1. Martingais

Considere um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Um processo estocástico X é uma família de variáveis aleatórias $= (X_t)_{t\in I}$, $I \subset \mathbb{R}$, definidas em $(\Omega, \mathcal{F})$. X é L^p-limitado se $\sup_{t\in I} E[|X_t|^p] < \infty$, e uniformemente integrável (abreviado UI) se

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{t\in I} \int_{|X_t|\geq K} |X_t| dP = 0 \,.$$

Uma filtração é uma família de sub-σ-álgebras $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$, $I \subset \mathbb{R}_+$, tal que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ para todo $t \geq 0$, e $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ se $0 \leq s \leq t$. Um processo estocástico X é dito adaptado a uma filtração se $X_t \in \mathcal{F}_t$ para todo $t \in I$.

Definição 1.1. Seja $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ uma filtração e $X = (X_t)_{t\in I}$ um processo adaptado tal que $X_t \in L^1$ para todo $t \in I$. X é chamado de

(1) supermartingal se para todo $s, t \in I$, $s \leq t$, $E[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$.
(2) submartingal se para todo $s, t \in I$, $s \leq t$, $E[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$.
(3) martingal se para todo $s, t \in I$, $s \leq t$, $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$.

o mesmo jeito, podemos

Observação 1.1. (1) As definições acima incluem a possibilidade de I ser discreto, por exemplo $I = \{\dots, -2, -1, 0\}$, $I = \{0, 1, 2, \dots\}$, ou $I = \{1/n, n \geq 1\}$.
(2) Observe que X é submartingal se e somente se $-X$ é supermartingal, e que um martingal é no mesmo tempo sub- e super-martingal.

Exemplo 1.1. O movimento browniano $B = (B_t)_{t\geq 0}$ é martingal com respeito a sua filtração natural $\mathcal{F}_t := \sigma(B_s, s \leq t)$. De fato, $B_t \in L^1$ para todo $t \geq 0$, e pela propriedade de Markov no tempo s,

$$E[B_t|\mathcal{F}_s] = E[B_{t-s} \circ \theta_s|\mathcal{F}_s] = E_{B_s}[B_{t-s}] = B_s \,.$$

Observe que a propriedade de Markov permite também mostrar que B é martingal com respeito à σ-álgebra aumentada,

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{t'>t} \mathcal{F}_{t'} \,.$$

Exemplo 1.2. Se $B = (B_t)_{t\geq 0}$ é o movimento browniano, então $M_t := B_t^2 - t$ é martingal (com respeito à filtração natural de B). De fato, $M_t \in L^1$ e pela propriedade de Markov no tempo s,

$$\begin{aligned} E[M_t|\mathcal{F}_s] &= E[B_t^2|\mathcal{F}_s] - t \\ &= \underbrace{E[(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s]}_{=E[B_{t-s}^2]=t-s} + 2B_s \underbrace{E[B_t|\mathcal{F}_s]}_{=B_s} - B_s^2 - t \\ &= B_s^2 - s \\ &= M_s \,. \end{aligned}$$

Exercício 1.1. Se $B = (B_t)_{t\geq 0}$ é o movimento browniano, $\theta \in \mathbb{R}$, então $X_t := \exp(\theta B_t - \theta t^2/2)$ é martingal (com respeito à filtração natural de B).

Lema 1.1. *Seja $X = (X_t)_{t\in I}$ um submartingal e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa, tal que $\phi(X_t) \in L^1$ para todo $t \in I$. Então $\phi(X) := (\phi(X_t))_{t\in I}$ é submartingal também.*

Demonstração. Segue da desigualdade de Jensen. □

1.1. **Amostragem opcional, caso finito.**

1.2. **Desigualdades fundamentais.**

1.3. **Desigualdades para o número de subidas/descidas.**

Seja $X = (X_t)_{t\in I}$ um processo. Qualquer subconjunto $F \subset I$ finito pode ser ordenado: $F = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$. Sejam $a < b$. Considere a sequência s_k, $k \geq 1$, definida da seguinte maneira [1]:

$$s_1 := \inf\{t_i : X(t_i) \leq a\}\,, \quad s_2 := \inf\{t_i > s_1 : X(t_i) \geq b\}\,.$$

Se $s_2 < \infty$, diremos que o par $\{s_1, s_2\}$ representa a primeira subida do processo X através do intervalo $[a, b]$. Em seguida,

$$s_{2k+1} := \inf\{t_i > s_{2k} : X(t_i) \leq a\}\,, \quad s_{2k+2} := \inf\{t_i > s_{2k+1} : X(t_i) \geq b\}\,,$$

e diremos que o par $\{s_{2k+1}, s_2\}$ representa a $k+1$-ésima subida do processo X através do intervalo $[a, b]$.
Definamos então o número de subidas de X ao longo de F por

$$U_F^X[a, b] := \max\{k : s_{2k} < t_N\}\,.$$

Para um conjunto qualquer $T \subset I$, o número total de subidas de X é definido por

$$U_I^X[a, b] := \sup\{U_F^X[a, b] : F \subset I, \text{finito}\}\,.$$

De modo análogo, pode-se definir o número total de descidas de X, denotado $D_T^X[a, b]$.

Proposição 1.1. *(1) Seja $X = (X_t)_{t\in I}$ um supermartingal, $T \subset I$ enumerável. Então para todo $a < b$,*

$$E[U_T^X[a, b]] \leq \frac{\sup_{t\in T} E[(X_t - a)^-]}{b - a}\,. \tag{1}$$

(2) Seja $X = (X_t)_{t\in I}$ um submartingal, $T \subset I$ enumerável. Então para todo $a < b$,

$$E[D_T^X[a, b]] \leq \frac{\sup_{t\in T} E[(X_t - b)^+]}{b - a}\,. \tag{2}$$

Observação 1.2. (1) Observe que o conjunto $T \subset I$ não precisa possuir nenhuma estrutura particular; por exemplo, ele não precisa possuir um menor ou maior elemento.

[1] Faremos sempre a seguinte convenção: $\inf \varnothing := \infty$.

