

A Matemática Helênica

Sônia Pinto de Carvalho

1 Tales e Pitágoras

Numa perspectiva geral, com a escola jônica, passou-se das explicações míticas para novas explicações de “origem e funcionamento do Universo que dispensavam a intervenção ou planificação dos deuses” [1]. Com esta passagem se dá simultaneamente (e necessariamente?) uma outra - o nascimento do espírito matemático, que vai do século VI a III a.C.

O primeiro artífice deste nascimento foi Tales de Mileto (~625-~545 a.C.).

Não há nenhuma dúvida de que os gregos aprenderam muito com os sacerdotes egípcios. Sabe-se que Tales andou pelo Egito e pela Babilônia por razões comerciais e aprendeu muita geometria e astronomia por lá.

Mas a geometria que os gregos fazem tem algo de novo em relação às geometrias egípcia e babilônica. Estas últimas são geometrias empíricas e calculistas. Os desenhos são considerados por seu valor estético e prático. O plano de uma casa representa o plano de uma casa e o desenho de uma pirâmide corresponde à pirâmide. E elas tratam de volumes, áreas, comprimentos.

Já para os gregos, os desenhos passam a ser considerados como um conjunto de pontos¹ no espaço, ligados entre si por linhas. E eles passam a estudar relações abstratas entre grandezas deste desenho, que já é abstrato. O raciocínio pode ser levado sem considerações numéricas. Os relatos que temos de Tales dizem que ele trabalhou com a igualdade dos ângulos da base de um triângulo isósceles, com a bissecção de um círculo por qualquer diâmetro, com a congruência de triângulos tendo um lado e dois ângulos adjacentes iguais (o famoso ALA). São dele, ou de Pitágoras, as afirmações de que “todo ângulo inscrito num semi-círculo é reto” ou “a soma dos ângulos internos de um triângulo é dois retos”.

Mas Tales vai ainda mais longe. O raciocínio típico de babilônicos e egípcios é o seguinte: “notamos que algo é verdadeiro cada vez que o observamos. Então passamos a admitir que será verdadeiro toda vez que observarmos.” Este tipo de raciocínio é chamado de raciocínio **indutivo**² e nós o usamos muito em diversos ramos do conhecimento. Tales tenta pegar uma outra quebrada: ele tenta mostrar que afirmações pouco evidentes podem ser deduzidas de outras que todos acreditam serem verdades e, assim, as pouco evidentes tornam-se verdade. Este raciocínio é o que se chama de **dedução**.

Por exemplo, Tales usa este raciocínio dedutivo para convencer os outros gregos, sempre céticos e incrédulos, de que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais. A idéia é: observemos que se traçarmos a bissetriz do ângulo compreendido entre os dois lados iguais de um triângulo isósceles, obteremos dois triângulos que têm dois lados iguais e um lado em comum e que os ângulos formados são iguais, pois traçamos a bissetriz. Ora, é verdade inquestionável que estes dois novos triângulos são iguais. Assim, os ângulos da base serão iguais.

Desta maneira, Tales trabalha com uma geometria de linhas e ângulos, abstrata, tentando provar os teoremas com o método da dedução. **Tales inicia o que chamamos de matemática.** Mas apesar de ter apontado para a possibilidade de deduzir teoremas menos óbvios de premissas de mais fácil aceitação, ele não pretendeu derivar todos os teoremas de um conjunto único de proposições. Quem vem tentar construir um sistema coerente no qual todos os teoremas sejam deduzidos de uns poucos axiomas explicitamente afirmados são os membros da Escola Pitagórica. Vamos conversar um pouquinho sobre esta escola e ver sua importância.

Tales morre entre 550 e 540 a.C. Pitágoras, se existiu, nasceu entre 580 e 570 a.C. perto de Mileto, na ilha de Samos e, mais tarde, vai para Crótona, no sul da Itália. Ele morre por volta de 500 a.C.

Em Crótona, ele fundou uma escola (sociedade, irmandade, seita, comunidade - na verdade não temos uma palavra boa para descrever o que Pitágoras fundou) fechada, baseada na propriedade comum, inclusive do

¹Atenção: para Tales e Pitágoras, os pontos tem massa. Não são nossos pontos abstratos. Mas, mesmo assim, eles dão um passo em relação à abstração.

