Caos na base 2 – Verão 2001

Sônia Pinto de Carvalho    Sylvie Oliffson Kamphorst    Cláudia Silva Tavares
Departamento de Matemática, UFMG

# 1 Introdução

Nosso objetivo é estudar a *dinâmica* de um número positivo, menor do que 1, pela aplicação da função

$$y = f(x) = 2x - [2x] = 2x \bmod 1$$

onde $[2x]$ significa tomar a parte inteira do número $2x$.

Vamos começar olhando como funciona a função $f(x)$. Para $x = 0,8$

$$y = f(0,8) = 2 \times 0,8 - [2 \times 0,8] = 1,6 - [1,6] = 1,6 - 1 = 0,6.$$

Para $x = 0,2$, $y = f(0,2) = 0,4 - [0,4] = 0,4 - 0 = 0,4$.

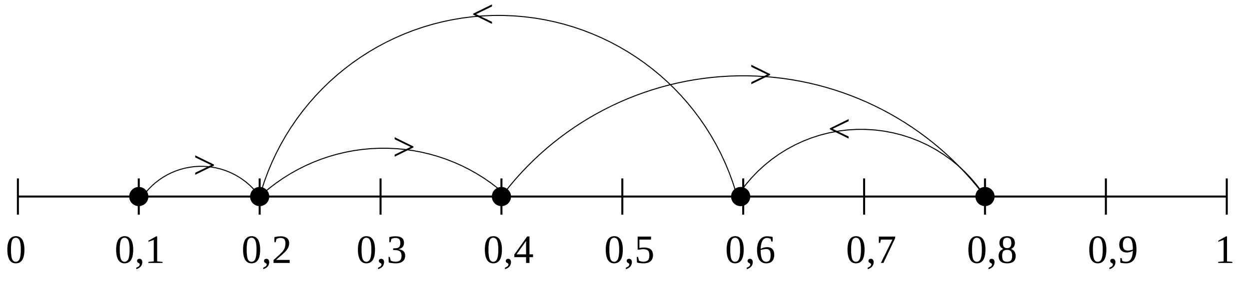
$1^a$ **Tarefa**: Complete a tabela

| x | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2x-[2x] | | | 0,4 | | | | | | 0,6 | |

Tomemos o ponto $x = 0,1$ e vejamos como ele evolui se aplicamos sucessivamente a função $f(x) = 2x - [2x]$. Vemos pela tabela que 0,1 é levado pela $f$ em 0,2 que por sua vez é levado pela $f$ em 0,4 que é levado em 0,8 que é levado em 0,6 que é levado em 0,2 que volta a ser levado em 0,4 e daí forma-se um ciclo. Esquematicamente podemos escrever:

$$0,1 \to 0,2 \to 0,4 \to 0,8 \to 0,6 \to 0,2 \to 0,4 \to 0,8 \to 0,6 \to 0,2 \to \dots$$

ou, se preferirmos, podemos fazer pictoricamente:




O conjunto

$$\{0,1\ ;\ 0,2\ ;\ 0,4\ ;\ 0,8\ ;\ 0,6\ ;\ 0,2\ ;\ 0,4\ ;\ 0,8\ ;\ 0,6\ ;\ 0,2\ ;\ 0,4\ ;\ 0,8\ ;\ 0,6\ ;\dots\}$$

chama-se a órbita do ponto $x = 0,1$ pela função $f(x) = 2x - [2x]$.

$2^a$ **Tarefa**: Ache a órbita de $x = 0,11$.

Observando esses exemplos podemos nos perguntar: será que todo número vai andando e depois começa a repetir? Se repetir, dá para dizer quantos passos ele dá antes de começar a repetir?

O nosso objetivo aqui é conseguir fazer uma previsão do comportamento das órbitas dos números pela função $f(x)$. Para isso vamos escrever os números na base 2.

# 2 Classificação das órbitas

## 2.1 Números inteiros na base 2

Todo número inteiro positivo no sistema decimal é representado como soma de unidades, dezenas, centenas, etc, isto é, como soma de diferentes potências de 10, com coeficientes cujo valor vai de 0 a 9. Por exemplo: 2728 é 2 milhares, 7 centenas, 2 dezenas e 8 unidades, ou seja

$$2 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 8 \times 10^0,$$

Na base 2 as coisas funcionam de maneira análoga. Um número inteiro positivo na base 2 é representado como soma de potências de 2, com coeficientes valendo 0 ou 1. Por exemplo:

$$7 = 2^2 + 2 + 1 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0,$$

Assim, 7 na base 2 se escreve 111.

