



BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Departamento de Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

14 a 18 de outubro de 2002

Caos na base 2

Algumas Definições Precisas e Demonstrações

Cláudia Silva Tavares, Sônia Pinto de Carvalho e Sylvie Oliffson Kamphorst

Departamento de Matemática - UFMG

1 Introdução

Neste texto são encontradas as definições dos termos matemáticos e as demonstrações dos principais fatos usados para mostrar que o sistema dinâmico definido pela função $f(x) = 2x - [2x]$ tem os três ingredientes que caracterizam o caos.

2 Números Reais na Base 2

Os números reais podem ser racionais ou irracionais. Os racionais são da forma p/q com p e q inteiros. Dizemos que p/q está na forma reduzida se p e q são primos entre si. Os irracionais são aqueles números reais que não podem ser escritos como razão de dois inteiros.

Observemos que se x é um número real positivo e k é um número inteiro positivo então $f(x+k) = 2(x+k) - [2(x+k)] = 2x + 2k - [2x] - 2k = 2x - [2x] = f(x)$. Assim, podemos nos restringir a valores de x no intervalo $[0, 1)$.

A seguir, apresentamos 3 proposições sobre a representação de números positivos, menores do que 1, na base 2.

Proposição 1 *A representação de uma fração na forma reduzida na base 2 é finita se, e somente se o denominador é uma potência de 2.*

Demonstração: Seja p/q (uma fração na forma reduzida) com representação finita na base 2. Assim ela pode ser escrita como

$$a_n \times \frac{1}{2^n} + a_{n-1} \times \frac{1}{2^{n-1}} + \dots + a_1 \times \frac{1}{2} + a_0 \times \frac{1}{2^0}$$

onde os a_i 's são 0 ou 1. Colocando $1/2^n$ em evidência obtemos

$$\frac{1}{2^n}(a_n + a_{n-1} \times 2 + \dots + a_1 \times 2^{n-1} + a_0 \times 2^n)$$

Como a fração está na forma reduzida, a parte entre parênteses deve ser a representação de p na base 2, e portanto o denominador q é uma potência de 2.

Por outro lado, suponhamos que $q = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$ e p inteiro. A representação de p na base dois é da seguinte forma

$$p = a_m \times 2^m + a_{m-1} \times 2^{m-1} + \dots + a_1 \times 2 + a_0$$

com $m < n$ pois $\frac{p}{q} < 1$.

Então

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} &= \frac{a_m \times 2^m + a_{m-1} \times 2^{m-1} + \dots + a_1 \times 2 + a_0}{2^n} \\ &= a_m \times 2^{m-n} + a_{m-1} \times 2^{m-1-n} + \dots + a_1 \times 2^{1-n} + a_0 \times 2^{-n}.\end{aligned}$$

Como $m < n$, temos que $m - n < 0$. Logo p/q tem representação finita se q for uma potência de 2. $\square$

Proposição 2 *Um número racional possui representação infinita e periódica na base 2 se e somente se é da forma p/q , sendo que q não é uma potência de 2.*

Demonstração: Suponhamos p/q uma fração na forma reduzida representando um número racional. Os números p e q são inteiros e podem ser representados na base 2. Suponhamos que sejam da forma

$$\begin{aligned}p &= p_0 p_1 \dots p_n \\ q &= q_0 q_1 \dots q_k\end{aligned}$$

onde $p_{i's}$ e $q_{i's}$ valem 0 ou 1.

Usando o algoritmo da divisão de Euclides e os números representados na base 2, temos que os restos possíveis da divisão de p por q são: $1, 10, \dots, (q_0 q_1 \dots q_k) - 1$. Portanto, a medida que continuamos o processo da divisão, em algum momento os restos começarão a se repetir de forma periódica e infinita. Obteremos assim um número com representação periódica e infinita na base 2.

