

Universidade Federal de Minas Gerais  
Departamento de Matemática

I Bienal de Matemática - SBM

Notas de Aula de Mini-Curso

# **Transformada Discreta de Fourier:**

## **Motivação e Aplicações**

*Ricardo H. C. Takahashi*

*Belo Horizonte, Outubro de 2002*

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Motivação: Fala e Audição</b>	<b>2</b>
1.1	Mecanismo da Produção da Fala . . . . .	2
1.2	Mecanismo de Audição . . . . .	4
1.3	Recuperação Artificial da Informação da Fala . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Processamento Eletrônico dos Sinais</b>	<b>7</b>
2.1	Que São Sistemas de Mídia Eletrônica? . . . . .	7
2.2	Transdução e Mapeamentos Reversíveis . . . . .	8
2.2.1	Sinais Acústicos . . . . .	8
2.2.2	Transdutores Acústicos . . . . .	9
2.3	Amplificador . . . . .	14
2.3.1	Amplificador a Válvula . . . . .	14
2.3.2	Amplificador a Transistor . . . . .	16
2.4	Digitalização de Sinais . . . . .	17
2.5	Sistemas de Mídia Eletrônica como Mapeamentos Reversíveis . . . . .	18
2.6	Qualidade dos Sistemas de Mídia Eletrônica . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Definições Preliminares</b>	<b>21</b>
3.1	A função delta de Dirac e as distribuições . . . . .	21
3.2	Os Sinais . . . . .	23
3.2.1	Operações com Sinais . . . . .	23
3.3	A Transformada de Fourier . . . . .	24
3.4	Alguns Sinais Especiais . . . . .	25
3.4.1	Sinal Impulso Unitário . . . . .	26
3.4.2	Sinal Senoidal . . . . .	26
3.4.3	Sinal Trem de Impulsos . . . . .	27
3.4.4	Sinal Janela Quadrada e Sinal Sinc . . . . .	27
3.5	Transformada de Fourier de Sinais Periódicos . . . . .	28
3.6	Interação de Sinais com Sistemas Físicos Lineares . . . . .	29
3.6.1	Resposta Temporal de SLIT . . . . .	31
3.6.2	Resposta em Freqüência de SLIT . . . . .	32
3.7	Filtragem . . . . .	34
3.8	Dualidade Tempo-Freqüência . . . . .	36

<b>4</b>	<b>Processabilidade de Sinais Empíricos</b>	<b>38</b>
4.1	Limitações Fundamentais . . . . .	38
4.2	Amostragem . . . . .	40
4.3	Filtragem Anti-Aliasing . . . . .	45
4.3.1	Repercussões da Filtragem Anti-Aliasing . . . . .	50
4.4	Janelamento . . . . .	51
4.5	Periodificação . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Análise Espectral de Sinais Empíricos</b>	<b>64</b>
5.1	Transformada Discreta de Fourier . . . . .	64
5.2	Adaptando Sinais Empíricos à TDF . . . . .	67
5.2.1	Sinais senoidais de período arbitrário . . . . .	67
5.2.2	Sinais periódicos de período arbitrário . . . . .	73
5.2.3	Sinais aperiódicos de duração finita . . . . .	73
5.2.4	Sinais aperiódicos arbitrários . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Análise Espectral de Sinais Acústicos</b>	<b>76</b>
6.1	Delimitação do Problema . . . . .	76
6.2	Modelo da Produção da Fala . . . . .	78
6.3	Múltiplas Escalas de Tempo . . . . .	79
	<b>Bibliografia</b>	<b>84</b>

# Capítulo 1

## Motivação: Fala e Audição

O objetivo deste capítulo é o de apresentar uma motivação para o estudo da Transformada de Fourier, proveniente de um mecanismo biológico fundamental para a espécie humana: o mecanismo de transmissão de informação através da fala. Inicialmente são descritos o mecanismo de produção de voz e o mecanismo de recepção de sinais sonoros por meio do sistema de audição, nos seres humanos. São apresentados modelos simplificados para esses mecanismos.

É mostrado que, sob o ponto de vista das operações que são relevantes para a codificação da informação, a produção da fala pode ser entendida como uma operação que produz um sinal com determinado conteúdo de componentes de diferentes frequências; enquanto a audição pode ser entendida como uma operação que identifica quais são as componentes de frequências presentes num sinal sonoro e qual sua proporção relativa no mesmo. Esse quadro claramente favorece a aplicação da *transformada de Fourier* para a análise da informação contida no sinal acústico em questão.

Finalmente, é discutida a questão da recuperação artificial da informação contida em sinais de fala. Comenta-se o papel que mecanismos de extração numérica da *transformada de Fourier* de sinais poderiam ter nessa operação.

### 1.1 Mecanismo da Produção da Fala

O sistema da fala humana pode ser imaginada como o mecanismo que as pessoas utilizam para gerar sinais acústicos, que carregarão um “significado”. Suponha-se que uma pessoa está falando palavras em uma certa língua: produzir os sons que serão interpretados como essas palavras é o mesmo que produzir sinais acústicos com determinadas características que permitirão sua identificação como pertencentes determinada categoria existente naquela língua. Por exemplo, a vogal [a], a sílaba [re], etc<sup>1</sup>. O problema de produzir um determinado som

---

<sup>1</sup>De maneira mais precisa, deveríamos falar de “fonemas”. Essa discussão mais rigorosa sob o ponto de vista da Fonética não será apresentada aqui.

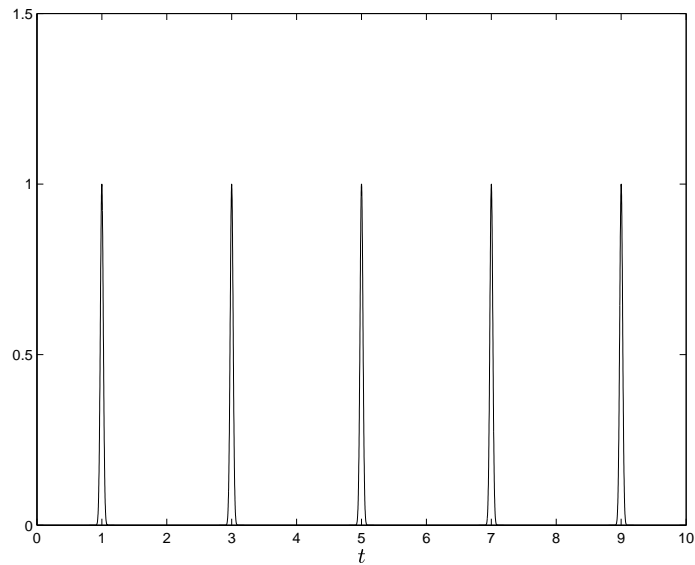


Figura 1.1: Sinal pulsado proveniente das cordas vocais.

(com determinada interpretação) se coloca, então, como o problema de estabelecer uma certa configuração para o sistema de produção da voz (cordas vocais, garganta, língua, boca, lábios) que produza tal som. Como compreender esse mecanismo?

Um modelo bastante razoável que serve como primeira aproximação para o sistema pode ser construído assim:

- O ar, ao ser expulso dos pulmões, atravessa as cordas vocais. Estas irão vibrar devido a tal excitação, sendo que a frequência de vibração irá depender da tensão com que estiverem sendo “esticadas”. A estrutura física das cordas vocais faz com que elas, ao vibrarem, produzam uma sucessão de “aberturas” e “fechamentos” da passagem do ar. Como resultado da vibração, ocorrerá então a geração de um sinal acústico que corresponde a pequenos pulsos de relativamente curta duração (que surgem quando a passagem do ar está aberta), entremeados de intervalos de tempo em que não há passagem de ar. Os pulsos são aproximadamente periódicos, e têm a frequência da vibração das cordas vocais, ver figura 1.1. Um bom modelo para o sistema de cordas vocais então seria o de uma fonte que produz sinal pulsado periódico.
- Esse sinal pulsado gerado pelas cordas vocais irá atravessar posteriormente uma seqüência de dutos diversos: a faringe, laringe, boca, lábios, até ser lançado ao espaço. Esse conjunto de órgãos é denominado *trato vocal*. Esses órgãos são posicionados pela pessoa que fala, de maneira a modificar

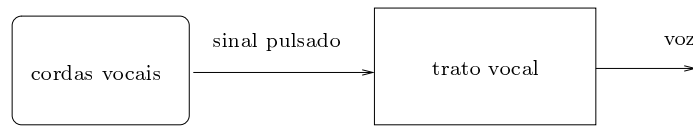


Figura 1.2: Modelo do sistema de produção da fala.

adequadamente o sinal pulsado, transformando-o no sinal “significativo” que se deseja produzir. Isso significa que, para cada som diferente, há um correspondente posicionamento do trato vocal que produz aquele som. O sinal original é modificado no trato vocal através do adequado estabelecimento de ressonâncias e de atenuações seletivas, ou seja, o sinal é *filtrado* pelo trato vocal. Um bom modelo para representar o trato vocal é, portanto, simplesmente o de um *sistema dinâmico* atuando como *filtro*.

Conclui-se que o sistema de produção da fala pode ser representado como uma fonte de sinal pulsado conectada a um filtro. O sinal de saída desse sistema é a voz de um ser humano; ver figura 1.2.

## 1.2 Mecanismo de Audição

Um mecanismo complementar ao da fala é o da audição. Tal mecanismo deve receber os sinais sonoros da fala, para decodificar a informação nela contida. Um modelo para o sistema de audição pode ser estruturado conforme esquematizado na figura 1.3.

- O som, propagando-se através do ar, atinge a membrana do tímpano de uma pessoa, provocando a vibração desta membrana.
- Do lado de dentro da membrana, esta encontra-se conectada a uma estrutura óssea, que transmite a vibração para o interior de um canal, em formato de caracol, que encontra-se preenchido por um líquido.
- A vibração do som agora propaga-se nesse meio líquido, ao longo do canal.
- Se o som for composto de uma soma de diversas componentes, cada uma das quais sendo uma senóide de determinada frequência, cada senóide irá causar o aparecimento de uma ressonância em um determinado ponto do canal em forma de caracol.
- Sensores nervosos localizados nas paredes desse canal irão ser capazes de captar precisamente esses pontos de ressonância. Esse é o mecanismo pelo qual o ouvido distingue sons de frequências diferentes. A intensidade da ressonância, por sua vez, é associada ao “volume” relativo de cada frequência.

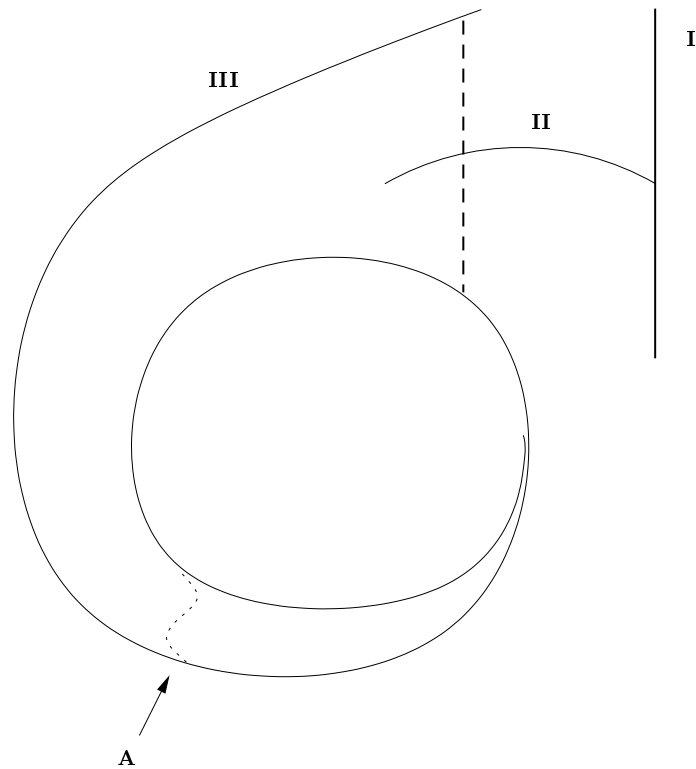


Figura 1.3: Modelo do sistema de audição. Estão representados no diagrama: (I) o tímpano; (II) a estrutura óssea que transmite a vibração sonora captada no tímpano; (III) o canal em forma de caracol preenchido por líquido, no qual o som se propaga. No ponto (A), está representada a ressonância de uma frequência sonora, que será captada por sensores nervosos espalhados nas paredes da estrutura em caracol.

O mecanismo da audição se aproxima muito, portanto, do que seria um mecanismo natural de determinação da *transformada de Fourier* dos sinais acústicos recebidos.

### 1.3 Recuperação Artificial da Informação da Fala

Articulando agora o que foi exposto a respeito dos mecanismos da fala e da audição, conclui-se que a transmissão de informação de um falante para um ouvinte, através do sinal da fala, deve necessariamente empregar a codificação dessa informação nas amplitudes relativas das diversas componentes de frequências do som.

É possível agora colocar o problema da *recuperação artificial* da informação contida no sinal da fala. Esse problema pode ser definido concretamente de diferentes formas, por exemplo:

- Reconhecimento de locutor: um computador determinar quem é a pessoa que está falando, da mesma forma como o faria um ser humano;
- Reconhecimento de texto: um computador determinar qual é o texto que está sendo ditado por uma pessoa.

A recuperação artificial envolve, portanto, uma operação de determinação das amplitudes relativas das frequências contidas no sinal sonoro.

Um processo de recuperação artificial da informação da fala é, assim, muito parecido com um processo de determinação da *transformada de Fourier* do sinal em questão. Essa similaridade será explorada em maior detalhe no decorrer do presente texto.



## Capítulo 2

# Processamento Eletrônico dos Sinais

Quando se coloca o problema de se fazer o estudo de um determinado sinal físico (no capítulo anterior, foi apresentado o possível contexto dos sinais acústicos da fala), necessariamente surge a questão de como obter tal sinal para que seja possível tratá-lo matematicamente.

Neste capítulo, são descritos alguns elementos primitivos que constituem os *sistemas de mídia eletrônica*. Tais sistemas são os aparatos tecnológicos que permitem “fazer cópias” de sinais físicos de naturezas quaisquer, ficando as “cópias” num formato elétrico (analógico) inicialmente, e depois num formato numérico. Nesse último formato, é possível o processamento computacional dos sinais.

Após essa descrição, é feita uma discussão a respeito da “qualidade” desses sistemas de mídia eletrônica, e de como tal “qualidade” é interpretada por meio de análises que utilizam o conceito da decomposição de sinais em frequências, ou seja, a *transformada de Fourier*.

### 2.1 Que São Sistemas de Mídia Eletrônica?

Os sistemas de mídia eletrônica são mecanismos que processam eletronicamente sinais que contêm informação significativa para os seres humanos num formato acessível aos seus sentidos. A discussão no presente texto se limitará aos sinais em formato sonoro.

Uma primeira questão deve ser discutida para permitir a compreensão da natureza desses sistemas: Por quê utilizar o formato de sinais elétricos para a codificação desses sinais de som? O motivo para isto é simples; no formato elétrico, um sinal pode ser facilmente:

- transmitido a longas distâncias;
- armazenado de forma compacta e por longo tempo;

- tratado de forma a, por exemplo, minimizar ruídos;
- replicado (isto é, pode ser copiado para ser ouvido simultaneamente por vários usuários);
- transformado para um formato numérico (digital) e então tratado computacionalmente;
- reproduzido, de forma a reconstituir a informação original.

Os sistemas de mídia eletrônica são os aparatos tecnológicos que permitem a realização dessas funções acima listadas.

Todo sistema de mídia eletrônica envolve então a seguinte seqüência de operações:

1. Transformação do sinal de seu formato original (sonoro) para o formato elétrico;
2. Operações diversas realizadas com o sinal no formato elétrico;
3. Reconstituição do sinal, transformando-o do formato elétrico para o formato físico original (sonoro).

Nas seções que se seguem, será estudada a transformação de um sinal sonoro em elétrico e vice-versa. Essa operação é denominada *transdução*. Em seguida, será apresentada uma operação simples, que está presente em todo sistema de mídia eletrônica, e que exemplifica outras operações elétricas que podem ser realizadas: a amplificação.

## 2.2 Transdução e Mapeamentos Reversíveis

Um fundamento para a existência das tecnologias de mídia eletrônica é a possibilidade de realização da *transdução* de sinais. A *transdução* trata-se da:

- Produção de um sinal elétrico (por exemplo de tensão) cujo gráfico corresponde ao gráfico de um outro sinal físico, por exemplo, um sinal acústico ou luminoso. O sinal elétrico resultante passa a carregar toda a informação existente no sinal original.
- Restauração do sinal físico a partir do sinal elétrico correspondente, ou seja, a produção de um sinal físico com gráfico idêntico ao gráfico de um sinal elétrico. A informação volta a estar disponível num formato interpretável pelos sentidos humanos.

### 2.2.1 Sinais Acústicos

No gráfico 2.1 está representado um sinal acústico. O gráfico mostra a pressão do ar ao longo do tempo, em um determinado ponto do espaço. Sinais acústicos tratam-se de sinais que fisicamente correspondem à variação da pressão do ar,

em relação à pressão média do ambiente. Esse sinal de variação de pressão se propaga em ondas através do ar: esse é o processo de propagação do som. Ao atingir o tímpano de um ser humano, esse sinal de variação de pressão do ar provoca a vibração da membrana do tímpano. A partir daí, se origina a sensação da *audição*.

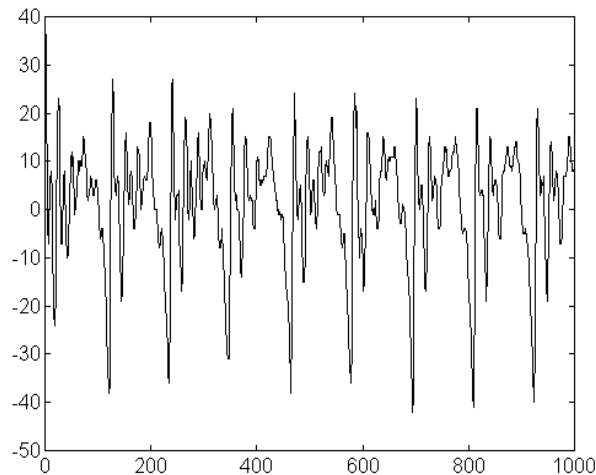


Figura 2.1: Gráfico mostrando a variação da pressão do ar ao longo do tempo (sinal acústico), correspondente a uma pessoa pronunciando a letra [a].

Imagine-se que a pressão do ar varia conforme o gráfico 2.1 sobre o tímpano de uma pessoa. Essa pessoa ouvirá um som correspondente a tal sinal, ou seja, a letra [a]. Imagine-se que a pressão do ar varia conforme o mesmo gráfico, agora sobre o tímpano de outra pessoa. Essa outra pessoa ouvirá o mesmo som que a primeira. A informação contida no sinal sonoro, nos dois casos, era portanto a mesma. A partir desse raciocínio simples podemos obter algumas conclusões importantes:

- a informação relevante contida num sinal acústico está mais precisamente contida no formato de seu gráfico;
- para reproduzir um determinado sinal sonoro, por exemplo algum tempo depois de o mesmo ter sido originamente produzido, ou então a uma longa distância, exatamente com sua sonoridade original, basta produzir um outro sinal acústico que possua um gráfico idêntico ao primeiro.

### 2.2.2 Transdutores Acústicos

A partir dessas reflexões, nasceu a idéia de se produzirem os *transdutores acústicos*. Esses transdutores são aparelhos que produzem:

- um sinal elétrico cujo gráfico é igual ao de um sinal acústico; ou
- um sinal acústico cujo gráfico é igual ao de um sinal elétrico.

### Microfone

O *microfone* realiza a primeira das operações acima. O esquema simplificado de um microfone (utilizando um dos vários possíveis princípios físicos de funcionamento) é mostrado na figura 2.2.

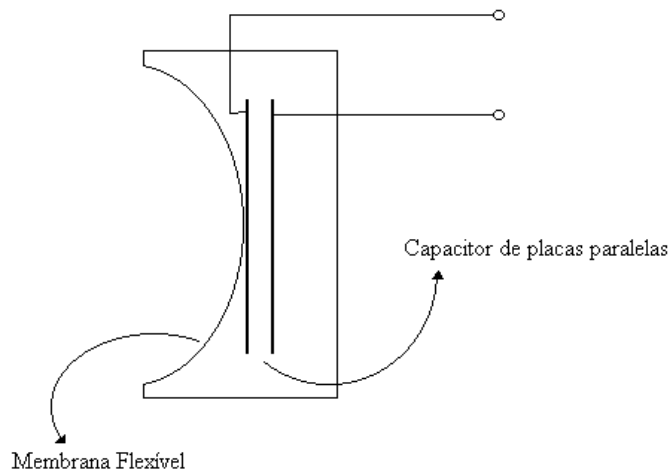


Figura 2.2: Esquema construtivo de um microfone.

A construção do aparelho envolve as seguintes premissas:

- Uma das placas de um capacitor está presa na membrana flexível da entrada do microfone. Portanto, se essa membrana se mover, a placa se moverá junto.
- A placa oposta do mesmo capacitor está fixa, presa no corpo do microfone. Se ocorrer movimento da outra placa, haverá então uma aproximação ou afastamento das placas uma em relação à outra.
- Um circuito elétrico utilizado para energizar o microfone foi projetado de maneira a manter a carga no capacitor aproximadamente constante todo o tempo.

A lógica do funcionamento desse aparelho é a seguinte:

- Quando o som atinge a membrana flexível, ele produz uma força (causada pela diferença da pressão do ar que define o próprio som) que faz a

membrana flexível vibrar. Pode-se, de maneira aproximada, dizer que o deslocamento da membrana é proporcional à diferença de pressão:

$$\Delta_x(t) = K_m \Delta_p(t) \quad (2.1)$$

Na expressão acima,  $\Delta_p(t)$  corresponde ao próprio sinal sonoro (ou seja, à variação no tempo da pressão do ar em relação à pressão média do ambiente), e  $K_m$  é a constante de proporcionalidade que corresponde a uma “constante de mola” da membrana flexível.  $\Delta_x(t)$  corresponde à variação da posição da placa móvel do capacitor, em relação a sua posição de repouso, ao longo do tempo.

- Durante essa vibração, as placas do capacitor passam a se aproximar e afastar mutuamente. A distância entre as placas torna-se:

$$d(t) = d_o + \Delta_x(t) \quad (2.2)$$

sendo que  $d_o$  corresponde à distância existente entre as placas quando o sistema está em repouso. Aplicando nesta relação a relação (2.1) obtém-se:

$$d(t) = d_o + K_m \Delta_p(t) \quad (2.3)$$

- O valor da capacitância  $C(t)$  é uma grandeza inversamente proporcional à distância entre as placas do capacitor:

$$C(t) = \alpha \frac{1}{d(t)} \quad (2.4)$$

- A carga no capacitor é um valor constante, e a tensão entre seus terminais obedece à relação:

$$Q = C(t)v(t) \quad (2.5)$$

Observe-se que, no capacitor que está sendo considerado, a distância entre as placas é uma função do tempo, de forma que, também a capacitância é uma função do tempo. Como a equação (2.5) tem de valer para carga constante e capacitância variável, então, a tensão nos terminais do capacitor tem de ser variável.

- Aplicando a relação (2.4) na equação (2.5) obtém-se:

$$v(t) = \frac{Q}{\alpha} d(t) \quad (2.6)$$

- Aplicando agora a relação (2.3) na equação (2.6) obtém-se:

$$v(t) = \frac{Q}{\alpha} (d_o + K_m \Delta_p(t)) \quad (2.7)$$

- Agrupando todos os termos constantes nas constantes  $\beta$  e  $\gamma$ , de forma a realçar apenas os termos variáveis, obtém-se:

$$v(t) = \beta + \gamma\Delta_p(t) \quad (2.8)$$

Esta última equação revela que a tensão obtida na saída do microfone é igual a uma constante somada a outra constante multiplicada pelo sinal sonoro aplicado em sua entrada (no bocal). O gráfico de  $\Delta_p(t)$ , então, é copiado, de maneira exata, em  $v(t)$ , que terá um gráfico idêntico, a menos de um fator de escala e de um termo de deslocamento, que não prejudicam o fato de  $v(t)$  possuir toda a informação que estava presente em  $\Delta_p(t)$ .

