1}]_l^k = \overline{[\rho_1(g)]_k^l},$$

donde segue o resultado. ■

Em outras palavras, as entradas matriciais de representações unitárias irredutíveis não equivalentes são ortogonais em L^2 . Como vimos, podemos escolher um produto hermitiano em V em relação ao qual as representações são unitárias.

2.11 Corolário (Relações de Ortogonalidade). *Seja V espaço vetorial complexo de dimensão finita e $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ uma representação de G . Escolhendo uma base em V , considere os elementos da matriz ρ_j^i em relação a esta base como uma função complexa.*

Se ρ é uma representação unitária irredutível, então

$$\langle \rho_j^i, \rho_l^k \rangle_{L^2(G)} = \begin{cases} \frac{1}{\dim V} & \text{se } i = k \text{ e } j = l, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

para todos i, j, k, l .

Prova: Segue do Corolário 2.7 como na demonstração do corolário anterior que

$$\langle \rho_j^i, \rho_l^k \rangle_{L^2(G)} = \frac{1}{\dim V} \delta^{ik} \delta_{jl}.$$

■

Em outras palavras, as entradas matriciais de uma representação unitária irredutível ortogonais em L^2 e tem comprimento $\sqrt{1/n}$.

2.2 Caráteres de Representações

Nesta seção V denotará sempre um espaço vetorial de dimensão finita.

2.12 Definição. Seja $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ uma representação de um grupo G em um espaço $\mathbb{K}$ -vetorial.

A dimensão de V é chamada o **grau** da representação ρ .

O **caráter** de ρ é a função $\chi = \chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$\chi(g) = \text{tr } \rho(g).$$

□

2.13 Proposição. Valem

(i)

$$\chi(e) = \dim V.$$

(ii) χ é constante nas classes de conjugações de G (ou seja, é uma **função central**).

(iii) Se G é um grupo finito, então

$$\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}.$$

Prova: (ii) Temos

$$\begin{aligned} \chi(hgh^{-1}) &= \text{tr} [\rho(h) \rho(g) \rho(h^{-1})] \\ &= \text{tr } \rho(h) \text{tr } \rho(g) \text{tr } \rho(h^{-1}) \\ &= \text{tr } \rho(g) \text{tr } \rho(h) \text{tr } [\rho(h)]^{-1} \\ &= \text{tr } \rho(g) \\ &= \chi(g). \end{aligned}$$

(iii) Em relação ao produto hermitiano induzido por ρ , ρ é uma representação unitária, logo

$$\begin{aligned} \langle \rho(g^{-1})v, w \rangle_\rho &= \langle \rho(g^{-1})v, \rho(g^{-1})\rho(g)w \rangle_\rho \\ &= \langle v, \rho(g)w \rangle_\rho \end{aligned}$$

para todos os vetores $v, w \in V$, de modo que (usando o mesmo símbolo para a adjunta nos casos real e complexo)

$$\rho(g)^* = \rho(g^{-1}).$$

Segue que

$$\begin{aligned}\chi(g^{-1}) &= \text{tr } \rho(g^{-1}) \\ &= \text{tr } [\rho(g)^*] \\ &= \overline{\text{tr } \rho(g)} \\ &= \overline{\chi(g)}.\end{aligned}$$

■

2.14 Proposição (Relações de Ortogonalidade). *Se ρ, σ são representações irredutíveis não equivalentes, então*

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle_{L^2(G)} = 0.$$

Se ρ é uma representação irredutível, então

$$\langle \chi, \chi \rangle_{L^2(G)} = 1.$$

Prova: Segue das relações ortogonais (Corolário 2.11), pois

$$\begin{aligned}\langle \chi_1, \chi_2 \rangle_{L^2(G)} &= \langle \text{tr } \rho_1, \text{tr } \rho_2 \rangle_{L^2(G)} \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \text{tr } \rho_1(g) \overline{\text{tr } \rho_2(g)} \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sum_{i=1}^{\dim V} [\rho_1(g)]_i^i \overline{\sum_{j=1}^{\dim V} [\rho_2(g)]_j^j} \\ &= \sum_{i,j=1}^{\dim V} \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} [\rho_1(g)]_i^i \overline{[\rho_2(g)]_j^j} \\ &= \sum_{i,j=1}^{\dim V} \left\langle (\rho_1)_i^i, (\rho_2)_j^j \right\rangle_{L^2(G)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