Para demonstrar a recíproca suponhamos x um número com representação periódica e infinita na base 2 da forma:

$$x = 0, a_0 a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+k} \dots$$

onde $a_{i's}$ valem 0 ou 1 e temos

$$a_{n+1} = a_0, a_{n+2} = a_1, \dots, a_{2n+1} = a_n$$

Multiplicando x por 2^{n+1} , obtemos

$$2^{n+1} \times x = a_0 a_1 a_2 \dots a_n, a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+k} \dots$$

Em seguida, fazemos a diferença

$$\begin{aligned}(2^{n+1} \times x) - x &= a_0 a_1 a_2 \dots a_n \\ x(2^{n+1} - 1) &= a_0 a_1 a_2 \dots a_n \\ x &= \frac{a_0 a_1 a_2 \dots a_n}{2^{n+1} - 1}\end{aligned}$$

Portanto, x é um racional. O denominador de x não pode ser uma potência de 2, pois se assim o fosse, x teria uma representação finita. $\square$

Proposição 3 *Um número é irracional se, e somente se possui representação infinita e não periódica na base 2.*

Demonstração: Os irracionais não podem ter representação finita, pois teriam se, e somente se, fossem da forma p/q com o denominador sendo uma potência de 2 e logo seriam racionais. E isto não acontece pois um irracional não pode ser escrito na forma p/q com p e q inteiros.

Também não podem ter uma representação infinita e periódica pois teriam se, e somente se, fossem um número da forma p/q com o denominador um número que não fosse uma potência de 2.

Logo, os irracionais possuem uma representação infinita e não periódica.

Por outro lado, seja x um número com representação infinita e não periódica na base 2. Suponhamos, por absurdo, que x seja um racional, digamos p/q . Podemos considerar dois casos:

1º caso: o denominador é uma potência de 2. Neste caso, x teria representação finita, mas por hipótese, ele possui representação infinita e não periódica. Logo x não pode ser da forma p/q com o denominador uma potência de 2.

2º caso: o denominador não é uma potência de 2. Neste caso, x teria uma representação infinita e não periódica, o que contraria a hipótese. Logo x não é da forma p/q e com o denominador um número diferente de uma potência de 2.

Assim, x não pode ser da forma p/q com p e q inteiros, sendo então um número irracional. $\square$

3 Tipos de Órbitas

A classificação dos tipos de órbitas quanto à aplicação de f a cada um destes tipos de números escritos na base dois pode ser dada pelas 3 proposições seguintes.

Proposição 4 *x_0 é um número com representação finita na base 2 se, e somente se sua órbita convergir para zero.*

Demonstração: Seja x_0 é um número com representação finita na base 2, escrito na forma $x_0 = 0, a_0 a_1 a_2 \dots a_n$ onde os $a_{i's}$ são 0 ou 1. Ora x_0 também é representado por $x_0 = 0, a_0 a_1 a_2 \dots a_n 000 \dots$

Aplicando $f(x) = 2x - [2x]$ a x_0 obtemos a órbita $O(x_0) = \{x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots\}$, onde

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, a_0 a_1 \dots a_n 000 \dots \\ x_1 &= 0, a_1 \dots a_n 000 \dots \\ &\vdots \\ x_n &= 0, a_n 000 \dots \\ x_{n+1} &= 0, 000 \dots \\ x_{n+2} &= 0, 000 \dots \end{aligned}$$

Logo podemos concluir que a órbita de x_0 converge para zero.

Reciprocamente, suponhamos que a órbita de x_0 convirja para zero. Então sua órbita é $O(x_0) = \{x_0, x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots\}$ onde

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, a_0 a_1 \dots a_n a_{n+1} \dots \\ x_1 &= 0, a_1 \dots a_n a_{n+1} \dots \\ &\vdots \\ x_n &= 0, a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots \\ x_{n+1} &= 0, a_{n+1} a_{n+2} \dots \end{aligned}$$

Mas $x_{n+1} = 0$. Logo x_0 será da forma $x_0 = 0, a_0 a_1 a_2 \dots a_n 000 \dots$ e pode ser escrito como $x_0 = 0, a_0 a_1 a_2 \dots a_n$ onde os $a_{i's}$ são 0 ou 1 e logo tem uma representação finita na base 2. $\square$

Proposição 5 x_0 é um número com representação periódica e infinita na base 2 se, e somente se sua órbita possuir um ciclo.