(2) Suponha agora que T possua um maior elemento β. Se X for submartingal, então por $\phi(x) := x^+$ ser convexa e pelo Lema 1.1, para todo $t \in T$,

$$E[(X_t - b)^+] \leq E[(X_\beta - b)^+]\,.$$

Por outro lado, se X for supermartingal, então $-X$ é submartingal, logo

$$E[(X_t - a)^-] = E[(a - X_t)^+] \leq E[(a - X_\beta)^+] = E[(X_\beta - a)^-]\,.$$

Prova da Proposição 1.1: Seja $X = (X_t)_{t\in I}$ um supermartingal, $F = \{t_1, t_2, \dots, t_N\} \subset I$ finito, e $a < b$. Considere os tempos de parada s_k definidos acima, e os eventos $A_k := \{s_k < t_N\}$. Observe que $A_{2k} \equiv \{U_F^X[a,b] \geq k\}$, o que implica $E[U_F^X[a,b]] \leq \sum_k P(A_{2k})$. Como $X(s_{2k-1}) \leq a$ em A_{2k-1} e $X(s_{2k}) \geq b$ em A_{2k}, e como $-X$ é submartingal,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{A_{2k-1}} (a - X(s_{2k-1}))dP \\
&\leq \int_{A_{2k-1}} (a - X(s_{2k}))dP \\
&= \underbrace{\int_{A_{2k}} (a - X(s_{2k}))dP}_{\leq (a-b)P(A_{2k})} + \int_{A_{2k-1}\setminus A_{2k}} (a - X(s_{2k}))dP
\end{aligned}$$

Portanto, usando de novo o fato de $-X$ ser submartingal,

$$(b-a)P(A_{2k}) \leq \int_{A_{2k-1}\setminus A_{2k}} (a - X(t_N))^+ dP$$

Somando sobre k, e como $A_k \supset A_{k+1}$,

$$(b-a)E[U_F^X[a,b]] \leq \int_{A_1} (a - X(t_N))^+ dP \leq E[(X_{t_N} - a)^-] = \sup_{t\in F} E[(X_t - a)^-]\,.$$

Tomando o sup sobre todos os subconjuntos finitos $F \subset I$, obtemos (1). $\square$

As desigualdades fundamentais (1) e (2) serão usadas de várias formas, em particular para obter resultados de convergência para processos X_t quando $t \to \pm\infty$ ou quando $t \to t_0^{\pm}$. De modo geral, enunciaremos os resultados somente para supermartingais, dado que um resultado parecido pode ser deduzido para submartingais, via uma troca de sinal.

1.4. **Convergência quando $T = \mathbb{N}$.** Um primeiro corolário da Proposição 1.1 é o teorema básico sobre convergência de martingais.

Teorema 1.1. *Se $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um supermartingal L^1-limitado,* $\sup_{t\in I} E[|X_t|] < \infty$*, então existe $X_\infty \in L^1$ tal que $X_n \to X_\infty$ quase certamente.*

Demonstração. Se $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um supermartingal L^1-limitado, então pela desigualdade (1), existe um conjunto Ω_0, $P(\Omega_0) = 1$, no qual $U_{\mathbb{N}}^X[a,b] < \infty$ para qualquer $a < b$, a, b racionais. Logo, $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n$ existe em Ω_0 (possivelmente $\pm\infty$). Fora de Ω_0, basta definir $X_\infty := 0$. A integrabilidade de X_∞ segue pelo Lema de Fatou. $\square$

Corolário 1.1. *Se $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um supermartingal tal que $X_n \geq 0$, então existe $X_\infty \in L^1$ tal que $X_n \to X_\infty$ quase certamente.*

Demonstração. Como $E[|X_n|] = E[X_n] \leq E[X_0]$, X é L^1-limitado. □

1.5. **Convergência quando $T = -\mathbb{N}$.** Um processo indexado por $T = -\mathbb{N} := \{\dots, -2, -1, 0\}$ é geralmente chamado de reverso. Assim, um super- sub-martingal $X = (X_n)_{n\in-\mathbb{N}} \equiv (X_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ é chamado de super- sub-martingal reverso. A particularidade do conjunto $-\mathbb{N}$ é que ele possui um maior elemento, o que implica convergência sem hipótese suplementar.

Teorema 1.2. *(a) Se $X = (X_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ for supermartingal, então existe $X_{-\infty}$ tal que $X_{-n} \to X_{-\infty}$ quase certamente. Se X é L^1-limitado, então é UI, $X_{-\infty} \in L^1$, $X_{-n} \to X_{-\infty}$ em L^1, e para todo n,*

$$X_{-\infty} \geq E[X_{-n}|\mathcal{F}_{-\infty}]\,, \tag{3}$$

onde $\mathcal{F}_{-\infty} := \bigcap_n \mathcal{F}_{-n}$.

(b) Se $X = (X_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ for martingal, existe $X_{-\infty} \in L^1$ tal que $X_{-n} \to X_{-\infty}$ quase certamente e em L^1, e para todo n,

$$X_{-\infty} = E[X_{-n}|\mathcal{F}_{-\infty}]\,. \tag{4}$$

Demonstração. Seja X um supermartingal reverso. Pela Observação 1.2,

$$\sup_n E[(X_{-n} - a)^-] \leq E[(X_0 - a)^-]\,.$$

Usando como foi feito na prova do Teorema 1.1, obtem-se a existência de $X_{-\infty} = \lim_n X_n$. Para todo n,

$$\int_{|X_{-n}|\geq K} |X_{-n}|dP = \int_{X_{-n}\geq K} X_{-n}dP + \int_{X_{-n}\leq -K} (-X_{-n})dP\,. \tag{5}$$

Se X for submartingal, considere a decomposição

$$\int_{X_{-n}\geq K} X_{-n}dP + \int_{X_{-n}\leq -K}(-X_{-n})dP$$
$$= E[X_{-n}] + \int_{X_{-n}<K}(-X_{-n})dP + \int_{X_{-n}\leq -K}(-X_{-n})dP\,. \tag{6}$$

Como $n \mapsto E[X_{-n}]$ decresce e X é L^1-limitado, então para todo $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $E[X_{-n}] \leq E[X_{-n_0}] + \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, e

$$\int_{X_{-n}<K}(-X_{-n})dP + \int_{X_{-n}\leq -K}(-X_{-n})dP$$
$$\leq \int_{X_{-n}<K}(-X_{-n_0})dP + \int_{X_{-n}\leq -K}(-X_{-n_0})dP\,.$$

Logo,

$$\int_{|X_{-n}|\geq K} |X_{-n}|dP \leq \int_{|X_{-n}|\geq K} |X_{-n_0}|dP + \epsilon\,.$$

Como $P(|X_{-n}| \geq K) \leq \frac{\sup_n E[|X_{-n}|]}{K} \to 0$ no limite $K \to \infty$, isso implica que X é UI, e que $X_{-n} \to X_{-\infty}$ em L^1. A integrabilidade de $X_{-\infty}$ segue do Lema de Fatou. Se $A \in \mathcal{F}_{-\infty} \subset \mathcal{F}_{-m}$, então

$$\int_A X_{-\infty} dP = \lim_{n\to\infty} \int_A X_{-n} dP \geq \int_A X_{-m} dP\,.$$

o que prova (3).