$3^a$ **Tarefa**: Para construir uma tabela de inteiros até 10 na base 2, siga os seguintes passos:

1. Como se escreve 3 na base 2?
2. Como se escreve 5 na base 2?
3. Escreva os números de 1 a 4 na base 2.
4. Como 5=4+1, 5 será 100+1=101, na base 2. Para achar o 6 na base 2 basta então somar 101 com 1. Quanto dá?
5. Quanto é 1+1 na base 2?
6. Complete a tabela:

| base 10 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| base 2 | 0 | 1 | 10 | 11 | 100 | 101 | | | | | |

## 2.2 Números menores do que 1 na base 2

No sistema decimal um número menor do que 1 aparece na forma $0, a_1a_2a_3\ldots$, onde os $a_i$'s tem valor de 0 a 9. Eles correspondem a somas de potências negativas de 10, Por exemplo

$$0,68543 = 6\times\frac{1}{10}+8\times\frac{1}{10^2}+5\times\frac{1}{10^3}+4\times\frac{1}{10^4}+3\times\frac{1}{10^5}.$$

Na base 2 acontece a mesma coisa só que com potências negativas de 2 e os coeficientes só podem valer 0 ou 1. Por exemplo 0,10011 é um número menor do que 1 representado na base 2, correspondendo à seguinte soma de potências negativas de 2:

$$1\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2^2}+0\times\frac{1}{2^3}+1\times\frac{1}{2^4}+1\times\frac{1}{2^5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{19}{32}$$

onde $\frac{19}{32}$ está escrito na base 10. Se quisermos representar 0,10011 como fração na base 2 observamos que 19 se escreve 10011, na base 2 e 32 se escreve 100000, na base 2. Logo

$$0,10011=\frac{10011}{100000}\text{ , na base 2.}$$

**Exercícios**

1. Os 3 números abaixo estão escritos na base 2. Escreva-os como soma de potências negativas de 2.

   $$0,011 \quad ; \quad 0,101001 \quad ; \quad 0,011011011011\ldots$$

2. Dê a expressão na base 2 de 0,5 ; 0,25 e 0,125 (dica: $0,5=\frac{1}{2}$ , $0,25=\frac{1}{4}$ , $0,125=\frac{1}{8}$)

3. Os números $0,101$ ; $0,1011$ e $0,0111$ estão escritos na base 2. Qual é o maior? Qual o menor? (tente fazer sem escrever os números na base 10.)

4. Dê um número, escrito na base 2, menor do que 1 e maior do que $\frac{1}{2}$.

5. Dê um número positivo, escrito na base 2, menor do que $\frac{1}{2}$.

## 2.3 Dobrar um número na base 2

Dobrar um número na base 2 é muito bacana. Vejamos em um exemplo como funciona. Seja $n = 101,01001$ um número representado na base 2. Temos

$$n = 1\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0+0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2^2}+0\times\frac{1}{2^3}+0\times\frac{1}{2^4}+1\times\frac{1}{2^5}.$$

Logo

$$\begin{aligned}2\times n &= 2\times\left(1\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0+0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2^2}+0\times\frac{1}{2^3}+0\times\frac{1}{2^4}+1\times\frac{1}{2^5}\right)\\ &= 1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2^1+0\times 2^0+1\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2^2}+0\times\frac{1}{2^3}+1\times\frac{1}{2^4}\end{aligned}$$

Logo, na base 2 temos:

$$\begin{aligned} n &= 101,01001 \\ 2n &= 1010,1001 \end{aligned}$$

Vemos que multiplicar por 2, na base 2, é andar com a vírgula para a direita. Observe também que dividir por 2 corresponde a andar com a vírgula para a esquerda.

## 2.4 De volta a $f(x) = 2x - [2x]$

$4^a$ **Tarefa**:

1. Tome $x_0 = 0,110110110110110110\ldots$, escrito na base 2. Ache a órbita de $x_0$, isto é, o conjunto $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, onde $x_0 = 0,110110110\ldots$, $x_1 = f(x_0) = 2x_0 - [2x_0]$, $x_2 = 2x_1 - [2x_1]$, $x_3 = 2x_2 - [2x_2]$, etc. Observe que $x_3 = x_0$, $x_4 = x_1$, ou, melhor ainda, que $x_{n+3} = x_n$, para todo $n$. A órbita deste ponto tem um ciclo de período 3.
2. Ache a órbita de $x_0 = 0,101001000100001000001\ldots$ Ela tem um ciclo?
3. Ache a órbita de $x_0 = 0,10100111010101010\ldots$ Ela tem um ciclo?
4. Ache a órbita de $x_0 = 0,1101001$. Ela tem um ciclo?
5. (a) para que tipo de ponto $x_0$ a órbita volta a repetir o que já tinha feito, isto é, a órbita tem um ciclo?
   (b) quando é que não repete nunca?
   (c) quando é que vai parar no 0?