Demonstração: Suponhamos que x_0 é um número com representação na base 2 infinita e periódica, que começa a se repetir na n -ésima casa depois da vírgula e que tenha período de tamanho k . Ele pode ser escrito como:

$$x_0 = 0, a_0 a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+k} a_{n+k+1} a_{n+k+2} \dots a_{n+k+k} \dots$$

onde os $a_{i's}$ são 0 ou 1 e temos que $a_{n+p} = a_{n+p+k}$ para todo p entre 1 e k . Aplicando $f(x) = 2x - [2x]$ obtemos a seguinte órbita

$$O(x_0) = \{x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k}, x_{n+1+k}, \dots, x_{n+k+k}, x_{n+1+2k}, \dots\}$$

onde

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, a_0 a_1 \dots a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+k} a_{n+1+k} a_{n+2+k} \dots a_{n+k+k} \dots \\ x_1 &= 0, a_1 \dots a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+k} a_{n+1+k} a_{n+2+k} \dots a_{n+k+k} \dots \\ &\vdots \\ x_n &= 0, a_n a_{n+1} \dots a_{n+k} a_{n+1+k} a_{n+2+k} \dots a_{n+k+k} \dots \\ x_{n+1} &= 0, a_{n+1} \dots a_{n+k} a_{n+1+k} a_{n+2+k} \dots a_{n+k+k} \dots \\ &\vdots \\ x_{n+k} &= 0, a_{n+k} a_{n+1+k} a_{n+2+k} \dots a_{n+k+k} \dots \\ x_{n+1+k} &= 0, a_{n+1+k} a_{n+2+k} \dots a_{n+k+k} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

ou seja $x_{n+p} = x_{n+p+k}$ para todo p tal que $1 \leq p \leq k$. Logo podemos concluir que x_0 possui uma órbita com ciclo de período k .

Reciprocamente, suponhamos que a órbita de x_0 possua um ciclo de período k . Então

$$O(x_0) = \{x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k}, x_{n+1+k}, \dots, x_{n+k+k}, x_{n+1+2k}, \dots\}$$

onde

$$\begin{aligned} \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k}\} &= \{x_{n+1+k}, x_{n+2+k}, \dots, x_{n+k+k}\} = \\ &= \{x_{n+1+2k}, x_{n+2+2k}, \dots, x_{n+k+2k}\} = \dots \end{aligned}$$

Então $x_{n+p} = x_{n+p+k}$ para $1 \leq p \leq k$ e temos que

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, a_0 a_1 \dots a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+k} a_{n+1+k} a_{n+2+k} \dots a_{n+k+k} \dots \\ x_1 &= 0, a_1 \dots a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+k} a_{n+1+k} a_{n+2+k} \dots a_{n+k+k} \dots \\ &\vdots \\ x_n &= 0, a_n a_{n+1} \dots a_{n+k} a_{n+1+k} a_{n+2+k} \dots a_{n+k+k} \dots \\ x_{n+1} &= 0, a_{n+1} \dots a_{n+k} a_{n+1+k} a_{n+2+k} \dots a_{n+k+k} \dots \\ &\vdots \\ x_{n+k} &= 0, a_{n+k} a_{n+1+k} a_{n+2+k} \dots a_{n+k+k} \dots \\ x_{n+1+k} &= 0, a_{n+1+k} a_{n+2+k} \dots a_{n+k+k} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Temos então que $a_{n+p} = a_{n+p+k}$ para $1 \leq p \leq k$ e portanto x_0 será da forma

$$x_0 = 0, a_0 a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+k} a_{n+1+k} a_{n+2+k} \dots a_{n+k+k} \dots$$

onde os $a_{i's}$ são 0 ou 1 e obtemos uma representação periódica e infinita de x_0 na base 2, de período k . $\square$

Proposição 6 *A órbita de um ponto x_0 não acumula em nenhum ponto nem tem um ciclo se, e somente se, x_0 for um número com representação não periódica e infinita na base 2.*

Demonstração: Suponhamos que a órbita de x_0 não acumula em nenhum ponto nem tem um ciclo e que x_0 possua representação finita ou representação infinita e periódica.

No primeiro caso, temos que a órbita de x_0 converge para zero, o que contraria a hipótese. Logo, x_0 não pode ter representação finita.

No segundo caso, temos que a órbita de x_0 possui um ciclo, o que contraria a hipótese. Logo, x_0 não pode ter representação infinita e periódica.

Portanto, x_0 possui representação infinita e não periódica na base 2.