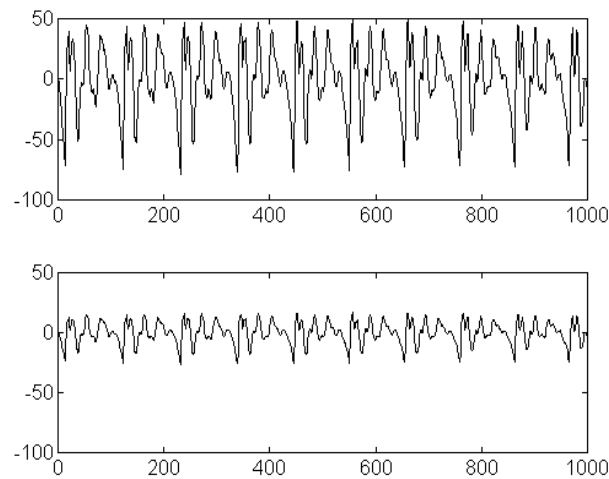


Figura 2.3: Acima é mostrado um sinal acústico (variação da pressão sonora ao longo do tempo). Abaixo, é mostrado o sinal elétrico correspondente à saída do microfone que captou o som mostrado acima. Na figura, está mostrado um som correspondente a uma letra [a] sendo pronunciada.

A figura 2.3 mostra o gráfico de um sinal sonoro  $\Delta_p(t)$  e, logo abaixo, o gráfico de um sinal  $v(t)$  correspondente à saída de um microfone que estava captando o sinal sonoro.

### Caixa Acústica

A caixa acústica produz o fenômeno inverso àquele produzido pelo microfone: a partir de um sinal elétrico, obtém-se um sinal acústico cujo gráfico é idêntico ao gráfico do primeiro. A figura 2.4 mostra o esquema de uma caixa acústica.

Construtivamente, a caixa acústica é montada de forma que:

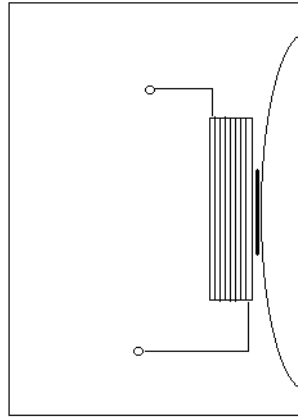


Figura 2.4: Diagrama construtivo de uma caixa acústica.

- Uma membrana flexível irá produzir as vibrações do ar que constituirão o som.
- Existe uma bobina (neste caso um eletroímã) localizada atrás da membrana flexível, fixada na estrutura da caixa. A bobina não toca a membrana; apenas se localiza bastante próxima ao centro da mesma.
- No centro da membrana (fixado na membrana) existe um elemento de material magnético (que portanto pode ser atraído por um campo magnético).

O princípio de funcionamento da caixa acústica (explicado aqui com menos detalhes que o princípio de funcionamento do microfone) pode ser entendido em linhas gerais da seguinte forma:

- Um sinal elétrico  $v(t)$  é aplicado na bobina. A bobina produz então um campo magnético variável, proporcional ao sinal elétrico  $v(t)$  aplicado.
- O campo magnético variável produz uma força variável sobre o elemento magnético que está fixado à membrana flexível.
- Isso faz a membrana vibrar, produzindo uma variação da pressão do ar que é correspondente a  $\Delta_p$ . Essa variação da pressão do ar corresponde ao som, que pode ser agora ouvido por um ser humano.

Com o conjunto *microfone mais caixa acústica* é possível, em princípio, transformar um sinal acústico em um sinal elétrico e depois recuperar o sinal acústico original. Isto é um *mapeamento reversível*. No entanto, a potência do sinal obtido na saída elétrica do microfone é muito baixa; se este fosse injetado diretamente na entrada da caixa acústica, o som seria reproduzido com volume muito baixo. Por esse motivo, todo sistema de mídia eletrônica possui blocos

intermediários que servem para elevar a potência de sinais elétricos: os *amplificadores*.

## 2.3 Amplificador

Um bloco funcional de processamento de sinais, que é ao mesmo tempo simples e importante, é o *amplificador*. Esse bloco funcional é importante pelo fato de estar presente em virtualmente todos os equipamentos eletrônicos que tratam sinais, incluindo todos os equipamentos de mídia eletrônica. Pela simplicidade de construção desse bloco, ele será mostrado aqui, com o objetivo de servir de exemplo daquilo que é possível fazer com sinais que se encontram na forma elétrica. Embora sem mostrar por dentro o funcionamento de outros tipos de blocos funcionais, espera-se que o leitor compreenda que todo o processamento eletrônico de sinais, em qualquer tipo de bloco funcional, necessariamente será construído a partir de princípios semelhantes.

A seguir, é mostrado o amplificador baseado em válvulas.

### 2.3.1 Amplificador a Válvula

Para entendimento do funcionamento do amplificador a válvula, é mostrado inicialmente um circuito, baseado na *válvula diodo*, que não produz nenhuma amplificação. Esse circuito é esboçado na figura 2.5.

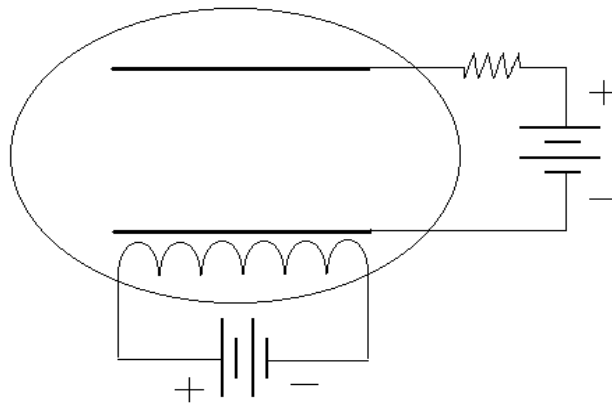


Figura 2.5: Diagrama de um circuito com uma válvula diodo.

No circuito podem ser notados os seguintes elementos construtivos:

- No interior da válvula é mantido um vácuo.
- Existem duas chapas metálicas, uma no topo e outra na base da válvula.



- Abaixo da chapa metálica da base, encontra-se um circuito, que não faz contato elétrico com essa base, cuja função é apenas aquecer essa chapa metálica.

O funcionamento do circuito pode ser entendido da seguinte forma:

- O aquecimento da chapa metálica da base da válvula faz com que alguns elétrons escapem da mesma, formando uma “nuvem de elétrons” ao redor da chapa.
- Se for aplicada uma tensão elétrica entre essas chapas, existem duas possibilidades: ou a tensão na chapa do topo fica positiva e a tensão na base negativa, ou então o contrário (topo negativo e base positiva).
- Caso a placa do topo fique positiva, ela atrairá os elétrons livres da placa da base. Uma corrente elétrica, que será formada com a criação de um fluxo de elétrons que escapa da base, flui pelo vácuo até a chapa do topo e retorna à base pelo circuito externo.
- Caso a placa do topo fique negativa, ela irá repelir os elétrons livres da placa da base. Nenhuma corrente elétrica se formará, neste caso.

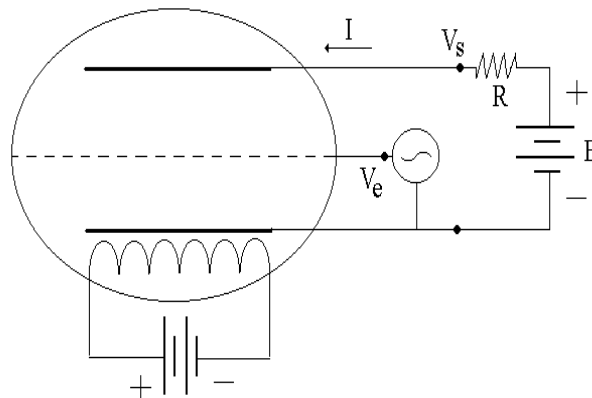


Figura 2.6: Diagrama do amplificador a válvula (baseado em uma válvula triodo).

Estando entendido o funcionamento deste circuito, passa-se agora ao estudo do funcionamento do circuito amplificador. A figura 2.6 mostra o amplificador a válvula, que é construído com uma *válvula triodo*. A diferença da válvula triodo em relação à válvula diodo é a presença de uma grade metálica interposta entre a chapa metálica da base e a chapa metálica do topo. O amplificador é criado

simplesmente conectando a fonte do sinal de tensão a ser amplificado entre a placa da base e a grade metálica do meio. A lógica do funcionamento desse amplificador é:

- Imagine-se que, quando não há sinal na fonte de sinal externo, existe uma corrente constante (ou seja, um fluxo de elétrons constante) fluindo entre a base e o topo da válvula. Isso ocorre porque o topo está com uma tensão positiva em relação à base, e portanto atrai os elétrons livres, da mesma forma que anteriormente.
- Coloque-se agora um sinal externo (que pode ser bem pequeno) entre a grade e a base. Se esse sinal for tal que a grade fique positiva em relação à base, isso vai causar um aumento no fluxo de elétrons (aumento na corrente), pois os elétrons serão mais atraídos do que anteriormente.
- Se o sinal externo for entretanto tal que a grade fique negativa em relação à base, isso vai causar uma diminuição no fluxo de elétrons da base para o topo, pois os elétrons livres serão agora repelidos pela grade.
- Extrapolando agora para um sinal variável no tempo, tem-se que um pequeno sinal aplicado na grade consegue controlar (ou seja, fazer variar) a corrente entre a base e o topo da válvula. A variação da corrente entre a base e o topo da válvula, por sua vez, causa uma variação na tensão na resistência do circuito que liga a base ao topo. Essa tensão pode ser muito maior que a tensão aplicada na grade, mas mesmo assim irá seguir exatamente a mesma forma da tensão de grade.

Pode-se entender portanto o amplificador como um dispositivo que produz uma cópia de um sinal elétrico pequeno. Essa cópia é outro sinal elétrico, agora maior, que continua carregando a mesma informação que o sinal anterior (pois possui um gráfico com formato idêntico).

### 2.3.2 Amplificador a Transistor

O amplificador a válvula pode ser entendido facilmente, pois possui um princípio físico bastante intuitivo. Nos dias de hoje, entretanto, o amplificador a válvula é empregado apenas em algumas aplicações especiais, que exigem características que não podem ser obtidas facilmente com dispositivos de estado sólido. A maior parte dos amplificadores é construído a partir de transistores<sup>1</sup>, que são utilizados como elementos nos quais um sinal pequeno pode controlar o valor de um sinal maior.

A figura 2.7 apresenta um possível circuito amplificador baseado em transistor.

---

<sup>1</sup>O funcionamento interno de um transistor não será discutido aqui, pois envolve conceitos de mecânica quântica, bem pouco intuitivos. No entanto, mesmo sem dispor de uma descrição do funcionamento interno do dispositivo, é possível entender o funcionamento do circuito amplificador que faz uso dele.

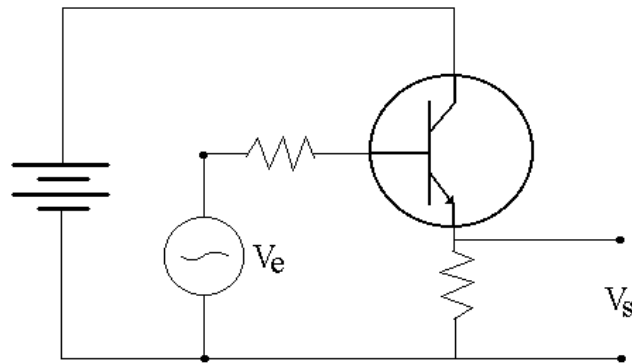


Figura 2.7: Diagrama do amplificador a transistor.

Esse circuito funciona segundo a mesma lógica que governa o amplificador a válvula: o sinal a ser amplificado produz uma pequena corrente, que circula entre dois terminais do transistor. Essa corrente controla uma corrente maior que circula entre dois outros terminais (a física do dispositivo faz com que haja uma relação de proporcionalidade aproximada entre essas correntes). Dessa forma, se obtém uma “cópia” da corrente pequena sobre a corrente maior.

## 2.4 Digitalização de Sinais

A quase totalidade das tecnologias mais recentes de tratamento eletrônico de sinais vem sendo desenvolvida com fundamento na idéia de transformar o sinal, do formato elétrico analógico em que ele se encontra após ter sido obtido através de um transdutor e após ter sido amplificado, para um formato (também elétrico) digital, ou seja, numérico. Uma importante motivação para isso é o fato de que o sinal, uma vez estando expresso como uma seqüência de números, pode ser submetido a operações quaisquer que possam ser expressas numericamente. Isso amplia muito o leque de operações possíveis que podem ser realizadas sobre sinais, agora com o uso do computador como um bloco no sistema de mídia eletrônica. Uma possível operação, que depende do sinal estar num formato numérico, é o cálculo de sua *Transformada Discreta de Fourier*. Esse é o tema deste texto, e a descrição dessa operação será conduzida nos próximos capítulos.

O bloco de “digitalização de sinais”, que inclui os sub-blocos de “amostragem” e de “conversão analógico-digital” será estudado em detalhe no capítulo 4, quando da modelagem matemática dessa operação.

## 2.5 Sistemas de Mídia Eletrônica como Mapeamentos Reversíveis

O esquema mostrado na figura 2.8 é válido para todo sistema de mídia eletrônica existente.

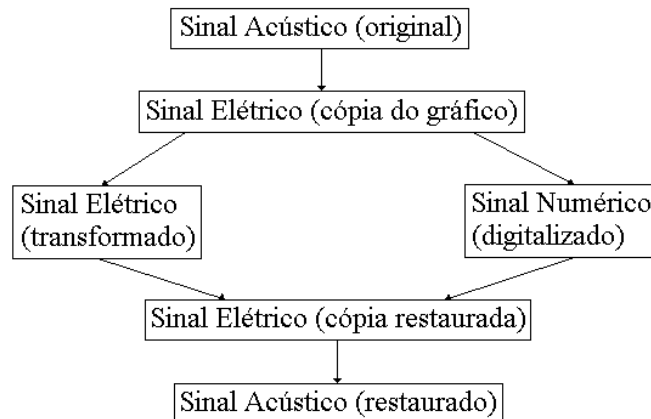


Figura 2.8: Diagrama geral dos sistemas de mídia eletrônica enquanto “mapeamentos reversíveis”.

Nesse esquema ficam aparentes os seguintes elementos:

- Os elementos terminais dos sistemas de mídia eletrônica são sempre transdutores, que traduzem os sinais da forma original (som) para a forma elétrica, e vice-versa.
- Caso todo o tratamento dos sinais elétricos seja realizado todo no formato analógico, o sistema é chamado de *analógico*.
- Pode haver um núcleo que transforma os sinais da forma (elétrica) analógica para o formato digital e vice-versa. Esses são os sistemas *digitais*.
- Imediatamente conectados aos transdutores (tanto de entrada quanto de saída) existem necessariamente circuitos que tratam os sinais elétricos na forma analógica. Isso ocorre tanto no caso de sistemas digitais quanto de sistemas analógicos. Um bloco analógico que normalmente aparece conectado a transdutores é o *amplificador*.
- O sistema como um todo, visto de sua entrada de sinal (entrada de som) para sua saída de sinal (som), deve ser compreendido como um *mapeamento reversível*, ou seja, como um sistema que tem por objetivo produzir, em sua saída, a cópia mais fiel possível do sinal que houver em sua entrada. Dentro do sistema, o sinal sofre diversas transformações. Todas essas

transformações, no entanto, devem possibilitar transformações inversas, de forma que o sinal original possa ser recuperado. O problema tecnológico de garantir a qualidade de um sistema de mídia eletrônica é exatamente o de viabilizar tal reversibilidade de todas as transformações.

## 2.6 Qualidade dos Sistemas de Mídia Eletrônica

É amplamente conhecido o fato de que a qualidade de equipamentos eletrônicos diversos está relacionada com sua “resposta em frequência”. Sabe-se, por exemplo, que entre as emissoras de rádio comerciais, as do padrão AM<sup>2</sup> transmitem sinais de pior qualidade sonora que as do padrão FM<sup>3</sup>. Um dos motivos para isso é o fato das FM transmitirem em uma “largura de faixa” muito maior.

Contudo, as rádios FM reproduzem músicas com menos qualidade do que uma reprodução direta a partir de uma gravação em CD<sup>4</sup>, num bom aparelho de som. Tal fato ocorre porque o padrão tecnológico utilizado nas gravações em CD permite teoricamente a reprodução de sinais até o limite de frequências audíveis para o ser humano (25 kHz).

Uma reflexão sobre esses fatos, usando alguns conceitos já discutidos até este ponto deste texto, nos permite concluir que:

- Um sinal sonoro, ao ser captado por um microfone para entrar no sistema de mídia eletrônica, possui uma determinada composição de frequências; isto é, ele é formado por uma soma de senóides diversas, de frequências diferentes e com amplitudes relativas diferentes.
- Ao ser processado no sistema de mídia, o sinal atravessa uma seqüência de diferentes componentes: microfone, amplificador, linha de transmissão, outro amplificador, caixa acústica, etc.
- Cada um desses componentes, se não for de boa qualidade, pode estar causando o efeito de bloquear parte das senóides que constituem o sinal, que se encontrarem em algumas faixas de frequências.
- Caso tal bloqueio ocorra, o sinal será degradado. A reprodução de um sinal sonoro do qual foram subtraídas algumas senóides de algumas faixas de frequências causará a percepção, pelo ouvinte, de um sinal de baixa qualidade. Esse é o efeito de “perda de qualidade” descrito acima, que equivale a uma “irreversibilidade” do mapeamento: o som original já não pode ser restaurado a partir desse sinal.
- Note-se que, basta um dos diversos componentes do sistema fazer o bloqueio de determinada senóide, para que esta não possa mais estar presente na saída do sistema, quando o sinal sonoro for recuperado.

---

<sup>2</sup>Amplitude Modulada.

<sup>3</sup>Frequência Modulada.

<sup>4</sup>Compact Disc.

O problema de especificar componentes para sistemas de mídia eletrônica tem como aspecto fundamental, então, o problema de analisar com quais frequências as senóides são adequadamente transmitidas através desses componentes, e com quais frequências são bloqueadas.

Essa análise, essencialmente, está relacionada com técnicas de *transformada de Fourier*.

## Capítulo 3

# Definições Preliminares

Este capítulo apresenta a formalização de conceitos diversos relacionados com a Transformada de Fourier, incluindo a própria definição dessa transformada. Todos esses conceitos poderiam ser apresentados em diferentes formatos. As seções seguintes cumprem o papel de uniformizar as definições a serem aqui utilizadas, sendo escolhidas as alternativas de apresentação que mais se adequam aos propósitos deste texto.

### 3.1 A função delta de Dirac e as distribuições

É necessário, neste ponto, introduzir uma estrutura matemática que será empregada na definição de Transformada de Fourier: a classe das *distribuições* construídas a partir da *função delta de Dirac* (também denominada *função impulso*).

As distribuições, cujos domínios são subconjuntos abertos dos reais, ou o próprio conjunto dos reais, são extensões do conjunto das funções diferenciáveis, tais que [2]:

- Toda função contínua é uma distribuição;
- Toda distribuição possui derivadas que são distribuições;
- As regras formais usuais do cálculo aplicáveis às funções deriváveis devem funcionar para as distribuições;
- Deve haver um conjunto de teoremas de convergência que seja adequado para dar suporte às análises de limites usuais.

Para os propósitos do que será apresentado a seguir, é suficiente definir o conjunto de distribuições  $\mathbb{D}$  como o espaço das funções contínuas continuamente diferenciáveis, acrescido do espaço de funções gerado pela função delta de Dirac e por suas derivadas e integrais de ordens quaisquer. A função delta de Dirac,

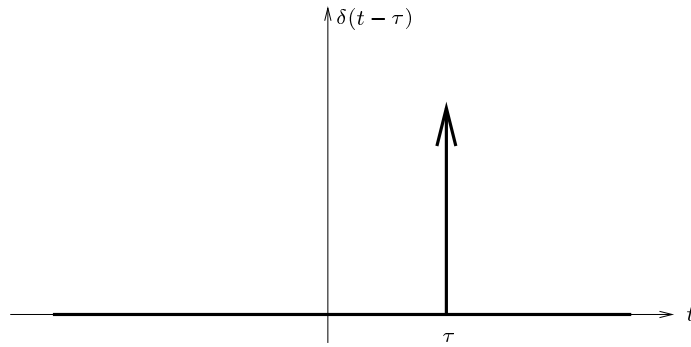


Figura 3.1: Representação gráfica da função delta de Dirac, no caso deslocada, no eixo  $t$ , de  $\tau$ , ou seja,  $\delta(t - \tau)$ .

denotada por  $\delta(t)$ , é definida como a função que satisfaz:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

Essa função, que é zero em todos os pontos, exceto em  $t = 0$ , e que apresenta área abaixo de sua curva igual a 1, é usualmente representada graficamente como na figura 3.1.

Ao ser integrada, a função  $\delta(t)$  gera a função degrau unitário, denotada por  $\mathcal{U}(t)$ :

$$\mathcal{U}(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Essa função  $\mathcal{U}(t)$ , convenientemente deslocada e multiplicada por escalares, é capaz de gerar as funções descontínuas, em combinação com as funções pertencentes ao conjunto das funções contínuas. As derivadas destas, por sua vez, serão escritas em termos da função  $\delta(t)$  e suas derivadas. Defina-se, assim, o conjunto de funções  $\Delta$  como sendo todas as funções que podem ser geradas como combinações da função  $\delta(t)$ , de suas derivadas e de suas integrais. O conjunto de *funções generalizadas*, ou *distribuições*,  $\mathbb{D}$  é definido como:

$$\mathbb{D} = \mathcal{C}^\infty + \Delta \quad (3.3)$$

Estarão neste conjunto os *sinais*, que serão estudados neste texto, assim como suas *transformadas de Fourier*.



## 3.2 Os Sinais

Nesta seção são definidos os objetos sobre os quais será aplicada a Transformada de Fourier e as demais operações a serem estudadas neste texto: os *sinais*. No escopo deste texto, todos os sinais serão função de uma única variável real (usualmente interpretada como o *tempo*), e terão uma única dimensão.

Os sinais deverão corresponder, ao menos hipoteticamente, à medição de uma grandeza física num sistema fisicamente realizável. Isso implica uma considerável simplificação, que poderá ser assumida aqui: todos os sinais irão satisfazer às condições de convergência da Transformada de Fourier (condições de Dirichlet), veja [1]. Sinais físicos necessariamente atendem a tais condições, uma vez que sinais que não o fazem não podem ser empiricamente produzidos (sinais que não atendessem às condições de Dirichlet teriam, por exemplo, energia infinita, o que é fisicamente impossível). A definição que será empregada neste texto é apresentada a seguir:

**Definição 3.1 (Sinal)** Um sinal  $x(t) \in \mathbb{D}$  é definido como uma distribuição que satisfaz às condições de Dirichlet:

1.  $\int_T |x(t)| dt < \infty \quad \forall T$ ;
2.  $x(t)$  possui um número finito de mínimos e máximos em todo intervalo  $T$ ;
3.  $x(t)$  possui um número finito de descontinuidades em todo intervalo  $T$ .

sendo  $T$  um intervalo finito de  $\mathbb{R}$ . □

Observe-se que, de acordo com esta definição, os sinais podem ser, por exemplo, descontínuos, o que corresponde muito aproximadamente ao comportamento de diversos sinais físicos. Esta é uma das razões para se definirem sinais no conjunto das distribuições, e não no conjunto das funções contínuas. Outro motivo para tal escolha é o fato de que sinais físicos também serão compostos, muitas vezes, por trechos que contêm pulsos de muito pequena duração e elevada amplitude que, de maneira aproximada, correspondem à função delta de Dirac (função impulso).

