Lista 9:

Exercício 46. Seja $\mathcal{T}_\infty$ a σ-álgebra caudal associada a uma sequência (X_n). Defina $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Determine quais dos seguintes eventos pertencem a $\mathcal{T}_\infty$ (os $I_n \subset \mathbb{R}$ sendo intervalos).

$$\{X_n \in I_n \text{ i.o.}\}, \quad \{S_n \in I_n \text{ i.o.}\}, \quad \{\sup_{n\geq 1} |X_n| = 1\}$$

$$\big\{ \lim_n S_n \text{ existe} \big\}, \quad \big\{ \lim_n S_n \text{ existe e é } \leq c \big\},$$

$$\big\{ \limsup_n X_n < \infty \big\}, \quad \big\{ \limsup_n S_n = \infty \big\}, \quad \big\{ \limsup_n S_n > 0 \big\},$$

Qual tipo de condição uma sequência $(c_n)_{n\geq 1}$ deve satisfszer para garantir que $\{\limsup_n S_n/c_n > x\} \in \mathcal{T}_\infty$?

Exercício 47. Construa uma sequência $(X_n)_{n\geq 1}$ e um evento $A \in \mathcal{T}_\infty$ que satisfaça $0 < P(A) < 1$.

Exercício 48. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ independente, e defina $\mathcal{T}'_\infty := \bigcap_{n\geq 1} \sigma(S_{n+1}, \dots)$. Compare $\mathcal{T}_\infty$ com $\mathcal{T}'_\infty$. Tem alguma inclusão? *Dica*: considere o caso em que $P(X_n = 4^{-n}) = P(X_n = -4^{-n}) = \frac{1}{2}$, e verifique se $\mathcal{T}'_\infty$ é trivial (isto é, se $P(A) \in \{0,1\}$ para cada $A \in \mathcal{T}'_\infty$).

Exercício 49. A Lei 0-1 de Kolmogorov vale para sequências (X_n) de variáveis dois a dois independentes? *Dica:* Sejam ξ e X_{2n+1} ($n \geq 0$) com valores em $\{\pm 1\}$, todas independentes e identicamente distribuidas, com $P(\xi = +1) = P(X_{2n+1} = +1) = \frac{1}{2}$. Defina, para todo $n \geq 1$, $X_{2n} := \xi X_{2n-1}$, e estude $(X_k)_{k\geq 1}$.

Exercício 50. Mostre que a coleção $\mathcal{E}$ de eventos permutáveis forma uma σ-álgebra. Quais dos eventos definidos no Exercício 46 pertencem a $\mathcal{E}$? Mostre que $\mathcal{T}_\infty \subset \mathcal{E}$, mas que $\mathcal{T}_\infty \not\supset \mathcal{E}$.

Exercício 51. Considere dois passeios aleatórios simples simétricos em $\mathbb{Z}^d$, $(S_n)_{n\geq 0}$, $(S'_n)_{n\geq 0}$, iniciados respectivamente em x e y. Seja $I := \sum_{m,n} 1_{\{S_n = S'_m\}}$ o número de interseções das duas trajetórias. Mostre que $P(I = \infty) \in \{0,1\}$. *Obs:* Pode ser mostrado que quase certamente, $I < \infty$ se e somente se $d \geq 5$.

Exercício 52. Considere o espaço de probabilidade $([0,1), \mathcal{B}([0,1)), \lambda)$, onde λ é a medida de Lebesgue. Para todo $\omega \in [0,1)$, considere a sua expansão na base 2: $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$, onde $\omega_k \in \{0,1\}$. Uma transformação elementar de ω é trocar um número finito de componentes ω_k em $1 - \omega_k$. O objetivo desse exercício é de mostrar que se um Boreliano $B \subset [0,1)$ tem medida de Lebesgue positiva, então quase todo $\omega \in [0,1)$ pode ser levado para B via uma transformação elementar.

(1) Construa, para todo $k \geq 1$, uma função $R_k : [0,1) \to \{0,1\}$ que dê o valor do k-ésimo dígito de ω [1]. Mostre que $(R_k)_{k\geq 1}$ é i.i.d.

[1] As funções R_k, $k = 1, 2, \dots$, chamam-se funções de Rademacher.

(2) Construa, para todo $k \geq 1$, uma função $T_k : [0,1) \to [0,1)$ tal que $T_k(\omega)$ seja o número obtido trocando o k-ésimo dígito de ω, ω_k, por $1 - \omega_k$.

(3) Mostre que um Boreliano $B \in \mathcal{B}([0,1))$ satisfaz $B \in \sigma(R_{n+1}, R_{n+2}, \dots)$ se e somente se $T_k(B) = B$ para todo $k = 1, 2, \dots n$. Deduza que se $T_k(B) = B$ para todo $k \geq 1$, então $\lambda(B) \in \{0, 1\}$.

(4) Seja $T^{\emptyset} :=$ id, $T^{\{k\}} := T_k$, e para qualquer $Z \subset \mathbb{Z}$ finito, $T^{Z \cup \{m\}} := T^Z \circ T_m$. Mostre que se $\lambda(B) > 0$, então

$$\lambda\Big(\bigcup_{\substack{Z \subset \mathbb{Z}, \\ \text{finito}}} T^Z(B) \Big) = 1\,.$$

Interprete o resultado.