# Introduzindo Vetores *

Banesh Hoffmann †

## 1 Definindo um vetor

Fazer uma boa definição não é fácil. A história mostra isto quando o filósofo Platão definiu *Homem* como *um animal de duas patas sem penas*, Diógenes então apresentou um galo depenado dizendo *Aqui está o homem de Platão*. Por causa disto, a definição foi corrigida, agregando a frase *e com unhas largas*; infelizmente então, a estória acaba. Mas e se Diógenes tivesse contra atacado apresentando Platão com as penas do galo?

**Exercício 1.1** O que teria acontecido? (Note que Platão agora teria penas).

**Exercício 1.2** Sob que circunstâncias um elefante seria classificado como um homem de acordo com a definição acima?

Um *vetor* é frequentemente definido como uma *entidade tendo tamanho (módulo) e direção*[1]. Mas esta não é uma boa definição. Por exemplo, um segmento orientado como abaixo tem tamanho (seu comprimento) e

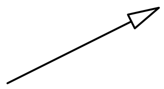

Figura 1:

direção, e é frequentemente utilizado como o desenho de um vetor; ainda assim, não é um vetor. A flexa de um arqueiro também não é um vetor embora também tenha tamanho e direção.

Para definir um vetor, devemos agregar à definição acima, algo análogo a *ter unhas largas*, e ainda assim pode ser que não fiquemos completamente safisfeitos com a definição. Mas isto deve nos permitir começar e poderemos tentar corrigir e melhorar a definição à medida que prosseguimos - podemos inclusive ter que substituí-la por uma definição completamente diferente mais tarde. Se, no final, tivermos o desconfortável sentimento de não termos ainda produzido uma definição satisfatória de um vetor, não é preciso desanimar, pois faz parte da natureza de uma definição, não ser completamente satisfatória, teremos aprendido bastante bem o que um vetor é afinal, da mesma maneira como sabemos, mesmo sem ser capazes de dar uma definição satisfatória, o que é um homem - tão bem que somos capazes de criticar a definição de Platão.

**Exercício 1.3** Defina *porta*.

*parte do 1o Capítulo do livro "About Vectors" Editado pela Dover em 1975

†traduzido por Sylvie Oliffson Kamphorst

[1] No nosso conceito de direção englobamos a noção de sentido

**Exercício 1.4** Encontre falhas na sua definição de *porta*.

**Exercício 1.5** De acordo com sua definição, uma divisória móvel entre dois cômodos é uma *porta*?

# 2 A Regra do Paralelogramo

A principal coisa que devenos adicionar à "tamanho-direção" definição de um vetor é o seguinte:

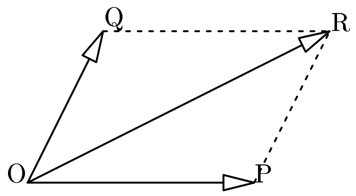


Figura 2:

Vamos pensar em vetores como tendo uma localização definida. Cosideremos que os segmentos orientados $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ representam tamanho e direção dos dois vetores començando no ponto comum $O$. Complete o paralelogramo formado por $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ e desenhe a diagonal $OR$. Assim, quando tomados juntos os dois vetores representados por $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ são equivalentes a um único vetor representado pelo segmento orientado $\vec{OR}$. Este vetor recebe o nome de *resultante* dos veotres representados por $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$, e a propriedade crucial de vetores acima é denominada de *regra do paralelogramo* para a combinação de vetores.

**Exercício 2.1** Encontre (a) através de desenhos e medida e (b) através de cálculos utilizando o teorema de Pitágoras, a tamanho (comprimento) e direçãoda resultante de dois vetores $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$, cada um deles de comprimento 3, com $\vec{OP}$ apontando horizontalmente para a direita, e $\vec{OQ}$ perpendicular a este, apontando verticalmente para cima.

**Exercício 2.2** Mostre que a resultante de dois vetores $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ que apontam na mesma direção é um vetor apontando na mesma direção e de tamanho igual à soma das tamanhos de $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$. (Imagine o paralelogramo da figura 2 achatado reto sobre uma linha.

**Exercício 2.3** Descreva a resultante de dois vetores $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ que apontam em direções opostas.

**Exercício 2.4** No exercício acima, qual seria a resultante se $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ tivessem o mesmo tamanho? (Dá pra reparar algo de estranho quando você compara este vetor resultante com a definição de vetor?)

**Exercício 2.5** Observe que a resultante de $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ é a mesma de que a de $\vec{OQ}$ e $\vec{OP}$. (Esta observação é trivialmente óbvia, mas mantenha-a em mente. Voltaremos a ela mais tarde).