Quando X é submartingal, a decomposição em (6) é trocada por

$$\int_{X_{-n}\geq K} X_{-n} dP + \int_{X_{-n}\leq -K} (-X_{-n}) dP$$
$$= -E[X_{-n}] + \int_{X_{-n}\geq K} X_{-n} dP + \int_{X_{-n}>-K} X_{-n} dP\,,$$

e o resto do argumento é o mesmo. Quando X é martingal, a identidade $X_{-n} = E[X_0|\mathcal{F}_{-n}]$ implica que X é UI (Lema 1.2 abaixo), o que implica a convergência de X_{-n} para $X_{-\infty}$ em L^1. □

Lema 1.2. *Seja $Z \in L^1$. Então $(E[Z|\mathcal{G}])_{\mathcal{G}\subset\mathcal{F}}$ é UI.*

Demonstração. Observe que

$$\int_{|E[Z|\mathcal{G}]|\geq K} |E[Z|\mathcal{G}]| dP \leq \int_{|E[Z|\mathcal{G}]|\geq K} E[|Z||\mathcal{G}] dP = \int_{|E[Z|\mathcal{G}]|\geq K} |Z| dP\,.$$

Mas como

$$P(|E[Z|\mathcal{G}]| \geq K) \leq \frac{E[|E[Z|\mathcal{G}]|]}{K} \leq \frac{E[|Z|]}{K} \to 0$$

quando $K \to \infty$, uniformemente em $\mathcal{G}$, isso implica o resultado. □

Veremos agora as consequências das desigualdades (1)-(2) e dos teoremas acima para martingais com parâmetro contínuo. A idéia principal é que resultados para martingais discretos podem ser usados para estudar um martingal em tempo contínuo, ao longo de conjunto enumerável de pontos.

Se $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ é uma filtração, considere a filtração aumentada

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{t'>t} \mathcal{F}_{t'}\,.$$

1.6. **Regularização.** Nesta seção, $I = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Teorema 1.3. *Seja $X = (X_t)_{t\geq 0}$ um supermartingal e $D \subset \mathbb{R}_+$ denso, enumerável.*

(1) Existe Ω_0, $P(\Omega_0) = 1$, tal que em Ω_0, os seguintes limites laterais existem:

$$\forall t > 0,\; X_{t-} := \lim_{\substack{s\nearrow t\\ s\in D}} X_s\,, \quad \forall t \geq 0,\; X_{t+} := \lim_{\substack{s\searrow t\\ s\in D}} X_s\,. \tag{7}$$

(2) Fora de Ω_0, defina $X_{t+} := 0$ para todo $t \geq 0$. Para todo $t \geq 0$, $X_{t+} \in L^1$, e $X_t \geq E[X_{t+}|\mathcal{F}_t]$. Se $t \mapsto E[X_t]$ for contínua, então $X_t = E[X_{t+}|\mathcal{F}_t]$.

(3) $(X_{t+})_{t\geq 0}$ *é supermartingal com respeito à filtração* $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$*. Se* $(X_t)_{t\geq 0}$ *for martingal, então* $(X_{t+})_{t\geq 0}$ *é martingal com respeito a* $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$*.*

Demonstração. Para $k \geq 0$, considere o intervalo compacto $[k, k+1] \subset \mathbb{R}_+$. Pela Proposição 1.1, e como $[k, k+1]$ possui um maior elemento, existe para todo $a < b$ ($a, b \in \mathbb{Q}$) um $\Omega_0(k, a, b)$, $P(\Omega_0) = 1$, no qual $U^X_{D\cap[\alpha,\beta]}[a, b] < \infty$. Portanto, para todo $t \in [k, k+1]$, os limites X_{t-} e X_{t+} existem em $\Omega_0(k, a, b)$. (De fato, tomando uma sequência decrescente qualquer $s_n \in D$, $s_n \searrow t$, temos existência do limite $\lim_n X_{s_n}$, e esse limite não depende da sequência escolhida. O mesmo argumento vale para sequências crescentes.) Se $\Omega_0 := \bigcap_{k\geq 0,a,b} \Omega_0(k, a, b)$, a primeira afirmação está provada.

Considere agora $t \geq 0$, e uma sequência $t_n \searrow t$, $t_n \in D$. Por um lado, em Ω_0, $X_{t_n} \to X_{t+}$. Por outro lado, $Y_{-n} := X_{t_n}$ é supermartingal reverso com respeito à filtração $\mathcal{G}_{-n} := \mathcal{F}_{t_n}$, e como $t < t_n \leq t_1$,

$$E[|Y_{-n}|] = E[|X_{t_n}|] = E[X_{t_n}] + 2E[X^-_{t_n}] \leq E[X_t] + 2E[X^-_{t_1}] < \infty\,,$$

(Y_{-n}) é UI. Logo, Y_{-n} converge em L^1 para um limite $Y_{-\infty} \in L^1$, que só pode ser X_{t+}, já que $X_{t_n} \to X_{t+}$. Como $X_t \geq E[X_{t_n}|\mathcal{F}_t]$, a convergência em L^1 implica $X_t \geq E[X_{t+}|\mathcal{F}_t]$. Mas também, $E[X_{t_n}] \to E[X_{t+}]$. Ora, se $t \mapsto E[X_t]$ for contínua, então $E[X_{t+}] = E[X_t]$, o que implica $0 \leq E[X_t - E[X_{t+}|\mathcal{F}_t]] = E[X_t] - E[X_{t+}] = 0$. Logo, $X = E[X_{t+}|\mathcal{F}_t]$, o que prova a segunda afirmação.