## 2.5 Comportamento de órbitas e tipos de números

Ao responder às perguntas do item 5 da $4^a$ Tarefa, você deve ter observado que se um número escrito na base 2 tem uma representação finita, a órbita dele vai até o zero e fica por lá. Se o número tem uma representação periódica, a órbita, a partir de uma certa hora, começa a repetir, fazendo um ciclo. E se a representação é infinita e não é periódica, a órbita fica "passeando" pelo segmento [0,1], sem parar em lugar nenhum e sem formar ciclos. Assim, o comportamento da órbita de $x_0$ está completamente determinado pela representação de $x_0$ na base 2. Mas se entendermos um pouco mais da estrutura dos números, nem precisaremos escrevê-los na base 2 para dizermos o comportamento das órbitas!

Um número real pode ser um racional, isto é, uma fração da forma $p/q$, com $p$ e $q$ números inteiros, ou um número irracional, que são os que não são frações, como $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \pi, e$, etc.

**Exercícios**

1. Escreva um número $x_0$ menor do que 1, na base 2, que tenha apenas 5 casas depois da vírgula. Mostre que $x_0$ é da forma $p/q$, isto é, é uma fração e que o denominador $q$ é uma potência de 2.

2. Tome $x_0 = 5/8$. Escreva $x_0$ na base 2 e observe que só tem 3 casas depois da vírgula.

Não é difícil mostrar que a representação de uma fração na base 2 é finita se e somente se o denominador é uma potência de 2 (estamos falando de frações na forma reduzida, isto é, com numerador e denominador primos entre si).

Observemos agora o que acontece com as representações periódicas. Tomemos por exemplo $x_0 = 0,110110110\ldots$

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \ldots \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2^4}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2^7}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ldots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \ldots\right) \end{aligned}$$

Mas

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \ldots$$

é a soma de uma PG com $a_0 = 1/2$ e razão $r = 1/2^3$. Logo

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2^3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{8}} = \frac{4}{7}$$

e

$$x_0 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \ldots\right) = \frac{3}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{6}{7},$$

isto é, uma fração com denominador diferente de uma potência de 2 (e tinha mesmo que ser pois se o denominador fosse potência de 2, então a representação seria finita!)

Olhemos agora ao contrário. Tomemos $x_0 = 1/3$, uma fração cujo denominador não é uma potência de 2.

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{2^2 - 1} = \frac{1}{2^2\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)} = \frac{\frac{1}{2^2}}{1 - \frac{1}{2^2}}.$$

Vemos que $1/3$ é a soma de uma PG, com $a_0 = 1/2^2$ e $r = 1/2^2$. Logo

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \ldots$$

e sua representação na base 2 é 0,01010101 ...

O que estes exemplos sugerem ( e isto pode ser demonstrado) é que uma fração cujo denominador não é uma potência de 2 dá uma representação periódica na base 2.

Na verdade, toda fração, ou número racional, quando escrito na base 2, ou tem um desenvolvimento finito (se o denominador é potência de 2) ou tem uma representação infinita e periódica (no caso contrário) e vice-versa.

Os números irracionais então terão representação infinita e que não se repete.

Ajuntando estes fatos com o que sabemos sobre a relação entre representação na base 2 e comportamento das órbitas podemos fazer o seguinte resumo:

| RESUMO | | |
|---|---|---|
| Os números podem ser | Representação na base 2 | Comportamento da órbita |
| frações (da forma $\frac{p}{q}$, com $p$ e $q$ números inteiros) | $q = 2^n \Leftrightarrow$ representação finita | a órbita vai morrer no zero |
| | $q \neq 2^n \Leftrightarrow$ representação infinita e periódica | a órbita tem um ciclo |
| irracionais | representação infinita e não periódica | a órbita passeia no intervalo [0,1] |

**Exercício**: Dê o comportamento das órbitas dos números abaixo, escritos na base 10:

$$\frac{1}{3} \ , \ \frac{1}{8} \ , \ \frac{\pi}{4} \ , \ \frac{2}{32} \ , \ \frac{2}{22} \ , \ \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

# 3 Caos

Vamos ver agora que a função $f(x) = 2x - [2x]$, definida para $0 \leq x \leq 1$ é caótica, na verdade mostraremos que ela apresenta varias características que são um sinal de caos.