■

2.15 Proposição. *Se*

$$\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k$$

é uma decomposição da representação ρ em representações irredutíveis $\rho_1, \dots, \rho_k$ então

$$\chi_\rho = \sum_{i=1}^k \chi_{\rho_i}.$$

Logo, se σ é outra representação irredutível com carácter χ_σ , então

$$\langle \chi_\rho, \chi_\sigma \rangle_{L^2(G)} = \langle \chi_{\rho_1}, \chi_\sigma \rangle_{L^2(G)} + \cdots + \langle \chi_{\rho_k}, \chi_\sigma \rangle_{L^2(G)}.$$

Consequentemente, $\langle \chi_\rho, \chi_\sigma \rangle_{L^2(G)}$ é o número de termos na decomposição de ρ que são isomorfos a σ . Em particular, este número independe da escolha da decomposição.

Prova: A primeira identidade segue diretamente da representação matricial da soma direta e a segunda segue desta. A conclusão segue das relações de ortogonalidade (Proposição 2.10):

$$\langle \chi_{\rho_i}, \chi_\sigma \rangle_{L^2(G)} = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho_i \text{ é equivalente a } \sigma, \\ 0 & \text{se } \rho_i \text{ não é equivalente a } \sigma. \end{cases}$$

■

2.16 Corolário. *Duas representações são equivalentes se e somente se elas tem o mesmo caráter.*

Prova: Se ρ, σ tem o mesmo caráter χ , então elas tem a mesma decomposição em representações irredutíveis. De fato, se

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_k, \\ \sigma &= \sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_l, \end{aligned}$$

então

$$1 = \langle \chi_\sigma, \chi_{\sigma_i} \rangle_{L^2(G)} = \langle \chi, \chi_{\sigma_i} \rangle_{L^2(G)} = \langle \chi_\rho, \chi_{\sigma_i} \rangle_{L^2(G)}$$

de modo que todo σ_i aparece na decomposição de ρ e analogamente

$$1 = \langle \chi_\rho, \chi_{\rho_j} \rangle_{L^2(G)} = \langle \chi, \chi_{\rho_j} \rangle_{L^2(G)} = \langle \chi_\sigma, \chi_{\rho_j} \rangle_{L^2(G)} = 1$$

de modo que todo ρ_j aparece na decomposição de σ . Em particular, $l = k$.

A recíproca é óbvia, pois duas representações equivalentes tem decomposições equivalentes. ■

2.17 Corolário. *Todo caráter χ de uma representação ρ pode ser escrito como*

$$\chi = p_1 \chi_1 + \dots + p_k \chi_k$$

para caracteres ortogonais $\chi_1, \dots, \chi_k$.

Consequentemente,

$$\langle \chi, \chi \rangle_{L^2(G)} = p_1^2 + \dots + p_k^2.$$

Em particular, ρ é irredutível se e somente se $\langle \chi, \chi \rangle_{L^2(G)} = 1$.

Note que p_i é o número de vezes que uma mesma (a menos de equivalência) representação irredutível ocorre na decomposição de ρ .