Para a terceira, observe que se $s < t$ e se $s < s_n < t$ é tal que $s_n \searrow s$, então $X_{s_n} \to X_{s+}$. Pela propriedade de supermartingal e pela segunda afirmação,

$$X_{s_n} \geq E[X_t|\mathcal{F}_{s_n}] \geq E[E[X_{t+}|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_{s_n}] = E[X_{t+}|\mathcal{F}_{s_n}]\,. \tag{8}$$

Mas observe que $Z_{-n} := E[X_{t+}|\mathcal{F}_{s_n}]$ é martingal reverso, UI (Lema 1.2), e converge q.c. e em L^1 para um limite $Z_{-\infty}$ (Teorema 1.1). Para identificar $Z_{-\infty}$, observe que para todo $A \in \mathcal{F}_{s+} \equiv \bigcap_n \mathcal{F}_{s_n}$,

$$\int_A Z_{-\infty} dP = \lim_{n\to\infty} \int_A Z_{-n} dP = \int_A X_{t+} dP\,.$$

Logo, $Z_{-\infty} = E[X_{t+}|\mathcal{F}_{s+}]$. Tomando $n \to \infty$ em (8), obtemos $X_{s+} \geq E[X_{t+}|\mathcal{F}_{s+}]$. Como X_{t+} é obviamente $\mathcal{F}_{t+}$-mensurável, isso prova que $(X_{t+})_{t\geq 0}$ é supermartingal. □

O resultado acima diz que a um supermartingal $(X_t)_{t\geq 0}$ pode ser associado um supermartingal $(X_{t+})_{t\geq 0}$ (com repseito a $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$) cujas trajetórias $t \mapsto X_{t+}$ são càdlàg, isto é, contínuas a direita com limites a esquerda [2]. $(X_{t+})_{t\geq 0}$ é chamado o regularizado de $(X_t)_{t\geq 0}$:

Teorema 1.4. *Seja* $(X_t)_{t\geq 0}$ *um supermartingal tal que* $t \mapsto E[X_t]$ *seja contínua (o que acontece em particular quando* X *é martingal). Se a filtração* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *for completa (com respeito a* P*) e contínua a direita (*$\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$*), então o regularizado* $(X_{t+})_{t\geq 0}$ *é uma modificação de* $(X_t)_{t\geq 0}$*, com trajetórias càdlàg, e é supermartingal com respeito a* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*.*

[2] Em francês: *continu à droite, avec limite à gauche.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, quase certamente e pela continuidade da filtração,

$$X_t = E[X_{t+}|\mathcal{F}_t] = E[X_{t+}|\mathcal{F}_{t+}] = X_{t+}\,,$$

o que mostra que $(X_{t+})_{t\geq 0}$ é modificação de $(X_t)_{t\geq 0}$. Já que a filtração é completa, isso implica também que $X_{t+} \in \mathcal{F}_t$. Para verificar que as trajetórias $t \mapsto X_{t+}$ são contínuas a direita, observe que em Ω_0 (definido na prova anterior), em todo $t \geq 0$, para qualquer $\epsilon > 0$,

$$\inf_{t<s<t+\epsilon} X_s \leq \inf_{t\leq s<t+\epsilon} X_{s+} \leq \sup_{t\leq s<t+\epsilon} X_{s+} \leq \sup_{t<s<t+\epsilon} X_s\,.$$

Mas por definição, os primeiros e últimos termos dessa desigualdade convergem para X_{t+} quando $\epsilon \searrow 0$. Portanto, em Ω_0, $\lim_{s\searrow t} X_{s+} = X_{t+}$ para todo $t \geq 0$. Do mesmo jeito, pode ser mostrado que os limites a esquerda existem. □

1.7. **Martingais fechados.** Considere o equivalente contínuo do Teorema 1.1:

Lema 1.3. *Seja $X = (X_t)_{t\geq 0}$ um supermartingal L^1-limitado, contínuo a direita. Então existe $X_\infty \in L^1$ tal que $X_t \to X_\infty$ quase certamente.*

Demonstração. Se $D \subset \mathbb{R}_+$ for denso, enumerável, procedendo como na prova do Teorema 1.1 leva à existência quase certa do limite

$$X_\infty = \lim_{\substack{t\to\infty \\ t\in D}} X_t\,.$$

Pela continuidade a direita das trajetórias, esse limite coincide com $\lim_{t\to\infty} X_t$. □

Podemos aqui fazer a seguinte pergunta: será que $X_t \geq E[X_\infty|\mathcal{F}_t]$? Isto é: será que X_∞ pode ser visto como o "último elemento" do martingal?
Diremos que um supermartingal $X = (X_t)_{t\in I}$ é fechado se existir $Z \in L^1$ tal que $X_t \geq E[Z|\mathcal{F}_t]$ para todo $t \in I$. Diz-se que Z fecha X. Por exemplo, se $I = \mathbb{R}_+$, a variável Z pode ser interpretada como um elemento no "tempo $t = \infty$", $Z = X_\infty$, isto é como o último elemento do processo, e que a propriedade de supermartingal continua valendo para o processo $(X_t)_{0\leq t\leq\infty}$. De modo equivalente, define-se martingal e submartingal fechado.

Exercício 1.2. Ache um exemplo de supermartingal X (possivelmente discreto) que não seja fechado. (O movimento Browniano!)

Proposição 1.2. *Seja $X = (X_t)_{t\geq 0}$ um martingal contínuo a direita. São equivalentes:*

(1) X é fechado.
(2) X_t converge quando $t \to \infty$, quase certamente e em L^1.
(3) X é UI.

Esse resultado implica em particular que um martingal contínuo *limitado*, por ser UI, é fechado também.

Demonstração. (1) implica (3): Se X é fechado por Z, $X_t = E[Z|\mathcal{F}_t]$, é UI pelo Lema 1.2. (3) implica (2): Se X é uniformemente integrável, então é limitada em L^1. Pelo Lema 1.3, $X_t \to X_\infty$ quase certamente, logo em L^1 também. (2) implica (1): Tomando $t \to \infty$ em $X_s = E[X_t|\mathcal{F}_s]$ dá $X_s = E[X_\infty|\mathcal{F}_s]$. Logo, X é fechado por X_∞. □

Observação 1.3. Qualquer martingal limitado é UI, portanto fechado.