Os seguintes fatos estão associados ao que se chama de *Caos*:

1. Existência de infinitas órbitas periódicas, com qualquer período.
2. Espalhamento das órbitas (chamado de sensibilidade em relação às condições iniciais).
3. Existência de uma órbita que passeia pelo intervalo [0,1] todo (que dizemos ser densa no intervalo).

## 3.1 Infinitas órbitas periódicas

Os números cuja representação na base 2 é periódica tem ciclos em suas órbitas. Por exemplo: $x_0 = 0,110110110\ldots$ tem como órbita $\{x_0, x_1, x_2, x_0, x_1, x_2, x_0, x_1, x_2, \ldots\}$, isto é, um ciclo de

tamanho 3.
$x_0 = 0,100111001110011\ldots$ tem como órbita $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_0, x_1, x_2, \ldots\}$, isto é, um ciclo de tamanho 5.

Chamamos de período da órbita o tamanho do ciclo. Então, o período será o número de casas da parte que repete na representação do número na base 2. Como podemos inventar números com partes que repetem com qualquer tamanho, teremos órbitas periódicas, com qualquer período.

## 3.2 Órbitas de números próximos

Para saber se dois números estão próximos precisamos calcular a distância entre eles. Mas calcular a distância entre dois pontos na reta é pegar o valor absoluto da diferença entre eles, ou seja,

$$\text{distância}(x_0, y_0) = |x_0 - y_0|.$$

Por exemplo, se $x_0 = 0,0010100010$ e $y_0 = 0,001010111010101\ldots$, como $y_0 > x_0$ (observe a $7^a$ casa depois da vírgula), temos

$$\text{distância}(x_0, y_0) = y_0 - x_0 = 0,00000011001010101\ldots$$

Assim,

$$\begin{aligned}
y_0 - x_0 &= 1 \times \frac{1}{2^7} + 1 \times \frac{1}{2^8} + 0 \times \frac{1}{2^9} + 0 \times \frac{1}{2^{10}} + 1 \times \frac{1}{2^{11}} + 0 \times \frac{1}{2^{12}} + 1 \times \frac{1}{2^{13}} + \\
&\quad + 0 \times \frac{1}{2^{14}} + 1 \times \frac{1}{2^{15}} + \ldots \\
&= 1 \times \frac{1}{2^7} + 1 \times \frac{1}{2^8} + 1 \times \frac{1}{2^{11}} + 1 \times \frac{1}{2^{13}} + 1 \times \frac{1}{2^{15}} + \ldots \\
&= \frac{1}{2^7} \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \ldots\right) \\
&< \frac{1}{2^7} \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \ldots\right).
\end{aligned}$$

Mas

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \ldots = 2,$$

pois é a soma da PG de razão $1/2$ e $a_0 = 1$.

Assim,

$$\text{distância}(x_0, y_0) < \frac{1}{2^7} \times 2 = \frac{1}{2^6}.$$

O mesmo raciocínio nos permitirá concluir que se dois números têm as $k+1$ primeiras casas iguais, então a distância entre eles é menor do que $\frac{1}{2^k}$ e vice-versa.

Observemos as órbitas de $x_0$ e $y_0$. ( Observe que $\frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0,015625$ na base 10, o que nos dá uma idéia de que $x_0$ e $y_0$ estão realmente pertinho.) O ponto $x_0$ tem representação finita e sua órbita vai morrer no zero em 10 passos, isto é, $x_{10} = 0$ e $x_n = 0$ para todo $n \geq 10$.

Já $y_0$ começa a se repetir a partir da oitava casa com $y_8 = 0,101010\ldots$, $y_9 = 0,010101\ldots$, $y_{10} = y_8$, $y_{11} = y_9$ etc $\ldots$, formando um ciclo de período 2. Observe também que $y_8$ está à direita de $1/2$, isto é, é maior do que $1/2$ e $y_9$ está à esquerda de $1/2$, isto é, é menor do que $1/2$.