²não confundir esta indução (filosófica) com a indução matemática.

conhecimento, na igualdade dos sexos ³ e numa disciplina estrita.

Essa sociedade é científica. Essa irmandade é mística. Nela, a fusão ciência e mito, razão e fé, se dá sem problemas.

Eles acreditavam na transmigração das almas, i.e., que as almas se reencarnam em homens, bichos ou plantas, de acordo com seu grau de evolução. E que era preciso se purificar para se chegar à perfeição. E, para eles, a purificação - catarsis - vem através do conhecimento puro da contemplação passiva. A contemplação é priorizada com relação à ação. O mundo sensível é considerado menos real do que o mundo da mente e, para encontrar a realidade, eles se voltam para o mundo ideal contido na mente.

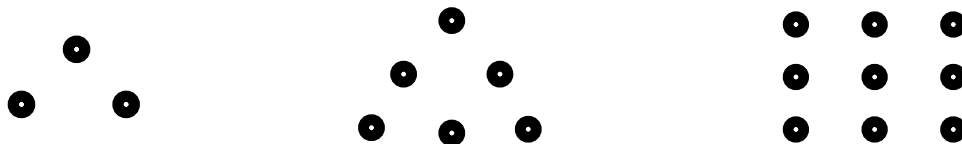
Ora, se o mundo da mente é que é real, qual será a essência deste mundo? Eles observam que “fenômenos qualitativamente distintos exibem as mesmas propriedades matemáticas” [5], partindo, supõe-se, da descoberta de que a harmonia da música é dada por uma proporção estabelecida entre o comprimento das cordas. Então, a essência do mundo são números e relações numéricas.

Resumindo, eles tiraram dois princípios:

1. A natureza é construída de acordo com princípios matemáticos.
2. As relações numéricas delineiam, unificam e revelam a ordem da natureza, ou seja, o cosmos (a ordem e a beleza do universo) tem sua origem nos números.

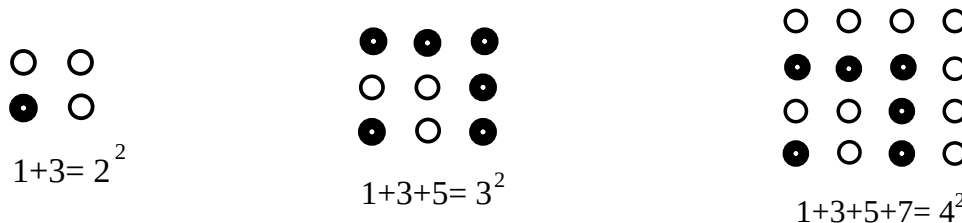
É claro que com uma filosofia destas, eles vão estudar matemática. E o que se espera é que desenvolvam a aritmética, que é a parte da matemática que estuda os números inteiros. Mas eles desenvolvem principalmente a geometria. Como?

Números, para os pitagóricos, eram o que são para todo mundo hoje, na linguagem comum: números inteiros positivos. Os números traduziam propriedades místicas e propriedades de forma. Por exemplo, 1 é a essência das coisas, 4 é o número perfeito, e logo a alma humana, 5 é a cor, 6 o frio, 7 a mente, a saúde e a luz, 8 o amor e a amizade. Por outro lado, eram classificados em pares e ímpares e também em triangulares, quadrados, etc. 3 é triangular, 6 é triangular, 9 é quadrado, como representado na figura.



É bom ressaltar que hoje nós temos uma abstração dos números que os primeiros pitagóricos não tinham. Para eles os números naturais eram pontos ou partículas. Mais tarde passaram a considerar os números como abstrações e os objetos como concretizações destes números.

Esta maneira de se servir do espaço para representar os números teve grande utilidade na aritmética pitagórica. Por exemplo, ao observarmos a figura abaixo notamos que $1+3=2^2$, $1+3+5=3^2$, $1+3+5+7=4^2$, de onde podemos chutar o resultado $1+3+5+\dots+(2n+1)=(n+1)^2$. (demonstre esta afirmação).



Além desta representação discreta dos números, eles também os interpretavam em termos de grandezas geométricas: comprimento, perímetro, área, volume. Assim, 3×2 é a área do retângulo de lados 3 e 2 e $3+2$ é o semi-perímetro deste retângulo.