1.8. **Amostragem opcional, caso geral.** Considere uma filtração $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Lembra que se X for um supermartingal cujo índice é *finito*, e se $S \leq F$ forem dois tempos de parada limitados, então

$$X_S \geq E[X_T|\mathcal{F}_S]\,.$$

Nessa seção generalizaremos esse resultado a um supermartingal em tempo contínuo.

Teorema 1.5. *[Amostragem Opcional] Seja $X = (X_t)_{t\geq 0}$ um supermartingal contínuo a direita, fechado por $X_\infty \in \mathcal{F}_\infty$ ($\mathcal{F}_\infty := \sigma(\bigcup_{t\geq 0}\mathcal{F}_t)$). Sejam $S \leq T$ dois tempos de parada. Então $X_S \in L^1$, $X_T \in L^1$ (com a convenção de que $X_T := X_\infty$ se $T = \infty$), e*

$$X_S \geq E[X_T|\mathcal{F}_S]\,. \tag{9}$$

Se X for martingal, sob as mesmas hipóteses,

$$X_S = E[X_T|\mathcal{F}_S]\,. \tag{10}$$

Para usar o resultado no caso finito, será necessário aproximar um tempo de parada qualquer por uma sequência de tempos de parada que tomam finitos valores.

Lema 1.4. *Para $n \geq 1$, seja $D_n := \{k2^{-n}, k = 0, 1, \dots, n2^n\} \cup \{\infty\}$. Se T é um tempo de parada, defina*

$$T_n := \inf\{t \in D_n : t > T\}\,. \tag{11}$$

Então T_n é um tempo de parada, e $T_n \searrow T$.

Demonstração. É claro que se $T = \infty$, então $T_n = \infty$. Caso contrário, $T_n \searrow T$. Já que T_n pode ser escrito como

$$T_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k+1}{2^n} 1_{\{k/2^n < T \leq (k+1)/2^n\}} + \infty 1_{\{T > n2^n\}},$$

temos $\{T_n \leq t\} = \{T \leq \frac{k(t)+1}{2^n}\}$, em que $k(t) := \max\{0 \leq k \leq n2^n : (k+1)/2^n \leq t\}$. Assim, $\{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}_{\frac{k(t)+1}{2^n}} \subset \mathcal{F}_t$. Logo, T_n é tempo de parada. □

Prova do Teorema 1.5. Começaremos com duas afirmações a respeito dos tempos de parada T_n introduzidos em (11).

Afirmação 1: $Y_{-n} := X_{T_n}$ é supermartingal reverso. De fato, considere para cada $n \geq 1$, o supermartingal discreto $(X_t)_{t\in D_{n+1}}$, isto é

$$X_0, X_{1/2^{n+1}}, \dots, X_{k/2^{n+1}}, \dots, X_{((n+1)2^{n+1})-1)/2^{n+1}}, X_{n+1}, X_\infty\,,$$

com respeito à filtração $(\mathcal{F}_t)_{t\in D_{n+1}}$. Considere os tempos de parada T_n e T_{n+1}. Como $T_n \in D_n \subset D_{n+1}$, podemos aplicar o Teorema da Amostragem Opcional Discreto para $(X_t)_{t\in D_{n+1}}$, com os tempos de parada $T_{n+1} \leq T_n$:

$$X_{T_{n+1}} \geq E[X_{T_n}|\mathcal{F}_{T_{n+1}}]\,.$$

Afirmação 2: $Y_{-n} \to X_T$ em L^1, e $X_T \in L^1$. Como $E[|Y_n|] = E[Y_{-n}] + 2E[(Y_{-n})^-]$, e $E[Y_{-n}] = E[X_{T_n}] \leq E[X_0]$, $E[(Y_{-n})^-] = E[X_{T_n}^-] \leq E[X_0^-]$, temos que $(Y_{-n})_{n\geq 0}$ é L^1-limitado. Pelo Teorema 1.2, Y_{-n} converge para $Y_{-\infty} \in L^1$ em L^1. Como $Y_{-n} = X_{T_n}$ e $T_n \searrow T$, e que as trajetórias de X são contínuas a direita, esse limite $Y_{-\infty}$ só pode ser X_T. Em particular, $X_T \in L^1$.

Construindo do mesmo jeito a sequência $S_n := \inf\{t \in D_n : t > S\}$, $S_n \searrow S$, temos $X_{S_n} \to X_S \in L^1$ em L^1. Aplicando o Teorema da Amostragem Opcional Discreto ao supermartingal $(X_t)_{t\in D_n}$, essa vez com os tempos de parada $S_n \leq T_n$,

$$X_{S_n} \geq E[X_{T_n}|\mathcal{F}_{S_n}]\,. \tag{12}$$

Como $S_n \searrow S$, temos $\mathcal{F}_S = \bigcap_n \mathcal{F}_{S_n}$ (exercício). Assim, para todo $A \in \mathcal{F}_S$,

$$\int_A X_{S_n} dP \geq \int_A X_{T_n} dP\,.$$

Como $X_{S_n} \to X_S$ e $X_{T_n} \to X_T$ em L^1, a prova de (9) segue após ter tomado o limite $n \to \infty$ nessa última desigualdade. □

1.9. **Interromper um martingal com um tempo de parada.** Seja $X = (X_t)_{t\geq 0}$ um supermartingal com respeito a uma filtração $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. É fácil ver que se a for uma constante, então $(X_{t\wedge a})_{t\geq 0}$ também é supermartingal, com respeito à mesma filtração. O seguinte resultado é uma combinação desse fato e do Teorema da Amostragem Opcional.