Reciprocamente, seja x_0 um número com representação infinita e não periódica. Suponhamos, por absurdo, que a órbita de x_0 por f ou converge para zero ou converge para algum outro ponto do intervalo $[0, 1)$ ou tenha um ciclo. Consideremos os três casos:

1º caso: A órbita de x_0 converge para zero.

Neste caso, x_0 teria representação finita, mas por hipótese, ele possui representação infinita e não periódica. Logo a órbita de x_0 não pode convergir para zero.

2º caso: A órbita de x_0 converge para um ponto $y \neq 0$.

Se isto acontecesse, $x_n = y$ para todo n a partir de uma certa altura. Como iterar a função significa andar com a vírgula, teríamos que y , em sua representação na base 2, teria todas casas iguais, ou seja, $y = 0,00000\dots$ ou $y = 0,11111\dots = 1$. Mas se $y = 1$ então $f(y) = 2 - 2 = 0$. Logo, uma órbita, se acumular, acumula no ponto 0 e voltamos ao caso anterior.

3º caso: A órbita de x_0 possui um ciclo.

Neste caso, x_0 teria uma representação infinita e não periódica, o que contraria a hipótese e assim, a órbita de x_0 não possui um ciclo.

Logo, a órbita de x_0 fica “passeando” pelo intervalo $[0, 1)$. □

4 Caos

Nesta seção provaremos as três propriedades que caracterizam o caos para o sistema dinâmico associado à função $f(x) = 2x - [2x]$.

4.1 Infinitas órbitas periódicas, com qualquer período

Chamamos de período da órbita o tamanho do ciclo. Então, o período será o número de casas da parte que repete na representação do número na base 2. Como podemos inventar números com partes que repetem de qualquer tamanho, teremos órbitas periódicas, com qualquer período.

4.2 Sensibilidade às Condições Iniciais

Antes de provar a sensibilidade às condições iniciais, provemos o seguinte lema:

Lema 7 *Se dois números x e y , menores que 1 e escritos na base dois, têm as k primeiras casas, depois da vírgula, iguais então a distância $D[x, y]$ entre eles é menor do que $\frac{1}{2^k}$.*

Demonstração: Sejam x e y dois números quaisquer menores que 1 e escritos na base dois e que possuam as k primeiras casas iguais.

$$x = 0, a_0 a_1 a_2 \dots a_i a_{i+1} \dots \quad \text{e} \quad y = 0, b_0 b_1 b_2 \dots b_i b_{i+1} \dots$$

Como $a_i = b_i$, para $i \leq k - 1$, temos:

$$D[x, y] = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{|b_i - a_i|}{2^{i+1}} + \sum_{i=k}^{\infty} \frac{|b_i - a_i|}{2^{i+1}} = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{|b_i - a_i|}{2^{i+1}} \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^k}$$

□

Definição 8 Um sistema dinâmico f possui sensibilidade às condições iniciais se existe $\beta > 0$ tal que para qualquer x e qualquer $\epsilon > 0$, existe y tal que $|y - x| < \epsilon$ e existe k tal que $|f^k(y) - f^k(x)| \geq \beta$.

O que esta definição nos diz é que mesmo quando as órbitas de dois pontos começam bem perto uma da outra, elas só ficam perto durante um certo tempo e depois se afastam.

Proposição 9 Seja f o sistema dinâmico definido por

$$\begin{aligned} f : [0, 1) &\rightarrow [0, 1) \\ x &\mapsto 2x - [2x] \end{aligned}$$

Então f possui sensibilidade às condições iniciais.

Demonstração: Sejam $\beta = 1/4$ e $\epsilon > 0$. Existe N tal que $\frac{1}{2^N} < \epsilon$.

Dado $x = 0, a_0a_1a_2a_3\dots$, onde os a_i 's = 0 ou 1, seja $y = 0, a_0a_1a_2\dots a_{N-1}b_Na_{N+1}a_{N+2}\dots$ com $b_N \neq a_N$, isto é, y tem todas as casas iguais às de x exceto a da posição $N + 1$ (e logo, se $a_N = 0$, $b_N = 1$ ou se $a_N = 1$, $b_N = 0$).