### 3.2.1 Operações com Sinais

Além das operações usuais de soma de elementos (a soma de dois sinais é outro sinal) e de multiplicação de um elemento por escalar (um sinal multiplicado por um escalar é outro sinal), será necessário estabelecer aqui duas outras operações sobre o conjunto dos sinais: a operação de *convolução* de dois sinais e a operação de *multiplicação* de dois sinais.

**Definição 3.2 (Convolução)** O operador convolução,  $[\otimes]$ , é definido como:

$$a(t) \otimes b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)b(t - \tau)d\tau \quad (3.4)$$

sendo  $a(t)$  e  $b(t)$  dois sinais. □

**Definição 3.3 (Multiplicação)** O operador multiplicação,  $[\cdot]$ , é definido como:

$$a(t) \cdot b(t) = a(t)b(t) \quad (3.5)$$

sendo  $a(t)$  e  $b(t)$  dois sinais.  $\square$

### 3.3 A Transformada de Fourier

A *Transformada de Fourier* constitui o objeto de estudo deste texto. Conforme será visto nos próximos capítulos, o objetivo da *Transformada Discreta de Fourier* é o de fornecer aproximações da Transformada de Fourier de sinais. Nesta seção, é apresentada a definição de Transformada de Fourier num formato conveniente para a atribuição de significados físicos aos seus termos.

A transformada de Fourier será definida aqui como um mapeamento que leva um sinal em uma distribuição complexa.

**Definição 3.4 (Transformada de Fourier)** Sendo  $x(t)$  um sinal, sua Transformada de Fourier é definida como a distribuição complexa  $X(\omega)$  tal que:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.6)$$

$\square$

É importante, neste ponto, apresentar uma interpretação do significado da transformada de Fourier. Sabe-se que uma distribuição complexa, como  $X(\omega)$ , pode ser decomposta em sua representação polar de “raio” e “ângulo”:

$$X(\omega) = \rho(\omega) e^{i\theta(\omega)} \quad (3.7)$$

Substituindo em (3.6):

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\omega) e^{i\theta(\omega)} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\omega) e^{i(\omega t + \theta(\omega))} d\omega \end{aligned} \quad (3.8)$$

Uma particularidade da distribuição  $X(\omega)$ , quando escrita na forma (3.7), é que  $\rho(\omega)$  deve ser uma distribuição real *par*, ou seja,  $\rho(\omega) = \rho(-\omega)$ , enquanto  $\theta(\omega)$  deve ser uma distribuição real *ímpar*, ou seja,  $\theta(\omega) = -\theta(-\omega)$ . Essas condições são necessárias para que  $x(t)$  seja uma distribuição real. Então:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \rho(\omega) e^{i(\omega t + \theta(\omega))} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \rho(\omega) e^{i(\omega t + \theta(\omega))} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \rho(\omega) \left( e^{i(\omega t + \theta(\omega))} + e^{-i(\omega t + \theta(\omega))} \right) d\omega \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pela fórmula de Euler, é possível verificar que:

$$\rho \cos(\omega t + \theta) = \frac{\rho}{2} e^{i(\omega t + \theta)} + \frac{\rho}{2} e^{-i(\omega t + \theta)} \quad (3.10)$$

Esta relação, utilizada em (3.9), leva a:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \rho(\omega) \cos(\omega t + \theta(\omega)) d\omega \quad (3.11)$$

Daí se depreende que as funções  $\rho(\omega)$  e  $\theta(\omega)$  podem ser interpretadas como:

$\rho(\omega)$ : Distribuição que traz a informação a respeito de quais cossenóides existem no sinal  $x(t)$ , e com que amplitudes elas se fazem presentes;

$\theta(\omega)$ : Distribuição que informa qual é o defasamento relativo entre as diversas cossenóides que compõem o sinal  $x(t)$ .

A transformada de Fourier  $X(\omega)$  é interpretada então como a distribuição complexa que integra todas essas informações a respeito das cossenóides que compõem o sinal  $x(t)$ . O formato (3.11) para a transformada de Fourier será empregado várias vezes ao longo deste texto, principalmente dada a facilidade de se atribuir significado físico às funções  $\rho(\omega)$  e  $\theta(\omega)$ .

Devido à conotação de  $X(\omega)$  informar quais são as frequências<sup>1</sup> que existem no sinal  $x(t)$ , costuma-se denominar  $X(\omega)$  como o *espectro de frequências* do sinal  $x(t)$ .

Para denotar a transformação linear que produz a transformada de Fourier de sinais, assim como a transformação inversa, será usada a notação:

$$X(\omega) = \mathcal{F}(x(t)) \quad (3.12)$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(X(\omega))$$

Quando for necessário evidenciar as componentes polares (raio<sup>2</sup> e ângulo<sup>3</sup>) de  $X(\omega)$ , será utilizada também a notação:

$$(\rho(\omega), \theta(\omega)) = \mathcal{F}(x(t)) \quad (3.13)$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(\rho(\omega), \theta(\omega))$$

### 3.4 Alguns Sinais Especiais

Um pequeno conjunto de sinais tem de ser apresentado em particular, pois sua estrutura particular auxilia a análise de diversos mecanismos que serão apresentados neste texto. Esses sinais são apresentados nesta seção, acompanhados da explicação de suas propriedades relevantes.

<sup>1</sup>No jargão das áreas aplicadas, diz-se que determinadas frequências *existem* num sinal com a conotação de que: senóides com essas frequências e amplitudes diferentes de zero estão presentes na transformada de Fourier desse sinal.

<sup>2</sup>Os termos *raio* e *módulo* serão utilizados como sinônimos.

<sup>3</sup>Os termos *ângulo* e *fase* serão empregados como sinônimos.

### 3.4.1 Sinal Impulso Unitário

O sinal *impulso unitário*  $\delta(t)$  é definido pelo próprio sinal *delta de Dirac*:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

Algumas propriedades importantes desse sinal podem ser facilmente verificadas:

**(P1)**  $\mathcal{F}(\delta(t)) = (\rho, \phi)$  com  $\rho(\omega) \equiv 1$  e  $\phi(\omega) \equiv 0$ .

**(P2)**  $a(t) \otimes \delta(t - \tau) = a(t - \tau)$

### 3.4.2 Sinal Senoidal

Sinais *senoidais*  $x(t)$  de amplitude unitária são definidos por:

$$x(t) = \text{sen}(\omega_o t + \phi_o) \quad (3.15)$$

A transformada de Fourier desse sinal,  $\mathcal{F}(\delta(t)) = (\rho, \phi)$ , é dada por:

$$\rho(\omega) = \frac{1}{2}\delta(-\omega_o) + \frac{1}{2}\delta(\omega_o) \quad (3.16)$$

$$\phi(\omega) = -\phi_o\delta(-\omega_o) + \phi_o\delta(\omega_o)$$

No caso particular cossenoidal tem-se:

$$x(t) = \text{cos}(\omega_o t) \quad (3.17)$$

A transformada de Fourier desse sinal agora é dada por:

$$\rho(\omega) = \frac{1}{2}\delta(-\omega_o) + \frac{1}{2}\delta(\omega_o) \quad (3.18)$$

$$\phi(\omega) \equiv 0$$

No limite em que a frequência  $\omega_o$  vai a zero, ainda se obtém outro caso particular, do sinal constante:

$$x(t) \equiv 1 \quad (3.19)$$

cuja transformada de Fourier fica:

$$\rho(\omega) = \delta(0) \quad (3.20)$$

$$\phi(\omega) \equiv 0$$

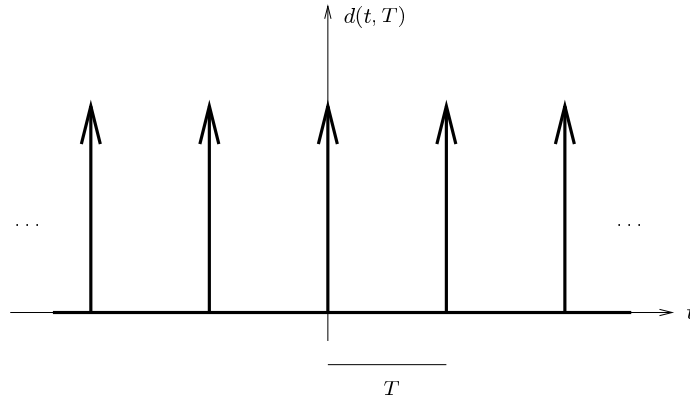


Figura 3.2: Representação gráfica do sinal trem de impulsos.

### 3.4.3 Sinal Trem de Impulsos

O sinal *trem de impulsos*, denotado por  $d(t, T)$ , é definido por:

$$d(t, T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (3.21)$$

Uma representação gráfica para esse sinal é mostrada na figura 3.2.

A transformada de Fourier,  $\mathcal{F}(d(t, T)) = (D, \phi)$ , é dada por:

$$\begin{aligned} D(\omega, T) &= d(\omega, \frac{2\pi}{T}) \\ \phi(\omega) &\equiv 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

ou seja, o módulo da transformada é também um trem de impulsos.

### 3.4.4 Sinal Janela Quadrada e Sinal Sinc

O sinal *janela quadrada*  $h(t, T)$  é definido por:

$$h(t, T) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } -T \leq t \leq T \\ 0 & , \text{ se } t < -T \text{ ou } t > T \end{cases} \quad (3.23)$$

Esse sinal está mostrado na figura 3.3.

A transformada de Fourier desse sinal,  $\mathcal{F}(h(t, T)) = H(\omega)$ , é:

$$H(\omega) = \frac{2 \operatorname{sen}(T\omega)}{\omega} \quad (3.24)$$

Embora seja uma distribuição complexa, esse sinal só possui componente real

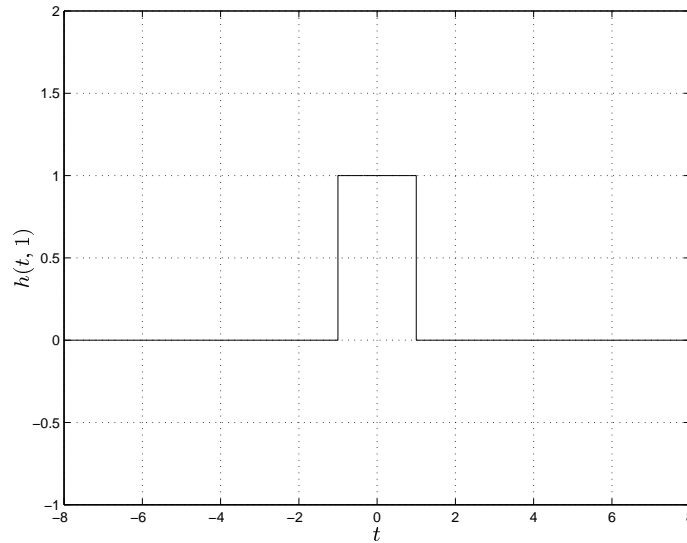


Figura 3.3: Representação gráfica do sinal janela quadrada, para  $T = 1$ .

para todo  $\omega$ . Em termos de módulo e fase, essa transformada é descrita por:

$$\Gamma(\omega, T) = \left| \frac{2 \operatorname{sen}(T\omega)}{\omega} \right| \quad (3.25)$$

$$\Phi(\omega, T) = \left( 1 - \operatorname{sinal} \left( \frac{2 \operatorname{sen}(T\omega)}{\omega} \right) \right) \frac{\pi}{2}$$

O sinal  $H(\omega)$ , assim obtido, possui importância independente e é denominado *senal sinc*. O módulo  $\Gamma(\omega, T)$  desse sinal está mostrado na figura 3.4.

### 3.5 Transformada de Fourier de Sinais Periódicos

Utilizando o resultado da seção anterior para sinais senoidais, é possível agora mostrar qual será a forma da transformada de Fourier de sinais periódicos. Sabe-se que tais sinais podem ser escritos em termos de *séries de Fourier*, ou seja, de somas de senóides cujas frequências são múltiplas da frequência do sinal.

Seja então  $x(t)$  um sinal periódico com período  $T$  (isto é, frequência fundamental  $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$ ):

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\omega_o t + \Phi_n) \quad (3.26)$$

Aplicando a relação (3.18), obtém-se a transformada de Fourier,  $\mathcal{F}(x) = (\rho, \phi)$ ,

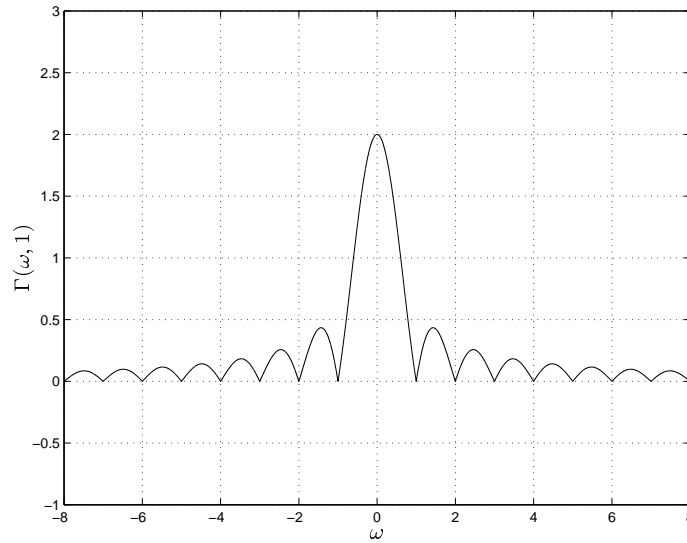


Figura 3.4: Representação gráfica do módulo do sinal sinc, para  $T = 1$ .

desse sinal:

$$\rho(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\delta(-n\omega_o) + \delta(n\omega_o)) \quad (3.27)$$

$$\phi(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n (-\delta(-n\omega_o) + \delta(n\omega_o))$$

É interessante notar que os sinais  $\rho(\omega)$  e  $\phi(\omega)$  podem ser interpretados como sendo resultantes da multiplicação de sinais contínuos hipotéticos  $A(\omega)$  e  $\Phi(\omega)$  por trens de impulso do tipo  $D(\omega, T)$ . Essa interpretação será explorada no próximo capítulo.

### 3.6 Interação de Sinais com Sistemas Físicos Lineares

No mundo físico, sinais excitam sistemas, os quais reagem produzindo novos sinais como respostas. Como exemplos disso, podem ser citados:

- Um sinal de pressão do ar com variação aproximadamente periódica é produzido nas cordas vocais de uma pessoa. Ao atravessar o “trato vocal” (ou seja, todo o percurso entre as cordas vocais e a saída da boca), este sinal é modificado, para produzir um som que pode ser por exemplo interpretado como determinada vogal sendo pronunciada. Pode-se interpretar o sinal originário das cordas vocais como um sinal “de entrada” para o sistema

constituído pelo trato vocal, e a voz efetivamente produzida na saída da boca como a resposta desse sistema a aquela excitação de entrada.

- Esse sinal sonoro de voz excita um microfone. Este produz uma saída elétrica que vai para a entrada de um amplificador, o qual acaba fornecendo um sinal para uma caixa acústica, que novamente fornece som em sua saída. O sinal sonoro de voz que entra no microfone pode ser interpretado agora como a entrada do sistema constituído pelo aparelho de som, e o sinal sonoro produzido pela caixa acústica pode ser interpretado como a resposta desse sistema ao sinal de entrada.
- O sinal sonoro deixa a caixa acústica e atinge o tímpano de uma pessoa. Ali ele se propaga para o interior do ouvido, até gerar estímulos nervosos que serão interpretados como o som que essa pessoa ouve. Agora, o som é a entrada do sistema constituído pelo ouvido, e os estímulos nervosos são a saída desse sistema.

Foi dado um exemplo em que existem sistemas biológicos, físicos (acústicos) e tecnológicos interagindo, através de sinais que se propagam de um para o outro. Deve-se notar, neste ponto, que qualquer interação de sistemas pode ser interpretada como ocorrendo através da troca de sinais, quaisquer que sejam as naturezas dos sistemas envolvidos.

Para se analisar matematicamente o fenômeno da interação entre os sinais e os sistemas, é necessário supor algum modelo matemático para tais sistemas. Neste texto, será feita a suposição de que os modelos são de um tipo relativamente simples: serão sistemas dinâmicos lineares. Essa suposição, embora limite a abrangência da análise, invalidando sua utilização em situações onde ocorre a presença de não-linearidades pronunciadas, é bastante conveniente para estruturar uma análise preliminar do problema; além de ser razoavelmente precisa em uma grande variedade de casos. Note-se que sistemas tecnológicos, por exemplo, são muitas vezes projetados tendo como requisito de projeto a condição de apresentarem comportamento linear.

Os sistemas dinâmicos são definidos, neste texto (observe-se que se trata de uma definição restrita, apenas para os propósitos da apresentação aqui), em termos de suas características de entrada/saída, ou seja, em termos de mapeamentos que levam sinais de entrada a sinais de saída:

**Definição 3.5 (Sistemas Dinâmicos)** *Um sistema dinâmico  $\mathcal{T}$  é um mapeamento  $\mathcal{T} : \mathbb{D} \mapsto \mathbb{D}$  que leva o conjunto dos sinais nele próprio.*  $\square$

Esta definição quer dizer que, se se coloca um sinal  $x(t)$  na entrada de um sistema  $\mathcal{T}$ , este produzirá uma saída que é outro sinal  $y(t)$ , ou:  $y = \mathcal{T}(x)$ . Neste texto serão tratados apenas sistemas lineares invariantes no tempo:



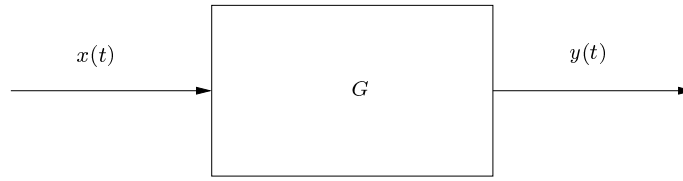


Figura 3.5: Diagrama que representa um sistema  $G$  sendo excitado por um sinal de entrada  $x(t)$  e fornecendo na saída um sinal  $y(t)$ .

**Definição 3.6 (Sistemas Dinâmicos Lineares)** Um sistema dinâmico linear é um sistema dinâmico que atende à relação:

$$\begin{aligned} y_1 &= \mathcal{T}(x_1) \\ y_2 &= \mathcal{T}(x_2) \\ \Rightarrow (y_1 + y_2) &= \mathcal{T}(x_1 + x_2) \end{aligned} \tag{3.28}$$

□

**Definição 3.7 (Sistemas Dinâmicos Lineares Invariantes no Tempo)**

Um sistema dinâmico linear invariante no tempo (SLIT) é um sistema dinâmico linear em que prevalece a relação:

$$y(t) = \mathcal{T}(x(t)) \Rightarrow (y(t + \tau)) = \mathcal{T}(x(t + \tau)) \tag{3.29}$$

□

A figura 3.5 mostra o diagrama que será utilizado ao longo deste texto para representar um sistema dinâmico  $G$  sendo excitado por um sinal de entrada  $x(t)$  e produzindo um sinal  $y(t)$  como saída.

### 3.6.1 Resposta Temporal de SLIT

Os sistemas dinâmicos lineares invariantes com o tempo podem ter sua resposta a sinais caracterizada em termos da seguinte relação:

$$y(t) = g(t) \circledast x(t) \tag{3.30}$$

onde  $g(t)$  é uma função (um sinal) que caracteriza o sistema e o operador  $\circledast$  é o operador convolução. Pela propriedade **(P2)** do sinal impulso unitário, fica claro que se na entrada do sistema se aplica tal sinal tem-se:

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = g(t) \circledast \delta(t) = g(t) \tag{3.31}$$

Esse fato motiva a denominação que é dada de *sinal resposta ao impulso* do sistema, ao sinal  $g(t)$ .

É fácil verificar que um sistema definido em termos de (3.30) atende aos requisitos de linearidade e de invariância no tempo.

### 3.6.2 Resposta em Frequência de SLIT

Os sistemas lineares, ao serem excitados por sinais do tipo:

$$x(t) = \alpha \cos(\omega t + \phi) \quad (3.32)$$

têm a particularidade de sempre fornecer na sua saída sinais com a estrutura:

$$y(t) = G(\omega)\alpha \cos(\omega t + (\phi + \Psi(\omega))) \quad (3.33)$$

Esta propriedade decorre diretamente da representação do sistema na forma (3.30) (veja [1]). Isto significa que, se um sistema dinâmico linear tem em sua entrada um sinal cossenoidal, ele apresentará em sua saída um sinal:

- que também é cossenoidal;
- que tem a mesma frequência  $\omega$  do sinal de entrada;
- que tem, entretanto, amplitude e ângulo diferentes dos do sinal de entrada;
- a amplitude será modificada por um fator multiplicativo  $G(\omega)$  que depende da frequência  $\omega$ ;
- o ângulo será modificado por um fator aditivo  $\Psi(\omega)$  que depende também da frequência  $\omega$ .

A figura 3.6 mostra a resposta de um sistema dinâmico a duas senóides de mesma amplitude, porém frequências diferentes, aplicadas em sua entrada.

A caracterização do sistema enquanto uma relação entrada/saída pode ser feita então pelas funções (ou distribuições)  $G_m(\omega)$  e  $G_f(\omega)$ . Note-se que, se estas funções determinam a resposta do sistema a uma cossenóide, determinam também, pela linearidade do sistema, sua resposta a qualquer soma de cossenóides. Ou seja, suponha-se o sistema excitado por um sinal arbitrário descrito por:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty X_m(\omega) \cos(\omega t + X_f(\omega)) dt \quad (3.34)$$

O sinal de saída, neste caso, será um sinal também arbitrário, apresentado como soma de cossenóides:

$$y(t) = \int_0^\infty G_m(\omega) X_m(\omega) \cos(\omega t + X_f(\omega) + G_f(\omega)) dt \quad (3.35)$$

ou:

$$y(t) = \int_0^\infty Y_m(\omega) \cos(\omega t + Y_f(\omega)) dt \quad (3.36)$$

sendo:

$$\begin{aligned} Y_m(\omega) &= G_m(\omega) X_m(\omega) \\ Y_f(\omega) &= G_f(\omega) + X_f(\omega) \end{aligned} \quad (3.37)$$

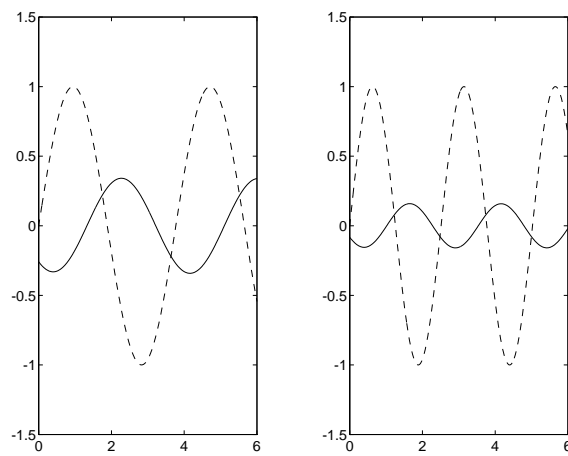


Figura 3.6: Os sinais tracejados são senóides de mesma amplitude e frequências diferentes, injetados na entrada de um sistema dinâmico. Em linha contínua, observam-se as respostas do sistema aos sinais. Verifica-se que: (i) a saída é senoidal com mesma frequência que a entrada; (ii) os fatores multiplicativos da amplitude dependem da frequência; (iii) os fatores aditivos do ângulo também dependem da frequência.

As funções  $G_m(\omega)$  e  $G_f(\omega)$  são respectivamente denominadas *módulo* e *fase* da *resposta em frequência* do SLIT. Deve-se notar que é possível escrever uma função complexa  $G(\omega)$  dada por:

$$G(\omega) = G_m(\omega)e^{iG_f(\omega)} \quad (3.38)$$

Nesse caso, as relações descritas em (3.37) podem ser sintetizadas em:

$$Y(\omega) = G(\omega) \cdot X(\omega) \quad (3.39)$$

onde  $Y(\omega)$  e  $X(\omega)$  são as transformadas de Fourier (em forma complexa) dos sinais  $y(t)$  e  $x(t)$  respectivamente.