Como $y_{10} = y_8$ e $x_{10} = 0$, então $\text{dist}(y_{10}, x_{10}) > 1/2$, o mesmo acontecendo com $y_n$, $n = 12, 14, 16, \ldots$

O ponto $y_{11} = 0,010101\ldots$ tem o dígito 1 na $2^a$ casa, está à direita de $1/4$ e logo $\text{dist}(y_{11}, x_{11}) > 1/4$, o mesmo acontecendo com $y_n$, $n = 13, 15, 17, \ldots$

**Conclusão**: O que observamos é que, apesar das órbitas de $x_0$ e $y_0$ começarem bem pertinho ($\text{dist}(x_0, y_0) < 1/2^6$), elas só ficam perto durante um certo tempo. Para $n > 10$, $\text{dist}(x_n, y_n) > 1/2^2$, isto é, os ponto se afastam. Isto é verdade para quase todas as órbitas. Este fenômeno chama-se sensibilidade em relação às condições iniciais e é um dos fenômenos que caracterizam um sistema caótico.

## 3.3 Uma órbita que passeia pelo intervalo todo

Vamos achar um ponto $x_0$ e mostrar que sua órbita "passeia" por todo lado do intervalo $[0, 1]$. Matematicamente, dizer que a órbita "passeia" é dizer que esta órbita se aproxima de qualquer ponto do intervalo, tão perto quanto se quiser. Ou seja, dado um ponto $y_0$ do intervalo $[0, 1]$ e uma distância $\frac{1}{2^k}$, podemos achar um ponto $x_n$ da órbita de $x_0$ de maneira que $\text{dist}(x_n, y_0) < \frac{1}{2^k}$.

O ponto $x_0$ será construido por passos, como mostrado a seguir.

Observemos primeiro que podemos construir blocos de tamanhos variados usando 0's e 1's. Por exemplo, com uma casa apenas temos os blocos: 0 e 1. Com duas casas temos 4 blocos: 00, 01, 10 e 11. Com 3 casas temos 8 blocos: 000, 001, 010, 100, 011, 101, 110 e 111. Com 4 casas temos 16 blocos: 0000, 0001, 0010, 0100, 1000, 0011, 0101, 1001, 0110, 1100, 1010, 1001, 0110, 1100, 1010, 0111, 1011, 1101, 1110 e 1111. Usando análise combinatória, sabemos que existem $2^k$ blocos com $k$ casas, usando os dígitos 0 e 1 para preenchê-las.

O ponto $x_0$ é construido colocando-se 0, e depois os blocos com 1 casa, seguidos dos blocos com 2 casas, depois os com 3 casas e assim por diante:

$$x_0 = 0,\ \underbrace{0\ 1}_{\text{1 casa}}\ \underbrace{00\ 01\ 10\ 11}_{\text{2 casas}}\ \underbrace{000\ 001\ 010\ 100\ 011\ 101\ 110\ 111}_{\text{3 casas}}\underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{4 casas}}\ldots$$

Seja $y_0 = 0,0010101\ldots$ e tomemos a distância $\frac{1}{2^3}$. Queremos achar um ponto $x_n$ da órbita de $x_0$ de modo que $\text{dist}(x_n, y_0) < \frac{1}{2^3}$.

Mas dizer que $\text{dist}(x_n, y_0) < \frac{1}{2^3}$ é dizer que $x_n$ e $y_0$ tem as 3 primeiras casas iguais. O bloco 001 corresponde às 3 primeiras casas de $y_0$ e aparece em $x_0$ no grupo dos blocos com 3 casas. Não é difícil ver que $x_{13} = 0,001\,010100011\ldots$ e, assim, $x_{13}$ e $y_0$ tem as 3 primeiras casas iguais. Logo $\text{dist}(x_{13}, y_0) < \frac{1}{2^3}$.

O mesmo raciocínio nos permite, dados um ponto qualquer $y_0$ e um erro qualquer $\frac{1}{2^k}$, achar um $x_n$ de maneira que $\text{dist}(x_n, y_0) < \frac{1}{2^k}$.

Assim, a órbita de $x_0$ é a que passeia pelo intervalo todo!

# 4 Algumas definições mais precisas e esboços de demonstrações

## 4.1 Números Reais na Base 2

Os números reais podem ser racionais ou irracionais. Os racionais são da forma $p/q$ com $p$ e $q$ inteiros. Dizemos que $p/q$ está na forma reduzida se $p$ e $q$ são primos entre si. Os irracionais são aqueles números reais que não podem ser escritos como razão de dois inteiros. Quanto à representação na base 2 dos números reais seguem-se 3 proposições. Observe que estamos interessados somente nos números no intervalo $[0, 1)$ e portanto sem parte inteira.

