Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas – ICEx
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I - Teste 5 (v1)
Soluções

Questão 1: Considere a função:

$$y = -x^2(x^2 - 1)$$

(a) Esboce o gráfico dessa função, analisando especificamente: (i) os cruzamentos com os eixos coordenados; (ii) os pontos críticos e o crescimento/decrescimento da função; (iii) os pontos de inflexão e a concavidade da função; (iv) o comportamento assintótico (assíntotas verticais e horizontais).

(b) Determine o máximo global e o mínimo global da função no intervalo $x \in [-3, 2]$.

Solução:

(a)

(i) Cruzamentos com os eixos coordenados:
$y = -x^2(x^2 - 1) = -x^4 + x^2$
eixo x: $y = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ ou $x = -1$ ou $x = 1$
eixo y: $x = 0 \;\Rightarrow\; y = 0$

(ii) Pontos críticos e crescimento/decrescimento:
$y' = -4x^3 + 2x = (-2x^2 + 1)2x$
pontos críticos: $y' = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ ou $x = 1/\sqrt{2}$ ou $x = -1/\sqrt{2}$
função crescente: $y' > 0 \;\Rightarrow\; 0 < x < 1/\sqrt{2}$ ou $x < -1/\sqrt{2}$
função decrescente: $y' < 0 \;\Rightarrow\; -1/\sqrt{2} < x < 0$ ou $x > 1/\sqrt{2}$

(iii) pontos de inflexão e concavidade:
$y'' = -12x^2 + 2$
inflexão: $y'' = 0 \;\Rightarrow\; x = -1/\sqrt{6}$ ou $x = 1/\sqrt{6}$
concavidade para cima: $y'' > 0 \;\Rightarrow\; -1/\sqrt{6} < x < 1\sqrt{6}$
concavidade para baixo: $y'' < 0 \;\Rightarrow\; x < -1/\sqrt{6}$ ou $x > 1/\sqrt{6}$

(iv) comportamento assintótico:

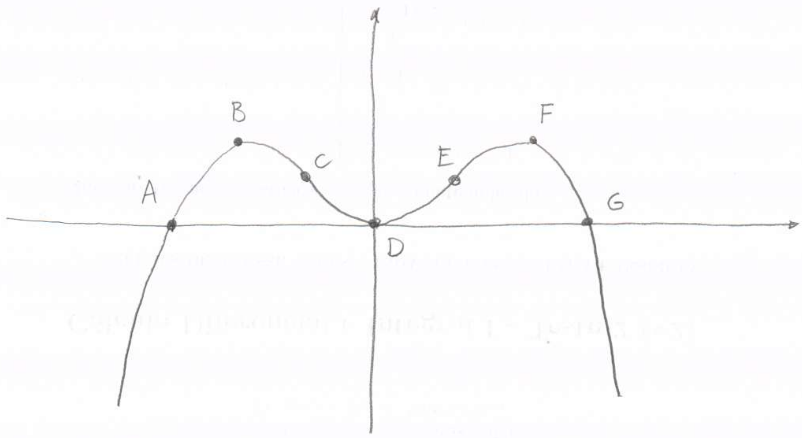
assíntotas verticais: não há, pois o domínio da função é todo o eixo dos reais

assíntotas horizontais:

$\lim_{x\to\infty} y(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$

$\Rightarrow$ não há assíntotas horizontais



$A = (-1, 0)$ $\quad D = (0,0)$ $\quad G = (1, 0)$

$B = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right)$ $\quad E = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{5}{36}\right)$

$C = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{5}{36}\right)$ $\quad F = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right)$

(b)

Pontos candidatos a máximo e mínimo:

Extremos do intervalo:

$x = 2 \ \rightarrow \ y = -12$

$x = -3 \ \rightarrow \ y = -72$

Pontos críticos no interior do intervalo:

$x = 0 \ \rightarrow \ y = 0$

$x = -1/\sqrt{2} \ \rightarrow \ y = 1/4$

$x = 1/\sqrt{2} \ \rightarrow \ y = 1/4$

Então:

pontos de máximo global (dois pontos): $(-1/\sqrt{2}, 1/4)$ e $(1/\sqrt{2}, 1/4)$

ponto de mínimo global: $(-3, -72)$

Questão 2: Considere a função:

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x-3}$$

(a) Esboce o gráfico dessa função, analisando especificamente: (i) os cruzamentos com os eixos coordenados; (ii) os pontos críticos e o crescimento/decrescimento da função; (iii) o comportamento assintótico (assíntotas verticais e horizontais).