Pela propriedade **(P1)** do sinal impulso unitário, verifica-se imediatamente a seguinte relação entre o sinal resposta ao impulso e as funções de resposta em frequência de um sistema:

$$\mathcal{F}(g(t)) = (G_m(\omega), G_f(\omega)) = G(\omega) \quad (3.40)$$

### 3.7 Filtragem

Tendo sido definido genericamente o mecanismo segundo o qual um sistema dinâmico, ao ser excitado por um sinal de entrada, produz um sinal de saída, destaca-se agora uma situação particular que possui interesse especial: a chamada *filtragem* de sinais. Trata-se do caso em que, idealmente, o sistema dinâmico deverá possuir resposta em frequência tal que senóides cujas frequências estiverem localizadas dentro de determinada faixa, ao excitar o sistema, irão produzir saída idêntica à entrada; enquanto que senóides que tiverem frequência fora dessa faixa serão inteiramente bloqueadas, isto é, produzirão saída nula.

Sejam filtros definidos por sua resposta em frequência  $(G_m(\omega), G_f(\omega))$ . Quatro tipos básicos de filtros ideais são definidos da seguinte forma:

**Filtro Passa-Baixas:**

$$G_m(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & , \quad |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (3.41)$$

**Filtro Passa-Altas:**

$$G_m(\omega) = \begin{cases} 0 & , \quad |\omega| \leq \omega_c \\ 1 & , \quad |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (3.42)$$

**Filtro Passa-Faixa:**

$$G_m(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad \omega_l \leq \omega \leq \omega_h \\ 0 & , \quad \omega < \omega_l \text{ ou } \omega > \omega_h \end{cases} \quad (3.43)$$

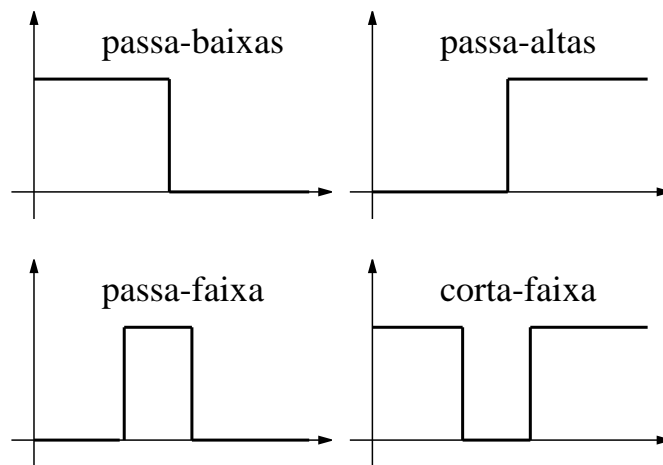


Figura 3.7: Os quatro tipos de filtros básicos ideais. Está mostrado apenas o semi-eixo positivo de frequências.

#### Filtro Passa-Faixa:

$$G_m(\omega) = \begin{cases} 0 & , \quad \omega_l \leq \omega \leq \omega_h \\ 1 & , \quad \omega < \omega_l \text{ ou } \omega > \omega_l \end{cases} \quad (3.44)$$

Idealmente, nos quatro casos,  $G_f(\omega) \equiv 0$ . As frequências de transição,  $\omega_c$ ,  $\omega_l$  e  $\omega_h$ , são denominadas *frequências de corte* dos filtros. Os gráficos de módulo da resposta em frequência desses quatro filtros ideais básicos são mostrados na figura 3.7.

A denominação de “filtro” para o tipo de sistema dinâmico que está sendo discutido nesta seção é motivada pela operação que esse tipo de sistema faz nos sinais nele injetados: o filtro separa as senóides de diferentes frequências que compõem o sinal, eliminando completamente algumas senóides e deixando intactas outras senóides.

Filtros com resposta em frequência exatamente como essas quatro ideais definidas nesta seção não possuem correspondente no mundo físico. No entanto, é possível aproximar essas respostas ideais por meio de sistemas reais. Nos sistemas tecnológicos, filtros são construídos por meio de circuitos elétricos a capacitores, resistores e indutores, projetados para aproximar as respostas em frequência ideais. A figura 3.8 mostra respostas em frequência de circuitos que aproximam um filtro passa-baixas.

A figura 3.9 mostra a resposta em frequência de um circuito que aproxima um filtro passa-faixa, superposta ao espectro de frequências de um sinal quadrado, que é injetado nesse filtro. A entrada, dada por esse sinal quadrado, com a respectiva saída do filtro, são mostradas na mesma figura. Observa-se que apenas uma das componentes senoidais do sinal quadrado encontrava-se dentro

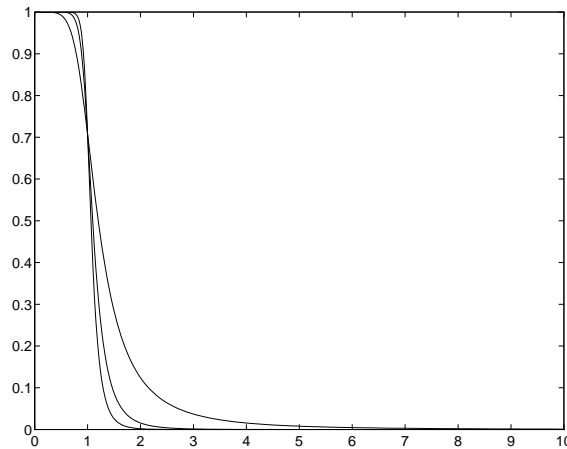


Figura 3.8: Respostas em frequência de três circuitos projetados para aproximarem um filtro passa-baixas. As aproximações são sucessivamente melhores à medida em que aumenta a ordem do circuito.

da faixa de passagem do filtro, de forma que a saída corresponde ao que seria esperado, ou seja, um sinal senoidal.

### 3.8 Dualidade Tempo-Freqüência

A observação da simetria da fórmula de cálculo da transformada de Fourier em relação à fórmula da transformada inversa permite obter:

$$\begin{aligned} x(t) = h(t) \otimes u(t) &\Leftrightarrow X(\omega) = H(\omega) \cdot U(\omega) \\ y(t) = p(t) \cdot w(t) &\Leftrightarrow Y(\omega) = P(\omega) \otimes W(\omega) \end{aligned} \tag{3.45}$$

Essas relações podem ser interpretadas como: tanto a transformada quanto a transformada inversa de Fourier levam o operador convolução no operador multiplicação, e vice-versa.

Essas relações serão de grande utilidade no próximo capítulo.

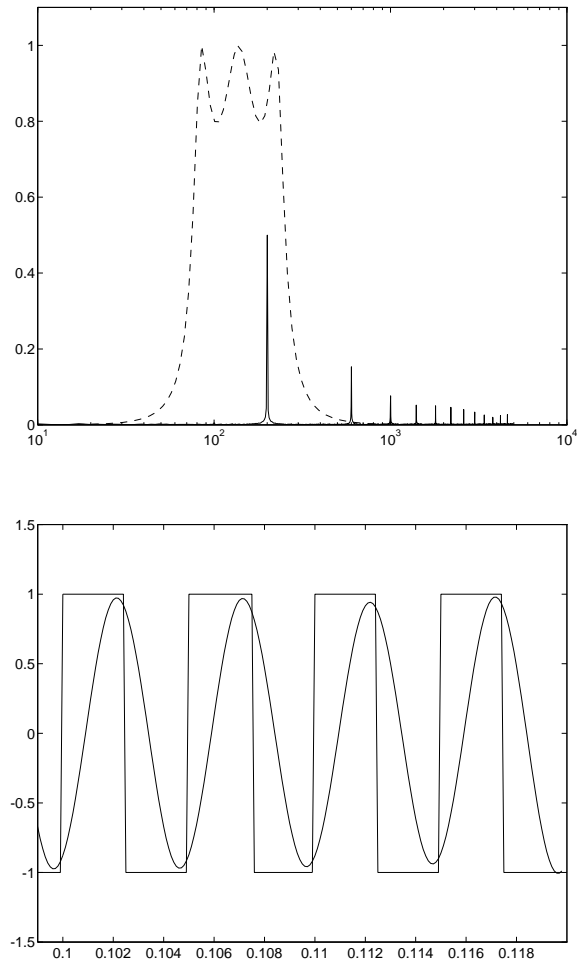


Figura 3.9: Em cima: resposta em freqüência de um circuito projetado para aproximar um filtro passa-faixa, superposta com o espectro de freqüências de um sinal quadrado que será injetado na entrada do filtro. Em baixo: o sinal quadrado injetado na entrada do filtro, superposto com o sinal aproximadamente senoidal que surge na saída do filtro.

## Capítulo 4

# Processabilidade de Sinais Empíricos

A análise do que é possível obter como aproximação da transformada de Fourier de sinais empíricos (sinais provenientes de medições de grandezas físicas) será realizada no próximo capítulo. Tal análise, no entanto, é limitada por restrições que são fundamentais (no sentido de *intransponíveis*), e que não estão especificamente ligadas ao fato de se calcular uma transformada de Fourier: elas advêm do fato de os sinais serem *empíricos*. O tema deste capítulo é o estudo dessas restrições.

No próximo capítulo, essas restrições irão definir qual é a melhor aproximação possível para a transformada de Fourier de um sinal, dadas as condições sob as quais esse sinal foi medido. No presente capítulo, é mostrado que essas restrições de fato se aplicam a qualquer tipo de processamento que for feito sobre tal sinal.

### 4.1 Limitações Fundamentais

Há diferenças fundamentais entre o que é possível calcular a respeito de um sinal, quando se dispõe de sua fórmula analítica; e aquilo que se pode calcular quando apenas se possuem medidas físicas do mesmo, sem qualquer informação a respeito de sua estrutura analítica. Estas diferenças estão associadas à menor quantidade de informação disponível no segundo caso (só se dispõe de alguns pontos e não de todo o sinal) e à exequibilidade do processamento dessa informação (a informação expressa em termos de valores de coordenadas de pontos envolve uma descrição extensiva, e não sintética, do sinal). Note-se que:

- A obtenção de uma aproximação para a transformada de Fourier deve ser feita por processo de cálculos numéricos. O sinal deve estar disponível, portanto, em formato numérico, o que exclui a possibilidade de se utilizar uma representação analógica para o mesmo.



- Isso significa que não é possível reter todos os infinitos valores que um sinal assume em um intervalo de tempo, mas apenas um número finito de amostras dentro desse intervalo, devido à finitude da memória disponível para armazenar esses valores.
- Pelo mesmo motivo (da finitude da memória disponível) e também devido ao fato de que os sinais devem ser empiricamente medidos, o que significa que o processo de medição deve ter um início e um fim, conclui-se que só é possível dispor de um número finito de amostras, cobrindo um intervalo de tempo de duração finita; não sendo possível “enxergar” o sinal de menos a mais infinito, como seria o caso se se dispusesse de sua representação analítica.
- Uma outra consequência da necessidade de se utilizar uma representação numérica para os sinais é que a própria aproximação a ser obtida para a transformada de Fourier deve ter representação numérica, isto é, deve ser composta de um número finito de valores. Esses também não podem “preencher” intervalos contínuos nem de comprimento infinito.

Essas limitações determinam a estrutura da aproximação que é possível construir para a transformada de Fourier de um sinal. Essa aproximação será denominada *Transformada Discreta de Fourier*, sendo essa denominação devida ao fato de o sinal estar discretizado, ou seja, representado por um conjunto de amostras<sup>1</sup>.

Nas próximas seções deste capítulo, serão descritas as representações matemáticas para as operações de:

1. Tomar amostras de um sinal contínuo: operação de *amostragem*;
2. Tomar um intervalo de comprimento finito da transformada de Fourier de um sinal: operação de *filtragem anti-aliasing*<sup>2</sup>;
3. Tomar um intervalo de duração finita de um sinal de duração infinita: operação de *janelamento*<sup>3</sup>;

<sup>1</sup>Deve-se notar que, neste texto, não está sendo considerada uma outra consequência do sinal estar em formato numérico digital: o sinal tem de ser representado por um número finito de dígitos, o que significa que há um erro de truncamento nas amostras do mesmo. As justificativas para não se levar em consideração esse erro são: (1) a tecnologia dos processadores atuais permite a utilização de um número suficientemente grande de dígitos para tornar esse erro quase desprezível; e (2) o tratamento desse tipo de erro não possui interdependências com o tratamento das questões, aqui consideradas, de discretização do sinal num intervalo de tempo finito. Neste texto estão agregados todos os fatores estruturalmente importantes para definir as propriedades da Transformada Discreta de Fourier.

<sup>2</sup>O termo “aliasing” por vezes aparece traduzido para o português como “falseamento”. A tradução não será adotada aqui, entretanto, uma vez que o termo em inglês é usado corriqueiramente, sem ser traduzido, em praticamente toda a literatura que aborda sinais processados digitalmente.

<sup>3</sup>O termo *janelamento* é uma tradução livre do termo em inglês *windowing*.

4. Tomar amostras da transformada de Fourier de um sinal: operação de *periodificação*<sup>4</sup>.

A composição dessas quatro operações irá definir a *Transformada Discreta de Fourier*, que será estudada no próximo capítulo.

## 4.2 Amostragem

A operação de amostragem a ser aqui definida é um modelo matemático de um mecanismo que é efetivamente construído, utilizando tecnologia eletrônica: o conversor analógico/digital com entrada por “sample and hold”<sup>5</sup>. O diagrama mostrado na figura 4.1 representa tal mecanismo de amostragem.

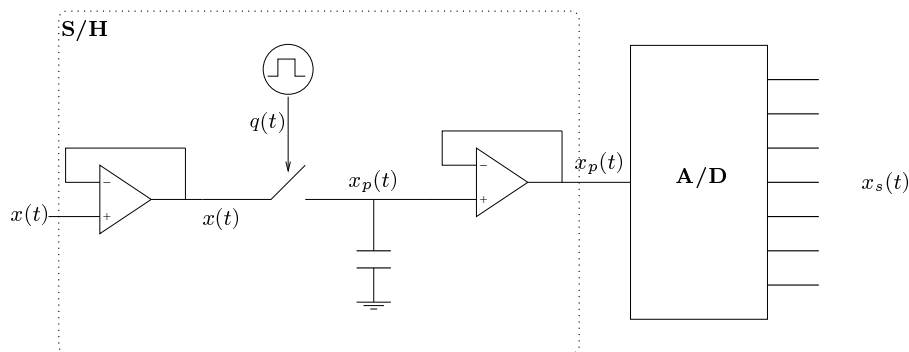


Figura 4.1: Diagrama de um sistema de conversão analógico/digital com “sample and hold” (bloco S/H). O sinal analógico  $x(t)$  será amostrado. Os blocos com amplificadores operacionais exercem apenas a função de desacoplar a entrada da saída, produzindo em sua saída uma “cópia exata” de sua entrada. O sinal quadrado  $q(t)$  comanda o fechamento e abertura da chave: essa operação “abertura-fechamento” ocorre muito rapidamente, no instante em que o sinal quadrado tiver transições do valor inferior para o valor superior de tensão. O valor que o sinal  $x(t)$  tiver nesses instantes de “abertura-fechamento” da chave ficará armazenado no capacitor, na variável  $x_p(t)$ , que é portanto constante por partes. Essa variável é convertida pelo conversor A/D para o formato digital, de forma que a variável  $x_s(t)$  que aparece na saída do A/D já é uma variável em formato numérico.

<sup>4</sup>O termo *periodificação* é definido neste texto para designar uma operação que não é habitualmente definida com um nome específico, nem em português nem em inglês. O autor se viu diante do dilema de escolher entre duas opções: *periodificação* e *periodização*. A primeira foi escolhida por ser etimologicamente correta para designar a ação que está sendo definida, embora a outra opção tenha sido também considerada, principalmente por possuir sonoridade mais atraente.

<sup>5</sup>O termo “sample and hold” usualmente não é traduzido; uma tradução livre para o mesmo poderia ser “amostrador segurador”.

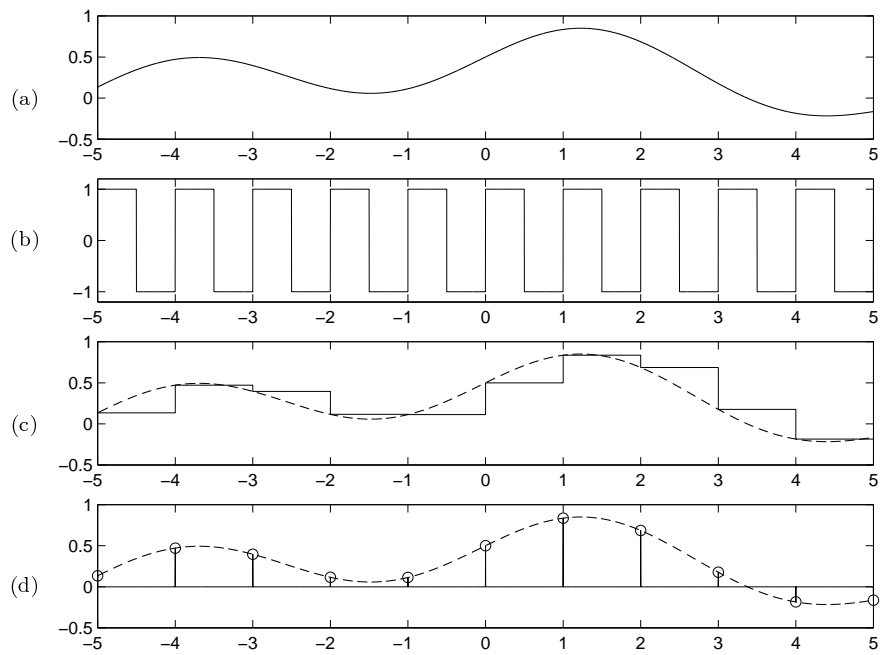


Figura 4.2: Representação gráfica do processo de amostragem de um sinal. De cima para baixo: (a) sinal analógico original; (b) sinal quadrado que comanda o dispositivo de “sample and hold”; (c) sinal constante por partes que aparece no capacitor, no interior do dispositivo de “sample and hold”; (d) sinal amostrado.

O funcionamento do sistema de amostragem pode ser entendido da seguinte maneira:

- O sinal analógico, já no formato de uma tensão elétrica, está colocado na entrada do bloco S/H. Esse sinal analógico está representado na figura 4.2(b).
- O bloco S/H recebe outra entrada, que provém de um oscilador, que fornece um sinal do tipo “onda quadrada”. Esse sinal está representado na figura 4.2(a). A construção desse bloco é feita de tal forma que, a cada vez que o sinal quadrado de tensão sofre uma *transição* do valor menor para o valor maior, a chave representada dentro do bloco S/H se fecha durante um intervalo de tempo muito pequeno, abrindo-se novamente a seguir.
- A tensão analógica que havia na entrada do bloco S/H, na entrada da chave, no instante em que esta se fechou, fica registrada no capacitor que está após a chave. Como a chave se abre novamente muito rapidamente, a tensão analógica de entrada, ao variar após a abertura da chave, não causa variação na tensão do capacitor (este fica com uma “memória” da tensão existente no exato instante em que a chave se abriu). A tensão do capacitor fica fixa com tal valor até que se complete novo ciclo do sinal quadrado que, por sua vez, comanda a abertura e fechamento da chave. Durante esse tempo, que corresponde a um período da onda quadrada, essa tensão constante do capacitor fica disponível na entrada do próximo bloco, que é o conversor A/D (ou conversor analógico/digital). Essa tensão é mostrada na figura 4.2(d).
- O conversor A/D é um dispositivo que recebe em sua entrada uma tensão constante e fornece em sua saída um valor numérico (digital) para essa tensão. Gasta-se certo tempo para que o valor numérico correto correspondente à tensão de entrada seja obtido e disponibilizado na saída digital do dispositivo, e enquanto a conversão não estiver completa o sinal de entrada não deve ser alterado. Isso significa que o período do sinal quadrado que comanda a chave do bloco S/H deve ser maior ou igual a esse tempo necessário para se concluir a conversão A/D.
- O sinal numérico obtido com a conversão A/D se refere, claramente, ao valor do sinal que existia na entrada no instante em que a chave do bloco S/H se fechou, ou seja, ao instante de transição da tensão quadrada do valor máximo para o valor mínimo. Na realidade, o que se obtém, no final das contas, é a seqüência de valores que o sinal assume exatamente nesses instantes de transição, não havendo qualquer informação a respeito do sinal nos demais instantes de tempo. Na figura 4.2(c) também se encontram representados esses pontos, os quais passam a estar disponíveis após a *amostragem*. Pode-se entender essa seqüência de pontos como sendo o resultado da *amostragem*.

Uma vez apresentada essa explicação a respeito do processo físico de amostragem, passa-se agora ao problema de modelar esse processo matematicamente. Deve-se agora escrever uma operação analítica que consiga representar o processo de transformação de um sinal contínuo em um sinal amostrado. O próprio sinal amostrado deve conceitualmente possuir uma forma analítica que o descreva não apenas nos instantes de amostragem, mas em todos os instantes, de forma a compatibilizar sua representação com a do sinal analógico. A definição a seguir possui essas características.

**Definição 4.1 (Amostragem)** *Seja o sinal  $x(t)$ . A operação de amostragem de  $x(t)$  à taxa de amostragem  $T$  é definida como a operação de multiplicação do sinal  $x(t)$  pelo trem de impulsos  $d(t, T)$ :*

$$x_s(t) = x(t) \cdot d(t, T) \quad (4.1)$$

O sinal resultante  $x_s(t)$  é chamado sinal amostrado e o valor  $\frac{2\pi}{T}$  é denominado frequência de amostragem do sinal.  $\square$

É necessário agora estudar a interpretação da operação de amostragem no domínio da frequência. Sejam as transformadas de Fourier dos sinais dadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x) &= X \\ \mathcal{F}(x_s) &= X_s \\ \mathcal{F}(d) &= D \end{aligned} \quad (4.2)$$

Pela dualidade tempo-freqüência, tem-se que:

$$X_s = X \otimes D \quad (4.3)$$

Para realizar a interpretação da equação (4.3), suponha-se inicialmente que  $X(\omega)$  seja limitado em freqüências, ou seja:

$$X(\omega) = 0 \quad \forall |\omega| > \omega_m \quad (4.4)$$

Um sinal  $X(\omega)$  com essas características é mostrado na figura 4.3(a). Na mesma figura, parte (b), encontra-se o sinal  $D(\omega, T)$ , sendo que supõe-se também preliminarmente que a seguinte condição esteja satisfeita:

$$(C1) \quad \omega_m < \frac{2\pi}{T}$$

O sinal resultante da convolução dos sinais em (a) e (b) pode ser determinado pela propriedade **(P1)** do sinal impulso: sabe-se que  $X(\omega)$  será “copiado” sobre cada um dos impulsos do trem de impulsos, gerando um sinal  $X_s(\omega)$  que é periódico em  $\omega$ , com período  $\frac{2\pi}{T}$ , cujo esboço está mostrado na figura 4.3(c).