2.18 Proposição. *Se*

$$\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_k$$

é uma decomposição da representação ρ de G em V , então

$$\dim \operatorname{Hom}_G(V) = p_1^2 + \dots + p_l^2,$$

onde p_i é o número de vezes que uma representação irredutível ocorre em V

Prova: Se

$$\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k$$

é uma decomposição da representação ρ de G em V em representações irredutíveis $\rho_1, \dots, \rho_k$ de G nos subespaços $V_1, \dots, V_k$ com $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ e σ é uma representação irredutível de G em W , temos

$$\text{Hom}_G(V, W) = \text{Hom}_G(V_1, W) \oplus \cdots \oplus \text{Hom}_G(V_k, W)$$

Pelo Lema de Schur e o Lema 2.5, cada $\text{Hom}_G(V_i, W)$ é zero unidimensional ou dimensional, dependendo de ρ_i ser equivalente a σ ou não. Segue da Proposição 2.15 que

$$\langle \chi_\rho, \chi_\sigma \rangle_{L^2(G)} = \dim \text{Hom}_G(V, W).$$

Tomando $V = W$ e $\rho = \sigma$, o resultado segue do Corolário 2.17. ■

2.3 Ações em Espaços de Funções

2.19 Definição. Seja M um conjunto e denote por

$$\mathcal{F}(M) = \mathbb{C}^M = \{f : M \longrightarrow \mathbb{C}\}$$

o espaço vetorial das funções complexas em M . □

Note que se M é um conjunto finito, então $\mathcal{F}(M) = \mathbb{C}^M \cong \mathbb{C}^{\#M}$.

2.20 Definição. Se $\cdot$ é uma ação de um grupo G em um conjunto M , então ela induz uma representação em $\mathcal{F}(M)$

$$\rho_M : G \longrightarrow \text{GL}(\mathcal{F}(M))$$

dada por

$$[\rho_M(g)f](x) = f(g^{-1} \cdot x).$$

□

Vendo a representação como uma ação de G em $\mathcal{F}(M)$, escrevemos também

$$g \cdot f = f \circ g^{-1}$$

2.21 Proposição. A representação de G em $\mathcal{F}(M)$ é de fato uma representação.

Prova: Temos

$$\begin{aligned} g \cdot (h \cdot f) &= g \cdot (f \circ h^{-1}) \\ &= (f \circ h^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= f \circ (h^{-1} \circ g^{-1}) \\ &= f \circ (g \circ h)^{-1} \\ &= (gh) \cdot f. \end{aligned}$$

■

A representação ρ_M não é irredutível em geral, pois o subespaço vetorial unidimensional das funções constantes em $\mathcal{F}(M)$ é invariante por ρ_M (se f é uma função constante, $f \circ g^{-1}$ também é, e na verdade é a própria f). Ela só é irredutível no caso trivial em que este subespaço é todo $\mathcal{F}(M)$, isto é, quando M possui um único elemento.

2.22 Proposição. Se M se decompõe em órbitas pela ação de G na forma

$$M = M_1 \cup \dots \cup M_k,$$

então

$$\rho_M = \rho_{M_1} \oplus \dots \oplus \rho_{M_k},$$

onde ρ_{M_i} é a ação de G restrita ao subespaço

$$\mathcal{F}(M_i) = \{f : M \rightarrow \mathbb{C} : f|_{M \setminus M_i} = 0\}.$$

Prova: Cada função $f \in \mathcal{F}(M)$ pode ser escrita de maneira única na forma

$$f = f_1 + \dots + f_k$$

com $f_i \in \mathcal{F}(M_i)$, logo

$$\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}(M_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{F}(M_k).$$

Como M_i é uma órbita de M pela ação de G , cada $\mathcal{F}(M_i)$ é invariante pela ação ρ_M : se $f_i \in \mathcal{F}(M_i)$, então

$$\begin{aligned} [\rho_M(g) f_i] x &= (g \cdot f_i)(x) \\ &= f_i(g^{-1} \cdot x) \\ &= 0 \quad \text{se } x \notin M_i, \end{aligned}$$

de modo que $\rho_M(g) f_i \in \mathcal{F}(M_i)$ para todo $g \in G$. ■

2.23 Proposição (Protótipo das Fórmulas de Caráter). O caráter da representação ρ_M é dado por

$$\chi^{\rho_M}(g) = \# \{\text{pontos fixos de } g\}.$$

isto é,

$$\chi^{\rho_M}(g) = \# \{x \in M : g \cdot x = x\}.$$

Em particular, se G age livremente em M , então

$$\chi^{\rho_M}(g) = \begin{cases} \#G & \text{se } g = e, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prova: Considere a base canônica

$$\mathcal{B} = \{\delta_x : x \in M\}$$

para o espaço $\mathcal{F}(M)$ onde a função delta de Dirac δ_x é definida da maneira usual por