(b) Determine o máximo global e o mínimo global da função no intervalo $x \in [-2, 2]$.

Solução:

(a)

(i) Cruzamentos com os eixos coordenados:

$y = \frac{\sqrt{x}}{x-3}$

eixo x: $y = 0 \ \Rightarrow x = 0$

eixo y: $x = 0 \ \Rightarrow \ y = 0$

(ii) Pontos críticos e crescimento/decrescimento:

$y' = \frac{\frac{x-3}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x-3)^2} = \frac{-x-3}{2\sqrt{x}(x-3)^2}$

$-x - 3 = 0$ apenas para $x = -3$, mas $x = -3$ não pertence ao domínio da função. Então, não há ponto crítico.

$y' < 0$ para todo $x > 0$ sendo $x \neq 3$. Então a função é decrescente em todo seu domínio.

(iii) comportamento assintótico:

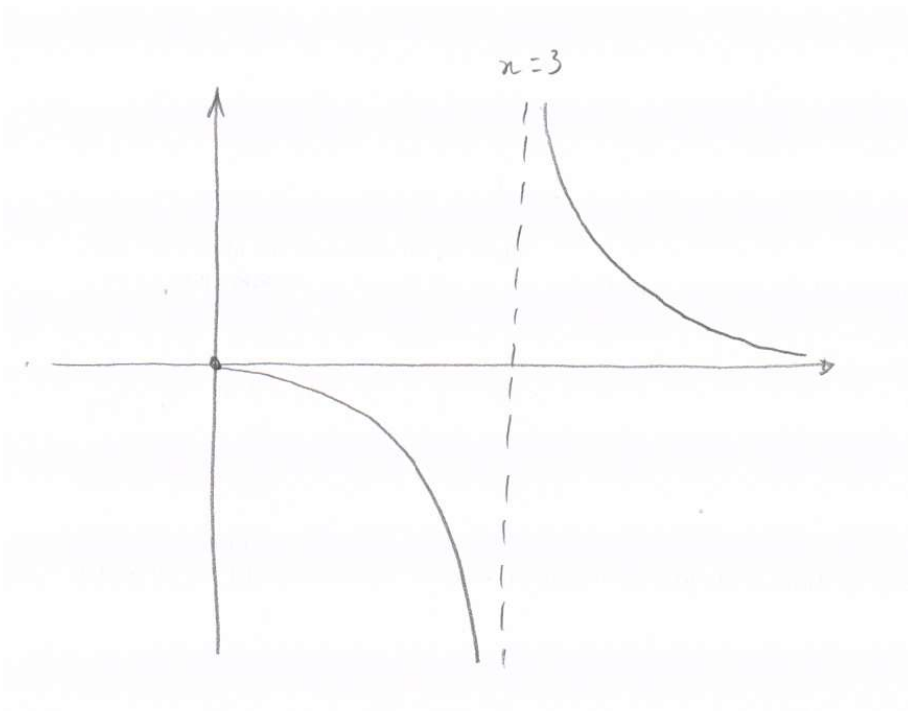
assíntotas verticais: a reta candidata é $x = 3$, pois para esse valor de x o denominador se anula.

verificamos então: $\lim_{x\to 3^+} y(x) = +\infty$, e $\lim_{x \to 3^-} y(x) = -\infty$. Então, $x = 3$ é uma reta assíntota vertical.

assíntotas horizontais:

$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$

então $y = 0$ é uma assíntota horizontal.



(b)

Pontos candidatos a máximo e mínimo:

Extremo superior do intervalo:

$x = 2 \;\Rightarrow\; y = -\sqrt{2}$

Extremo do domínio da função:

$x = 0 \;\Rightarrow\; y = 0$

Então:

máximo global: $(0, 0)$

mínimo global: $(2, -\sqrt{2})$