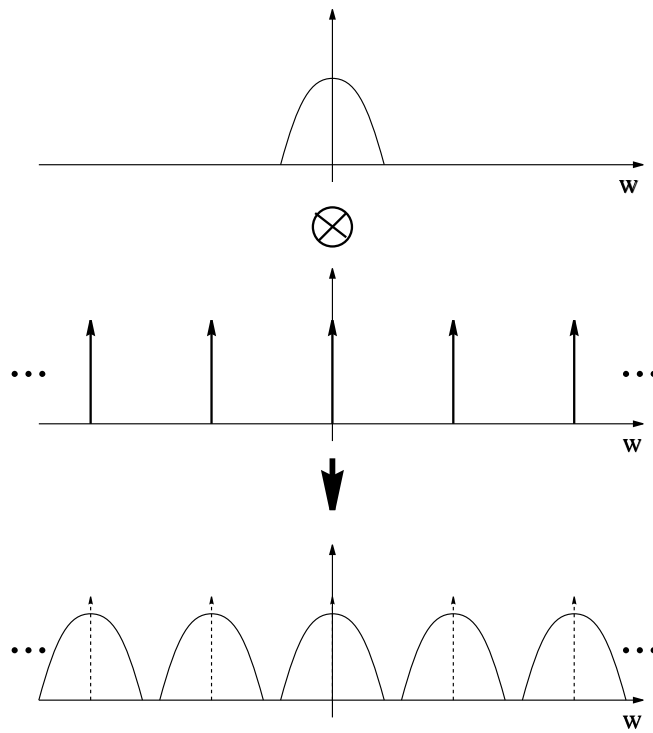


Figura 4.3: Esboço da operação de amostragem, interpretada no domínio da frequência. Topo: módulo da transformada de Fourier do sinal contínuo. Meio: módulo da transformada de Fourier do trem de impulsos. Baixo: módulo da transformada de Fourier do sinal amostrado.

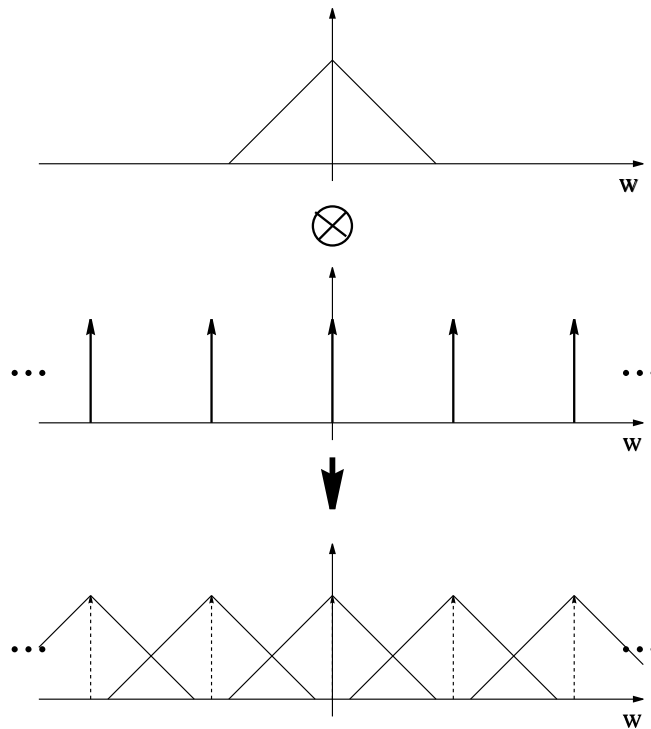


Figura 4.4: Esboço da operação de amostragem, interpretada no domínio da frequência, com a ocorrência do fenômeno de “aliasing”. Topo: módulo da transformada de Fourier do sinal contínuo. Meio: módulo da transformada de Fourier do trem de impulsos. Baixo: módulo da transformada de Fourier do sinal amostrado. Nota-se a superposição, neste último, das “cópias” do primeiro sinal. (Esta figura continua na próxima).

### 4.3 Filtragem Anti-Aliasing

Pela figura 4.3 fica claro que, se se garante a condição **(C1)**, as “cópias” de  $X(\omega)$  aparecem não deformadas, mas fiéis à informação original, em  $X_s(\omega)$ . No entanto, se tal condição não se verifica, essas “cópias” aparecem deformadas pela superposição de umas com as outras, conforme mostrado nas figuras 4.4 e 4.5. Essa deformação é denominada “aliasing”.

A questão do surgimento do “aliasing” é a essência do chamado *teorema da amostragem*, que é enunciado a seguir em uma de suas possíveis formas.

**Teorema 4.1 (Teorema da Amostragem)** *Seja um sinal  $x(t)$  cuja transformada de Fourier exibe componentes até a frequência máxima  $\omega_m$ . O sinal amostrado  $x_s(t)$  conterá toda a informação existente no sinal original se, e somente se, a frequência de amostragem for maior que  $2\omega_m$ .*  $\square$

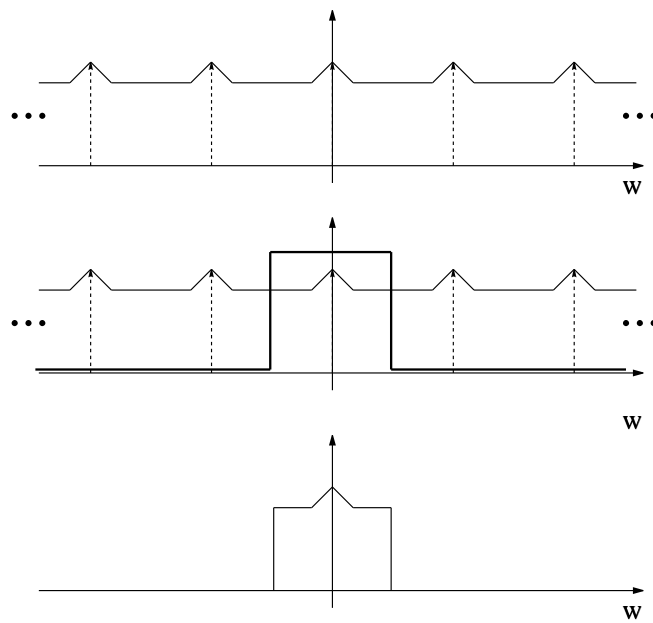


Figura 4.5: Esboço da operação de amostragem, interpretada no domínio da frequência, com a ocorrência do fenômeno de “aliasing” (continuação da figura anterior). Topo: soma das diversas “cópias” do módulo da transformada de Fourier do primeiro sinal. Meio: porção correspondente a uma única “cópia”. Baixo: gráfico que seria correspondente ao módulo da transformada de Fourier de outro sinal contínuo que, ao ser amostrado sem “aliasing”, resultaria no mesmo módulo da transformada de Fourier.



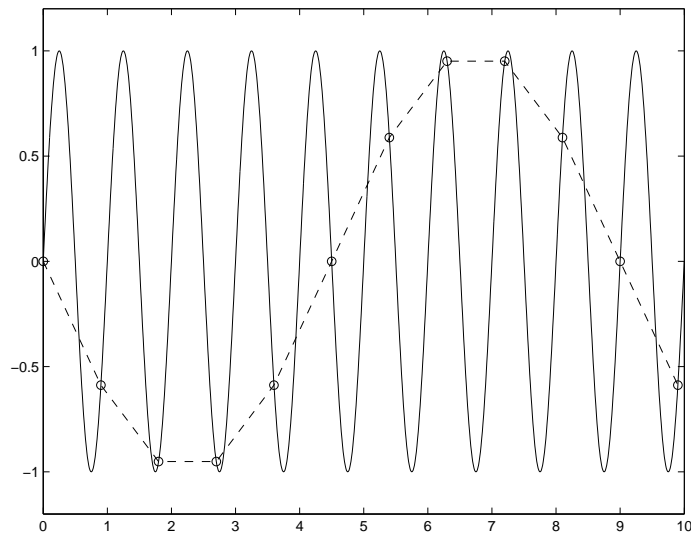


Figura 4.6: A senoide contínua está sendo amostrada com frequência de amostragem menor que duas amostras por período. Dessa forma, o conjunto de amostras obtido corresponde não mais à senoide contínua original, mas a amostras de outra senoide de frequência menor, que não existia originalmente e cujo surgimento é um “erro” causado pela sub-amostragem. Essa é a interpretação do fenômeno do “aliasing” no tempo.

A frequência correspondente à metade da frequência de amostragem é denominada *frequência de Nyquist*<sup>6</sup>. Essa frequência significa a maior frequência de um sinal original que pode estar contida em sua amostragem.

Pelas figuras 4.4 e 4.5, observa-se que o fenômeno do aliasing não se refere apenas à incapacidade do sinal amostrado em baixas frequências de representar senóides contidas no sinal original, que tivessem frequências acima da de Nyquist. De fato, observa-se que caso o sinal analógico original contivesse senóides de frequências acima da de Nyquist, estas iriam se sobrepor às senóides de baixas frequências no sinal amostrado, dessa forma impedindo a correta interpretação dessas baixas frequências também. O gráfico da figura 4.6 mostra como um sinal, puramente senoidal, sendo amostrado a uma frequência menor que o dobro de sua frequência, passa a ser interpretado como outra senoide, de menor frequência.

Coloca-se agora a seguinte situação: é necessário amostrar um sinal, para processamento digital posterior (por exemplo, para cálculo posterior de uma aproximação de sua transformada de Fourier). O dispositivo que irá realizar a amostragem do sinal funciona com frequência de amostragem determinada  $\omega_s$ . O sinal, embora seja predominantemente constituído de senóides de frequências dentro da faixa de Nyquist (até  $\frac{\omega_s}{2}$ ), possui algumas compo-

<sup>6</sup>Homenagem a H. Nyquist, pioneiro no estudo da amostragem de sinais.

centes senoidais com freqüências acima desse limite. Se o sinal for simplesmente amostrado, essas componentes de altas freqüências irão não apenas não ser captadas, mas também irão interferir nas componentes de baixas freqüências, causando distorção. Como resolver esse problema?

A resposta é simplesmente aplicar um *filtro passa-baixas* para eliminar essas componentes de freqüências acima da freqüência de Nyquist, preservando as componentes abaixo desse limiar. O filtro passa-baixas com freqüência de corte igual à freqüência de Nyquist denomina-se *filtro anti-aliasing*, e a operação de passar um sinal por esse filtro denomina-se *filtragem anti-aliasing*. Esses elementos são definidos a seguir:

**Definição 4.2 (Filtro Anti-Aliasing)** *Seja uma operação de amostragem realizada à freqüência  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ . O filtro anti-aliasing associado a essa amostragem é definido como o filtro cuja resposta em freqüência  $(L_m, L_f)$  é dada por:*

$$L_m(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & , \quad |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases} \quad (4.5)$$

$$L_f(\omega) \equiv 0$$

□

A filtragem anti-aliasing deve ser realizada **antes** de qualquer amostragem, de forma que somente seja amostrado um sinal que tenha sido previamente filtrado. A seqüência de operações para realização de uma amostragem com filtragem anti-aliasing é descrita a seguir, no tempo e na freqüência. Sejam  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$  a freqüência de amostragem,  $(L_m, L_f)$  a resposta em freqüência do filtro anti-aliasing para essa amostragem e  $l(t)$  a resposta ao impulso desse filtro, ou seja:

$$(L_m(\omega), L_f(\omega)) = \mathcal{F}(l(t)) = L(\omega) \quad (4.6)$$

Seja  $x(t)$  o sinal a ser amostrado. Então:

$$x_l(t) = l(t) \otimes x(t) \quad (4.7)$$

$$x_s(t) = d(T, t) \cdot x_l(t) \quad (4.8)$$

Na freqüência:

$$X_l(\omega) = L(\omega) \cdot X(\omega) \quad (4.9)$$

$$X_s(\omega) = D(T, \omega) \otimes X_l(\omega) \quad (4.10)$$

Essa seqüência de operações encontra-se ilustrada na figura 4.7.

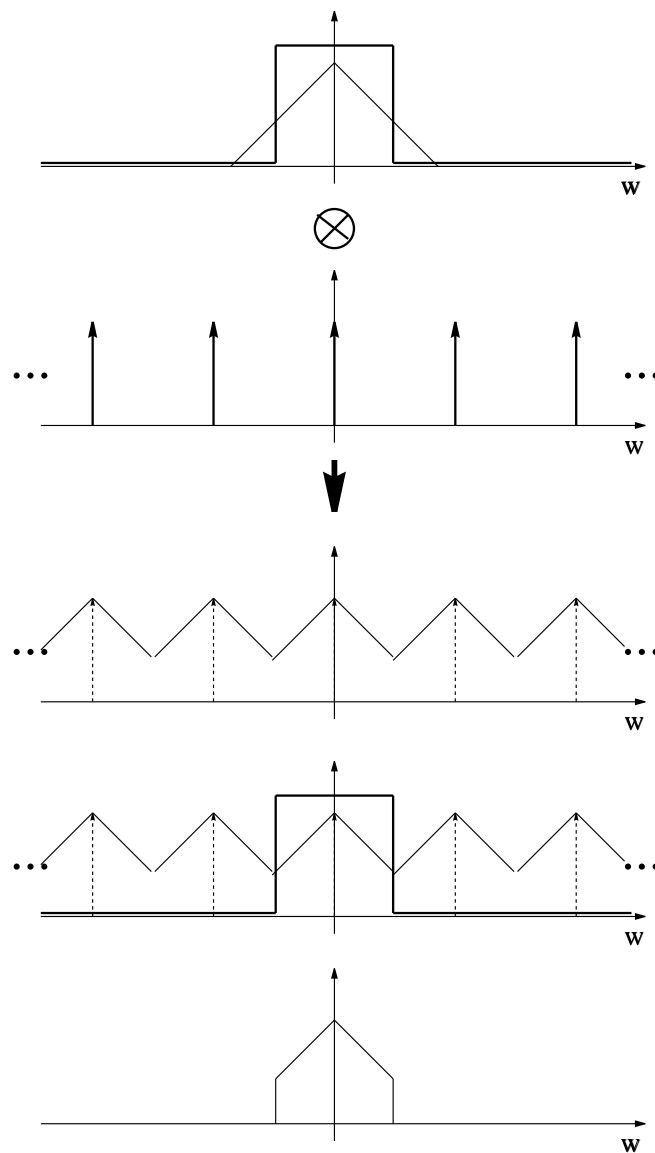


Figura 4.7: Esboço da operação de amostragem com filtragem anti-aliasing, interpretada no domínio da frequência. De cima para baixo: (1) Conteúdo de frequências do sinal original, com altas frequências (acima da frequência de Nyquist) sendo eliminadas pelo filtro anti-aliasing. (2) Espectro do trem de impulsos amostrador. (3) Resultado da amostragem, no qual não ocorre aliasing. (4) Destaca-se uma “cópia” do sinal contínuo presente no sinal amostrado. (5) Essa “cópia” corresponde, de maneira fiel, ao sinal original após passar pelo filtro anti-aliasing.

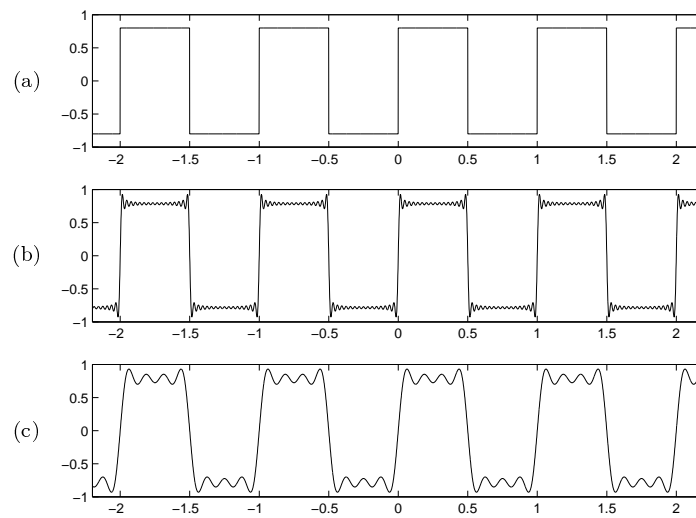


Figura 4.8: Em (a), é mostrado o sinal quadrado, que possui senóides cujas freqüências vão até infinito. Em (b), é mostrado o mesmo sinal após sofrer filtragem anti-aliasing que eliminou as freqüências acima de 31 vezes a freqüência fundamental. Em (c), outra filtragem anti-aliasing foi realizada, agora eliminando todas as freqüências acima de 7 vezes a fundamental.

### 4.3.1 Repercussões da Filtragem Anti-Aliasing

Finalmente, cabe discutir brevemente o significado de se realizar a operação de filtragem anti-aliasing em um contexto prático. Em quê isso irá repercutir? Até que ponto a análise do sinal original, que evidentemente contém mais informação que o sinal filtrado, ficará prejudicada? A figura 4.8 mostra como um sinal, que contém em seu espectro freqüências ilimitadas, é modificado pela filtragem anti-aliasing.

Tome-se o contexto que vem sendo utilizado para os exemplos deste texto: o processamento de sinais acústicos. Numa primeira situação, considere-se que está sendo gravado um CD comercial, que irá conter músicas que devem ser reproduzidas com elevado padrão de qualidade. O padrão tecnológico dos CD's comerciais utiliza uma freqüência de amostragem de 44.5 kHz. Isso significa que a freqüência de Nyquist é de 22.25 kHz, ou seja, CD's não podem conter sinais com freqüências acima desse valor.

Evidentemente os sons, entendidos como sinais de variação da pressão do ar num certo ponto do espaço, podem conter freqüências bem acima dessa freqüência de Nyquist dos CD's. Entretanto, a audição humana consegue captar sinais apenas até aproximadamente a freqüência de 20 kHz. Isso significa que, se freqüências acima desse valor forem eliminadas de um sinal sonoro, essa subtração não será percebida pelo ouvido humano. Se as freqüências até aproximadamente 20 kHz forem preservadas com precisão, o ouvido irá perce-

ber exatamente o que iria perceber se ouvisse o som original. Nessa situação, portanto, a filtragem anti-aliasing não produz nenhum efeito prejudicial sobre a informação contida no sinal. A tecnologia de CD's, em princípio, é capaz de realizar a reprodução de sons com "fidelidade" em relação ao som original.

Considere-se outra situação de processamento de sinais sonoros no cotidiano: agora, os sinais sonoros que serão transmitidos através de telefones celulares digitais. Neste caso, a amostragem é realizada a uma frequência pouco maior que 5 kHz. Isso significa que a frequência de Nyquist será de aproximadamente 2,5 kHz, ou seja, os telefones celulares não são capazes de transmitir sinais contendo frequências acima desse último valor. A filtragem anti-aliasing agora irá subtrair grande parte da faixa de frequências que podem ser reconhecidas pelo ouvido humano, de forma que o ouvinte, do outro lado da linha, irá receber um som que não corresponde exatamente a aquilo que ele ouviria se estivesse presente ao lado do falante. É de fato parte da experiência cotidiana saber que os sons transmitidos por telefones encontram-se bastante degradados em relação aos sons "naturais". É muito desagradável, por exemplo, tentar usufruir a execução de uma sinfonia através de um telefone.

No entanto, a faixa de frequências de até aproximadamente 2,5 kHz, transmitida pelo telefone, é suficiente para que o ouvinte reconheça a pessoa que está falando e consiga decodificar as frases que estão sendo pronunciadas. Ajustar a faixa de frequências do sistema de telefones para aproximadamente o mínimo necessário para que o telefone execute essas funções foi uma escolha de projeto. Tal escolha permite que um mesmo sistema acomode ligações de um maior número de usuários do que o que seria possível caso se optasse por maior fidelidade no som transmitido, já que cada usuário ocupa assim uma menor faixa do espectro de frequências disponível para comunicações via telefone celular.

O telefone celular digital tem de realizar então as seguintes operações após captar um som em seu microfone: (1) fazer uma filtragem anti-aliasing do som captado, e (2) amostrar esse som para, finalmente, (3) codificar o sinal e transmiti-lo no formato digital. Se não houvesse o filtro anti-aliasing, o sinal sonoro seria fortemente deformado pela ocorrência do "aliasing", o que iria prejudicar a inteligibilidade do som reproduzido no aparelho receptor.

Como nota final, deve-se mencionar que em muitas situações práticas de amostragem de sinais acústicos, o próprio microfone pode realizar a filtragem anti-aliasing. Isso ocorre porque o microfone possui uma característica de resposta em frequência que, dependendo de sua construção, se aproxima mais ou menos de um filtro passa-baixas. Dessa forma, se a frequência de Nyquist da amostragem em questão estiver acima da maior frequência que o microfone "deixa passar", não é necessária uma posterior filtragem anti-aliasing.

## 4.4 Janelamento

A próxima operação necessária para o tratamento de sinais empíricos é o *janelamento*. Essa operação pode ser entendida como a correspondente da operação concreta de: (i) ligar, num certo instante, o sistema que irá captar um sinal;

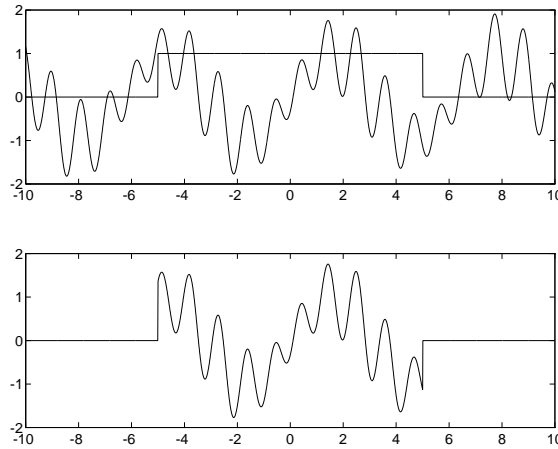


Figura 4.9: Operação de janelamento de um sinal. Em cima: o sinal original e a janela quadrada. Em baixo: a janela do sinal.

(ii) deixar esse sistema ligado durante um certo intervalo, no qual o sinal estará sendo gravado; e (iii) após terminado esse intervalo, desligar o sistema, parando assim de gravar o sinal.

Matematicamente, essa operação pode ser modelada como uma operação de multiplicação do sinal  $x(t)$  (que possui duração infinita) por um sinal do tipo *janela quadrada*,  $h(t, T)$ . O sinal resultante dessa multiplicação,  $x_q(t)$ , embora seja definido em todo tempo, só é diferente de zero no intervalo de tempo  $[-T, T]$ , durante o qual ele é igual ao sinal original, podendo, portanto, ser analisado a partir apenas da informação contida nesse intervalo de tempo<sup>7</sup>.

**Definição 4.3 (Janelamento)** *Seja um sinal  $x(t)$  arbitrário. Considere-se ainda o sinal janela quadrada  $h(t, T)$ , definido em (3.23). O janelamento do sinal  $x(t)$  pela janela  $h(t, T)$  é definido por:*

$$x_q(t) = x(t) \cdot h(t, T) \quad (4.11)$$

O sinal  $x_q(t)$  é denominado janela de  $x(t)$ . □

A figura 4.9 mostra a operação de janelamento de um sinal. A análise no domínio da frequência parte da relação:

$$X_q(\omega) = X(\omega) \otimes H(\omega, T) \quad (4.12)$$

<sup>7</sup>A informação de que o sinal é zero fora desse intervalo deve ser introduzida analiticamente no algoritmo de análise.

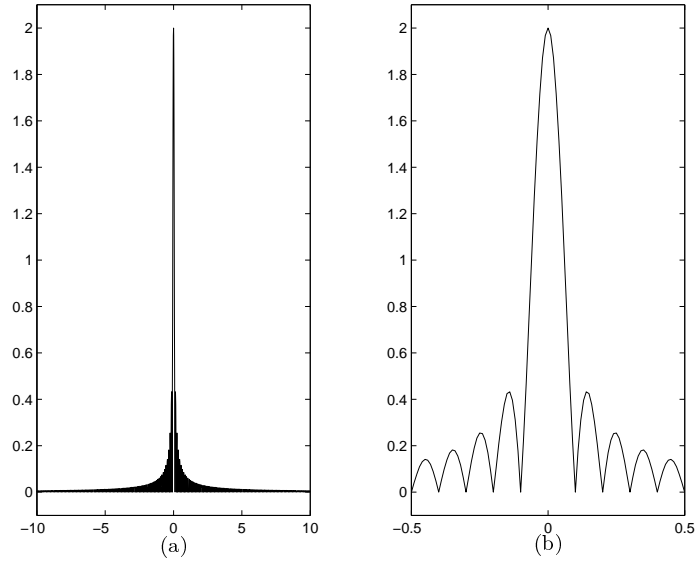


Figura 4.10: Função correspondente ao módulo da transformada de uma janela  $h(t, T)$  de longa duração  $T$ . Em (a), observa-se o sinal  $H(\omega, T)$  e, em (b), observa-se um “zoom” em torno de  $\omega = 0$ .

que é obtida via transformada de Fourier de (4.11). Inicialmente, deve-se observar que:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} H(\omega, T) = \delta(\omega) \quad (4.13)$$

$$\therefore \lim_{T \rightarrow \infty} X_q(\omega) = X(\omega)$$

Quando o valor de  $T$  é grande, porém finito, tem-se  $H(\omega, T)$  uma função sinc que:

- Atinge um valor elevado (igual a  $2T$ ) para  $\omega = 0$ ;
- Decresce rapidamente para  $\omega \neq 0$ .