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x, \\ 0 & \text{se } y \neq x. \end{cases}$$

De fato, estas funções são claramente LI e toda função $f \in \mathcal{F}(M)$ se escreve na forma

$$f = \sum_{x \in M} \delta_x.$$

Temos

$$(g \cdot \delta_x)(y) = \delta_x(g^{-1} \cdot y) = \begin{cases} 1 & \text{se } g^{-1} \cdot y = x, \text{ isto é, } y = g \cdot x, \\ 0 & \text{se } g^{-1} \cdot y \neq x, \text{ isto é, } y \neq g \cdot x, \end{cases}$$

ou seja,

$$g \cdot \delta_x = \delta_{g \cdot x}.$$

Na base $\mathcal{B}$ os elementos diagonais de ρ_M satisfazem

$$[\rho_M(g)]_i^i = \begin{cases} 1 & \text{se } g \cdot x = x, \\ 0 & \text{se } g \cdot x \neq x, \end{cases}$$

logo

$$\chi^{\rho_M}(g) = \text{tr } \rho_M(g) = \# \{\text{pontos fixos de } g\}.$$

■

Todas as fórmulas de carácter são a generalização desta fórmula.

Suponha que M, N são conjuntos finitos, com $m = \#M, n = \#N$. Note que

$$\text{Hom}(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N)) \cong \mathcal{F}(M \times N).$$

De fato,

$$\dim \text{Hom}(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N)) = mn = \dim \mathbb{C}^{M \times N} = \dim \mathcal{F}(M \times N).$$

Mais que isso, podemos definir um isomorfismo natural entre $\mathcal{F}(M \times N)$ e $\text{Hom}(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N))$:

2.24 Proposição. O morfismo

$$\Phi : \mathcal{F}(M \times N) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N))$$

definido por

$$[\Phi(K)(f)](y) = \sum_{x \in M} K(x, y) f(x)$$

para todo $K \in \mathcal{F}(M \times N)$ e para todo $y \in N$ é um isomorfismo natural.

Prova: Para simplificar a notação, denotemos

$$\Phi_K(f) = \Phi(K)(f).$$

Como $\mathcal{F}(M \times N)$ e $\text{Hom}(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N))$ tem a mesma dimensão, para provar que Φ_K é um isomorfismo basta provar que Φ_K é injetiva. Suponha $\Phi_K = 0$, isto é,

$$\sum_{x \in M} K(x, y) f(x) = 0 \quad \text{para todo } f \in \mathcal{F}(M) \text{ e para todo } y \in N.$$

Tomando $f = \delta_z$ para $z \in M$ arbitrário, segue que

$$\sum_{x \in M} K(x, y) \delta_z(x) = K(z, y) = 0$$

para todo $z \in M$ e para todo $y \in N$, ou seja, $K = 0$. ■

Como na Definição 2.6, se G age nos conjuntos M, N e temos as ações induzidas (representações) ρ_M, ρ_N nos espaços vetoriais $\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N)$ respectivamente, estas representações induzem uma representação de G no espaço vetorial $\text{Hom}(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N))$ por

$$\rho_{\text{Hom}}(g)T = \rho_N(g)T\rho_M(g^{-1}).$$

2.25 Proposição. *As representações de G em $\text{Hom}(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N))$ e $\mathcal{F}(N \times M)$ são equivalentes.*