Teorema 1.6. *Se $X = (X_t)_{t\geq 0}$ é supermartingal contínuo a direita e $S \leq T$ dois tempos de parada limitados, então $X_S, X_T \in L^1$, e*

$$X_S \geq E[X_T|\mathcal{F}_S]\,. \tag{13}$$

Se X for martingal, sob as mesmas hipóteses,

$$X_S = E[X_T|\mathcal{F}_S]\,. \tag{14}$$

Demonstração. Seja $a > 0$ uma constante tal que $S \leq T \leq a$. Como visto acima, $(X_{t\wedge a})_{t\geq 0}$ é supermartingal contínuo a direita. Como $s \wedge a \leq a$ para todo $s \geq 0$, temos $X_{s\wedge a} \geq E[X_{a\wedge a}|\mathcal{F}_s] = E[X_a|\mathcal{F}_s]$. Logo, $(X_{t\wedge a})_{t\geq 0}$ é fechado por X_a. Pelo Teorema 1.5, $X_S \equiv X_{S\wedge a} \geq E[X_{T\wedge a}|\mathcal{F}_S] \equiv E[X_T|\mathcal{F}_S]$. □

Corolário 1.2. *Um processo càdlàg $X = (X_t)_{t\geq 0}$ adaptado a uma filtração $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ é martingal se e somente se para todo tempo de parada limitado T, $X_T \in L^1$ e $E[X_T] = E[X_0]$.*

Demonstração. O "somente se" segue do Teorema 1.6. Para provar o "se", observe primeiro que qualquer tempo t (constante) é um tempo de parada. Logo, $X_t \in L^1$ e $E[X_t] = E[X_0]$. Por outro lado, se fixarmos $s < t$ e $A \in \mathcal{F}_s$, e definirmos o tempo de parada (exercício) $T := s1_A + t1_{A^c}$, então $E[X_0] = E[X_T] = E[X_s 1_A] + E[X_t 1_{A^c}]$. Portanto, $E[X_s 1_A] = E[X_t 1_A]$, o que implica $X_s = E[X_t|\mathcal{F}_s]$. $\square$

Na prática, um tempo de parada é raramente limitado, e essa versão da Amostragem não se aplica. Porém, existe um jeito de pedir limitação, mas no proprio martingal, via uma *interrupção*.

Proposição 1.3. *Se X é martingal càdlàg com respeito a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, T um tempo de parada, então $X^T := (X_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ é martingal càdlàg, chamado martingal interrompido no tempo T.*

Demonstração. É claro que X^T é càdlàg e adaptado (exercício). Seja S um tempo de parada limitado. Como $S \wedge T$ é tempo de parada (limitado também), pelo Teorema 1.6,

$$E[X_S^T] = E[X_{S\wedge T}] = E[X_0] = E[X_0^T]\,.$$

Pelo Corolário 1.2, X^T é martingal. $\square$

2. Movimento Brownian em Dimensões $d \geq 1$

Usaremos aqui o Teorema da Amostragem Opcional para martingais associados ao movimento Browniano, e deduzir propriedades sobre as propriedades de recorrência do processo em função da dimensão. Começaremos com o caso mais simples da dimensão 1.

2.1. **Caso unidimensional: "a ruina do apostador contínuo".** Vimos no Exemplo 1.1 que o movimento $B = (B_t)_{t\geq 0}$ iniciado em x é martingal com respeito a sua filtração natural. Considere um intervalo $[a, b]$ cujo interior contém x. Considere então os tempos de parada (exercício)

$$T_{a,b} := \inf\{t : B_t \notin (a, b)\}\,. \quad T_x := \inf\{t : B_t = x\}\,.$$

Observe que $T_{a,b} = T_a \wedge T_b$. Sabemos que quase certamente, o MB atinge qualquer ponto da reta em um tempo finito. Tentaremos agora determinar qual dos pontos, a ou b, é atingido primeiro (pela continuidade das trajetorias, $T_a = T_b$ é impossível).

Teorema 2.1.

$$P_x(T_a < T_b) = \frac{b-x}{b-a}\,, \quad P_x(T_a > T_b) = \frac{x-a}{b-a}\,. \tag{15}$$

Observe que $\{T_a < T_b\} = \{B_{T_{a,b}} = a\}$.

Primeira prova: Como $T_{a,b}$ não é limitado, interrompemos o MB no tempo $T_{a,b}$. Observe que agora, o martingal (Proposição 1.3) $B^{T_{a,b}}$ é limitado, pois $B^{T_{a,b}} \in \{a, b\}$. Sendo limitado, ele é UI (Observação 1.3), portanto ele é fechado (Proposição 1.2). Logo, o Teorema da Amostragem Opcional se aplica (com os tempos $T_{a,b}$ e 0). Obtemos assim

$$E_x[B_{T_{a,b}}] = E_x[B_0] = x\,.$$

Ora, $E_x[B_{T_{a,b}}] = aP_x(B_{T_{a,b}} = a) + bP_x(B_{T_{a,b}} = b)$, e como $P_x(B_{T_{a,b}} = a) + P_x(B_{T_{a,b}} = b) = 1$, (15) está provado. $\square$

Prova alternativa: Como $T_{a,b}$ não é limitado, o truncaremos da seguinte maneira: $T_{a,b} \wedge N$, onde $N \geq 1$. Pelo Teorema 1.6,

$$x = E_x[B_0] = E_x[B_{T_{a,b}\wedge N}] = E_x[B_{T_{a,b}}, T_{a,b} \leq N] + E_x[B_{T_{a,b}\wedge N}, T_{a,b} > N]\,. \tag{16}$$

Para poder tomar o limite $N \to \infty$ nessa última expressão, precisamos mostrar que $P_x(T_{a,b} \geq N) \to 0$. Mas

$$\begin{aligned} P_x(T_{a,b} \geq N+1) &\leq P_x(T_{a,b} \geq N, |B_{N+1} - B_N| \leq b-a) \qquad (17)\\ &= E_x[1_{\{T_{a,b}\geq N\}} E_x[1_{\{|B_1 - B_0| \leq b-a\}} \circ \theta_N | \mathcal{F}_N]]\\ &= P_x(T_{a,b} \geq N) P_0(|B_1| \leq b-a)\\ &\equiv \delta P_x(T_{a,b} \geq N)\,, \qquad (18) \end{aligned}$$

onde $\delta \in (0,1)$, e onde usamos a Propriedade de Markov na segunda igualdade. Isso mostra que $T_{a,b} < \infty$ P_x-quase certamente. Podemos então tomar $N \to \infty$ em (16). Como $|E_x[B_{T_{a,b}\wedge N}, T_{a,b} > N]| \leq (|a| + b) P_x(T_{a,b} > N)$, isso mostra que $x = E_x[B_{T_{a,b}}]$. □

Observe que essa segunda prova não usa o fato do MB ser recorrente, fato que na verdade decorre do Teorema 2.1: com $b > 0$,

$$P_0(T_b < \infty) \geq P_0(T_b < T_{-n}) = \frac{n}{b+n} \to 1$$

quando $n \to \infty$.