**Proposição 1** *A representação de uma fração na forma reduzida na base 2 é finita se, e somente se o denominador é uma potência de 2.*

**Prova:** Seja $p/q$ (uma fração na forma reduzida) com representação finita na base 2. Assim ela pode ser escrita como

$$a_n \times \frac{1}{2^n} + a_{n-1} \times \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + a_1 \times \frac{1}{2} + a_0 \times \frac{1}{2^0}$$

onde os $a_{i's}$ são 0 ou 1. Colocando $1/2^n$ em evidência obtemos

$$\frac{1}{2^n}(a_n + a_{n-1} \times 2 + \ldots + a_1 \times 2^{n-1} + a_0 \times 2^n)$$

Como a fração está na forma reduzida, a parte entre parênteses deve ser a representação de $p$ na base 2, e portanto o denominador $q$ é uma potência de 2.

Por outro lado, suponha que $q = 2^n$ , $n \in \mathbb{N}$ e $p$ inteiro. A representação de $p$ na base dois é da seguinte forma

$$p = a_m \times 2^m + a_{m-1} \times 2^{m-1} + \ldots + a_1 \times 2 + a_0 \ .$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \frac{a_m \times 2^m + a_{m-1} \times 2^{m-1} + \ldots + a_1 \times 2 + a_0}{2^n} \\ &= a_m \times 2^{m-n} + a_{m-1} \times 2^{m-1} + \ldots + a_1 \times 2^{1-n} + a_0 \times 2^{-n} \end{aligned}$$

como $m, n \in \mathbb{N}$, temos que $m - n \in \mathbb{N}$. Logo $p/q$ tem representação finita se $q$ for uma potência de 2. □

**Proposição 2** *Um número é racional na forma $p/q$, sendo que $q$ não é uma potência de 2, se e somente se possui representação infinita e periódica na base 2.*

**Prova:** Suponhamos $p/q$ uma fração na forma reduzida representando um número racional com $q$ não sendo uma potência de 2. Usando o algoritmo de Euclides para a divisão $p : q$ com os números representados na base 2, temos que os restos possíveis no processo são: $1, \ldots, q-1$ ($p$ e $q$ são primos entre si e $q$ não é uma potência de 2). Portanto, à medida que continuamos o processo da divisão, em algum momento os restos começarão a se repetir de forma periódica e infinita. Assim obtemos uma representação períodica e infinita na base 2 para $p/q$ (a partir de um certo dígito).

Suponhamos $x \neq 0$ um número real, com representação periódica e infinita na base 2 (a partir de $p+1$-ésimo dígito após a vírgula)

$$x = 0,\overbrace{a_1 a_2 \ldots a_p}^{p \text{ dígitos}} \underbrace{a_{p+1}a_{p+2}a_{p+3}\ldots a_{p+k}}_{1^o \text{ ciclo de } k \text{ dígitos}} \underbrace{a_{p+k+1}a_{p+k+2}\ldots a_{p+2k}}_{2^o \text{ ciclo}} \ldots \tag{1}$$

onde $a_{i's}$ valem 0 ou 1 (mas não podem ser todos 0) e $a_{n+k} = a_n$ , $\forall n \geq p$. Observe que se desconsiderarmos os $p$ primeiros dígitos de $x_0$, a representação é periódica. Ou seja

$$2^p\, x = a_1 a_2 \ldots a_p, a_{p+1}a_{p+2}\ldots a_{p+k}\, a_{p+1}a_{p+2}\ldots a_{p+k}\ldots$$

e portanto

$$y = 2^p\, x - a_1 a_2 \ldots a_p = 0, a_{p+1}a_{p+2}\ldots a_{p+k}\, a_{p+1}a_{p+2}\ldots a_{p+k}\ldots$$

é um número com representação puramente periódica (de período $k$). Temos assim

$$\begin{aligned} 2^k\, y - y &= a_{p+1}a_{p+2}\ldots a_{p+k} \\ y\,(2^k - 1) &= a_{p+1}a_{p+2}\ldots a_{p+k} \\ y &= \frac{a_{p+1}a_{p+2}\ldots a_{p+k}}{2^p - 1} \end{aligned}$$

Temos então

$$x = \frac{y + a_1 a_2 \ldots a_p}{2^p} = \frac{(a_{p+1}a_{p+2}\ldots a_{p+k}) + (2^k - 1)(a_1 a_2 \ldots a_p)}{2^p(2^k - 1)}$$

e portanto $x$ é um racional com um denominador que não é uma potência de 2. □

Das duas proposições acima segue-se imediatamente que

**Proposição 3** *Um número é irracional se e somente se possui representação infinita e não periódica na base 2.*

## 4.2 Órbitas Periódicas

Seja o sistema dinâmico definido por

$$\begin{aligned} f : [0,1) &\to [0,1) \\ x &\mapsto 2x - [2x] = 2x \, mod\, 1 \end{aligned} \tag{2}$$

O conjunto $I = [0, 1)$ recebe o nome de *espaço de fase*.