Na prática, só precisamos desenhar o meio paralelogramo da figura **??**- o triângulo $OPR$ ou o triângulo $OQR$. Quando fazemos isto, parece que combinamos os vetores $\vec{OP}$ e $\vec{PR}$ (ou $\vec{OQ}$ e $\vec{QR}$) um ao final do outro como abaixo, mesmo que eles não tenham o mesmo ponto de partida. Na verdade, então, meramente combinamos $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ pela regra do paralelogramo. Mas suponha que estivéssemos lidando com o que chamamos de *vetore*

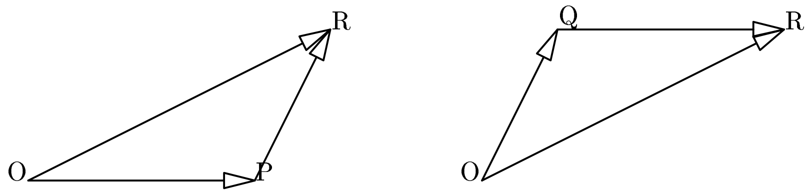


Figura 3: Para melhor clareza as ponta de flexa se encontrando em $R$ foram ligeiramente deslocadas. Ocasionalmente deslocaremos também outras pontas de flexa nas mesmas circunstâncias.

*livres* - vetores com a liberdade se serem movidos de um ponto a outro, de tal maneira que, por exemplo, $\vec{OP}$ e $\vec{PR}$ na figura 3, que tem a mesma tamanho e direção, são oficialmente contados não como vetores distintos mas como o mesmo vetor livre. Podemos então combinar vetores livres que estão na verdade separados um do outro juntando-os um atrás do outro, como $\vec{OP}$ e $\vec{PR}$ na figura 3. Mas já que podemos também combiná-los de acordo com a regra do paralelogramo movendo-os de tal maneira que eles tenham a origem em comum; como $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ na figura 2, a regra do paralelograma é a regra básica. Observe que quando falamos de mesma direção, queremos dizer exatamente a mesma e não direções opostas - norte e sul não a mesma direção em nosso contexto.

## 3 Trajetos não são vetores

É extremamente correto começar com uma definição, no entanto, não é muito esclarecedor. Porque cientistas e matemáticos estão interessados em objetos que tem tamanho e direção e e se combinam de acordo com a regra do paralelogramo? Porque eles imaginaram tais objetos? Na verdade, será que estes objetos existem mesmo - fora da imaginação dos matemáticos?

Existem, é claro, muitos objetos que tem tamanho e direção. E existem infelizmente muitos livors que dão ao leitor a impressão que estes objetos obviamente e inevitavelmente obedecem à regra do paralelogramo. Vale então a pena, explicar cuidadosamente porque a maioria destes objetos não obedecem a esta regra e então, por um processo de abstração, encontrar objetos que o façam.

Suponha que eu viva em A e que meus amigos vivam a 10km de distância em B. Eu saio de A e ando constantemente a 4km/hora durante 2 horas e meia. Obviamente eu ando 10 km. Mas será que eu chego na casa de meus amigos em B?

Você pode dizer que isto depende da direção que eu tomar. Mas porque razão havemos de supor que eu me mantive numa direção constante? As chances contrárias são esmagadoras - a menos que eu esteja precedido por um bulldozer ou um tanque pesado. Mas provavelmente eu andarei em todas as direções e com quase toda certeza não chegarei em B. Posso até acabar em casa novamente.

Agora suponha, que eu comece de novo de A e desta vez, chegue em B. Eu posso ter levado 4 ou 5 horas, ou posso ter tomado um ônibus ou um trem e ter chegado lá muito rapidamente. não importa como eu viajo e qunato tempo levo. Não importa quantas vezes eu mudei de direção, quão cansada fiquei, o quanto meus sapatos ficaram sujos ou se choveu. Ignore todos estes itens, por mais importantes que possam ser, e considere somente a abstração que resulta quando nos concentramos somente no fato de que eu saí de A e cheguei em B. Vamos dar a esta abstração um nome. Como deveremos denominá-la? Certamente não *trajetos* pois esta palavra nos trás muito da vida do dia a dia - chuva, sombrinhas, frustrações, encontros amorosos e todos os outros itens que estamos ignorando aqui. Além do mais, queremos preservar a palavra *trajeto* exatamente para este conceito corriqueiro. Para nossa abstração precisamos de uma palavra neutra e descolorida. Vamos usar *transposição*, no sentido de mudança de posição.

Abaixo estão os traçados de quatro trajetos de A até B.

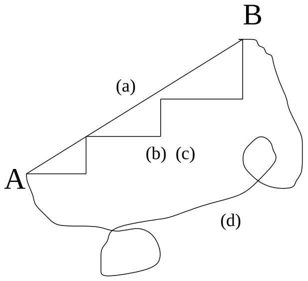


Figura 4:

Todos os quatro trajetos são diferentes com a possível mas altamente improvável exceção de (b) e (c).

