Lista 6:

Exercício 31. Sejam X, Y duas variáveis aleatórias independentes. Se X, Y tomam valores inteiros, mostre que a distribuição da soma $X+Y$ é dada pela convolução:

$$P(X+Y=k)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} P(X=n)P(Y=k-n)$$

Use esse fato para calcular a distribuição de $X+Y$, supondo que $X\sim$ Poisson(λ_1), $Y\sim$ Poisson(λ_2) são independentes.

Em seguida, prove a seguinte generalização, para variáveis contínuas: se X, Y (independentes) possuem densidades com respeito à medida de Lebesgue dx, denotadas f_X e f_Y, então $X+Y$ possui densidade dada pela convolução de f_X e f_Y, definida por

$$(f_X * f_Y)(z) := \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx\,. \tag{1}$$

Dica: Escreva $P(X+Y\leq z)$ como uma integral dupla, use o Teorema de Fubini.

Exercício 32. O objetivo desse exercício é de dar uma prova probabilística da Fórmula de Stirling:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}=1\,. \tag{2}$$

Sejam $Z_1,\dots,Z_n$ i.i.d. com $Z_k\sim\exp(1)$. Mostre que para todo $0<R\leq\sqrt{n}$,

$$1-\frac{1}{R^2}\leq P\Big[\Big|\frac{Z_1+\cdots+Z_n-n}{\sqrt{n}}\Big|\leq R\Big]=\frac{1}{(n-1)!}\int_{-\sqrt{n}R+n}^{+\sqrt{n}R+n} t^{n-1}e^{-t}dt\leq 1$$

(*Dica*: : use (2) por indução.) Faça uma mudança de variável para obter

$$\int_{-\sqrt{n}R+n}^{+\sqrt{n}R+n} t^{n-1}e^{-t}dt = n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}\int_{-R}^{R}\exp\big[-\frac{\sigma^2}{2}+E_n(\sigma)\big]d\sigma\,,$$

onde

$$E_n(\sigma)=(n-1)\log\big(1+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\big)-\sqrt{n}\sigma+\frac{\sigma^2}{2}\,.$$

Mostre que $E_n(\sigma)\to 0$ uniformemente em $|\sigma|<R$. Conclue que $\forall R>0$,

$$1-\frac{1}{R^2}\leq\liminf_{n\to\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!}\int_{-R}^{+R}e^{-\frac{\sigma^2}{2}}d\sigma\leq\limsup_{n\to\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!}\int_{-R}^{+R}e^{-\frac{\sigma^2}{2}}d\sigma\leq 1\,,$$

o que prova (2).

Exercício 33. “Rumo à Lei do Logaritmo Iterado”. Seja $(S_n)_{n\geq 0}$ o passeio aleatório simples simétrico em $\mathbb{Z}$.

(1) Fixe $k \geq 1$, e mostre que $E[S_n^{2k}] = O(n^k)$. Deduza:

$$\frac{S_n}{n^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \to 0 \text{ q.c.} \qquad \text{(Hausdorff, 1913)}$$

(2) Prove a desigualdade de Bernstein,

$$P(X \geq a) \leq \inf_{t \geq 0} \{e^{-at} E[e^{tX}]\},$$

e use-a para mostrar que para todo $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n^{\frac{1}{2}} (\log n)^{1/2+\epsilon}} = 0 \text{ q.c.}$$

Exercício 34. Verifique as expressões para as funções características das seguintes variáveis aleatórias:

- $X = C$ (constante), $\varphi(t) = e^{iCt}$.
- $X \sim U([a,b])$, $\varphi(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
- $X \sim \exp(\lambda)$, $\varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$.
- $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\varphi(t) = e^{itm - t^2/2}$.

Beaucoup d'analystes, en effet, mettent au premier rang la notion du continu; c'est elle qui intervient d'une manière plus ou moins explicite dans leurs raisonnements. J'ai indiqué récemment [...] en quoi cette notion du continu, considéré comme ayant une puissance supérieure à celle du dénombrable, me paraît être une notion purement négative, la puissance des ensembles dénombrables étant la seule qui nous soit connue d'une manière positive, la seule qui intervienne effectivement dans nos raisonnements. Il est clair, en effet, que l'ensemble des éléments analytiques susceptibles d'être réellement définis et considérés ne peut être qu'un ensemble dénombrable; je crois que ce point de vue s'imposera chaque jour davantage aux mathématiciens et que le continu n'aura été qu'un instrument transitoire, dont l'utilité actuelle n'est pas négligeable [...], mais qui devra être regardé seulement comme un moyen d'étudier les ensembles dénombrables, lesquels constituent la seule réalité que nous puissions atteindre.

É. Borel, 1909 [?].