Outras informações sobre o tempo de saida $T_{a,b}$ podem ser obtidas, via o uso de outros martingais associados ao MB.

Teorema 2.2.

$$E_x[T_{a,b}] = (x-a)(b-x)\,. \tag{19}$$

Em particular, $E_0[T_{-a,a}] = a^2$.

Demonstração. Considere o martingal $M_t := B_t^2 - t$ (ver Exemplo 1.2). Procedendo como acima, obtemos $E_x[M_{T_{a,b}\wedge N}] = E_x[M_0] = x^2$, e o limite $N \to \infty$ pode ser tomado pela mesma razão. Assim, usando as identidades do Teorema 2.1,

$$\begin{aligned} x^2 &= E_x[M_{T_{a,b}}]\\ &= E_x[B^2_{T_{a,b}}] - E_x[T_{a,b}]\\ &= \left\{a^2 \frac{b-x}{b-a} + b^2 \frac{x-a}{b-a}\right\} - E_x[T_{a,b}]\,, \end{aligned}$$

o que prova (19). □

2.2. **Dimensões superiores.**

Definição 2.1. Um processo $B = (B_t)_{t\geq 0}$, $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)$, em que os B_t^i são MB unidimensionais independentes, é chamado de movimento Browniano d-dimensional (MB-d).

É fácil verificar que o MB-d é um processo Gaussiano de média zero e de função de covariância dada por $\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = (t-s)I$ (quando $s \leq t$), onde I é a matriz identidade $d \times d$.

O MB-d pode ser construido da mesma maneira que o processo unidimensional, definindo as distribuições de dimensão finita por $\mu_{(t_1,\dots,t_n)}(I_1 \times \cdots \times I_n)$, com uma densidade com respeito à medida de Lebesgue em $(\mathbb{R}^d)^n$ dada por

$$\rho_{t_1}(x_1)\rho_{t_2-t_1}(x_2 - x_1)\dots\rho_{t_n-t_{n-1}}(x_n - x_{n-1}),$$

onde $\rho_t(y)$ é o núcleo do calor em dimensão d, dado por

$$\rho_t(y) := \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} e^{-\|y\|^2/2t}.$$

Exercício 2.1. Considere $\rho_t(y)$ definido acima.

(1) Mostre que ρ_t é solução da equação do calor:

$$\frac{1}{2}\Delta\rho_t = \frac{\partial \rho_t}{\partial t}, \quad \forall t > 0. \tag{20}$$

(2) Mostre que para qualquer função $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, integrável com respeito a $\rho_t(y)dy$,

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int \rho_\epsilon(y-x)f(y)dy = f(x).$$

Para estudar as propriedades de recorrência em dimensões superiores, usaremos martingais formados a partir do MB-d, usando o seguinte lema.

Teorema 2.3. *Seja $B = (B_t)_{t\geq 0}$ um MB d-dimensional iniciado em $x \in \mathbb{R}^d$, e $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ a sua filtração natural. Seja $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^2, com derivadas parciais limitadas, e tal que $E_x[|f(B_t)|] < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$. Então o processo real $X = (X_t)_{t\geq 0}$,*

$$X_t := f(B_t) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(B_u)du \tag{21}$$

é martingal com respeito a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Demonstração. É claro que X_t é adaptado e em L^1. Sejam $0 \leq s < t$.

$$E[X_t - X_s|\mathcal{F}_s] = E[f(B_t)|\mathcal{F}_s] - f(B_s) - \frac{1}{2}E_x\Big[\int_s^t \Delta f(B_u)du\Big|\mathcal{F}_s\Big]$$

Pela propriedade de Markov no tempo s,

$$E[f(B_t)|\mathcal{F}_s] = E[f \circ B_{t-s} \circ \theta_s|\mathcal{F}_s] = E_{B_s}[f(B_{t-s})],$$

e

$$E_x\Big[\int_s^t \Delta f(B_u)du\Big|\mathcal{F}_s\Big] = E_{B_s}\Big[\int_0^{t-s} \Delta f(B_u)du\Big] = \int_0^{t-s} E_{B_s}[\Delta f(B_u)]du,$$

onde a última identidade segue do Teorema de Fubini. Mas por definição, para todo $z \in \mathbb{R}^d$,

$$E_z[\Delta f(B_u)] = \int \rho_u(y-z)\Delta f(y)dy,$$

e usando a hipótese de que as derivadas parciais de f são limitadas, pode ser mostrado que

$$\int \rho_u(x)\Delta f(x)dx = \int f(x)\Delta\rho_t(x)dx\,. \tag{22}$$

Usaremos agora (20):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}E_x\Big[\int_s^t \Delta f(B_u)du\Big|\mathcal{F}_s\Big] &= \int_0^{t-s}\Big\{\int \frac{\partial\rho_u}{\partial u}(y-B_s)f(y)dy\Big\}du \\
&= \lim_{\epsilon\searrow 0}\int f(y)\Big\{\int_\epsilon^{t-s}\frac{\partial\rho_u}{\partial u}(y-B_s)du\Big\}dy \\
&= E_{B_s}[f(B_{t-s})] - \lim_{\epsilon\searrow 0}\int f(y)\rho_\epsilon(y-B_s)dy \\
&= E_{B_s}[f(B_{t-s})] - f(B_s)\,,
\end{aligned}$$

o que implica $E[X_t - X_s|\mathcal{F}_s] = 0$. Portanto, X é martingal. □

Exercício 2.2. Prove (22).

Procuraremos agora martingais úteis no estudo da distância do MB-d à origem. Idealmente, gostaríamos de poder achar funções $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ com derivadas parciais C^2 e limitadas, tais que

$$\Delta f(x) = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$, e adaptar o método desenvolvido na prova do Teorema 2.1.