Essas características são visualizadas na figura 4.10.

Para fazer a análise do efeito do janelamento, suponha-se inicialmente que o sinal a ser janelado,  $x(t)$ , seja periódico e tenha período  $T_x$ :

$$x(t + T_x) = x(t) \quad \forall t \quad (4.14)$$

Nesse caso, o espectro  $X(\omega)$  irá conter apenas frequências discretas, múltiplas da frequência fundamental  $\omega_x = \frac{2\pi}{T_x}$ :

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\delta(\omega - n\omega_x) + \delta(\omega + n\omega_x)) \quad (4.15)$$

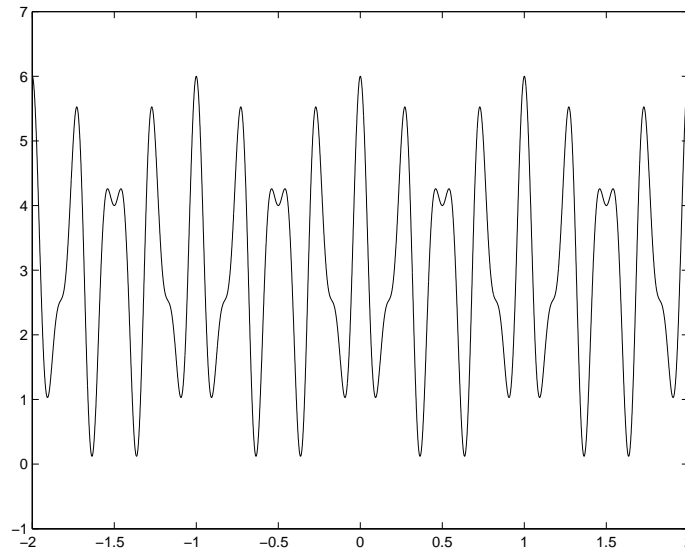


Figura 4.11: Sinal periódico, cujo janelamento será estudado nas próximas figuras.

Utilizando agora a propriedade **(P2)** do sinal impulso, sabe-se que o espectro do sinal janelado será constituído das “cópias” do espectro da janela sobre cada um dos impulsos que constituem  $X(\omega)$ :

$$X_q(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (H(\omega - n\omega_x) + \delta(\omega + n\omega_x)) \quad (4.16)$$

Essa operação é mostrada graficamente nas figuras 4.11 a 4.14.

O janelamento corresponde, portanto, à operação de substituir cada componente de frequências que compõe o sinal original por um conjunto de frequências descritas pela função  $H(\omega, T)$ . Fazendo uma analogia com processos fotográficos, pode-se dizer que o janelamento faz com que o gráfico de espectro de frequências seja “desfocado”. Dependendo da largura da janela (no tempo), o “desfocamento” é mais ou menos intenso. Esse efeito ocorre, da mesma forma, em sinais que possuem espectro contínuo (sinais não periódicos). A seqüência de figuras 4.15 a 4.17 mostra esse “desfocamento” num espectro contínuo.



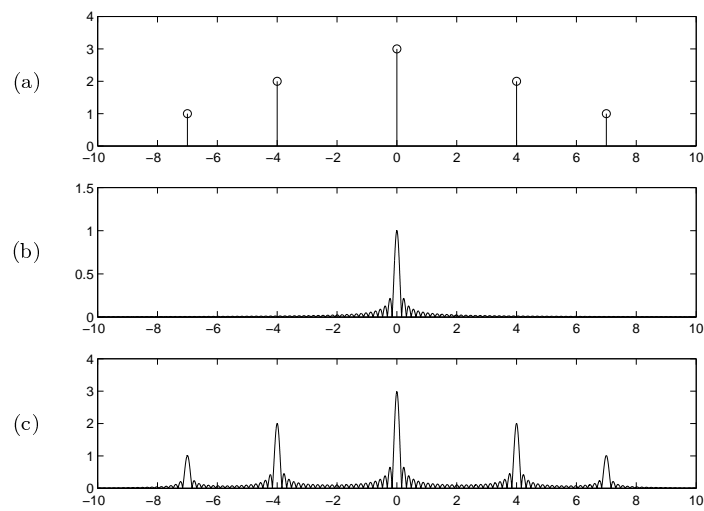


Figura 4.12: Efeito do janelamento do sinal mostrado na figura anterior, com uma janela “larga”: Em (a), está esboçado o módulo do espectro  $X(\omega)$  do sinal periódico. Em (b), encontra-se o módulo da transformada  $H(\omega, T)$  da janela. Em (c), observa-se que em cada frequência existente no gráfico (a) foi feita uma cópia do espectro cujo módulo está representado no gráfico (b), sendo o gráfico resultante correspondente ao módulo do espectro  $X_q(\omega)$  do sinal janelado.

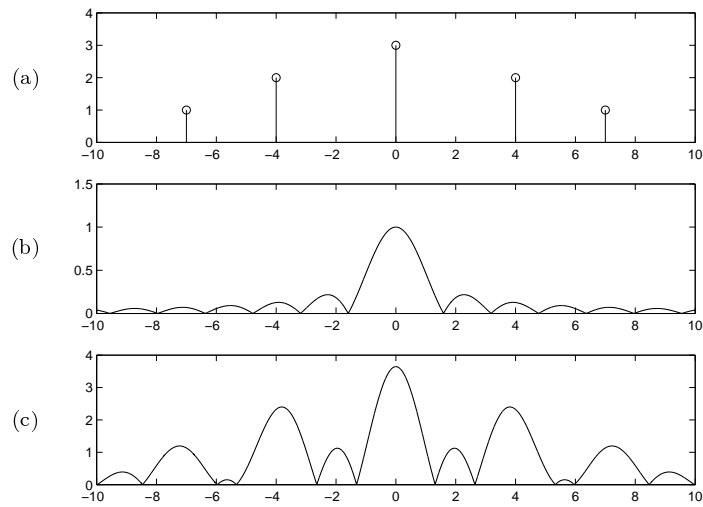


Figura 4.13: Efeito do janelamento do mesmo sinal anterior, com uma janela dez vezes mais estreita: Em (a), está esboçado o módulo do espectro  $X(\omega)$  do sinal periódico. Em (b), encontra-se o módulo da transformada  $H(\omega, T)$  da janela. Em (c), observa-se que em cada frequência existente no gráfico (a) foi feita uma cópia do espectro, cujo módulo está representado em (b), sendo o gráfico resultante correspondente ao módulo do espectro  $X_q(\omega)$  do sinal janelado. Neste caso, as cópias já começam a interferir umas com as outras, embora ainda seja possível identificar a localização do que seria cada “frequência original” no gráfico.

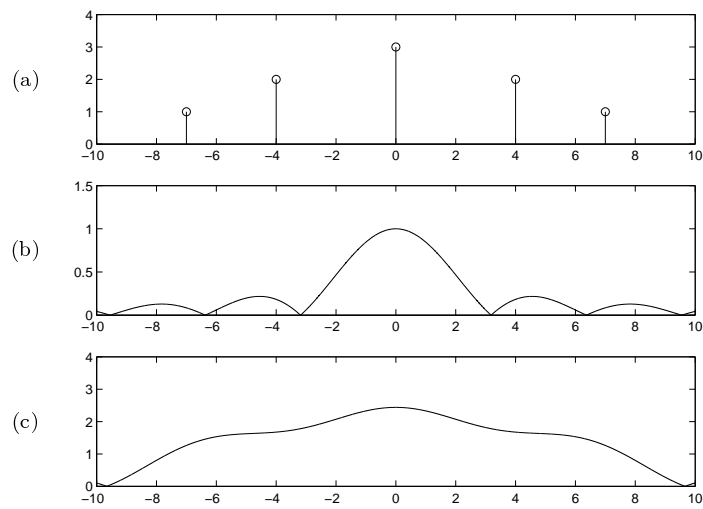


Figura 4.14: Efeito do janelamento do mesmo sinal anterior, com uma janela vinte vezes mais estreita que a primeira: Em (a), está esboçado o módulo do espectro  $X(\omega)$  do sinal periódico. Em (b), encontra-se o módulo da transformada  $H(\omega, T)$  da janela. Em (c), observa-se que, em cada frequência existente no gráfico (a), foi feita uma cópia do espectro, cujo módulo está representado em (b), sendo o gráfico resultante correspondente ao espectro  $X_q(\omega)$  do sinal janelado. Neste caso, houve superposição das cópias, e é difícil distinguir a localização das frequências presentes no sinal original.

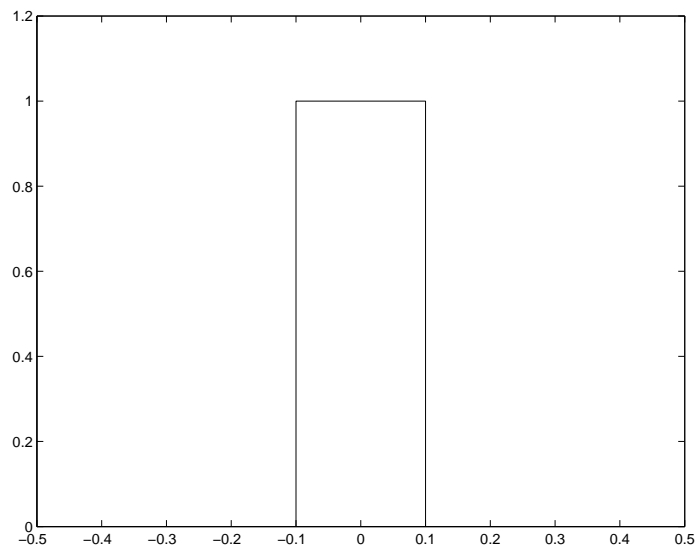


Figura 4.15: Espectro contínuo (módulo) de um sinal não-periódico que irá sofrer janelamento.

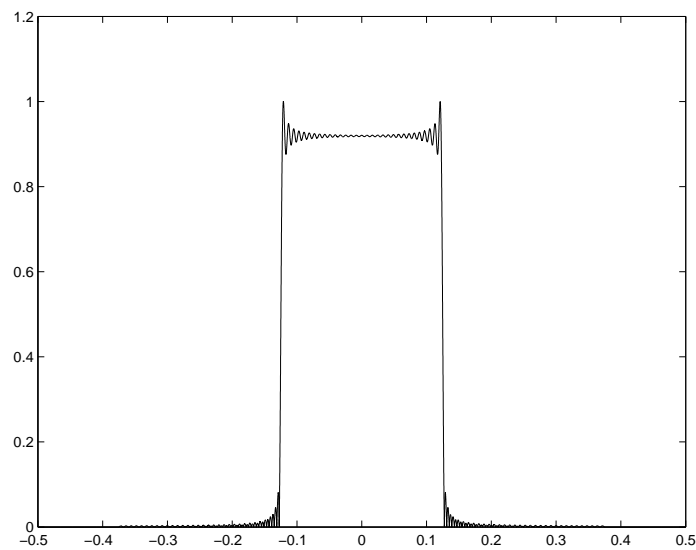


Figura 4.16: O sinal cujo espectro contínuo (módulo) é mostrado na figura anterior sofre janelamento por uma janela larga. Observa-se um “desfocamento” do espectro, com maiores efeitos junto às descontinuidades.

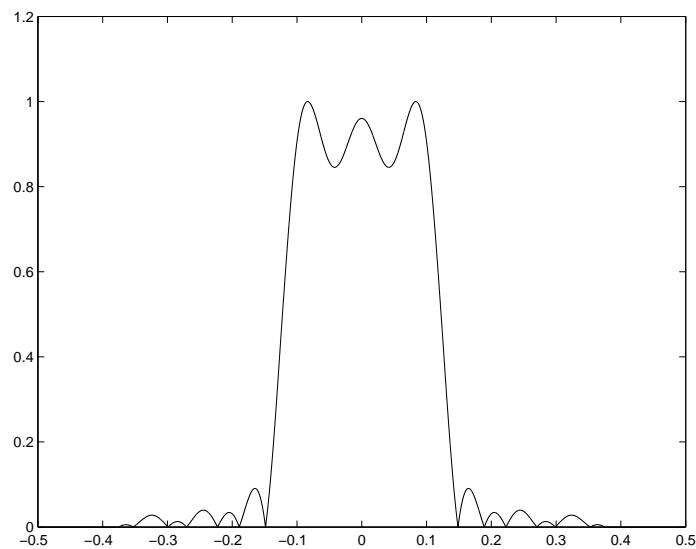


Figura 4.17: O mesmo sinal sofre janelamento por uma janela dez vezes mais estreita. O desfocamento é mais pronunciado, e se propaga a maiores distâncias das descontinuidades.

## 4.5 Periodificação

A última operação que se faz necessário aplicar num sinal antes de iniciar o cálculo de uma aproximação de sua transformada de Fourier será aqui denominada *periodificação*. A necessidade desta operação vem do fato de que um algoritmo só consegue calcular uma aproximação da transformada de Fourier de um sinal se, como resultado desse cálculo, ele tiver de fornecer um número finito de valores. Isso exclui o cálculo da transformada de Fourier de sinais aperiódicos genéricos, que em geral possuem espectro contínuo, assim como exclui o cálculo dessa transformada para sinais com freqüências ilimitadas. Será necessário então que o sinal a ser processado, além de ser limitado em freqüências (tenha todas as freqüências menores que um certo máximo finito), seja também periódico, isto é, contenha apenas um número finito de freqüências, harmonicamente relacionadas, dentro do intervalo<sup>8</sup>.

Para transformar um sinal que originalmente não é periódico num sinal periódico, realiza-se a repetição periódica desse sinal ao longo do eixo do tempo. Essa operação pode ser obtida por meio da convolução, no tempo, do sinal por um trem de impulsos com o período desejado.

**Definição 4.4 (Periodificação)** *Seja um sinal  $x(t)$ . A periodificação desse sinal para um período  $T_p$  é dada por:*

$$x_p(t) = x(t) \otimes d(t, T_p) \quad (4.17)$$

onde  $d(t, T_p)$  é um trem de impulsos com período  $T_p$ . □

As figuras 4.18 e 4.19 descrevem o processo de periodificação.

A situação agora é muito semelhante à que surge quando da amostragem. O sinal original deve ser limitado no tempo (na amostragem, era necessária a limitação em freqüências), de forma a que ele possa ser copiado sem sofrer deformação. É ainda necessário que a separação entre os impulsos do trem de impulsos seja suficiente para conter a parte não nula do sinal (analogamente, na amostragem tal separação deveria ser suficiente para conter a parte não nula do espectro de freqüências). No caso da amostragem, se o sinal tivesse um espectro de freqüências mais largo do que o que seria permitido pela freqüência empregada na amostragem, fazia-se necessária uma operação de filtragem anti-aliasing. Agora, no caso da periodificação, se o sinal tiver duração maior que o período a ser empregado na periodificação, deverá ser realizado um janelamento de forma a limitar sua duração.

A periodificação pode ser interpretada como uma “amostragem de freqüências”. Isso pode ser visto tirando-se a transformada de Fourier da equação (4.17):

$$X_p(\omega) = X(\omega) \cdot D(\omega, T_p) \quad (4.18)$$

---

<sup>8</sup>De fato, um sinal aperiódico pode também ser formado de modo a conter apenas um número finito de freqüências, desde que essas não sejam harmonicamente relacionadas. Esse caso não será abordado aqui, para não alongar a discussão, embora seja fácil para o leitor extrapolar, com base nos conceitos aqui apresentados, a análise de tal caso.

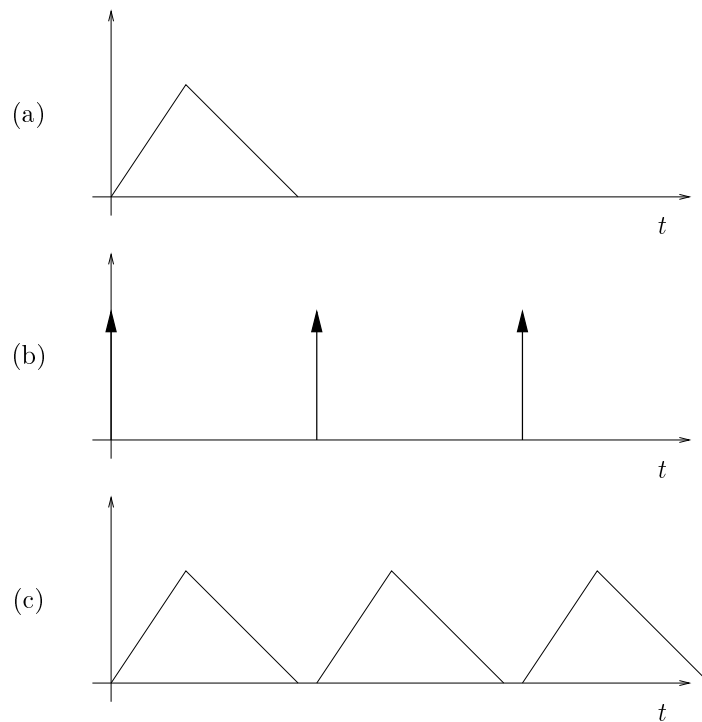


Figura 4.18: O sinal mostrado em (a) é periodificado através de uma convolução com o trem de impulsos mostrado em (b), resultando no sinal periódico mostrado em (c). No caso mostrado nesta figura, o sinal original possui duração menor que a do período do trem de impulsos, de forma que não ocorre superposição entre suas “cópias”.

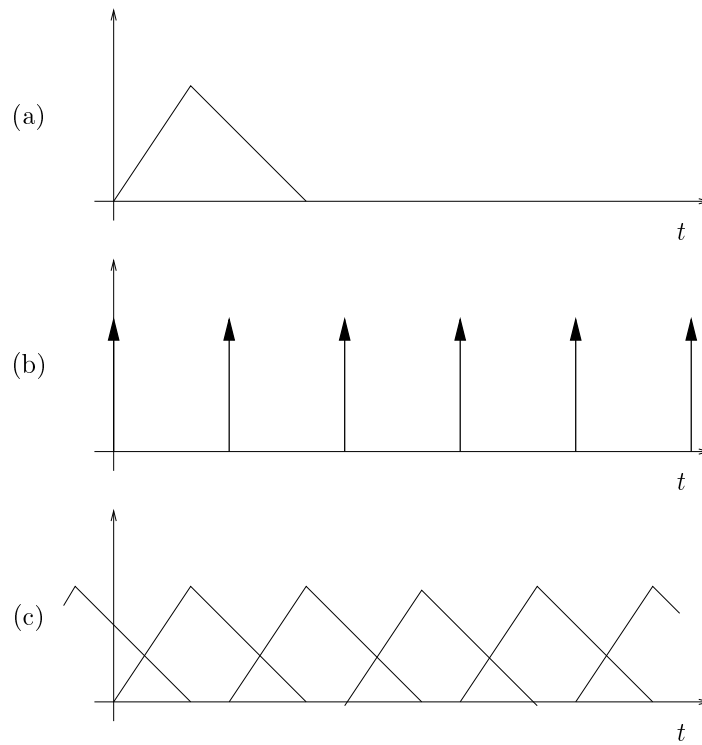


Figura 4.19: O sinal mostrado em (a) é periodificado através de uma convolução com o trem de impulsos mostrado em (b), resultando no sinal periódico mostrado em (c). Agora a duração do sinal original é maior do que o período do trem de impulsos. Ocorre a superposição entre as “cópias” sucessivas do sinal e este sofre deformação.

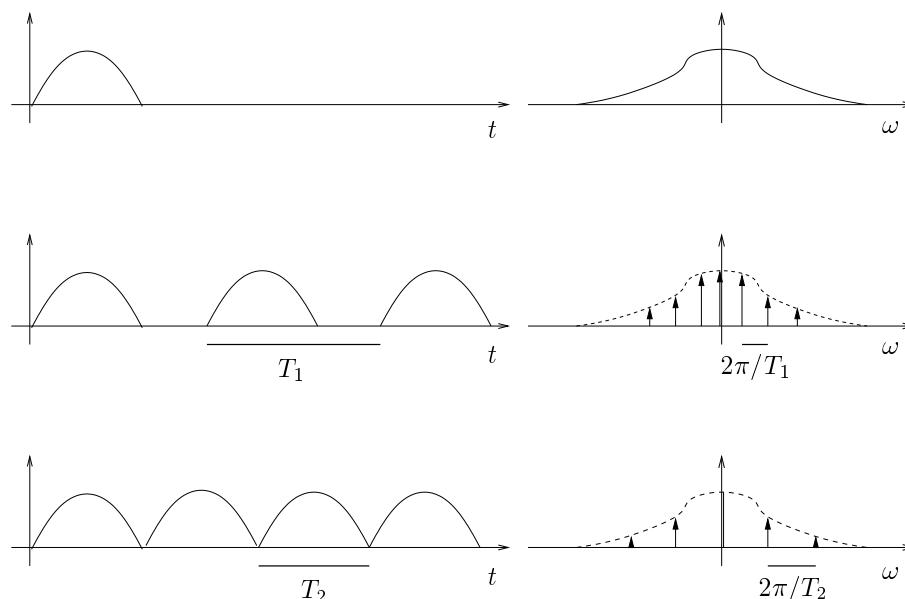


Figura 4.20: Interpretação da periodificação como uma amostragem do espectro de freqüências. Topo: sinal não periódico de duração limitada (esquerda) e seu espectro de freqüências em módulo (direita). Meio: sinal periodificado com período  $T_1$  (esquerda) e o espectro desse sinal, que corresponde a amostras do espectro original (direita). Baixo: sinal periodificado com período  $T_2 < T_1$ . Observa-se que as amostras do espectro, que são espaçadas de um intervalo de  $\frac{2\pi}{T}$ , se afastam umas das outras.

Claramente, o sinal  $X_p(\omega)$  retém apenas amostras de  $X(\omega)$ , separadas entre si de  $\frac{2\pi}{T_p}$ . A figura 4.20 mostra essa interpretação.

Por fim, é necessário comentar por quê a *periodificação* está associada a uma “limitação fundamental”, que se aplica a todo processamento de sinais empíricos. Na verdade, a limitação concreta que existe é a de que só é possível conhecer (para processar) um trecho de duração finita de sinais de duração infinita. Ou seja, necessariamente ocorre um *janelamento* do sinal.

Durante o processamento do sinal, entretanto, será necessário fazer suposições sobre o que ocorre com o sinal fora da janela de tempo considerada. Operações típicas de processamento de sinais, como a *filtragem digital* (não estudada neste texto) são realizadas, pelo menos formalmente, sobre sinais que se conhece desde o instante  $t = -\infty$  até o presente. Como proceder para realizar essa operação de filtragem digital sobre um sinal, que é conhecido apenas num intervalo de duração finita? Sem dúvida a resposta a essa pergunta envolve uma escolha por parte de quem vai realizar a análise, que deve levar em consideração os objetivos da mesma. Algumas escolhas razoáveis seriam: (1) Considerar o sinal como sendo zero para todo tempo anterior ao intervalo conhecido; (2) Con-



siderar o sinal como sendo constante e igual ao primeiro valor conhecido do mesmo até o instante correspondente a tal valor; (3) Considerar o sinal como se fosse periódico, repetindo infinitamente o padrão verificado durante o intervalo conhecido.

