UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas – ICEx
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I - Teste 5 (v1)
Soluções

Questão 1: Considere a função:

$$y = x^3 + 2x^2 + x$$

(a) Esboce o gráfico dessa função, analisando especificamente: (i) os cruzamentos com os eixos coordenados; (ii) os pontos críticos e o crescimento/decrescimento da função; (iii) os pontos de inflexão e a concavidade da função; (iv) o comportamento assintótico (assíntotas verticais e horizontais).

(b) Determine o máximo global e o mínimo global da função no intervalo $x \in [-2, 2]$.

Solução:

(a)

(i) Cruzamentos com os eixos coordenados:

$y = x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2$

eixo x: $y = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ ou $x = -1$

eixo y: $x = 0 \;\Rightarrow\; y = 0$

(ii) Pontos críticos e crescimento/decrescimento:

$y' = 3x^2 + 4x + 1$

pontos críticos: $y' = 0 \;\Rightarrow\; x = -1/3$ ou $x = -1$

função crescente: $y' > 0 \;\Rightarrow\; x < -1$ ou $x > -1/3$

função decrescente: $y' < 0 \;\Rightarrow\; -1 < x < -1/3$

(iii) pontos de inflexão e concavidade:

$y'' = 6x + 4$

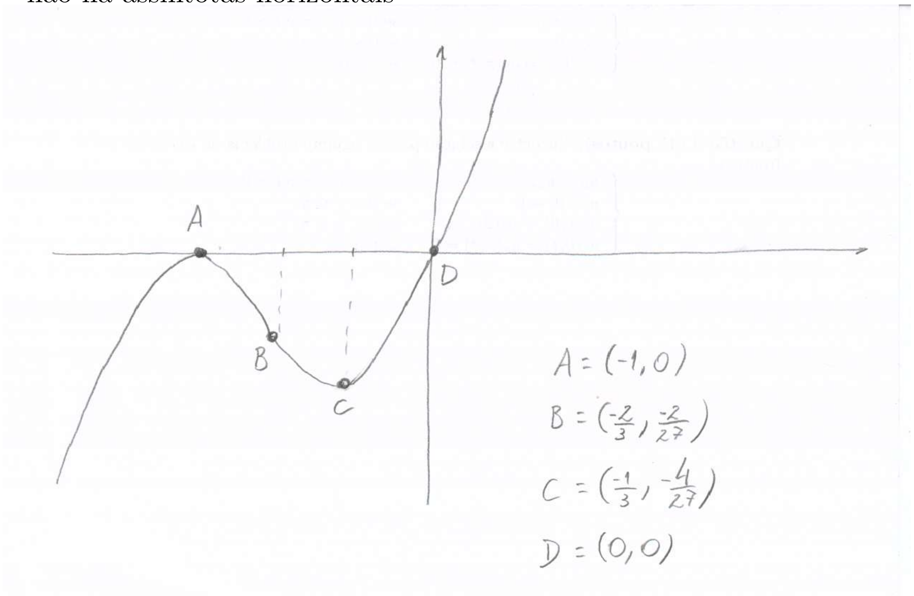
inflexão: $y'' = 0 \;\Rightarrow\; x = -2/3$

concavidade para cima: $y'' > 0 \;\Rightarrow\; x > -2/3$

concavidade para baixo: $y'' < 0 \;\Rightarrow\; x < -2/3$

(iv) comportamento assintótico:

assíntotas verticais: não há, pois o domínio da função é todo o eixo dos reais
assíntotas horizontais:
$\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$
$\lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$
$\Rightarrow$ não há assíntotas horizontais



(b)
Pontos candidatos a máximo e mínimo:
Extremos do intervalo:
$x = 2 \ \rightarrow \ y = 18$
$x = -2 \ \rightarrow \ y = -2$
Pontos críticos no interior do intervalo:
$x = -1 \ \rightarrow \ y = 0$
$x = -1/3 \ \rightarrow \ y = -4/27$
Então:
ponto de máximo global: $(2, 18)$
ponto de mínimo global: $(-2, -2)$

Questão 2: Considere a função:

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(a) Esboce o gráfico dessa função, analisando especificamente: (i) os cruzamentos com os eixos coordenados; (ii) os pontos críticos e o crescimento/decrescimento da função; (iii) o comportamento assintótico (assíntotas verticais e horizontais).

(b) Determine o máximo global e o mínimo global da função no intervalo $x \in [-2, 2]$.

Solução:

(a)

(i) Cruzamentos com os eixos coordenados:

$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

eixo x: $y \neq 0$ para todo $x \;\Rightarrow\;$ o gráfico não cruza o eixo dos x

eixo y: $x = 0 \;\Rightarrow\; y = 1$

(ii) Pontos críticos e crescimento/decrescimento:

$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

ponto crítico: $y' = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$

função crescente: $y' > 0 \;\Rightarrow\; x > 0$

função decrescente: $y' < 0 \;\Rightarrow\; x < 0$

(iii) pontos de inflexão e concavidade:

$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

inflexão: $y'' \neq 0$ para todo x, então não há ponto de inflexão

concavidade para cima: $y'' > 0$ para todo x

(iv) comportamento assintótico:

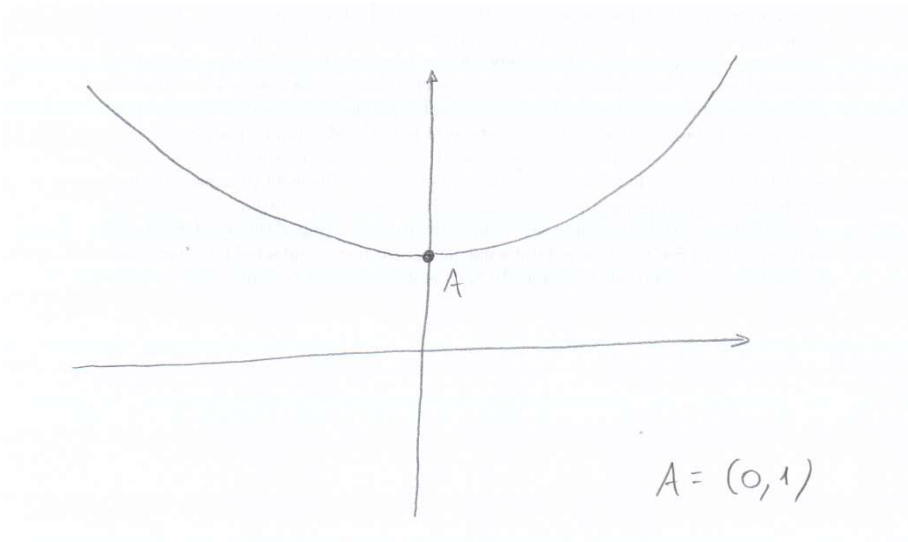
assíntotas verticais: não há, pois o domínio da função é todo o eixo dos reais

assíntotas horizontais:

$\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \infty$

$\Rightarrow$ não há assíntotas horizontais



(b)

Pontos candidatos a máximo e mínimo:

Ponto crítico no interior do intervalo:

$x = 0 \ \rightarrow \ y = 1$

Extremos do intervalo:

$x = 2 \ \rightarrow \ y = \frac{e^2+e^{-2}}{2} > 1$

$x = -2 \ \rightarrow \ y = \frac{e^2+e^{-2}}{2} > 1$

Então:

dois pontos de máximo global: $(2, w)$ e $(-2, w)$

onde $w = \frac{e^2+e^{-2}}{2}$

ponto de mínimo global: $(0, 1)$