Mas embora os quatro trajetos não são todos os mesmos, eles causam a mesma transposição. Podemos representar esta transposição pelo segmento orientado $AB$. Ele tem tamanho e direção. no entanto parece ter algo a mais. Ele é um vetor? Vejamos.

Considerem as posições A, B e C como na figura abaixo.

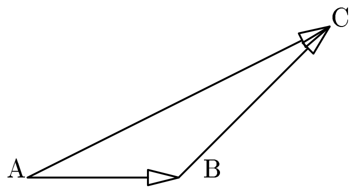


Figura 5:

Se eu andar em uma linha reta de A até B e então em uma linha reta de B até C, eu terei feito um trajeto de A a C, mas este não será o mesmo que ir diretamente em linha reta de A a C: a paisagem é diferente, e também é diferente a quantidade de couro de sapato gasta, provavelmente, e podemos pensar em várias outras diferenças.

Assim, embora possamos dizer que as caminhadas de A ateé B e de B até C se combinam em um trajeto resultante de A até C, este não é um trajeto em linha reta de A até C: as caminhadas não se combinam da mesma maneira com que vetores se combinam, elas se combinam em um sentido mais tautológico de que $2 + 1 = 2 + 1$ do que em $2 + 1 = 3$.

Trajetos então, não são vetores. Mas quando trabalhamos com transposições, ignoramos coisas como paisagem e a quantidade de couro gasta. Uma transposição de A para B seguida de uma transposição de B para C é realmente equivalente a uma transposição de A para C. E isto nos recorda tão fortemente a situação vetorial da figura 3 que somos tentados a conluir que transposiçãos são vetores. No entanto há uma diferença crucial entre as duas situações. Não podemos combinar os transposições na ordem inversa (compare com o exercício 2.5). não existe equivalente para uma transposição de B a C seguido de uma transposição de A até B. Só podemos combinar duas transposições se a segunda começa onde a primeira termina. Assim, na figura 2, assim como com trajetos, não podemos combinar uma transposição de O a P com uma de O a Q, qualquer que seja a ordem. Assim, transposições não são vetores.

## 4 Deslocamentos são vetores

Agora que descobrimos porque transposições não são vetores podemos facilmente perceber que abstração ainda devemos fazer para obter entidades que o sejam. Da já abstrata idéia de transposições, vamos remover o ponto de partida e o ponto de chegada e manter apenas a relação entre eles: que B fica a uma certa distância de A e uma tal direção. [2] Transposições são coisas que inventamos com o objetivo de trazer à tona certas distinções. Mas esta nova abstração é um conceito matemático com um nome técnico: recebe o nome de deslocamento. E é um vetor, como vamos agora mostrar.

Na figura abaixo, os segmentos orientados $AB$ e $LM$ são paralelos e de mesmo comprimento. Qualquer trajeto de A até B, será invitavelmente diferente de um trajeto de L a M. Da mesma maneira, a transposiç ‘ao de A a B é diferente da de L a M já que os pontos de partida são diferentes, assim como os de chegada. No entanto, as duas transposições, assim como os vários trajetos, levam ao mesmo deslocamento: se, por exemplo, B está a 5 metros na direção nordeste de A, e também M está a 5 metros de L na direção nordeste, então este deslocamento é de 5 metros na direção nordeste.

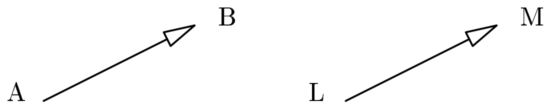


Figura 6:

Agora olhe para a figura 2. A transposição de O a P seguida pela transposição de P a R é equivalente à transposição de O a R. A tranposição de P a R nos dá um deslocamento $\vec{PR}$ que é o mesmo que o deslocamento $\vec{OQ}$. Assim, o deslocamento $\vec{OP}$ seguido do deslocamento $\vec{OQ}$ é equivante ao deslocamento $\vec{OR}$.

Assim, deslocamentos tem tamanho e direção e se combinam de acordo com a regra do paralelogramo. De acordo com nossa definição são portanto vetores. Já que deslocamentos tais como $\vec{AB}$ e $\vec{LM}$ na figura 4 são dados como idênticos, deslocamentos são vetores livres e são portanto especiais de alguma forma. Em geral, vetores como $\vec{AB}$ e $\vec{LM}$ não são contados como sendo idênticos.

[2]Mantemos também a conexão, ainda que tênue com trajetos, pois queremos reter a idéia de que um movimento ocorreu, mesmo que não nos importe de maneira alguma como e sob que circunstâncias este ocorreu.