A órbita de um ponto (ou condição inicial) $x_0$ sob a ação de $f$ é o conjunto

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots\}$$

onde $x_{n+1} = f(x_n)$, de tal maneira que se $x_0$ é representado na base 2 por

$$x_0 = 0, a_0 a_1 a_2 \ldots a_k \ldots$$

então

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots \\ x_2 &= 0, a_2 \ldots a_k \ldots \\ &\vdots \\ x_n &= 0, a_n a_{n+1} \ldots a_k \ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

**Definição 4** *Dizemos que uma órbita é periódica se existirem $k$ e $p$ tal que*

$$x_{n+k} = f^k(x_n) = x_n \ \forall n > p \ .$$

Observe que após $p$ iterações, uma órbita periódica entra em um ciclo de período $k$. Em particular se $k = 1$ temos um ponto fixo. Para o sistema definido acima $x_0 = 0$ é ponto fixo, já que $f(0) = 0$. (Este é o único ponto fixo).

Da classificação de $x_0$ com relação ao tipo de sua representação da base 2 (conforme a seção anterior) depende o comportamento ou classificação de sua órbita, o que é dado pelas proposições seguintes.

**Proposição 5** *$x_0$ é um número com representação finita na base 2 se e somente se sua órbita convergir para zero.*

**Prova:** $x_0$ é um número com representação finita na base 2 se e somente se

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, a_0 a_1 a_2 \ldots a_n \\ &= 0, a_0 a_1 a_2 \ldots a_n 000 \ldots \end{aligned}$$

portanto $x_{n+1} = f^{n+1}(x_0) = 0$ e portanto a órbita de $x_0$ converge para zero. $\square$

**Proposição 6** *$x_0$ é um número com representação periódica e infinita na base 2 se, e somente se sua órbita possuir um ciclo.*

**Prova:** É claro que a órbita de $x_0$ alcançará um ciclo de período $k$ após $p$ iterações se e somente se a representação de $x_0$ na base 2 for da forma da equação (1) já que neste caso

$$x_p = f^p(x_0) = 0, a_{p+1}a_{p+2}\ldots a_{p+k}\, a_{p+1}a_{p+2}\ldots a_{p+k}\ldots$$

e $x_{n+k} = x_n$ para $n \geq p$ . □

**Proposição 7** *$f$ tem infinitas órbitas periódicas, com qualquer período.*

**Prova:** Dado um período $k$ arbitrário, construímos um número (racional) cuja parte que se repete de sua representação na base 2 possui exatamente $k$ dígitos. □

**Definição 8** *Seja $X$ um conjunto e $Y$ um subconjunto de $X$. Dizemos que $Y$ é* denso *em $X$, se para todo ponto $x$ de $X$, existir um ponto $y$ em $Y$ arbitrariamente perto de $x$.*

Um dos fatos fundamentais em análise matemática, é que o conjunto dos números racionais é denso no intervalo $I = [0, 1)$. Isto significa que qualquer subintervalo de $I$, por menor que seja, contem sempre um número racional. CComo mostramos acima, os pontos periódicos coincidem com os números racionais e portanto concluimos que os pontos periódicos são densos para o sistema que estamos estudando.

## 4.3 Órbitas Densas e Transitividade

As proposições 5 e 6 acima implicam que as órbitas dos números racionais (e somente elas) acabam sempre no ponto fixo 0 ou em um ciclo periódico. Portanto as órbitas de pontos irracionais não tem um comportamento *regular*. Em particular é possível que ela fique o tempo todo *passeando* pelo intervalo.

**Definição 9** *Um ponto $x_0$ possui um órbita densa se dado qualquer $y \in [0, 1)$ e dado uma distância $\epsilon$ , existe $x_n \in \mathcal{O}(x_0)$ tal que $|y - x_n| < \epsilon$.*

Claramente o número irracional contruído na seção 3.3 tem uma órbita densa segundo a definição acima.