Como x e y têm as N primeiras casas iguais então

$$|y - x| < \frac{1}{2^N} < \epsilon$$

Tomando $k = N$ temos

$$|f^N(y) - f^N(x)| = |b_N - a_N| \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}$$

Logo, o sistema dinâmico definido por f possui sensibilidade às condições iniciais. □

4.3 Existe uma órbita densa no intervalo $[0, 1)$

Definição 10 Um ponto x_0 possui um órbita densa se dados qualquer $y \in [0, 1)$ e uma distância ϵ , existe $x_n \in O(x_0)$ tal que $|y - x_n| < \epsilon$.

Para demonstrar que temos uma órbita densa, precisaremos dos seguintes lemas:

Lema 11 Sejam k um número inteiro positivo e z um número real menor do que 1. Se $0 < z \leq \frac{1}{2^k}$ então existe uma representação de z na base 2 tal que suas k primeiras casas, depois da vírgula, são nulas.

Demonstração: Vamos analisar separadamente os dois casos: $z < \frac{1}{2^k}$ e $z = \frac{1}{2^k}$.

Seja $z = c_0c_1c_2 \dots c_kc_{k+1} \dots < \frac{1}{2^k}$ e suponhamos por absurdo que algum $c_j \neq 0$ para $j < k$. Então $z \geq \frac{1}{2^j} > \frac{1}{2^k}$, o que é absurdo. Logo, $c_0 = c_1 = \dots = c_{k-1} = 0$.

Tomemos então $z = \frac{1}{2^k}$. Na base 2, $z = 0, \underbrace{0 \dots 0}_{k-1} 1 = 0, \underbrace{0 \dots 0}_k 1111 \dots$ e o resultado segue. $\square$

Lema 12 *Sejam x e y dois números menores que 1 tais que $D[x, y] \leq \frac{1}{2^k}$. Então x e y têm as k primeiras casas depois da vírgula iguais.*

Demonstração: Decorre imediatamente do lema anterior, tomando-se $z = |x - y|$. $\square$

Proposição 13 *Seja f o sistema dinâmico definido por*

$$\begin{aligned} f : [0, 1) &\rightarrow [0, 1) \\ x &\mapsto 2x - [2x] \end{aligned}$$

Então f possui uma órbita densa.

Demonstração: Vamos determinar um ponto x_0 e mostrar que sua órbita é densa no intervalo $[0, 1)$, ou seja, que existe um ponto da órbita de x_0 que se aproxima tão perto quanto se queira de qualquer outro ponto y dado.

Observemos primeiro que podemos construir blocos de tamanhos variados usando 0's e 1's. Por exemplo, com uma casa apenas temos os blocos: 0 e 1. Com duas casas temos 4 blocos: 00, 01, 10 e 11. Com 3 casas temos 8 blocos: 000, 001, 010, 100, 011, 101, 110 e 111. Com 4 casas temos 16 blocos: 0000, 0001, 0010, 0100, 1000, 0011, 0101, 1001, 0110, 1100, 1010, 1001, 0110, 1100, 1010, 0111, 1011, 1101, 1110 e 1111. Usando análise combinatória, sabemos que existem 2^k blocos com k casas, usando os dígitos 0 e 1 para preenchê-las.

O ponto x_0 é construído colocando-se 0, vírgula e depois os blocos com 1 casa, seguidos dos blocos com 2 casas, depois os com 3 casas e assim por diante, obtendo:

$$x_0 = 0, \underbrace{01}_{1 \text{ casa}} \underbrace{00 \ 01 \ 10 \ 11}_{2 \text{ casas}} \underbrace{000 \ 001 \ 010 \ 100 \ 011 \ 101 \ 110 \ 111}_{3 \text{ casas}} \underbrace{\dots}_{4 \text{ casas}} \dots$$

Seja $y = 0, b_0b_1b_2b_3 \dots$ um ponto qualquer e tomemos uma distância ε . Então existe um inteiro k tal que $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$ e queremos achar um ponto x_n da órbita de x_0 de modo que $|y - x_n| \leq \frac{1}{2^k} < \varepsilon$.

Mas dizer que $|y - x_n| \leq \frac{1}{2^k}$ é dizer que x_n e y têm as k primeiras casas iguais. Mas para tal, basta que apliquemos a função f a x_0 até chegarmos ao bloco correspondente às k primeiras casas de y .

Portanto existe uma órbita densa no intervalo $[0, 1)$. $\square$