Já que nos estamos interessados na distância do MB-d à origem, procuraremos funções da forma

$$f(x) = \phi(\|x\|^2)\,, \tag{23}$$

com $\phi = \phi(r)$. Para ter $\Delta f = 0$, ϕ deve satisfazer

$$\frac{\phi''(r)}{\phi'(r)} = -\frac{d}{2r}\,.$$

Logo, podemos escolher ϕ em função da dimensão, da seguinte forma:

$$d = 1: \quad \phi(r) = \sqrt{r}\,, \tag{24}$$

$$d = 2: \quad \phi(r) = \log r\,, \tag{25}$$

$$d \geq 3: \quad \phi(r) = r^{-(d-2)/2}\,. \tag{26}$$

Isto é,

$$\begin{aligned}
d = 1: &\quad f(x) = \|x\|\,, \\
d = 2: &\quad f(x) = \log\|x\|\,, \\
d \geq 3: &\quad f(x) = \|x\|^{-(d-2)}\,.
\end{aligned} \tag{27}$$

É claro que essas funções satisfazem à condição $\Delta f = 0$ somente fora da origem.

Teorema 2.4. *Seja $B = (B_t)_{t\geq 0}$ um MB-d.*

(1) $d = 1$: B é **recorrente**: *quase certamente, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, existe uma sequência $t_1 < t_2 < \ldots$, $t_n \nearrow \infty$, tal que $B_{t_n} = 0$ para todo n.*

(2) $d = 2$: B *é* **v-recorrente** *("v" de vizinhança): quase certamente, para qualquer aberto* $G \subset \mathbb{R}^2$*, existe uma sequência* $t_1 < t_2 < \dots$, $t_n \nearrow \infty$*, tal que* $B_{t_n} \in G$ *para todo* n*. Em outras palavras: quase certamente, a trajetória* $t \mapsto B_t$ *é densa em* $\mathbb{R}^2$*. No entanto,* B *não enxerga os pontos: para todo* $x \in \mathbb{R}^2$, $P(B_t = x \text{ para algum } t \geq 0) = 0$.

(3) $d \geq 3$: B *é* **transiente**: *quase certamente,* $\|B_t\| \to \infty$ *quando* $t \to \infty$.

Demonstração. Considere $0 < r < R < \infty$, e a região aberta

$$G_{r,R} := \{x \in \mathbb{R}^d : r < \|x\| < R\}\,.$$

Em dimensão d, seja f a função definida em (27). considere a função $\tilde{f}$ obtida da seguinte maneira: se $\|x\| \geq r/2$, então $\tilde{f}(x) := f(x)$. Em seguida, considere qualquer continuação C^2 de $\tilde{f}$ para valores $\|x\| < r/2$. Seja B um MB-d iniciado em $x \in G_{r,R}$. Pelo Teorema 2.3,

$$X_t := \tilde{f}(B_t) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta\tilde{f}(B_u)du$$

é martingal (obviamente càdlàg). Considere o tempo de parada $T_{r,R} := \int\{t : B_t \notin G_{r,R}\}$. Pela Proposição 1.3, $X^{T_{r,R}}$ é martingal. Como $\tilde{f} = f$ fora da bola de raio $r/2$,

$$X_{t\wedge T_{r,R}} = f(B_{t\wedge T_{r,R}})\,.$$

Em particular, $X^{T_{r,R}}$ é limitado. Assim, pelo Teorema da Amostragem Opcional (Teorema 1.5),

$$E_x[f(B_{T_{r,R}})] = E_x[f(B_0)] = f(x)\,.$$

Adaptando a sequência (17)-(18) da prova alternativa do Teorema 2.1 obtemos que $T_{r,R} < \infty$ quase certamente. Portanto, com um ligeiro abuso de notação, $f(B_{T_{r,R}}) \in \{f(r), f(R)\}$ quase certamente, o que dá $E_x[f(B_{T_{r,R}})] = f(r)P_x(B_{T_{r,R}} \in S_r) + f(R)P_x(B_{T_{r,R}} \in S_R)$. Como $P_x(B_{T_{r,R}} \in S_r) + P_x(B_{T_{r,R}} \in S_R) = 1$, obtemos

$$P_x(B_{T_{r,R}} \in S_r) = \frac{f(R) - f(x)}{f(R) - f(r)}\,, \quad P_x(B_{T_{r,R}} \in S_R) = \frac{f(x) - f(r)}{f(R) - f(r)}\,. \tag{28}$$

Observe que no caso $d = 1$, essas identidades coincidem com (15) (com $0 < a < x < b$). Para $d = 2$, observe que

$$\lim_{R\to\infty} P_x(B_{T_{r,R}} \in S_r) = \lim_{R\to\infty} \frac{\log R - \log\|x\|}{\log R - \log r} = 1$$

Defina $T_r := \inf\{t : B_t \in S_r\}$. Como $P_x(T_r < \infty) = \lim_{R\to\infty} P_x(B_{T_{r,R}} \in S_r)$, mostramos que para qualquer $x \neq 0$, para qualquer $r > 0$, $P_x(T_r < \infty) = 1$. Isso pode ser reformulado da seguinte maneira:

$$\forall z \in \mathbb{R}^d,\ \forall \epsilon > 0, \quad P_0(B_t \text{ tocar a bola } B_\epsilon(z)) = 1\,.$$

Isso implica que as trajetórias de MB-2 são densas em $\mathbb{R}^2$. Por outro lado,

$$\lim_{r\to 0^+} P_x(B_{T_{r,R}} \in S_r) = 0\,,$$

o que implica

$$\forall z \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \quad P_0(B_t \text{ tocar } z) = 0\,.$$

Para $d \geq 3$, como $\|x\| > r$,

$$\lim_{R\to\infty} P_x(B_{T_{r,R}} \in S_r) = \lim_{R\to\infty} \frac{R^{2-d} - \|x\|^{2-d}}{R^{2-d} - r^{2-d}} = (\|x\|/r)^{2-d} < 1\,.$$

Considere agora B iniciado na origem. Como $T_n < \infty$ quase certamente, $A_n := \{|B_t| \geq \sqrt{n} \text{ para todo } t > T_n\}$ é não-vazio.

$\square$

Exercício 2.3. Ja pensou em que que significa exatamente $f(B_{t\wedge T_{r,R}})$ ser limitada, logo UI, logo possuir limite?