**Definição 10** *Um sistema dinânmico é transitivo se para qualquer par de pontos $x$ e $y$ e para todo $\epsilon > 0$ existe um terceiro ponto $z$ a uma distância menor que $\epsilon$ de $x$ cuja órbita se aproxima a uma distância menor que $\epsilon$ de $y$.*

É fácil ver que qualquer sistema que possua uma órbita densa é transitivo, já que uma órbita densa se aproxima arbitrariamente de qualquer ponto. A recíproca também é verdadeira, embora menos óbvia. Concluimos portanto:

**Proposição 11** *O sistema dinâmico (3) é transitivo.*

## 4.4 Sensibilidade às Condições Iniciais

**Definição 12** *Um sistema dinâmico possui sensibilidade às condições iniciais se existe* $\beta > 0$ *tal que para qualquer* $x$ *e qualquer* $\epsilon > 0$ *, existe* $y$ *tal que* $dist(x, y) < \epsilon$ *e existe* $k$ *tal que* $dist(f^k(x), f^k(k)) \geq \beta$*.*

**Proposição 13** *O sistema dinâmico definido pela equação (3) possui sensibilidade às condições iniciais.*

Antes de demonstrar a proposição, vamos analisar mais precisamente a definição de distância $dist(x, y) = |y - x|$.

**Lema 14** *Se dois números reais escritos na base dois têm as* $n$ *primeiras casas então a distância entre eles é menor ou igual a* $\dfrac{1}{2^n}$*.*

**Prova:**

Sejam $x$ e $y$ dois números no intervalo $[0, 1)$

$$\begin{aligned} x &= 0, x_1 x_2 \ldots x_i x_{i+1} \ldots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i} \\ y &= 0, y_1 y_2 \ldots y_i y_{i+1} \ldots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i} \end{aligned}$$

Se $x_i = y_i$, para $i \leq n$, então:

$$\begin{aligned} dist(x, y) &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i - x_i}{2^i} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|y_i - x_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|y_i - x_i|}{2^i} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|y_i - x_i|}{2^i} \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j+n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

□

**Observação:** Devido à dupla representação, podemos ter números com todos os dígitos diferentes e cuja distância é nula. Por exemplo, as duas representações abaixo correspondem ao mesmo número racional 1/2

$$0, 1 = 0, 01111111111 \ldots .$$

**Prova: (da proposição)**

Dado $x \in [0,1)$, sua representação na base 2 será

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

onde $a_i = 0$ ou 1.

Dado $\epsilon > 0$, arbitrário, existe N tal que $\frac{1}{2^N} < \epsilon$. Seja então

$$y = 0, a_1 a_2 \dots a_N b_{N+1} a_{N+2} a_{N+3} a_{N+4} \dots$$

com $b_{N+1} \neq a_{N+1}$, ou seja invertemos o $N+1$-ésimo dígito de $x$. Logo $\mid y - x \mid < \dfrac{1}{2^N} < \epsilon$.

Por outro lado

$$\begin{aligned} f^N(x) &= 0, a_{N+1} a_{N+2} \dots \\ f^N(y) &= 0, b_{N+1} a_{N+2} \dots \end{aligned}$$

então

$$\mid f^N(y) - f^N(x) \mid = \mid (b_{N+1} - a_{N+1}) \frac{1}{2} \mid = \frac{1}{2}.$$

logo, o sistema dinâmico possui sensibilidade às condições iniciais. □

# 5 Algumas referências


- Sobre números e bases

  1. S.V. Fomin: *Sistemas de Numeração.* Editorial Mir, Moscou, 1984.
  2. Georges Ifrah: *Os Números: a história de uma grande invenção.* Editora Globo, 1989.
  3. Ivan Niven: *Números: racionais e irracionais.* Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, Sociedade Brasileira de Matemática, 1961. (pedidos para Secretaria Regional da SBM, Departamento de Matemática, UFMG, 30,123-970, Belo Horizonte ou pelo e-mail: sfornari@mat.ufmg.br)
  4. Tânia Bogutchi: *Aritmética Elementar em Computadores*, monografias de especialização, Departamento de Matemática, UFMG, 1991 (pedidos para Tânia Bogutchi, Departamento de Estatística, UFMG, 31.123-970, Belo Horizonte ou pelo e-mail: bogutchi@net.em.com.br)

- Sobre Caos

  1. James Gleick: *CAOS, A criação de uma nova ciência.* Editora Campus, 1991.
  2. Ian Stewart: *Será que Deus joga dados? A nova matemática do caos*, Jorge Zahar Editor, 1991.
  3. David Ruelle: *Acaso e Caos*, Editora UNESP, 1993.