A *periodificação* do sinal corresponde a essa última escolha. No caso do cálculo específico de aproximações da transformada de Fourier, a única alternativa possível dentre as três acima é a da periodificação, uma vez que é a única que permite supor que o espectro que está sendo calculado é discreto, sendo composto, portanto, de um número finito de valores.

## Capítulo 5

# Análise Espectral de Sinais Empíricos

Já foi visto, nos capítulos anteriores, que é relevante descobrir como um sinal físico se decompõe em termos de componentes senoidais. O correspondente matemático para essa operação é definido como a *Transformada de Fourier*.

Em se tratando de sinais empíricos, no entanto, não se dispõe de sua fórmula analítica, que permitiria o cálculo analítico de sua *transformada de Fourier*. É preciso então buscar, em lugar da transformada exata, uma aproximação para a mesma, que seja possível de calcular a partir de um conjunto de valores medidos desse sinal. O problema básico a ser tratado neste texto é definido a seguir como o *problema de cálculo empírico da transformada de Fourier*.

**Problema 1 (Cálculo Empírico da Transformada de Fourier)** *Seja dado um conjunto de medições realizadas empiricamente de determinado sinal físico  $x(t)$ ; deseja-se, a partir do conhecimento somente dessas medições, calcular uma aproximação da transformada de Fourier,  $\mathcal{F}(x)$ , desse sinal.*  $\square$

O propósito deste capítulo é o de mostrar como é possível obter tal transformação aproximada, quais são as condições sob as quais esta efetivamente aproxima a transformação exata, e quais são os limites da possibilidade de se fazer tal aproximação. Para estabelecer a natureza da aproximação, são empregadas as quatro operações definidas no capítulo anterior: amostragem, filtragem anti-aliasing, janelamento e periodificação. A análise espectral dos sinais empíricos é finalmente definida a partir de uma operação exata, a *Transformada Discreta de Fourier* (TDF), aplicada sobre um sinal, que foi previamente submetido a essas quatro operações.

### 5.1 Transformada Discreta de Fourier

O núcleo da solução do problema proposto é a especificação de um algoritmo de cálculo de transformada de Fourier *que pode ser construído*. Deve-se notar que

é possível construir um algoritmo que seja capaz de realizar o cálculo *exato* da transformada de Fourier de sinais, perfazendo um número *finito* de operações aritméticas, desde que os sinais em questão atendam a alguns requisitos:

**(R1)** O sinal  $x(t)$  deve ser periódico:

$$x(t) = x(t + \tau) \quad \forall t \quad (5.1)$$

**(R2)** O sinal deve ser amostrado com um período de amostragem  $T$ , que deve ser submúltiplo do período  $\tau$  do sinal:

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x(t) \cdot d(t, T) \\ T &= \frac{\tau}{N} \end{aligned} \quad (5.2)$$

**(R3)** A frequência de amostragem,  $\omega_s$ , deve ser maior que o dobro da maior frequência contida no sinal  $x(t)$ ;

**(R4)** Devem estar disponíveis  $N$  amostras do sinal.

Parte-se portanto de um sinal que é caracterizado por uma seqüência de  $N$  pontos<sup>1</sup> conhecidos (medidos):

$$x[k] = x(t_o + kT) \quad k = 0, \dots, N - 1 \quad (5.3)$$

Os valores  $x[k]$  correspondem aos valores do sinal contínuo  $x(t)$  nos instantes correspondentes à amostragem, e fisicamente correspondem aos valores obtidos na saída do conversor A/D descrito no capítulo anterior, na seção que trata da amostragem de sinais. Esses pontos  $x[k]$  compõem uma tabela com  $N$  valores que podem ser armazenados na memória do computador. Observe-se que a seqüência numérica  $x[k]$  assim definida para todo  $k$  é uma seqüência periódica, com período  $N$ .

Claramente, se se conhece um conjunto de pontos que representa os valores das amostras, cobrindo um período inteiro, de um sinal que é periódico e que é amostrado (ou seja, que é zero nos pontos diferentes daqueles amostrados), deve ser possível calcular de maneira exata a transformada de Fourier desse sinal; pois esses pontos contêm toda a informação necessária para se descrever completamente o sinal. O cálculo dessa transformada poderá ser realizado através de um número finito de operações de soma e de multiplicação de números complexos. Essa operação exata, denominada *Transformada Discreta de Fourier*<sup>2</sup> (TDF), é definida a seguir, inicialmente como uma operação sobre a seqüência discreta. Depois, será mostrado que o resultado da TDF coincide com a transformada de Fourier do sinal.

<sup>1</sup>Séries numéricas serão indexadas aqui utilizando colchetes,  $[\cdot]$ , para que a notação fique distinta da de funções e distribuições, cuja variável se encontra entre parêntesis,  $(\cdot)$ .

<sup>2</sup>Em inglês: *Discrete Fourier Transform*, ou *DFT*.

**Definição 5.1 (Transformada Discreta de Fourier)** *Seja  $x[k]$  uma seqüência discreta periódica com período  $N$ . A Transformada Discreta de Fourier de  $x[k]$  é dada por:*

$$X[\kappa] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i\kappa \frac{2\pi n}{N}} \quad (5.4)$$

□

Como no caso da transformada de Fourier, é válida a relação:

$$x[n] = \sum_{\kappa=0}^{N-1} X[\kappa] e^{i\kappa \frac{2\pi n}{N}} \quad (5.5)$$

A TDF de  $x[k]$ , assim definida, encontra-se relacionada com a transformada de Fourier do sinal  $x(t)$  do qual foram obtidas as amostras da seguinte forma:

- A freqüência fundamental do sinal  $x(t)$  é igual a  $\omega_o = \frac{2\pi}{\tau}$ ;
- O sinal  $x(t)$  pode conter apenas as freqüências da forma  $\omega_k = \kappa\omega_o$ , com  $\kappa$  inteiro, pois estas freqüências são as múltiplas da sua freqüência fundamental;
- A máxima freqüência que pode estar presente no sinal  $x(t)$  é igual à metade da freqüência de amostragem:  $\omega_m = \frac{\pi}{T}$ ;
- Como  $\tau = NT$ , tem-se:  $\omega_m = \frac{N}{2}\omega_o$ ;
- O sinal  $x(t)$  possui então  $\frac{N}{2}$  possíveis senóides, com freqüências igualmente espaçadas, de zero até  $\omega_m$ , com intervalo  $\omega_o$ ;
- Como o sinal  $x(t)$  é amostrado, gerando  $x_s(t)$ , o espectro deste é periódico no eixo de freqüências, de forma que tudo que ocorrer para as freqüências 0 a  $\omega_m$  se repete de  $\omega_m + \omega_o$  a  $2\omega_m$ ;
- Os  $N$  valores (complexos) de  $X[\kappa]$  obtidos com a DFT correspondem aos valores (módulo e fase) dessas  $N$  senóides com freqüências 0 a  $2\omega_m$ .

Conclui-se que a seqüência  $X[\kappa]$  corresponde aos coeficientes de Fourier do sinal amostrado  $x_s(t)$ . Note-se, entretanto, que se se fosse calcular a transformada de Fourier do sinal contínuo  $x(t)$ , esta seria simplesmente igual ao espectro de  $x_s(t)$  no intervalo de freqüências de zero a  $\omega_m$ , e igual a zero no restante do eixo positivo de freqüências. Dessa forma, a TDF pode ser interpretada como um mecanismo para o cálculo exato da transformada de Fourier de sinais  $x(t)$  que atendam aos requisitos (R1) a (R4) acima.

## 5.2 Adaptando Sinais Empíricos à TDF

Um sinal físico  $x(t)$ , em geral, não atenderá a nenhum dos requisitos (R1) a (R4), que garantiriam a possibilidade de se utilizar a TDF para o cálculo exato de sua transformada de Fourier. Faz-se então necessário pré-processar esse sinal, de forma a se encontrar outro sinal  $\bar{x}(t)$ , que possa ser processado pela TDF. A transformada de Fourier desse novo sinal, calculada através da TDF, será a aproximação da transformada de Fourier de  $x(t)$ . Esse pré-processamento será feito utilizando as operações de amostragem, filtragem anti-aliasing, janelamento e periodificação.

Para formar um panorama completo dos fenômenos envolvidos nesse processamento, são analisadas a seguir situações de crescente complexidade. A priori, pode-se admitir que o sinal sofre inicialmente a operação de *filtragem anti-aliasing*. Com isso, o sinal poderá sempre ser amostrado, e não será necessária preocupação ulterior com o fenômeno do aliasing causado por sub-amostragem ou por não-limitação das frequências contidas no sinal. Esta operação não interage com as demais operações e não será mais citada ao longo das próximas seções.

### 5.2.1 Sinais senoidais de período arbitrário

O primeiro processo a ser estudado envolverá apenas uma senóide pura. Suponha-se inicialmente que os requisitos (R1), (R3) e (R4) estejam satisfeitos, mas que (R2) falhe, isto é, a frequência de amostragem não é múltipla da frequência do sinal  $x(t)$ . Esta é a situação mais próxima que se consegue atingir das condições ideais de aplicação da TDF, na prática, pois a frequência de amostragem utilizada nos sistemas de medição digital de sinais é um parâmetro prefixado, que normalmente não pode ser ajustado para se adequar à frequência do sinal que está sendo medido, mesmo que este seja periódico.

A situação é ilustrada na figura 5.1. Suponha-se o sinal original  $x(t)$  com período  $\tau_x$ . Pode-se pensar a operação de obtenção do sinal processado para aplicação da TDF como:

- (1) O sinal é janelado (figura 5.1-a,b) pela janela  $h(t, \tau)$  de largura  $\tau$ :

$$x_q(t) = x(t) \cdot q(t, \tau) \quad (5.6)$$

- (2) O sinal obtido com o janelamento é periodificado, de forma que o sinal periódico resultante possui período  $\tau$ , igual à duração da janela utilizada (figura 5.1-c):

$$x_p(t) = x_q(t) \otimes d(t, \tau) \quad (5.7)$$

Os espectros correspondentes aos sinais da figura 5.1 são mostrados na figura 5.2. As operações (1) e (2) podem ser interpretadas na frequência da seguinte forma:

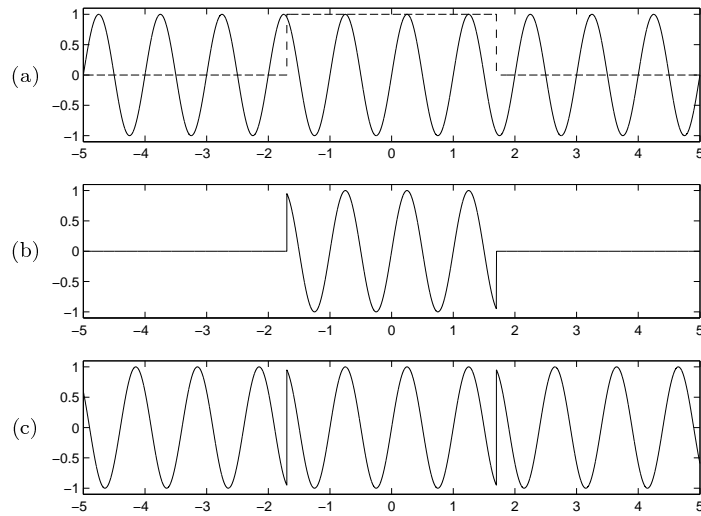


Figura 5.1: Em (a), é mostrado um sinal senoidal superposto à janela em que o mesmo será medido. Em (b), é mostrado o sinal após o janelamento. Em (c), é mostrado o sinal após a periodificação.

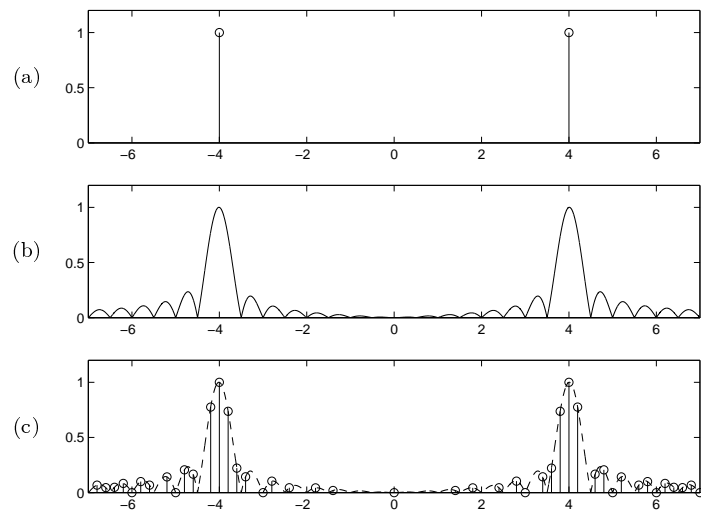


Figura 5.2: Esta figura mostra os espectros (módulo) dos sinais da figura anterior. Em (a), é mostrado o espectro do sinal senoidal, composto de dois impulsos localizados na frequência da senóide. Em (b), é mostrado o espectro após o janelamento do sinal: o espectro da janela foi copiado sobre os impulsos que representavam a senóide. Em (c), é mostrado o espectro após a periodificação, que agora torna-se um espectro discreto (composto de pontos discretos, ou amostras).

- (1') Havia apenas uma frequência discreta  $\omega_o = \frac{2\pi}{\tau_x}$ , no caso da figura 5.2, correspondente à única senóide presente no sinal senoidal. Essa senóide aparece no gráfico do espectro como dois impulsos localizados em  $\omega_o$  e  $-\omega_o$ . Ao ser feito o janelamento dessa senóide, o espectro discreto do sinal é substituído pelo espectro contínuo associado à janela, que tem o formato de funções sinc, e que é “copiado” sobre a localização dos impulsos que representavam a única frequência anteriormente existente:

$$X_q(\omega) = X(\omega) \otimes H(\omega, \tau) \quad (5.8)$$

- (2') Ao ser feita a periodificação do sinal janelado, seu espectro é amostrado, sendo o intervalo entre as frequências que surgem igual à frequência fundamental do sinal assim originado, que fica  $\omega_q = \frac{2\pi}{\tau}$ :

$$X_p(\omega) = X_q(\omega) \cdot d(\omega, \omega_q) \quad (5.9)$$

Prosseguindo na modelagem do sinal processado:

- (3) Uma vez o sinal tendo sido janelado e periodificado, ele é amostrado, com o período de amostragem  $T$  igual a um submúltiplo da duração  $\tau$  da janela:

$$\bar{x}(t) = x_p(t) \cdot d(t, T) \quad (5.10)$$

$$\tau = NT$$

Essa operação está mostrada na figura 5.3-a.

Na frequência, a interpretação fica:

- (3') O espectro de frequências  $\bar{X}(\omega)$ , do sinal  $\bar{x}(t)$ , é obtido fazendo-se as “cópias” do espectro  $X_q(\omega)$  do sinal janelado  $x_q(t)$  sobre as posições dos impulsos no trem de impulsos  $D(\omega, T)$ . Devido à relação inteira entre  $T$  e  $\tau$ , as posições das frequências em que ocorrerão as cópias também guardarão a mesma relação com a frequência de amostragem, ou seja,  $N\omega_q = \omega_c$ . A operação fica:

$$\bar{X}(\omega) = X_p(\omega) \otimes d(\omega, \omega_c) \quad (5.11)$$

Na figura 5.3-b,c encontra-se mostrada essa operação.

Isso completa a explicação sobre como o espectro do sinal original  $x(t)$  é modificado, quando este é transformado no sinal  $\bar{x}(t)$ . Este último sinal agora atende a todos os requisitos (R1)-(R4) necessários para a aplicação do algoritmo de TDF. Os  $N$  pontos que compõem um período de  $\bar{x}(t)$  são então a entrada do algoritmo de TDF, que fornece um cálculo exato dos valores discretos que compõem o espectro  $\bar{X}(\omega)$ . Isso quer dizer que, partindo-se do sinal  $x(t)$ , mostrado na figura 5.1-a, obtém-se finalmente o espectro  $\bar{X}(\omega)$  mostrado na figura 5.3-c. Esse espectro, por sua vez, é uma estimativa (ou seja, uma aproximação) do espectro exato do sinal  $x(t)$ , que é mostrado na figura 5.2-a.

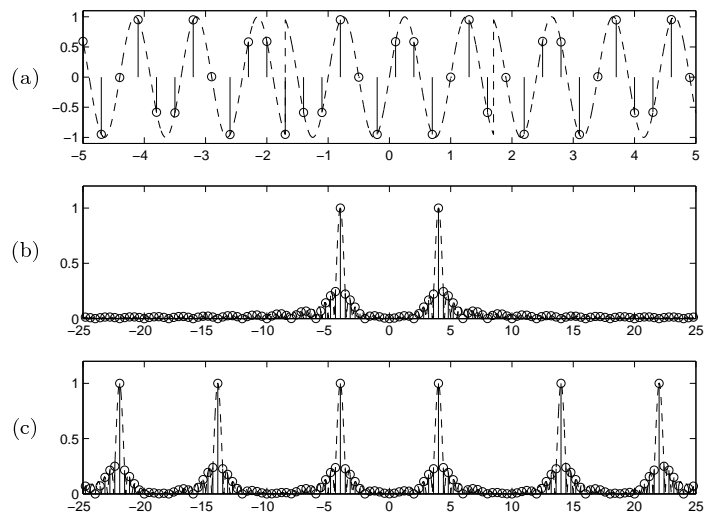


Figura 5.3: O sinal da figura anterior, após ter sido janelado e periodificado, agora é amostrado. Sua representação no tempo é mostrada em (a). Em (b), está mostrado o espectro (módulo) do sinal janelado e periodificado, antes de ser amostrado. Em (c), está mostrado o espectro (módulo) do sinal após a amostragem. A amostragem corresponde à operação de “copiar” o espectro mostrado em (b), sobre as frequências múltiplas de  $\omega_c$ .



Deve-se chamar a atenção para o fato de que, embora a explicação tenha sido conduzida aqui *como se* o sinal sofresse uma série de operações realizadas em seqüência, isto é, como se ele primeiro fosse janelado, depois periodificado e finalmente amostrado; o que ocorre, de fato, é a realização simultânea das três operações. Ao ser medido durante um intervalo de tempo  $\tau$ , o sinal já está sendo amostrado com intervalo de amostragem  $T$ . O intervalo  $\tau$  é necessariamente múltiplo de  $T$  simplesmente porque o janelamento não é mais que o fato de se tomar um certo número de amostras do sinal (ou seja,  $\tau$  é construído como múltiplo de  $T$ ). E, por fim, a periodificação fica implícita no fato de que, quando se aplicam os  $N$  pontos, obtidos na amostragem, no algoritmo de TDF, este já considerou, em sua construção, que sua entrada corresponde a um período de uma seqüência periódica, ou seja, a periodificação não chegou a ser explicitamente executada em momento algum.

Uma nota adicional deve ser apresentada para o leitor atento, que terá notado que a operação de janelamento introduz freqüências não limitadas no espectro de um sinal, mesmo que seu espectro original seja limitado. Isso significa que, se o sinal janelado for amostrado sem ser previamente filtrado por um filtro anti-aliasing, essas freqüências ilimitadas provocarão o aparecimento de aliasing. Pela explicação do parágrafo anterior, no entanto, a amostragem e o janelamento ocorrem simultaneamente, de forma que não é possível primeiro janelar o sinal para depois filtrá-lo com um filtro anti-aliasing e somente então amostrá-lo. Isso significa que necessariamente ocorre em alguma proporção um fenômeno de aliasing dentro da operação de pré-processamento do sinal para aplicação da TDF. Esse erro pode ser minorado, com a escolha de janelas largas, que diminuem a proporção de freqüências que estão distantes da freqüência central no espectro da janela; mas não pode ser eliminado por completo<sup>3</sup>.

### Melhorando a aproximação

A questão colocada a seguir é: dado que será feita a tentativa de se aproximar o espectro de uma senóide através do algoritmo de TDF, que graus de liberdade existem para melhorar a qualidade da aproximação?

Em princípio, como já foi dito, o período de amostragem é fixado pelo aparato de medição disponível, de forma que não será usualmente possível alterar esse parâmetro. Mesmo que não houvesse tal restrição, esse parâmetro ainda assim não poderia ser previamente alterado para que a janela de amostragem coincidisse com o período do sinal amostrado, uma vez que a freqüência do sinal a ser amostrado é justamente uma das variáveis que se pretende estimar. Resta, portanto, como variável livre, apenas a largura da janela. Na figura 5.4 é mostrado o efeito da variação do tamanho da janela sobre a estimativa do espectro de uma senóide.

Como seria de se esperar, a utilização de janelas mais largas produz estimativas mais “focalizadas”. À medida em que a janela diminui, a estimativa da loca-

---

<sup>3</sup>Existe, na realidade, outro expediente que pode ser adotado em relação a esse problema: é possível utilizar janelas não-quadradas, com formato escolhido de maneira adequada, tais como as “janelas de Hamming”, ou outras. Esse tópico não será abordado neste texto.

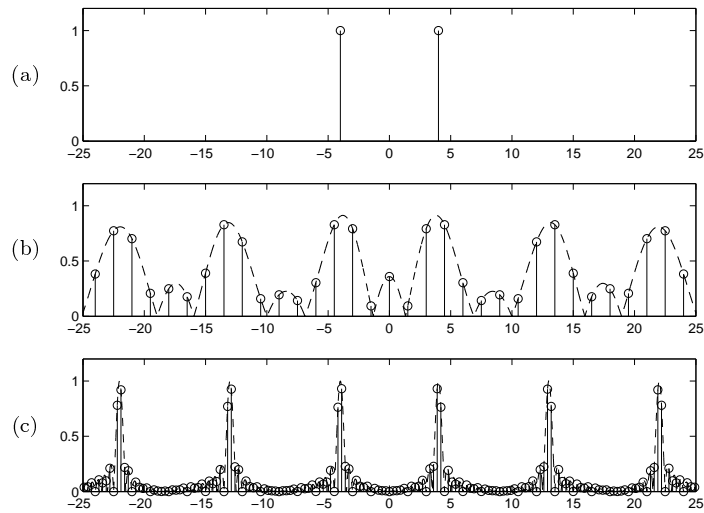


Figura 5.4: Em (a), é mostrado o espectro (módulo) de uma senóide. Em (b), é mostrada a estimativa desse espectro produzida com uma determinada largura de janela. Em (c), é mostrada a estimativa do mesmo espectro, produzida com uma janela agora 10 vezes mais larga que a utilizada em (b). Em (b) e (c), foram utilizadas freqüências de amostragem iguais.

lização da freqüência da senóide vai ficando “difusa”. Nos dois casos mostrados na figura 5.4, é possível estimar a localização da freqüência da senóide, embora em nenhum dos dois a freqüência exata esteja sequer presente no espectro estimado. O indicador do local onde se encontra tal freqüência deve ser não o valor máximo de amplitude de uma freqüência encontrado no gráfico de  $\tilde{X}(\omega)$ , e sim a localização do pico da função “sinc” que se pode aproximadamente interpolar com os pontos encontrados.

Deve ficar claro que janelas muito pequenas iriam impedir a estimativa da freqüência da senóide, uma vez que a superposição das funções sinc iria ocorrer em grande escala.

### O caso exato

É necessário ainda analisar a situação em que, por acaso, o período da senóide ocorre de modo a coincidir exatamente com a duração da janela de amostragem. Embora isso não ocorra na prática, cabe perguntar: por quê, nesse caso, a TDF forneceria o espectro *exato* do sinal original?