³a comunidade pitagórica é das poucas da história onde as mulheres eram aceitas em igualdade com os homens. Pelo menos 28 mulheres são classificadas entre os pitagóricos, sendo a mais famosa Theano, professora e que escreveu tratados sobre física, matemática, medicina e psicologia infantil.

As frações aparecem com o significado de proporção entre grandezas. a é $2/3$ de b se $2b$ tem o mesmo tamanho que $3a$.

Tudo neste nosso cosmos, de beleza e ordem, harmonia e perfeição, é regido por proporções e composto pelas partículas primeiras que são os números. Assim, eles estudaram muito mais as propriedades das figuras do que as propriedades dos números.

Veio então o grande golpe contra a escola pitagórica: aplicando o “teorema de Pitágoras”⁴ ao cálculo da diagonal do quadrado de lado 1, chegaram ao não número, ao indizível, ao incomensurável, ao irracional $\sqrt{2}$. Não que fosse grave descobrir algo que não era número. O problema foi achar um comprimento, algo desenhável e existente, que não estivesse em proporção com as outras linhas da figura! Isto foi uma verdadeira paulada na filosofia deles!

Os pitagóricos conseguiram dar a volta por cima e a escola sobreviveu ao golpe. Ela “possuía a elástica adaptabilidade de todos os sistemas ideológicos verdadeiramente grandes” [7]. O grande golpe mesmo foi a dissolução da Irmandade por volta de 500 a.C. As causas da dissolução variam de autor para autor. A.Koestler, em [7], acha que tem “a ver com os princípios igualitários e a prática comunista da ordem, a emancipação das mulheres e a doutrina quase monoteísta”. Já Hull, em [4], acha que foram o poder e os objetivos políticos dessa sociedade tão bem organizada que assustaram aos governos das outras cidades.

Seja como for, a influência da escola Pitagórica se faz sentir até hoje. Palavras como filosofia e harmonia foram inventadas por eles. O adjetivo racional vem da filosofia pitagórica. E expressões como quadrado de um número, cubo de um número, nos levam à sua maneira de pensar os números.

Dentro da ciência e da história da ciência, vale ressaltar que:

- na ciência “os pitagóricos criaram a possibilidade de lidar com quantidades físicas, reduzindo-as a medidas e a números” [1]
- na matemática, estabeleceram o método de prova a partir de postulados, usando o raciocínio dedutivo.
- na filosofia, a postura de que a realidade se encontra no mundo da mente vai, um pouco mais tarde, fazer a cabeça de Platão e sobrevive até hoje.

References

- [1] J.D. Bernal: Ciência na História, 1º volume, Livros Horizonte Ltda, Lisboa, 1975.
- [2] F.Cajori: A History of Mathematics, The MacMillan Co, NY, 1924.
- [3] E.Helm: The vibrating string of the pythagoreans, Scientific American, 217(6), 1967
- [4] L.W.H.Hull: Historia y Filosofia de la Ciencia, Ed. Ariel, Barcelona, 1973.
- [5] M.Kline: Mathematics - the loss of certainty, Oxford Univ. Press, NY, 1980.
- [6] M.Kline: Mathematics in the Western Culture, G.Allen and Unwin Ltda, Londres, 1954.
- [7] A.Koestler: Os sonâmbulos, IBASA, São Paulo, 1961.
- [8] E.Noel(org.): Le Matin des Mathématiciens, Ed.Belin, Paris, 1985.
- [9] S.B.A.Viana: Sobre Pitágoras e pitagóricos, Rev. Kriterion, 20, 1973/74.

⁴o famoso Teorema de Pitágoras já era conhecido dos egípcios, pelo menos no caso 3,4,5 e dos babilônicos, que possuíam tabelas de números que verificavam a relação dada pelo teorema. Pitágoras também o conhecia, mas não se sabe como o demonstrou. O símbolo do Colégio Pitágoras corresponde ao desenho da demonstração de Euclides (~365-~275 a.C.). Também é conhecida a demonstração dada pelo hindu Bhāskara (1114-1185 d.C. – o mesmo da fórmula das raízes da equação do segundo grau) que difere ligeiramente da de Euclides.