Prova: Precisamos provar que para todo $g \in G$ o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(M \times N) & \xrightarrow{\rho_{M \times N}(g)} & \mathcal{F}(M \times N) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ \text{Hom}(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N)) & \xrightarrow{\rho_{\text{Hom}}(g)} & \text{Hom}(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N)) \end{array}$$

Temos

$$\begin{aligned} \{[\Phi \circ \rho_{M \times N}(g)](K)\}(f)(y) &= [\Phi_{\rho_{M \times N}(g)K}(f)](y) \\ &= [\Phi_{K \circ g^{-1}}(f)](y) \\ &= \sum_{x \in M} K(g^{-1}x, g^{-1}y) f(x), \end{aligned}$$

enquanto que (usando linearidade na passagem da sexta igualdade a seguir)

$$\begin{aligned} \{[\rho_{\text{Hom}}(g) \circ \Phi](K)\}(f)(y) &= \rho_{\text{Hom}}(g)[\Phi_K(f)](y) \\ &= [\rho_N(g) \Phi_K \rho_M(g^{-1})](f)(y) \\ &= \rho_N(g) \Phi_K[\rho_M(g^{-1})(f)](y) \\ &= \rho_N(g) \Phi_K(f)(gy) \\ &= \rho_N(g) \sum_{x \in M} K(x, gy) f(x) \\ &= \sum_{x \in M} K(x, gy) \rho_N(g) f(x) \\ &= \sum_{x \in M} K(x, gy) f(g^{-1}x) \\ &= \sum_{x \in M} K(x, g^{-1}y) f(gx) \\ &= \sum_{x \in M} K(g^{-1}x, g^{-1}y) f(x). \end{aligned}$$

■

2.26 Proposição. *Se G age nos conjuntos finitos M, N , então*

$$\dim \text{Hom}_G(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N)) = \# \{G\text{-órbitas em } M \times N\}.$$

Em particular, tomando $M = N$,

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}_G(\mathcal{F}(M)) &= \# \{G\text{-órbitas em } M \times M\} \\ &= p_1^2 + \cdots + p_k^2. \end{aligned}$$

onde p_i é o número de vezes que a i -ésima representação irredutível de G ocorre em $\mathcal{F}(M)$.

Prova: Por definição,

$$\text{Hom}_G(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N)) = \{T \in \text{Hom}(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N)) : \rho_{\text{Hom}}(g)T = T \text{ para todo } g \in G\}.$$

Pela Proposição 2.24, para todo $T \in \text{Hom}(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N))$ podemos escolher $K \in \mathcal{F}(M \times N)$ tal que

$$T = \Phi_K.$$

Segue da demonstração da proposição anterior que

$$\begin{aligned} T(f)(y) &= \Phi_K(f)(y) \\ &= \sum_{x \in M} K(x, y) f(x) \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} \rho_{\text{Hom}}(g) T(f)(y) &= [\rho_{\text{Hom}}(g) \Phi_K](f)(y) \\ &= \sum_{x \in M} K(g^{-1}x, g^{-1}y) f(x) \end{aligned}$$

para todos $g \in G$, $f \in \mathcal{F}(M)$ e $y \in N$. Portanto, se $T \in \text{Hom}_g(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N))$

$$\sum_{x \in M} K(x, y) f(x) = \sum_{x \in M} K(g^{-1}x, g^{-1}y) f(x)$$

para todos $g \in G$, $f \in \mathcal{F}(M)$ e $y \in N$, de modo que, tomando $f = \delta_z$ para $z \in M$ arbitrário, concluímos que

$$K(x, y) = K(g^{-1}x, g^{-1}y)$$

para todos $g \in G$, $x \in M$ e $y \in N$. Em outras palavras, K é invariante nas órbitas de G em $M \times N$, donde segue o primeiro resultado.

