Exercícios de aplicações de álgebra linear em teoria dos grafos

Exercício 1) Queremos mostrar que, para um grafo simples G, temos $\chi(G) \leq \lambda_{max} + 1$.

a) Defina $\chi(G)$ e λ_{max} de maneira clara e precisa.

b) Mostre que, para todo grafo simples H, temos $\lambda_{max}(H) \leq \delta(H)$.

c) Mostre que para todo subgrafo H induzido de G (denotamos $H \lhd G$), temos $\lambda_{max}(H) \leq \lambda_{max}(G)$.

d) Assuma que $\chi(G) \leq \max_{H \lhd G} \delta(H)$ e conclua.

Exercício 2) Sejam $\mathcal{C}(G)$ e $\mathcal{B}(G)$ os espaços de ciclos e de cortes (respectivamente) de um grafo simples G. Lembre-se de que eles são subespaços do espaço de elos $\mathcal{E}(G)$ sobre o corpo F_2.

a) Vimos que $\dim(\mathcal{C}) \geq m - n + 1$. Seja $v_0 \in V(G)$ um vértice qualquer, mostre que

$$\{\partial(v); v \in V(G)/v_0\}$$

é um conjunto independente de $\mathcal{B}$. Conclua que $\dim(\mathcal{B}) \geq n - 1$.

b) Determine a dimensão de $\mathcal{C}(G)$ e de $\mathcal{B}(G)$.

c) Mostre que $\mathcal{C}(G)$ e $\mathcal{B}(G)$ são ortogonais. Pelo item anterior temos que os subespaços são, de fato, complementares ortogonais.

d) Mostre que $\mathcal{B}$ é o espaço-linha da matriz de incidência de G.

Referências

[1] Bondy; Murty *Graph Theory* 2nd Edition, Springer (2008).
[2] Bollobás, B. *Modern Graph theory* Springer (2003)
[3] Godsil, Royle *Algebraic Graph Theory* Springer (2002).