

Lista 7:

Exercício 35. Seja, para todo $n \geq 1$, $x_n \in \mathbb{R}$ e μ_n a medida de Dirac concentrada em x_n . Mostre que μ_n converge fracamente se e somente se x_n converge.

Exercício 36. Sejam μ_n, μ medidas de probabilidade na reta, tais que $\mu_n \xrightarrow{f} \mu$.

- (1) Dê um exemplo em que $\int x \mu_n(dx)$ não converge para $\int x \mu(dx)$.
- (2) Seja f contínua, não necessariamente limitada. Suponha que existe $g \geq 0$, contínua, tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0, \quad \sup_n \int g d\mu_n < \infty.$$

Mostre que

$$\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$$

Exercício 37. Sejam μ_n, μ e ν medidas de probabilidade na reta. Mostre que se $\mu_n \xrightarrow{f} \mu$ e $\mu_n \xrightarrow{f} \nu$, então $\mu = \nu$.

Exercício 38. Mostre que se $\int |\varphi_\mu(t)| dt < \infty$, então μ é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue, com densidade dada por

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \varphi_\mu(t) dt.$$

Dica: Use a fórmula de inversão.

Exercício 39. Seja $X = Z_1 + Z_2$, em que Y_1 e Y_2 são duas variáveis independentes e identicamente distribuídas, cuja distribuição tem densidade $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ com respeito à medida de Lebesgue.

- (1) Usando o Exercício 31, mostre que X tem densidade também, dada por

$$\rho_X(x) = \frac{e^{-|x|}}{4}(1 + |x|).$$

- (2) Mostre o mesmo resultado, usando funções características. Isto é, calcule primeiro φ_X , e em seguida use o Exercício 38 para calcular ρ_X .

Exercício 40. Seja X_n uma sequência de variáveis independentes, $X_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, em que $\sigma_1 = 1$, $\sigma_n^2 = 2^{n-2}$ para todo $n \geq 2$. Enuncie e prove um TCL para S_n . Verifique que a condição de Lindeberg-Feller não é satisfeita.