Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas – ICEx
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I - Teste 4 (v1)

Indique a letra correspondente à expressão da reta tangente a cada curva, no ponto P indicado em cada caso.

(1) $y = x^2 \operatorname{sen}(\pi x^2)$, $P = (1, 0)$.

(a) $y = -3x + 3$
(b) $y = -2\,\pi\,x \ + \ 2\,\pi$
(c) $y = \pi x - \pi$
(d) $y = x - 1$
(e) $y = 2x - 2$

Solução:

$y' = 2x \operatorname{sen}(\pi x^2) + x^2 \cos(\pi x^2) 2\pi x$

$y'(1) = 0 + 2\pi = 2\pi$

reta tangente: $y = 2\pi x + b$, $y(1) = 2\pi + b = 0 \quad \Rightarrow \ b = -2\pi$

reta tangente: $y = 2\pi x - 2\pi$

(2) $\cos(\pi xy)\sqrt{xy} + 1 = 0$, $P = (1, 1)$.

(a) $y = 3x - 2$
(b) $y = \pi x - \pi + 1$
(c) $y = x$
(d) $y = 1$
(e) $y = -2x + 3$

Solução:

$-\operatorname{sen}(\pi xy) \cdot \pi(y + xy')\sqrt{xy} + \cos(\pi xy)\frac{1}{2\sqrt{xy}}(y + xy') = 0$

$(x, y) = (1, 1) \ \Rightarrow \ -1 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot (1 + y') = 0 \ \Rightarrow \ y'(1) = -1$

reta tangente: $y = -x + b$, $\quad y(1) = -1 + b = 1 \ \Rightarrow \ b = 2$

reta tangente: $y = -x + 2$

Determine os seguintes limites:

(3) $\lim_{x\to\infty} [\ln(x) - x]$

Solução:

$\lim_{x\to\infty} [\ln(x) - x] \to \infty - \infty$: indeterminação

$$\lim_{x\to\infty} [\ln(x) - x] = \lim_{x\to\infty} x\left[\frac{\ln(x)}{x} - 1\right]$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} \to \frac{\infty}{\infty} \ \Rightarrow \ \text{L'Hôpital}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\therefore \ \lim_{x\to\infty} [\ln(x) - x] = \lim_{x\to\infty} x\left[\frac{\ln(x)}{x} - 1\right] = -\infty$$

(4) $\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(2\pi x)}{e^x}$

Solução:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(2\pi x)}{e^x} = \frac{\operatorname{sen}(2\pi)}{e} = \frac{0}{e} = 0$$

(5) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{15} + 5x^5 + 1}{2x^{17} + 3x^7 - 1}$

Solução:

$$\frac{x^{15} + 5x^5 + 1}{2x^{17} + 3x^7 - 1} = \frac{\frac{x^{15}+5x^5+1}{x^{17}}}{\frac{2x^{17}+3x^7-1}{x^{17}}} = \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^{12}} + \frac{1}{x^{17}}}{2 + \frac{3}{x^{10}} - \frac{1}{x^{17}}}$$

$$\therefore \ \lim_{x\to\infty} \frac{x^{15} + 5x^5 + 1}{2x^{17} + 3x^7 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^{12}} + \frac{1}{x^{17}}}{2 + \frac{3}{x^{10}} - \frac{1}{x^{17}}} = \frac{0+0+0}{2+0-0} = 0$$

(6) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen}^2(x)}$

Solução:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen}^2(x)} \to \frac{0}{0} \ \Rightarrow \text{L'Hôpital}$$

$$\therefore \ \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen}^2(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)} \to \frac{1}{0^+}$$

$$\therefore \ \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen}^2(x)} = +\infty$$