O último resultado segue da Proposição 2.22. ■

2.27 Exemplo. Considere o grupo de permutações S_n agindo no conjunto de n elementos

$$M = \{1, \dots, n\}.$$

Em $M \times M$, há duas órbitas:

$$\begin{aligned} (M \times M)_1 &= \{(i, i) : i \in M\}, \\ (M \times M)_2 &= \{(i, j) : i, j \in M \text{ e } i \neq j\}. \end{aligned}$$

De fato, se $i \neq k$ podemos encontrar uma permutação σ tal que $\sigma(i) = k$, logo σ leva (i, i) em (k, k) quando consideramos S_n agindo em $M \times M$, portanto $(M \times M)_1$ é uma única órbita em $M \times M$. Da mesma forma, se $i \neq j$ e $k \neq l$, existe uma permutação σ tal que $\sigma(i) = k$ e $\sigma(j) = l$, logo σ leva (i, j) em (k, l) , portanto $(M \times M)_2$ também é uma única órbita em $M \times M$.

Segue que

$$\dim \text{Hom}_{S_n}(\mathcal{F}(M)) = 2.$$

Como

$$2 = 1^2 + 1^2,$$

concluímos que existem duas representações irredutíveis em $\mathcal{F}(M)$.

Uma delas é a representação unidimensional trivial correspondente às funções constantes. Consequentemente, a outra deve ser $(n-1)$ -dimensional. Assim, $\mathcal{F}(M) = \mathbb{C}^{\{1, \dots, n\}}$ se escreve como a soma direta de dois subespaços invariantes pela ação de S_n

$$\mathcal{F}(M) = V_1 \oplus V_2,$$

com $\dim V_1 = 1$ e $\dim V_2 = n - 1$. □

2.4 A Representação Regular

Quando $M = G$ e ação de G em G é a multiplicação à esquerda, a representação ρ_G de G em $\mathcal{F}(G)$ é chamada a representação regular.

2.28 Definição. A representação regular

$$\rho_G : G \longrightarrow \text{GL}(\mathcal{F}(G)).$$

é definida por

$$[\rho_G(g)f](h) = f(g^{-1}h).$$

□

2.29 Proposição. Se p_i é o número de vezes que a i -ésima representação irredutível ocorre em $\mathcal{F}(G)$ e n_i é sua dimensão, então

(1)

$$\dim \mathcal{F}(G) = \#G = \sum p_i n_i.$$

(2)

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}_G(\mathcal{F}(G)) &= \# \{G\text{-órbitas em } G \times G\} \\ &= p_1^2 + \cdots + p_k^2. \end{aligned}$$

Prova: (1) Definição de p_i e n_i . (2) Proposição 2.26. ■

Referências Bibliográficas

- [Bleecker] David BLEECKER, *Gauge Theory and Variational Principles*, Addison-Wesley, 1981.
- [Darling] R. W. R. DARLING, *Differentiable Forms and Connections*, Cambridge University Press, 1994.
- [Gilmore] Robert GILMORE, *Lie Groups, Physics and Geometry: an introduction for physicists, engineers and chemists*, Cambridge, 2008.
- [Hall] Brian HALL, *Lie Groups, Lie Algebras and Representations, an elementary introduction*, 2nd. Ed., Springer, 2015.
- [Hamilton] Mark J. D. HAMILTON, *Mathematical Gauge Theory with applications to the Standard Model of Particle Physics*, Springer, 2017.
- [Kobayashi] Shoshichi KOBAYASHI, *Transformation Groups in Differential Geometry*, Classics in Mathematics 70 (Reprint of the 1972 Edition), Springer, 1995.
- [Lima] Elon Lages de LIMA, *Variedades Diferenciáveis*, IMPA, 2011.
- [Naber] Gregory L. NABER, *Topology, Geometry and Gauge Fields: Foundations*, 2nd. Ed., Springer, 2011.
- [Sternberg] Shlomo STERNBERG, *Group Theory and Physics*, Cambridge University Press, 1994.
- [Stillwell] John STILLWELL, *Naive Lie Theory*, Springer, 2008.
- [Warner] Frank W. WARNER, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics 94, Springer, 1983.