Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas – ICEx
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I - Teste 7 (v1)

Soluções do Teste

Questão 1: Calcule a área da região fechada delimitada pelas curvas:

$$y = 2 \qquad y = x^2 - x$$

Solução:
Pontos de interseção das curvas: $x^2 - x = 2 \;\therefore\; x = 2$ ou $x = -1$.
Qual curva fica acima da outra entre os pontos de interseção? Resposta: $y = 2$ fica acima de $y = x^2 - x$, pois o gráfico da última é uma parábola com concavidade para cima.
Área: $A = \int_{-1}^{2}(2 - x^2 + x)\,dx = (2x + x^2/2 - x^3/3)|_{-1}^{2} = (4 + 2 - 8/3) - (-2 + 1/2 + 1/3) = 9/2$

Questão 2: Calcule o volume do sólido de revolução obtido com a rotação em torno do eixo x da área da região fechada delimitada pelas curvas:

$$y = \sqrt{x} \qquad y = x^2$$

Solução:
Pontos de interseção: $x = 0$ e $x = 1$.
Posição relativa das curvas: $\sqrt{x} > x^2$ para todo x pertencente ao intervalo $0 < x < 1$. Então:

$$V = \int_0^1 \pi(\sqrt{x})^2\,dx - \int_0^1 \pi(x^2)^2\,dx = \frac{\pi}{2}x^2|_0^1 - \frac{\pi}{5}x^5|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}$$

Questão 3: Calcule o volume do sólido de revolução obtido com a rotação em torno do eixo y da área delimitada pelas curvas:

$$y = \sqrt{x} \qquad y = -\sqrt{x} \qquad x = 1$$

Solução:
A área é delimitada quando x varia no intervalo: $0 \leq x \leq 1$. Isso ocorre quando y varia no intervalo: $0 \leq y \leq 1$, na função $y = \sqrt{x}$, e $-1 \leq y \leq 0$,

na função $y = -\sqrt{x}$.
Em termos da variável y, ambas as funções ficam: $x = y^2$.
Então: $V = \displaystyle\int_{-1}^{1} \pi (y^2)^2 \, dy = \frac{\pi}{5} y^5 |_{-1}^{1} = \frac{2\pi}{5}$