Esse fato curioso decorre da estrutura da função sinc. Reescreve-se a fórmula do espectro da janela de duração  $\tau$ , que foi apresentada no capítulo 3, para conveniência do leitor:

$$H(\omega) = \frac{2 \operatorname{sen}(\tau\omega)}{\omega} \quad (5.12)$$

Deve-se observar que essa função é igual a zero para todo  $\omega$  da forma  $\omega = \frac{k\pi}{\tau}$  com  $k \neq 0$ . Se o período da senóide é  $\tau$ , sua frequência é  $\omega_o = \frac{2\pi}{\tau}$ . O espectro da senóide, após um janelamento feito com tal janela, ficará igual à superposição de duas funções do tipo (5.12), “copiadas” ao redor das frequências  $\omega_o$  e  $-\omega_o$ :

$$X_q(\omega) = \frac{2 \operatorname{sen}(\tau(\omega - \omega_o))}{\omega - \omega_o} + \frac{2 \operatorname{sen}(\tau(\omega + \omega_o))}{\omega + \omega_o} \quad (5.13)$$

A observação-chave agora é que: a periodificação do sinal janelado faz com que o espectro assim obtido seja constituído das amostras de  $X_q(\omega)$  tomadas exatamente nos pontos que têm a forma  $\omega = \frac{k\pi}{\tau}$ , ou seja, a de múltiplos do inverso da duração da janela. Exceto nos exatos valores  $\omega_o$  e  $-\omega_o$ , em todos os demais pontos o espectro  $X_q(\omega)$  será nulo.

Deve-se apontar que essa análise poderia ainda ser reduzida ao fato de que a senóide, sendo janelada em uma janela de duração igual ao seu período e depois periodificada, retorna à sua forma original.

### 5.2.2 Sinais periódicos de período arbitrário

Na subseção anterior, foi mostrada qual é a estimativa que a aplicação da TDF produz do espectro de uma única senóide. Usando agora um argumento de linearidade, conclui-se imediatamente que no caso de sinais periódicos quaisquer, basta somar as estimativas de cada uma das componentes do espectro desse sinal, assim obtendo a estimativa de todo o espectro.

A única questão que se acrescenta em relação ao caso anterior é a possibilidade de ocorrerem interferências entre estimativas de frequências vizinhas no espectro do sinal. Essa questão é ilustrada na figura 5.5.

### 5.2.3 Sinais aperiódicos de duração finita

No caso de sinais aperiódicos que têm a particularidade de terem duração finita, a aproximação que a TDF fornece para seus espectros é analisada de outra forma.

Pensando numa situação prática em que o sinal é medido por um sistema digital, é possível conceber que a medição se inicia antes do início do sinal e só termina após sua cessação. Dessa forma, desprezando os zeros medidos antes e após o sinal, pode-se considerar que o sinal é janelado num intervalo de tempo precisamente igual a sua duração<sup>4</sup>.

O sinal, portanto, não necessita de janelamento (ou, visto de outra forma, o seu janelamento não causa alteração de seu espectro). Periodificando o sinal  $x(t)$ , de duração  $\tau$ , para que se tenha um sinal periódico com período  $\tau$ , obtém-se:

$$x_p(t) = x(t) \otimes d(t, \tau) \quad (5.14)$$

<sup>4</sup>Não será considerado aqui o erro que pode ser causado se a duração do sinal não for múltipla do período de amostragem. Esse erro será pequeno se a duração do sinal for muito maior que o período de amostragem. O leitor curioso não terá dificuldade para deduzir a quantificação desse efeito.

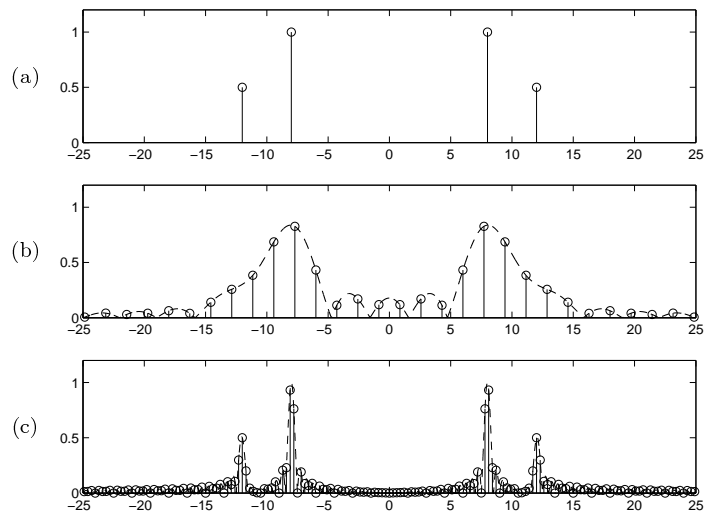


Figura 5.5: Em (a), está mostrado o espectro (módulo) de um sinal periódico que contém duas senóides. Em (b), está mostrada a tentativa de estimar o espectro desse sinal com determinada janela. Pode-se observar que, embora a janela possivelmente fosse suficiente para estimar a frequência de uma única senóide, a estimativa simultânea das duas senóides fica prejudicada pela interferência entre ambas. Em (c), está mostrada a estimativa feita agora com uma janela aproximadamente seis vezes maior. Neste último caso, a estimativa pode ser adequadamente extraída da aplicação da TDF.

que, na frequência, conduz a:

$$\begin{aligned} X_p(\omega) &= X(\omega) \cdot d(\omega, \omega_p) \\ \omega_p &= \frac{2\pi}{\tau} \end{aligned} \tag{5.15}$$

Essa última expressão revela que o espectro  $X_p(\omega)$  obtido é um conjunto de amostras do espectro contínuo  $X(\omega)$  que se deseja estimar. A amostragem de  $x_p(t)$  irá apenas, em princípio, produzir “cópias” do espectro  $X_p(\omega)$  que, se não estivessem sujeitas a aliasing, iriam ser preservadas intactas. O único senão desse raciocínio é que, se um sinal é de duração finita, seu espectro não pode ser limitado em frequências, de forma que algum erro devido ao aliasing deverá necessariamente ocorrer.

### Melhorando a aproximação

É possível melhorar a estimativa do espectro do sinal de duração finita pela simples observação de que é possível aumentar a janela nele aplicada através da inclusão dos “zeros”, após o término do sinal; note-se que esses zeros de fato fazem parte do sinal. Dessa forma, obtém-se um valor menor para a constante  $\frac{2\pi}{\tau}$ , que separa as amostras do espectro obtidas através da TDF.

### 5.2.4 Sinais aperiódicos arbitrários

Por fim, há o caso geral a tratar: o sinal  $x(t)$  não é periódico nem possui duração finita. Nesse caso, a situação admite um leque por demais amplo de possibilidades distintas, para que se possam estabelecer premissas que viabilizem uma análise genérica significativa. Tais premissas têm de vir agora do contexto específico com o qual se está tratando. O tratamento de um caso assim será então conduzido no próximo capítulo, retomando a situação-exemplo com que este texto iniciou o capítulo 1: o processamento de sinais acústicos da fala.

## Capítulo 6

# Análise Espectral de Sinais Acústicos

Neste capítulo é retomado o problema da análise espectral de sinais acústicos da fala, que foi apresentado no capítulo 1. Esse é um problema de análise espectral de um sinal de tipo bastante geral: aperiódico, de duração desconhecida (possivelmente ilimitada). Com este problema, é concluída a apresentação da Transformada Discreta de Fourier.

### 6.1 Delimitação do Problema

Preliminarmente, é necessário especificar o processo que está sendo designando por análise espectral de um sinal acústico. Faz sentido, por exemplo, calcular a transformada de Fourier de uma hora de gravação da fala de uma pessoa? Caso o propósito do cálculo da transformada seja o de determinar uma informação relacionada com os sons que o ouvido humano identifica ao receber o sinal acústico, certamente essa transformada de uma hora de sinal terá pouca utilidade.

Retomando o modelo apresentado no capítulo 1, sabe-se que o ouvido humano capta a estrutura dos sons que recebe, através de um mecanismo, segundo o qual, determinado som constituído de senóides de frequências diversas irá provocar “ressonâncias” em diferentes pontos do canal auditivo, pontos esses associados às frequências do sinal. O ouvido, portanto, faz uma análise espectral do sinal que capta *num determinado instante*, decompondo esse sinal a fim de interpretá-lo. No instante seguinte, outra análise espectral estará sendo conduzida, para que o ouvido continue a analisar novos os sons que recebe a cada momento. Mas como é possível uma “transformada de Fourier” de um sinal variar de instante para instante?

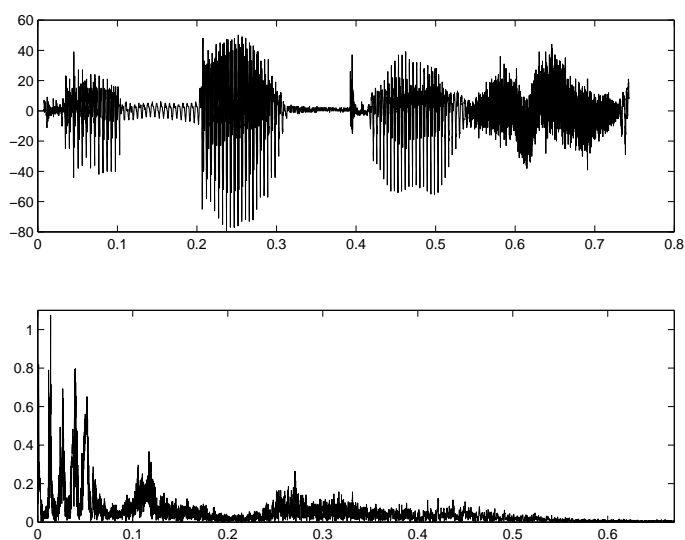


Figura 6.1: No topo da figura é mostrado o gráfico do sinal sonoro que corresponde à palavra [abacaxi] sendo pronunciada. Em baixo, está mostrado o gráfico do módulo da TDF do sinal (na realidade, está mostrado apenas o trecho até a metade do espectro fornecido pela TDF, uma vez que a outra metade é uma repetição desta). As senóides identificadas nesse espectro não possuem qualquer significado sob o ponto de vista de percepção auditiva.

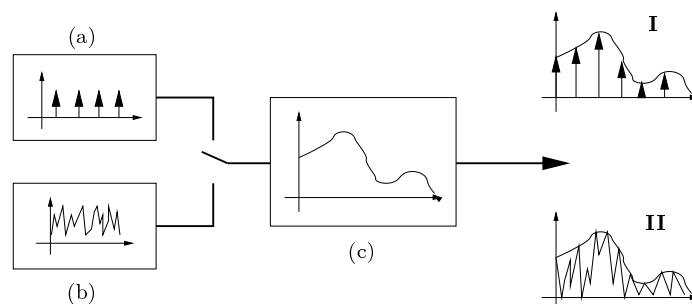


Figura 6.2: O diagrama da figura é um modelo do processo de produção da fala. Os blocos (a) e (b) representam as duas fontes possíveis de excitação para os sinais da fala: o sinal do tipo “trem de impulsos”, oriundo das cordas vocais, e o sinal do tipo “ruído uniforme”, produzido sem a utilização das cordas vocais, pelo mecanismo de se forçar o ar através de passagens estreitas (como na pronúncia da letra [s], por exemplo). O bloco (c) corresponde ao trato vocal, ou seja, a toda a passagem através da qual o ar é forçado após sair da fonte de excitação. O falante, ao articular a fala, posiciona o trato vocal de maneira que este tenha uma resposta em frequência correspondente ao som que se deseja emitir. O sinal da fonte de excitação, ao passar pelo trato vocal, passa a ter seu espectro essencialmente determinado pela resposta em frequência que tiver sido imposta. Assim, o som transporta palavras essencialmente transportando seqüências de “espectros” correspondentes à seqüência com que o trato vocal foi articulado. Em (I) e (II), estão mostrados dois sinais que “carregam” a mesma resposta em frequência a partir de excitações diferentes. O leitor pode tentar produzir esses dois sinais, primeiro pronunciando a vogal [a], a seguir “cochichando” essa mesma vogal, sem vibrar suas cordas vocais.

## 6.2 Modelo da Produção da Fala

Os sons da fala, que serão decodificados na forma de palavras, reconhecidas pelo ouvinte, foram produzidos num sistema que foi descrito no capítulo 1, e que agora pode ser modelado de maneira mais precisa.

O modelo aqui adotado corresponde ao diagrama da figura 6.2. Nesse diagrama, observa-se que duas possíveis fontes de sinais de excitação podem ser selecionadas:

- Uma fonte que produz um trem de impulsos, e que é uma primeira aproximação razoável para o sinal imediatamente após as cordas vocais. Essa fonte corresponde essencialmente aos sons que utilizam “vogais”;
- Uma fonte de sinais do tipo “ruído uniforme”, que modela sons que não envolvem a vibração de cordas vocais, tais como as letras [s], [f], [x], [r].

Sons compostos com outras consoantes ([p], [b], [m]), numa primeira abordagem, podem ser entendidos simplesmente como se fossem apenas “transições” entre



sons dos tipos anteriores<sup>1</sup>.

Esses sinais, ao atravessarem o “trato vocal” – que no diagrama da figura 6.2 encontra-se representado por um único sistema dinâmico – são filtrados pela dinâmica do sistema. O espectro do sinal “trem de impulsos” é também um trem de impulsos na frequência. O espectro do sinal “ruído uniforme” é também um “ruído uniforme” na frequência. Assim, o formato do espectro do sinal da fala, correspondente a um desses espectros filtrado pelo trato vocal, será essencialmente determinado pela configuração do trato vocal, no instante da produção do som. À medida em que o trato vocal é colocado em diferentes configurações ao longo do tempo, muda a sua resposta em frequência, sendo mudado o espectro do sinal resultante. Dessa forma, o falante consegue codificar seqüências de informações em sua fala, produzindo as “palavras”, “frases”, etc.

Note-se que a produção da fala envolve essencialmente:

- A produção de sons aproximadamente periódicos<sup>2</sup>, caracterizados por senóides bem definidas neles presentes. Esses sons devem ser sustentados por intervalos de tempo suficientes para que um eventual ouvinte possa reconhecer esses sons;
- A mudança de um som para outro som, feita através da mudança do posicionamento do trato vocal, de forma a codificar outro som que deverá na seqüência também ser reconhecido pelo ouvinte eventual.

Em curtos intervalos, portanto, o som da fala é *quasi-periódico*, enquanto, a longo prazo, esse som pode mudar segundo leis de variação aperiódicas, de formato arbitrário.

### 6.3 Múltiplas Escalas de Tempo

Assim, a estrutura do fenômeno da percepção auditiva envolve duas escalas de tempo. Em uma microescala, se estabelecem fisicamente as ressonâncias no canal do ouvido. Sinais sonoros com determinado padrão se sustentam, dentro dessa escala de tempo, o suficiente para o sinal ser percebido enquanto uma “unidade de significado” pelo ser humano. Nessa escala de tempo, que é da ordem de uma dezena de mili-segundos, durante a maior parte do tempo os sinais serão *quasi-periódicos*, ou seja, obedecerão a um padrão que se parece muito com o de um sinal periódico, ver figuras 6.3 e 6.4. O ouvido humano será capaz, então, de detectar as ressonâncias que permanecerão em locais específicos, dentro do canal auditivo, por tempo suficiente para serem percebidas. O conjunto de ressonâncias associadas a um certo padrão quasi-periódico será identificado como um único som.

---

<sup>1</sup>O leitor com maior interesse no assunto deve ser alertado para o fato de que a descrição aqui adotada é extremamente simplificada, para um fenômeno que possui grande complexidade de detalhes.

<sup>2</sup>Não será discutida, neste texto, a questão dos sons provenientes da fonte de excitação do tipo “ruído”.

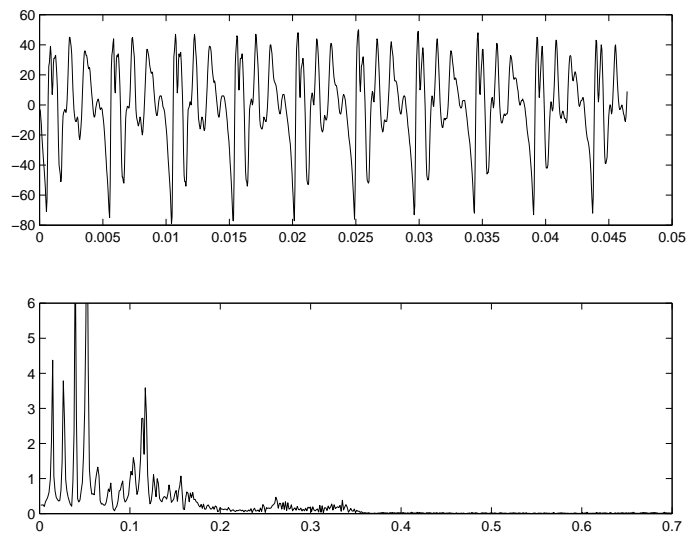


Figura 6.3: Esta figura corresponde a um trecho da figura 6.1. No topo da figura, é mostrado o gráfico do sinal sonoro que corresponde ao som da vogal [a] sendo pronunciada. Em baixo, está mostrado o gráfico do módulo da TDF do sinal (apenas a primeira metade do gráfico é mostrada, sendo omitida a outra metade que é redundante). As senóides identificadas nesse espectro são efetivamente aquelas que causam as ressonâncias, que são percebidas como o sinal sonoro, que é reconhecido como essa vogal.

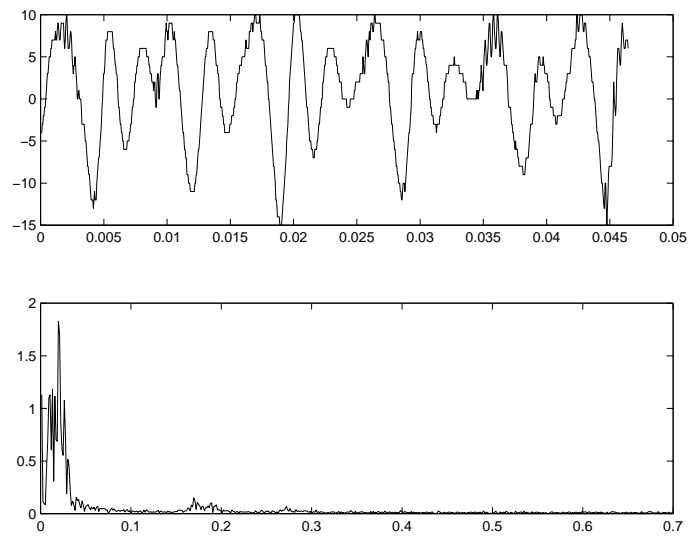


Figura 6.4: Esta figura corresponde a um trecho da figura 6.1. No topo da figura, é mostrado o gráfico do sinal sonoro que corresponde ao som da vogal [i] sendo pronunciada. Em baixo, está mostrado o gráfico do módulo da TDF do sinal (apenas a primeira metade do gráfico é mostrada, sendo omitida a outra metade que é redundante). As senóides identificadas nesse espectro são efetivamente aquelas que causam as ressonâncias que são percebidas como o sinal sonoro, que é reconhecido como essa vogal.

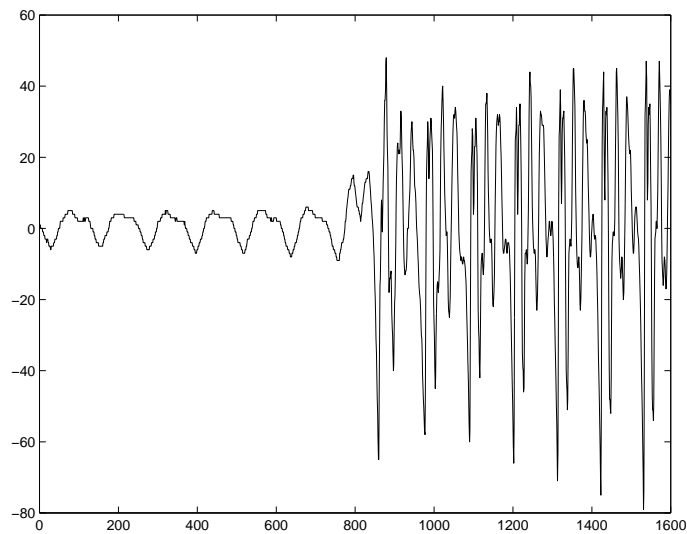


Figura 6.5: A figura mostra o instante em que ocorre a transição entre dois sons diferentes, dentro da mesma palavra mostrada nas figuras 6.1 a 6.4. Nota-se a transição de um padrão bem definido para outro padrão também bem definido de sinal.

Em uma escala maior de tempo, da ordem de um segundo, o ouvido já deverá ser capaz de detetar uma sucessão de sons que ele irá interpretar como sendo diferentes. O ouvido, decodificando esses diferentes sinais que são recebidos em seqüência, deverá identificar cada um, associando-o a um símbolo que ocorre num ponto de uma escala de tempo, que evolui aproximadamente de décimo de segundo a décimo de segundo. A essa seqüência de símbolos se associa a comunicação através da fala. A figura 6.5 mostra o instante da transição entre dois sons diferentes, dentro da mesma palavra. Deve ser notada a mudança de um comportamento quasi-periódico para outro comportamento também quasi-periódico, ambos bastante distintos entre si.

Fica claro então que a análise espectral dos sinais da fala através de TDF deve ser feita para trechos de sinais que duram da ordem de uma dezena de milisegundos. É então necessário, para que a análise seja fisicamente significativa, fazer um procedimento de janelamento do sinal. De fato, a análise espectral a ser realizada, para estar correlacionada com a informação da fala, mimetizando a operação de decodificação do sinal realizada pelo ouvido, deveria envolver uma seqüência de operações de TDF. Cada uma sendo feita sobre uma pequena janela, numa seqüência de janelas, em conjunto elas cobririam toda a extensão do sinal da fala. A figura 6.6 mostra um gráfico em três dimensões, cujos eixos no plano horizontal representam o tempo e a freqüência, e cujo eixo vertical representa o valor do módulo da componente senoidal correspondente àquela freqüência naquele instante.

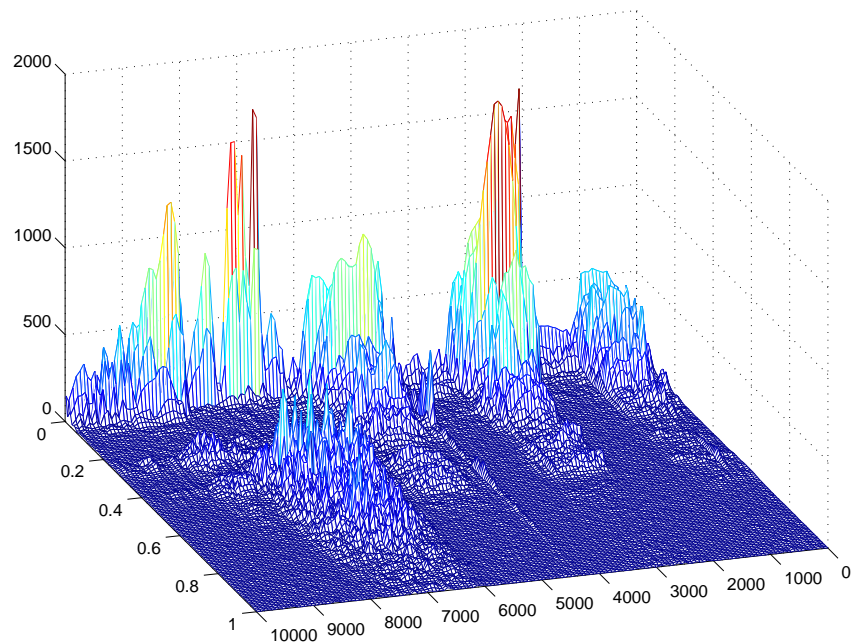


Figura 6.6: A figura mostra um gráfico em três dimensões, cujos eixos no plano horizontal representam o tempo e a frequência, e cujo eixo vertical representa o valor do módulo da componente senoidal correspondente àquela frequência, naquele instante. O gráfico corresponde à análise do mesmo sinal das figuras 6.1 a 6.5, sendo que, cada espectro foi calculado com uma janela de 256 pontos e o valor do tempo correspondente é o do ponto médio da janela.

Esta é a motivação para outro tipo de análise, que irá se basear na TDF: a *análise tempo-freqüência*. Mas isso já seria assunto para outro curso!

# Bibliografia

- [1] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and I. T. Young. *Signals and Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1983.
- [2] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New York, USA, 2nd edition, 1993.